# Семинар 11. Евклидовы пространства. Сопряженное преобразование.

Решим пару примеров на пройденные темы.

**Пример 1**

Может ли данная матрица быть матрицей Грама?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

Вспомним из семинара 10 свойства матрицы Грама.

- Симметричность
- Положительная определённость

Наша матрица симметрична, проверим на положительную определенность.

$M_1 = 1 \geqslant 0$

$M_2 = -3 \leqslant 0$

Матрица не положительно определена $\Rightarrow$ не матрица Грама.

**Пример 2**

Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a}(1 \quad 0 -2 \quad 2)^T$ на $U : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \quad \Gamma = E$.

*Решение:*

Можно записать $U$ как

$$U(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1|0) \qquad U : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$U^{\perp} : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\mathbf{a} = \text{Пр}_U^{\mathbf{a}} + \text{Пр}_{U^{\perp}}^{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \text{Пр}_U^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \text{Пр}_{U^{\perp}}^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a},\, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

## 1. Ортогонализация Грама-Шмидта

Пусть дан базис $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$

Наша задача: построить отрогональный базис $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n$

1. $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$
2. $\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \text{Пр}_{\mathbf{h}_1}^{\mathbf{f}_2} = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_2)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1$
3. $\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \text{Пр}_{\langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle}^{\mathbf{f}_3} = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2$

Для построения ортонормированного базиса, каждый вектор нужно разделить на его длину, т.е.

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{|\mathbf{h}_i|}.$$

**Пример 3**
Ортонормировать систему векторов со стандартным (т.е. $\Gamma = E$) скалярным произведением

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

*Решение:*
На первом шаге возьмем вектор $\mathbf{f}_1$ за основу нового базиса, т.е. $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, |\mathbf{h}_1| = \sqrt{10}$.
На втором шаге найдем следующий вектор по рекуррентной формуле, полученной выше

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{h}_2| = \sqrt{23}.$$

Можно убедиться, что $(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = 0$.
Далее, найдем третий вектор

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -8 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad |\mathbf{h}_3| = \sqrt{17}.$$

Осталось только нормировать полученный базис, т.е. разделить каждый вектор на его длину.
Ответ: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{23}}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

**Пример 4**
В пространстве многочленов, степени не выше второй, задано скалярное произведение в таком виде:

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Построить ортогональный базис в этом пространстве.

*Решение:*
За основу возьмем стандартный базис $\{\underset{\mathbf{f}_1}{1}, \underset{\mathbf{f}_2}{t}, \underset{\mathbf{f}_3}{t^2}\}$. Пусть первый вектор в нашем новом базисе $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1 = 1$. Найдем длину $\mathbf{h}_1$[1]:

$$|\mathbf{h}_1|^2 = \int\limits_{-1}^{1} 1^2 dt = 2.$$

Для ортогонализации необходимо найти скалярное произведения $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$. Будем искать их по заданному определению:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot t = 0 \Rightarrow 1 \perp t.$$

Теперь подставим числа в рекуррентную формулу и получим второй вектор базиса:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_2 \quad |\mathbf{h}_2|^2 = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Т.к. $(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2) = 0$,

$$(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_3) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot t^2 = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

[1] Как может показаться длина единицы равна 1. Но т.к. по определению длина вектора — корень из его скалярного произведения самого на себя, это не так.

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1,$$

то

$$\mathbf{h}_3 = t^2 - \frac{2}{3 \cdot 2} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$.

# 2. Сопряжённые преобразования

## 2.1. Определение

**Определение 2.1.** Линейное преобразование евклидова пространства $\varphi^*$ называется *сопряжённым с преобразованием* $\varphi$, если

$$\boxed{(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}}$$

Пусть в базисе $\mathbf{e}$: $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}$. Матрицы преобразований $\varphi$ и $\varphi^*$ равны соответственно $A$ и $A^*$, то есть:

$$\varphi(\mathbf{x}) = A\boldsymbol{\xi};\ \varphi^*(\mathbf{y}) = A^*\boldsymbol{\eta}$$

$$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) \Leftrightarrow (A\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma(A^*\boldsymbol{\eta})$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma A^*\boldsymbol{\eta}$$

Отбросив $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\eta}$ в обоих частях последнего равенства (т.к. данное равенство выполнено для любых $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\eta}$), получим:

$$\boxed{A^{\mathrm{T}}\Gamma = \Gamma A^*}$$

В ортонормированном базисе получим:

$$\boxed{A^{\mathrm{T}} = A^*}$$

## 2.2. Свойства сопряжённых преобразований

1. Характеристические многочлены совпадают.
2. Если подпространство $U \in \mathcal{E}$ инвариантно относительно $\varphi$, то его ортогональное дополнение $U^{\perp}$ инвариантно относительно $\varphi^*$.

   *Доказательство. (пункт 2)*: Возьмём произвольные $x \in U$ и $y \in U^{\perp}$.
   $\varphi(\mathbf{x}) \in U \Rightarrow (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) \Rightarrow \varphi^*(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}$, то есть $\varphi^*(\mathbf{x}) \in U^{\perp}$ □

## 2.3. Самосопряжённые преобразования

**Определение 2.2.** Линейное преобразование евклидова пространства $\varphi$ называется *самосопряжённым*, если

$$\boxed{(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y}))}$$

В ортонормированном базисе получим:

$$A = A^{\mathrm{T}}, \text{где } A \text{ -- симметрическая} \Leftrightarrow \varphi \text{ -- симметрическое}$$

△ Наличие пары комплексных корней в уравнении $\det(A - \lambda E) = 0$ порождает двумерное инвариантное подпространство без собственных векторов. ▲

**Лемма 2.1.** *Самосопряжённое преобразование $\varphi$ имеет только вещественные собственные значения.*

*Доказательство.* Пусть есть пара комплексных корней $\Rightarrow$ существует двумерное инвариантное подпространство $L'$ *без собственных векторов.* Для этого пространства преобразование $\varphi$ задается:

$$\varphi(L')\colon \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \text{, причем для собственных значений } \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \beta & \gamma-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$(\alpha-\lambda)(\gamma-\lambda)-\beta^2=0$
$\lambda^2-(\alpha+\gamma)\lambda+\alpha\gamma-\beta^2=0$
$D=\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+4\beta^2=(\alpha-\gamma)^2+4\beta^2\geqslant 0$
$\Rightarrow$ в этом пространстве существует собственный вектор. Противоречие. □

**Лемма 2.2.** *Собственные подпространства самосопряженных преобразований $\varphi$ ортогональны (собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны).*

*Доказательство.* $\begin{cases} \varphi(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x} \\ \varphi(\mathbf{y})=\mu\mathbf{y} \\ \lambda\neq\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\varphi(\mathbf{x}),\mathbf{y})=\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ (\mathbf{x},\varphi(\mathbf{y}))=\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{cases}) \ominus$
$0=(\lambda-\mu)(\mathbf{x},\mathbf{y})\Rightarrow(\mathbf{x},\mathbf{y})=0\Rightarrow\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$, что и требовалось доказать. □

## 2.4. Центральная теорема

**Теорема 2.1.** *$\varphi$ — самосопряженное $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Пусть $U=U_1\oplus\ldots\oplus U_n$ — сумма всех собственных подпространств. Докажем, что $U=\mathcal{E}\Leftrightarrow U^\perp=0$
$\varphi(U^\perp)$ — самосопряженное $\overset{\text{Лемма 1}}{\Rightarrow} \exists\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists$ собственный вектор $\in U^\perp$, но все собственные векторы $\in U\Rightarrow U^\perp=0\Rightarrow U=\mathcal{E}\Rightarrow$ существует базис из собственных векторов, этот базис можно сделать. □

Этот базис можно сделать ортогональным в силу леммы 2.2.

**Геометрический смысл**

1) "Сжатие" вдоль перпендикулярного направления
2) Ортогональное проецирование
3) Отражение

**Пример 5**

В ортонормированном базисе $\varphi$ задана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Найти ОНБ из собственных векторов.

*Решение:*
В ОНБ: $-A=A^{\mathbf{T}}\Rightarrow\varphi$ — самосопряженное преобразование.

$$\det(A-\lambda E)=0\Leftrightarrow\lambda^2+\lambda-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}\lambda&=-3\\ \lambda&=-2\end{aligned}\right.$$

$$1)\lambda=-3\quad\left(\begin{array}{cc|c}4 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right)\quad L_1:\langle\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\rangle=\mathbf{f}_1$$

$$1)\lambda=2\quad\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 0\\ 2 & -4 & 0\end{array}\right)\quad L_1:\langle\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\rangle=\mathbf{f}_2$$

$$\mathbf{e'}_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\qquad A'=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{e'}_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

**Пример 6**
В ортонормированном базисе $\varphi$ задана матрица $A$. Найти ОНБ из собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{В ОНБ} \;\; A = A^{\mathbf{T}} \Rightarrow \varphi \text{ — самосопряженное}$$

*Решение:*

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{r} \lambda = 3 \;\; \text{кратность } 2 \\ \lambda = -3 \;\; \text{кратность } 1 \end{array}$$

$$1)\lambda = 3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 \right\rangle$$

$$2)\lambda = -3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 \right\rangle$$

$\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$

$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \dfrac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3$

$\mathbf{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \mathbf{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; \mathbf{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

В этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

*Команда BOTAY!:*
*Д. Георгий, VK*
*К. Алексей, VK*
*К. Ксения, VK*
*Г. Мадина, VK*
*С. Паша, VK*
*М. Матвей, VK*