

Маятник Уилберфорса

*Секция фундаментальной и
теоретической физики*

Авторы:

Наркевич Григорий Эдуардович,
лицей БНТУ, 11"А" класс,
ул. Жудро, д.21, кв.25,
+375-29-614-38-93

Шишко Тимофей Александрович,
лицей БНТУ, 11"А" класс,
ул. Тимошенко, д.10, кв.116,
+375-29-394-54-99

Научные руководители:

Очеретняя Ольга Павловна,
лицей БНТУ,
учитель математики,
тел. моб. +375-29-620-82-58

Соколова Светлана Николаевна,
лицей БНТУ,
учитель физики высшей
квалификационной категории,
тел. моб. +375-29-392-64-66

Содержание

Аннотация	3
Введение	3
Цель работы	3
Задачи работы.....	3
Актуальность	3
Основные методы исследования	4
Постановка исследования	4
Основные определения и обозначения, используемые в исследовании	5
Основная часть	6
I. Качественное описание	6
II. Теоретическое описание	6
III. Экспериментальная часть	9
IV. Сравнение теории с практикой	9
Основные результаты	12
Заключение	12
Библиографический список	12
Приложение №1	13
Приложение №2	15
Приложение №3	17

Аннотация:

Маятник Уилберфорса, изобретенный британским физиком Лайонелом Робертом Уилберфорсом около 1896 года, состоит из груза, подвешенного на длинной винтовой пружине и свободно вращающейся вокруг своей вертикальной оси, закручивая пружину. Маятник является связным механическим осциллятором: груз может совершать как вертикальные (продольные) колебаний вверх и вниз на пружине, так и вращательные (крутильные) колебания вокруг своей вертикальной. При правильной настройке и приведении в движение маятник демонстрирует любопытное движение, в ходе которого периоды чисто вращательных колебаний постепенно чередуются с периодами чисто восходящих и нисходящих колебаний, а также при резком увеличении амплитуды тех или иных колебаний наблюдается явление резонанса. В данном исследовании мы приводим теоретическую модель, описывающую движения маятника в зависимости от времени и его параметров, а также сопоставляем теоретические результаты с полученными экспериментально.

Введение:

Цель работы.

Получить уравнения, описывающие движение маятника Уилберфорса в зависимости от времени и его параметров.

Задачи работы:

1. Построение целостного качественного описания исследуемого явления, где с точки зрения законов физики объясняется природа явления.
2. Создание теоретической модели, математически описывающей поведение реального маятника в зависимости от влияющих параметров.
3. Построить экспериментальную часть, в ходе которой рассматривается поведение реального маятника Уилберфорса.
4. Сравнение практических данных с данными, полученными с помощью построенного теоретического описания поведения маятника Уилберфорса.

Актуальность работы:

Как известно, с момента первых научных исследований маятником Галилеем около 1602 года, явление колебаний маятников различных видов использовалось в хронометрии. Маятниковые устройства долгое время (до 1930-х) оставались самыми точными хронометрическими приспособлениями. Маятники также используются в научных приборах, таких как акселерометры и сейсмометры. Исторически они также применялись в качестве гравиметров для измерения ускорения силы тяжести в рамках геофизических исследований. Результаты, полученные в данной работе, могут найти свое применение в перечисленных отраслях человеческой деятельности. Более того, учитывая факт того, что в поведении маятника Уилберфорса наблюдаются как вращательные, так и продольные колебания, обусловленные перераспределением энергии в системе, применение маятника Уилберфорса для создания измерительных приборов будет отличаться большей точностью и надежностью.

Основные методы исследования:

В исследовании использованы основные методы лагранжевой механики и математического анализа.

Постановка исследования:

Маятник Уилберфорса представляет собой пружину с подвешенным на ней грузом. Груз на пружине может как качаться вверх-вниз, так и вращаться вокруг вертикальной оси. Исследуйте поведение такого маятника и как оно зависит от существенных параметров.

Основные определения и обозначения, используемые в исследовании:

L – Функция Лагранжа (Лагранжиана) динамической системы, описывающий ее развитие.

K – Кинетическая энергия динамической системы.

U – Потенциальная энергия динамической системы.

m – масса груза. x – продольная деформация пружины.

φ – вращательная деформация пружины (угловое смещение).

I – момент инерции груза.

k – коэффициент продольной деформации пружины.

δ – коэффициент вращательной (крутильной) деформации пружины.

ϵ – коэффициент связной деформации пружины.

\vec{r} – радиус-вектор материальной точки (груза).

ω – циклическая частота колебаний системы.

ω_x – циклическая частота продольных колебаний.

ω_φ – циклическая частота вращательных колебаний.

A_x – амплитуда продольных колебаний.

A_φ – амплитуда вращательных колебаний.

ϕ – фаза колебаний системы.

ϕ_x – фаза продольных колебаний.

ϕ_φ – фаза вращательных колебаний.

d – толщина проволоки пружины.

n – число витков пружины.

R – радиус пружины.

$G = 8,1 \cdot 10^{10}$ – модуль сдвига.

$\sigma = 0,23$ – коэффициент Пуассона материала пружины.

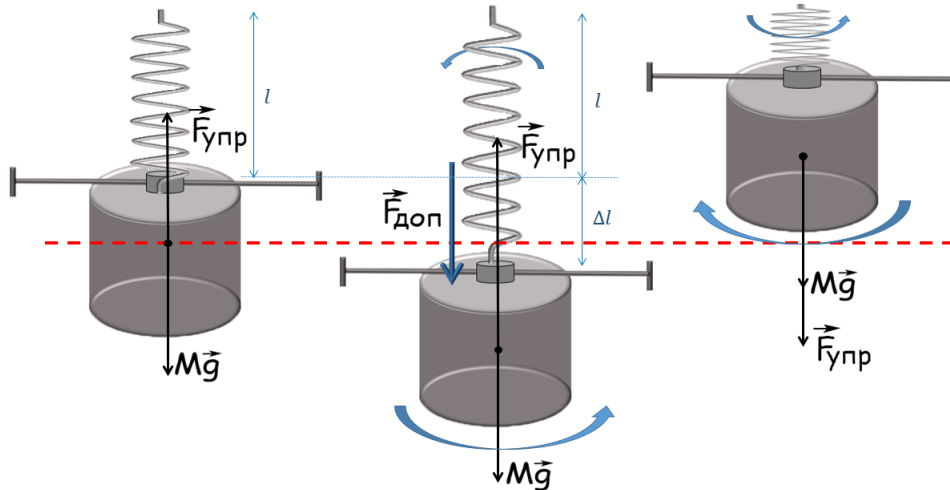
$\angle \alpha$ – угол поворота деформированной пружины.

h – шаг пружины.

Основная часть:

I. Качественное описание.

В начальный момент времени груз, подвешенный на пружине, находится в состоянии равновесия. Действие внешней силы на систему влечет за собой появление одновременно продольной и крутильной деформации пружины.



При вертикальном движении груза пружина попеременно то растягивается и раскручивается, то сжимается и закручивается. И наоборот, при растяжении или раскручивании пружины груз поворачивается, а значит длина пружины снова будет меняться. За счет этого происходит постепенное перераспределение энергии в системе, чередующийся переход энергии вращательных колебаний в энергию продольных колебаний и наоборот. При таком перераспределении происходит резкое увеличение амплитуды продольных или же крутильных колебаний следом достижение максимального ее значения. Такая ситуация называется резонансом системы (*Приложение №1, рис. №1,2*). В нашем случае колебательный спектр системы состоит из двух собственных спиральных частот колебаний системы, в свою очередь содержит в себе как вертикальное, так и вращательное движение.

II. Теоретическое описание.

Для описания поведения маятника Уилберфорса воспользуемся элементами лагранжевой механики. Рассмотрим Лагранжиан системы:

$$L = K - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{\delta\varphi^2}{2} - \frac{\epsilon x\varphi}{2} \quad (1)$$

где

$\frac{m\dot{x}^2}{2}$ – кинетическая энергия продольного движения.

$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения.

$\frac{kx^2}{2}$ – потенциальная энергия продольного движения (энергия упругой деформации).

$\frac{\delta\varphi^2}{2}$ – потенциальная энергия вращательного движения (энергия вращательной деформации).

$\frac{\epsilon x\varphi}{2}$ – потенциальная энергия связной деформации.

В выражении (1) за счет взаимодействия крутильной и продольной деформации из-за спиралевидной формы пружины, а также изменения радиуса пружины при растяжении и сжатии, появляется пятый член – потенциальная энергия связанной деформации. Этот член связи объясняет тот факт, что энергия в вертикальном направлении зависит от энергии во вращательном направлении и наоборот, где величина этого эффекта является зависит от свойств пружины.

Рассмотрим общий вид уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (2)$$

В проекциях относительно двух степеней свободы уравнение (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Продифференцируем по частным производным Лагранжиана по угловой и линейной скоростям:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d(m\dot{x})}{dt} = m\ddot{x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\ddot{\varphi} \end{cases} \quad (4)$$

Далее продифференцируем по угловому и продольному смещениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -kx - \frac{\epsilon\varphi}{2} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\delta\varphi - \frac{\epsilon x}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Преобразуем с учетом выражений (4) и (5) уравнения системы (3). Полученные два неоднородных дифференциальных уравнения второго порядка описывают полное движение системы.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx + \frac{\epsilon\varphi}{2} = 0 \\ I\ddot{\varphi} + \delta\varphi + \frac{\epsilon x}{2} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Как известно, решениями дифференциальных уравнений системы (6) являются следующие функции зависимости продольного и углового смещений от времени:

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega t + \phi) \\ \varphi(t) = A_\varphi \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (7)$$

Заметим при этом, что система может колебаться с разными амплитудами A_x и A_φ в продольном и вращательном направлении соответственно. Вычислим вторые производные функций системы (7):

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2} (A_x \cos(\omega t + \phi)) = -A_x \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{\varphi}(t) = \frac{d^2}{dt^2} (A_\varphi \cos(\omega t + \phi)) = -A_\varphi \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (8)$$

Подставив в уравнения системы (6) уравнения системы (8), имеем:

$$\begin{cases} m(-A_x \omega^2 \cos(\omega t + \phi)) + kA_x \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}\epsilon A_\varphi \cos(\omega t + \phi) = 0 \\ I(-A_\varphi \omega^2 \cos(\omega t + \phi)) + \delta A_\varphi \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}\epsilon A_x \cos(\omega t + \phi) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Преобразуем уравнения системы (9), учитывая уравнения циклических частот продольных и вращательных колебаний системы:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon}{2I} A_x + (\omega_\varphi^2 - \omega^2) A_\varphi = 0 \\ (\omega_x^2 - \omega^2) A_x + \frac{\epsilon}{2m} A_\varphi = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Тривиальным решением системы (10) являются следующие значения амплитуд:

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_\varphi = 0 \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Поскольку данное решение описывает лишь неподвижную систему, далее найдем нетривиальные решения системы (10), приравняв определитель матрицы коэффициентов при неизвестных в данной системе нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\epsilon}{2I} & \omega_\varphi^2 - \omega^2 \\ \omega_x^2 - \omega^2 & \frac{\epsilon}{2m} \end{vmatrix} = 0 \implies \frac{\epsilon^2}{2mI} + \omega^2(\omega_x^2 + \omega_\varphi^2) - \omega_x^2\omega_\varphi^2 - \omega^4 = 0 \quad (11)$$

Решая уравнение (11) относительно ω^2 , получаем:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_\varphi^2 + \sqrt{(\omega_\varphi^2 - \omega_x^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}}) \quad (12)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_\varphi^2 - \sqrt{(\omega_\varphi^2 - \omega_x^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}}) \quad (13)$$

В резонансных условиях собственные частоты системы (в продольном и вращательном направлениях) равны. Тогда, воспользовавшись свойством $\omega_x = \omega_\varphi = \omega$, уравнения (12) и (13) можно свести к следующим:

$$\omega_1 = \frac{\epsilon}{2\sqrt{mI}} + \omega^2 \quad (14)$$

$$\omega_2 = \omega^2 - \frac{\epsilon}{2\sqrt{mI}} \quad (15)$$

Далее, из системы (10) получаем соотношения амплитуд:

$$\begin{cases} \frac{A_\varphi}{A_x} = \sqrt{\frac{m}{I}} = r_1 \\ \frac{A_\varphi}{A_x} = -\sqrt{\frac{m}{I}} = r_2 \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, вектора амплитуд могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_x^{(1)} \\ A_\varphi^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^{(1)} \\ r_1 A_x^{(1)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_x^{(2)} \\ A_\varphi^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^{(2)} \\ r_2 A_x^{(2)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

где

$A_x^{(1)}, A_x^{(2)}$ – амплитуды вертикальных колебаний на 1-ой и 2-ой нормальных частотах.

$A_\varphi^{(1)} = r_1 A_x^{(1)}, A_\varphi^{(2)} = r_2 A_x^{(2)}$ – амплитуды вращательных колебаний на 1-ой и 2-ой нормальных частотах.

Решения уравнений движения можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ \varphi^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 A_x^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x^{(2)}(t) \\ \varphi^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 A_x^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{bmatrix} \quad (20)$$

С другой стороны, уравнения движения маятника можно записать в виде линейной комбинации нормальных режимов колебаний системы:

$$\begin{cases} x(t) = A_x^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_x^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \varphi(t) = r_1 A_x^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 A_x^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad (21)$$

Выразим амплитуды колебаний, решив систему уравнений движения в начальный момент времени:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 = -\omega_x A_x^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_\varphi A_x^{(1)} \sin \phi_2 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 = -r_1 \omega_x A_x^{(1)} \sin \phi_1 - r_2 \omega_\varphi A_x^{(2)} \sin \phi_2 \end{cases} \implies \begin{cases} A_x^{(1)} = \frac{r_1 \varphi_0 + x_0}{r_1 - r_2} \\ A_x^{(2)} = \frac{r_1 \varphi_0 - x_0}{r_1 - r_2} \end{cases}, \phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (22)$$

Теперь, подставив уравнения амплитуд из системы (22) в уравнения движения системы (21), получаем полные уравнения движения маятника:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{(\sqrt{\frac{m}{I}} \varphi_0 + x_0) \cos \omega_1 t + (\sqrt{\frac{m}{I}} \varphi_0 - x_0) \cos \omega_2 t}{2\sqrt{\frac{m}{I}}} \\ \varphi(t) = \frac{(\sqrt{\frac{m}{I}} \varphi_0 + x_0) \cos \omega_1 t - (\sqrt{\frac{m}{I}} \varphi_0 - x_0) \cos \omega_2 t}{2} \end{cases} \quad (23)$$

Таким образом, параметрами, влияющими на поведение маятника, являются масса груза, продольная и крутильная жесткости пружины, а также начальные условия запуска маятника.

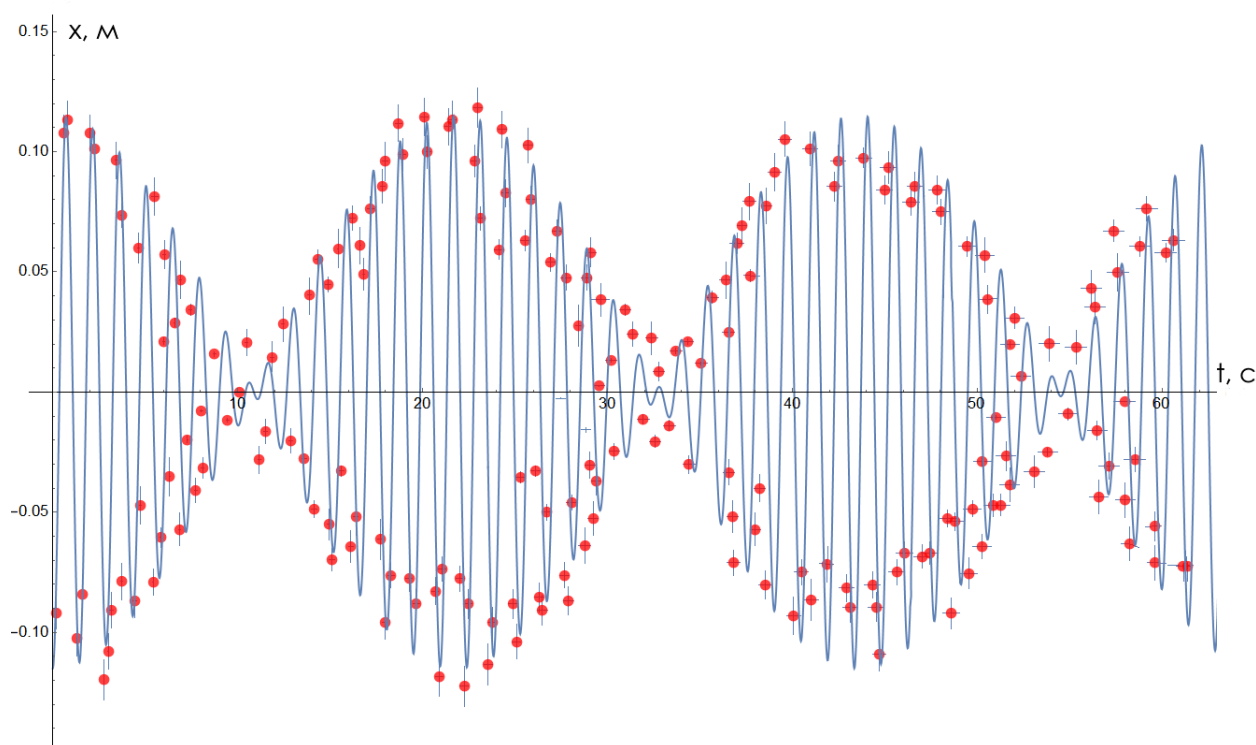
III. Экспериментальная часть.

Наша экспериментальная установка представляла собой груз, подвешенный на пружине, которая, в свою очередь, крепилась к штативу (*Приложение №1, рис. №3*). Для уменьшения погрешности, появляющейся при запуске установки от руки, было использовано специальное пусковое устройство, состоящее из электромагнита. При замыкании цепи электромагнита устройство притягивает груз, при размыкании происходит запуск системы (*Приложение №1, рис. №4*). Характеристики использованной установки приводятся в *Приложении №3*.

IV. Сравнение теории с практикой.

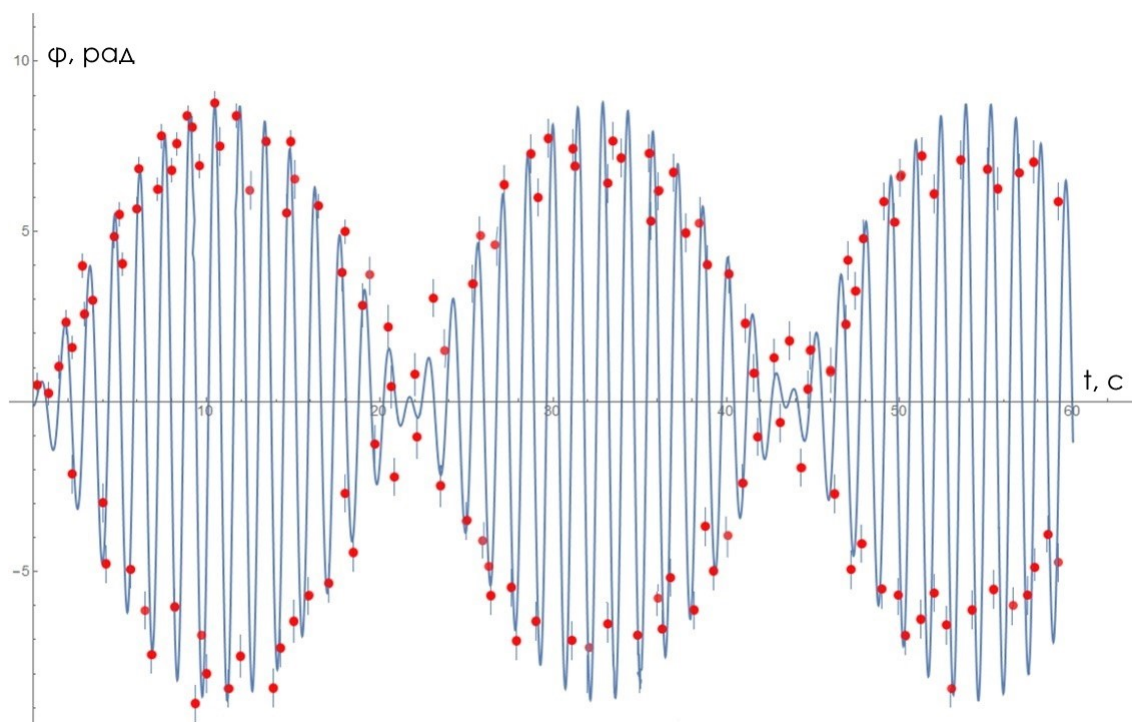
Теперь перейдем к сравнению полученных на практике данных с данными, полученными с помощью построенного теоретического описания поведения маятника Уилберфорса. Для этого прибегнем к использованию графиков зависимости величин. Все экспериментальные значения величин были получены с помощью компьютерной программы *Logger Pro*, где проводились снятия данных с видеозаписей экспериментов.



Зависимость продольного смещения от времени, $m = 432.5 \text{ г} = \text{const.}$



- x – продольное смещение;
- t – время колебаний;
- — теоретическая кривая;
- — экспериментальные точки.

Зависимость крутильного смещения от времени, $m = 432.5 \text{ г} = \text{const.}$



- φ – крутильное смещение;
- t – время колебаний;
-  – теоретическая кривая;
-  – экспериментальные точки.

Таким образом, пользуясь построенными графиками зависимостей и полученными экспериментальными данными (*Приложение 2, рис. 1-4*), мы показали, что представленная нами теоретическая модель подтверждается эмпирически.

Основные результаты:

При исследовании данной задачи получены следующие основные результаты:

1. Было проведено качественное описание явления, где с точки зрения законов физики объясняется его природа.
2. При создании теоретической модели были выведены уравнения, описывающие поведение маятника Уилберфорса в заданный момент времени в зависимости от параметров маятника.
3. Изготовлена экспериментальная установка, с помощью которой был проеден ряд экспериментов.
4. Проведено сравнение практических результатов с данными, полученными с помощью построенного теоретического описания поведения маятника Уилберфорса.

Заключение:

В нашей работе было проведено исследование поведения маятника Уилберфорса, а также создание теоретического описания его поведения в зависимости от параметров маятника. В работе была построена теоретическая модель, основанная на элементах лагранжевой механики. В исследовании были получены уравнения, которые определяют вращательную и вертикальную координаты маятника в искомый момент времени после запуска. Также были перечислены параметры маятника, влияющие на его поведение.

В ходе исследования была изготовлена экспериментальная установка, представляющая собой груз, подвешенный на пружине, которая, в свою очередь, крепилась к штативу. Для уменьшения погрешности, появляющейся при запуске установке от руки, было использовано специальное пусковое устройство, состоящее из электромагнита. При замыкании цепи электромагнита устройство притягивает груз, при размыкании происходит запуск системы.

Также в исследовании было проведено сравнение теоретических результатов и экспериментальными, которые были получены при помощи изготовленной экспериментальной установки. В работе были представлены графики зависимостей крутильного и продольного смещения от времени, а также циклической частоты продольных и крутильных колебаний от массы грузов и жесткостей пружин. В итоге было получено экспериментальное подтверждение представленного теоретического описания.

Библиографический список.

- [1] Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — Издание 5-е, стереотипное. — М.: Физматлит, 2004. — 224 с. — («Теоретическая физика», том I).
- [3] Basic Coupled Oscillator Theory Applied to the Wilberforce Pendulum, Misay A. Partnof and Steven C. Richards, May 4, 2004.

Приложение №1. Иллюстративная часть.

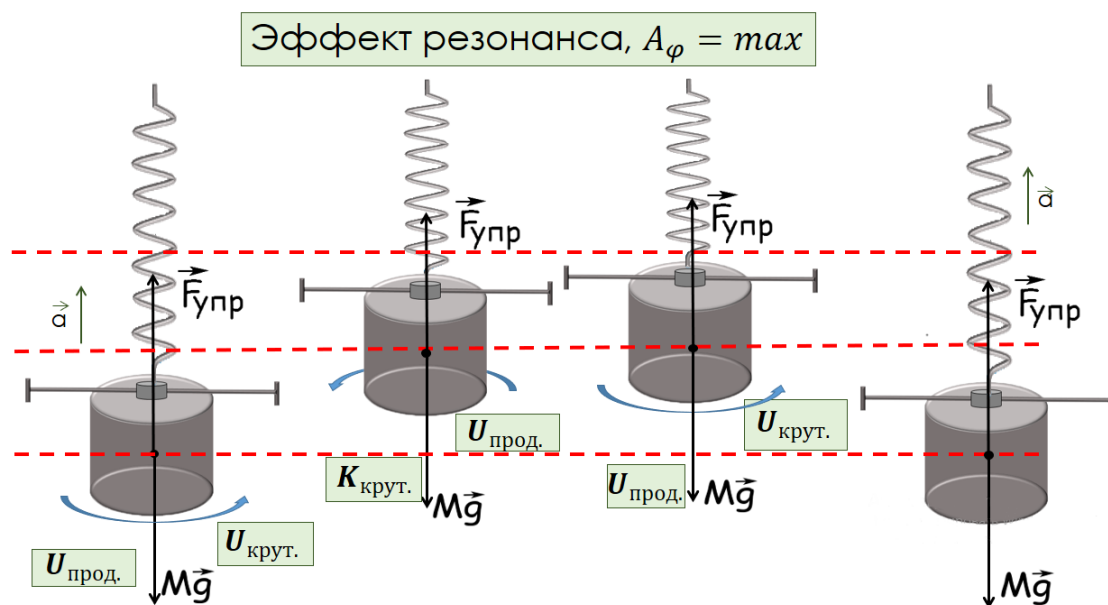


Рис. №1. Схема достижения резонанса системы при максимальном значении амплитуды крутильных колебаний.

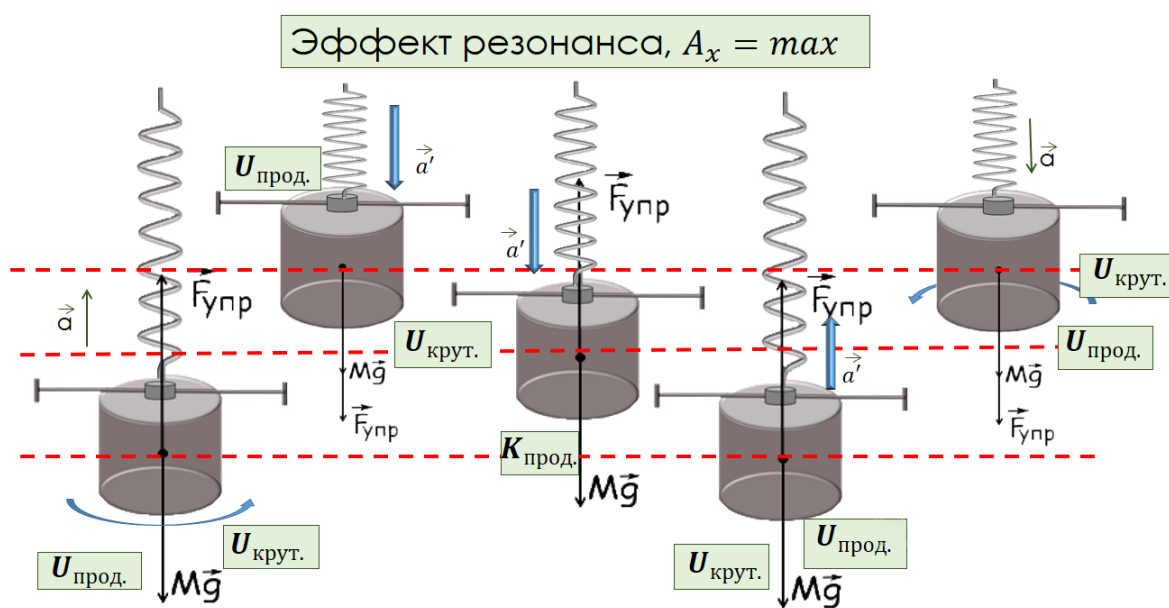


Рис. №2. Схема достижения резонанса системы при максимальном значении амплитуды продольных колебаний.

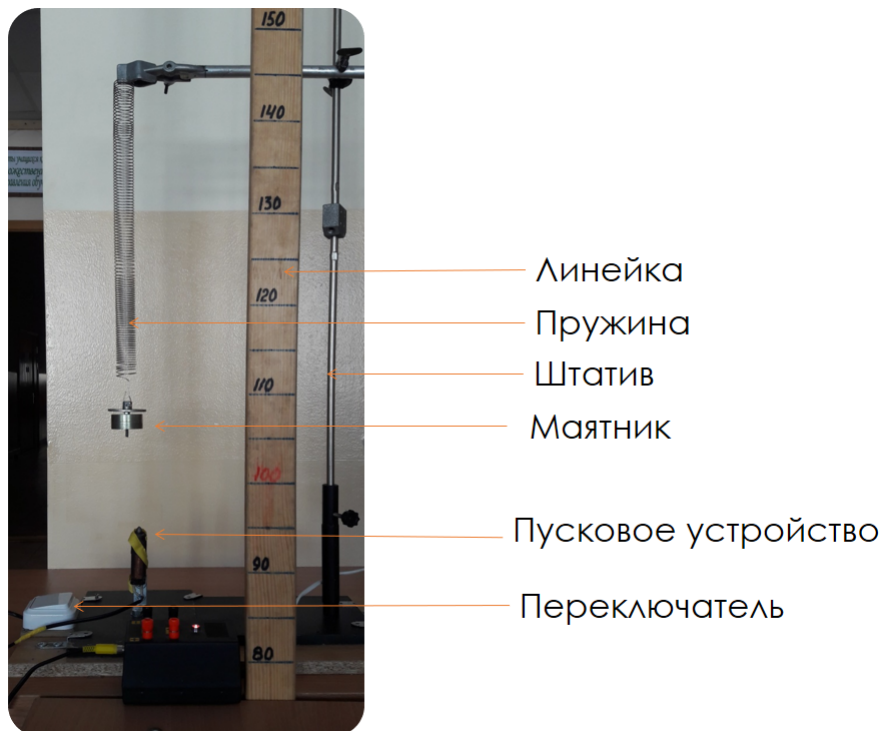


Рис. №3. Экспериментальная установка и ее элементы

В подвешенном состоянии



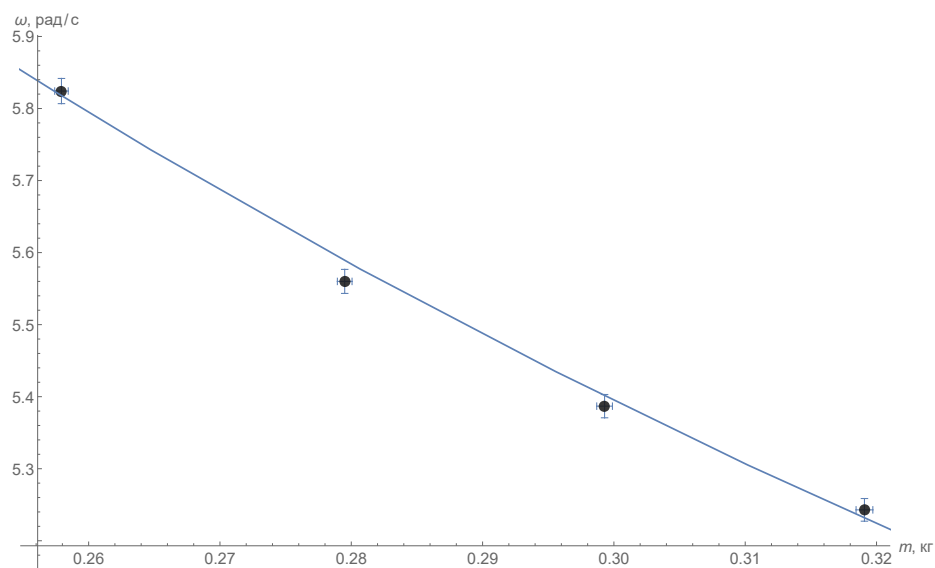
В закрепленном состоянии



Рис. №4. Маятник, находящийся в состоянии покоя и готовый к запуску

Приложение №2. Графики зависимостей величин.

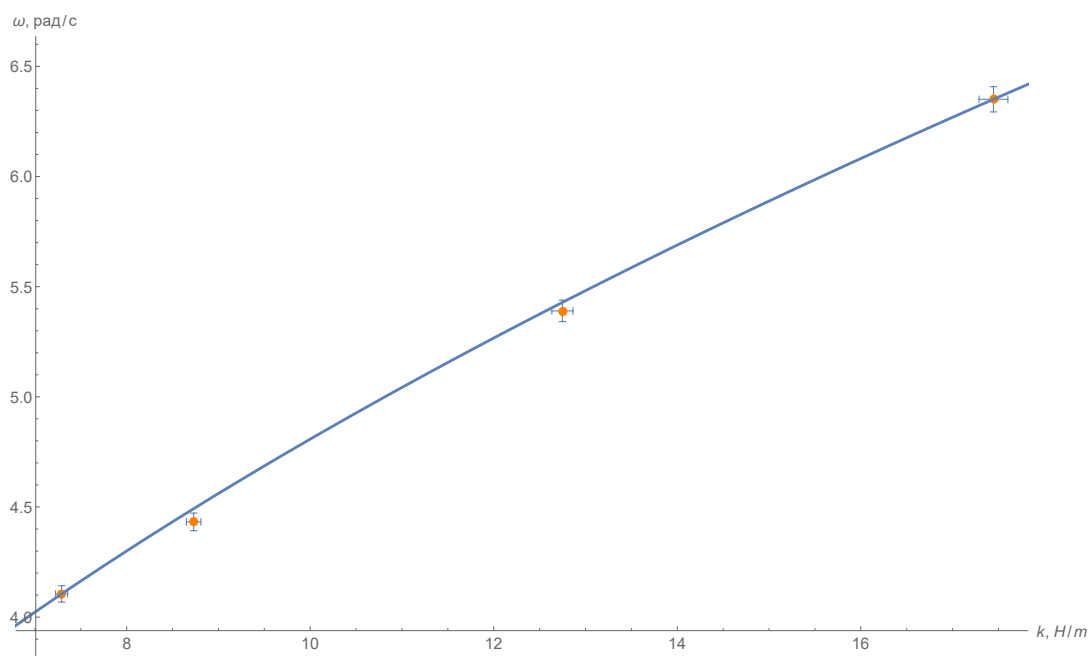
Рис. №1. Зависимость циклической частоты продольных колебаний от массы грузиков.



$$\omega_x = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_x \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$$

- m – масса грузиков;
- ω_x – циклическая частота продольных колебаний.

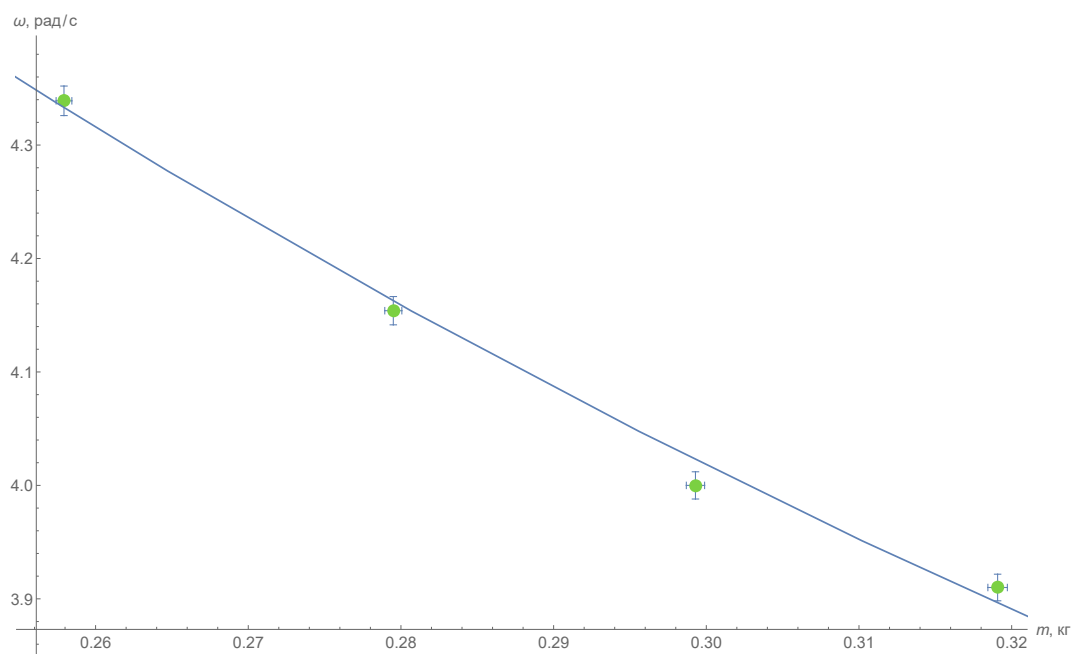
Рис. №2. Зависимость циклической частоты продольных колебаний от жесткости пружины.



$$\omega_x = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_x \sim \sqrt{k}$$

- k – продольная жесткость пружины;
- ω_x – циклическая частота продольных колебаний.

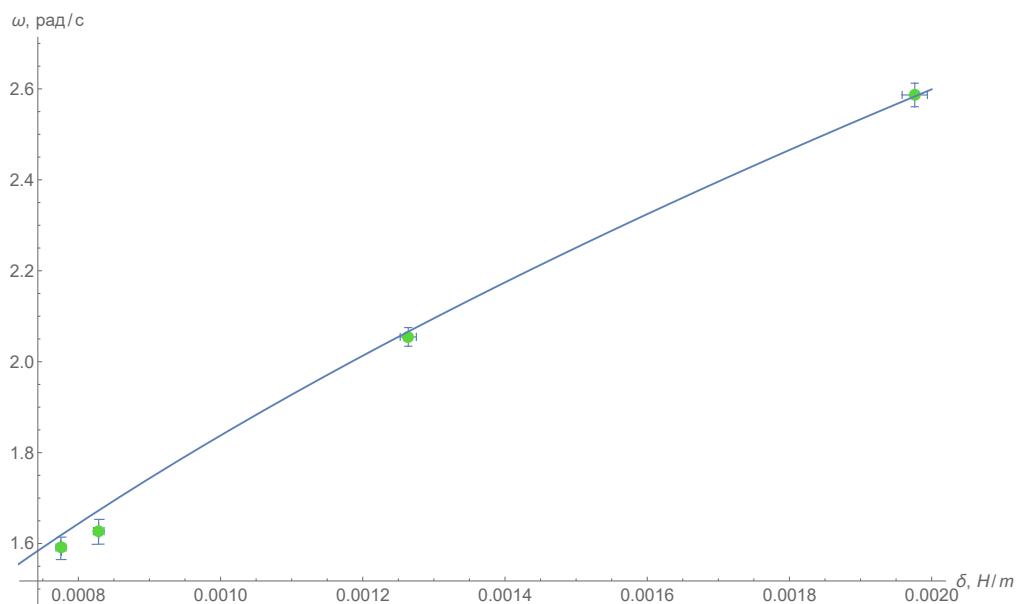
Рис. №3. Зависимость циклической частоты вращательных колебаний от массы грузиков.



$$\omega_{\varphi} = \sqrt{\frac{\delta}{I}} = \sqrt{\frac{2\delta}{mr^2}} \Rightarrow \omega_{\varphi} \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$$

- m – масса груза;
- ω_{φ} – циклическая частота вращательных колебаний.

Рис. №4. Зависимость циклической частоты вращательных колебаний от крутильной жесткости пружины.



$$\omega_{\varphi} = \sqrt{\frac{\delta}{I}} = \sqrt{\frac{2\delta}{mr^2}} \Rightarrow \omega_{\varphi} \sim \sqrt{\delta}$$

- δ – крутильная жесткость пружины;
- ω_{φ} – циклическая частота вращательных колебаний.

Приложение №3. Характеристические данные использованных пружин и расчет погрешностей.

Таблица №1. Характеристики использованных пружин.

	Пружина 1	Пружина 2	Пружина 3	Пружина 4
$R, \text{ м}$	0.0111	0.01175	0.0096	0.0105
$l, \text{ м}$	0.1064	0.107	0.0979	101
$d, \text{ м}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
n	106	107	82	94
$h, \text{ м}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$
$\sin \alpha$	$4.30148 \cdot 10^{-2}$	$4.30148 \cdot 10^{-2}$	$5.80252 \cdot 10^{-2}$	$5.24807 \cdot 10^{-2}$
$\delta, \text{ Н} \cdot \text{ м/рад}^2$	$8.287181 \cdot 10^{-4}$	$7.755576 \cdot 10^{-4}$	$1.976294 \cdot 10^{-3}$	$1.264578 \cdot 10^{-3}$
$\epsilon, \text{ Н/рад}^2$	$1.9157 \cdot 10^{-3}$	$1.6936 \cdot 10^{-3}$	$4.4626 \cdot 10^{-3}$	$3.1857 \cdot 10^{-3}$
$k, \text{ Н/м}$	8.7303	7.2913	17.4452	12.7248

Таблица №2. Расчет погрешностей величин.

	$\Delta_{\text{и}}$	$\Delta_{\text{о}}$	$\Delta = \Delta_{\text{и}} + \Delta_{\text{о}}$
Вертикальное смещение, мм	0.5	0.25	0.75
Крутильное смещение, рад	0.095	0.0174	0.1124
Циклическая частота, рад/с	0.045	0.005	0.05
Время колебаний, с	0.05	0.05	0.1
Масса груза, кг	0.008	0.05	0.058
Жесткость пружины, Н/м	1.55	0.5	2.05