Équations de récurrence d'ordre 1

Théorème: Caractérisation des (ERH1)

L'ensemble des solutions de l'équation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$
Est la droite vectorielle des suites géométriques de raison a

$$\left\{(\lambda a^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\right\} = \text{Vect}\left\{(a^n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$$

Démonstration:
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions
Soit $u \in \mathcal{S}$ fq.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n &\implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0 \\ &\implies u = u_0(a^n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\implies u \in \text{Vect}\left\{(a^n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}\end{aligned}$$

Réciproquement, l'ensemble des suites géométriques de raison a est solution de l'équation homogène.

Théorème: Résolution avec second membre

L'ensemble des solutions de l'équation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + v_n$
Est la droite affine

$$\left\{w + \lambda(a^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

Posons w la suite définie par

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + v_n \end{cases}$$

w est "évidemment solution de particulière de l'équation"

> Maintenant que nous disposons d'une solution particulière, et ayant observé que l'équation est linéaire, mettons en œuvre l'artillerie classique pour exprimer l'ensemble des solutions par l'habituelle technique.

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + v_n &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - a u_n = v_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - a u_n = w_{n+1} - a w_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u-w)_{n+1} = a(u-w)_n \\
&\iff u - w \in \operatorname{Vect}\left\{(a^n)_{n\in\mathbb{N}}\right\} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : u - w = \lambda (a^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n + \lambda a^n \\
&\iff u \in \left\{(w_n + \lambda a^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\right\}
\end{aligned}
$$