

Московский физико–технический институт

Жестков Сергей Андреевич  
Семинары по линейной алгебре  
Весенний семестр,  
2016–2017 учебный год

При поддержке команды  
паблика [BOTAУ!](#):  
Д. Георгий, [VK](#)  
К. Ксения, [VK](#)  
Г. Мадина, [VK](#)  
С. Паша, [VK](#)  
М. Матвей, [VK](#)  
К. Алексей, [VK](#)

Москва, 2017 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Матрицы. Ранг матрицы.</b>	<b>4</b>
1.1	Про матрицы . . . . .	4
1.2	Элементарные преобразования строк . . . . .	4
1.3	Обратная матрица . . . . .	5
1.4	Ранг матрицы . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Системы линейных уравнений.</b>	<b>9</b>
2.1	Запись систем линейных уравнений . . . . .	9
2.2	Поиск решений . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Линейные пространства и подпространства.</b>	<b>14</b>
3.1	Определение линейного пространства . . . . .	14
3.2	Примеры . . . . .	15
3.3	Примеры и способы задания линейных подпространств . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Замена базиса. Сумма и пересечение подпространств.</b>	<b>20</b>
4.1	Замена базиса. . . . .	20
4.2	Сумма и пересечение подпространств . . . . .	21
4.3	Понятие проекции вектора на подпространство . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Линейные отображения. Часть 1.</b>	<b>25</b>
5.1	Определение линейного отображения . . . . .	25
5.2	Матрица линейного отображения . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Линейные отображения. Часть 2.</b>	<b>30</b>
6.1	Рассмотрение ядра и образа . . . . .	30
6.2	Два важных частных случая . . . . .	32
6.3	Матрица отображения в новых базисах. . . . .	33
6.4	Линейные функции . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Инвариантные и собственные подпространства. Часть 1.</b>	<b>36</b>
7.1	Инвариантные подпространства . . . . .	36
7.2	Матрица преобразования . . . . .	37
7.3	Собственный вектор . . . . .	38
7.4	Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов . . . . .	39
7.5	Диагонализируемость матрицы . . . . .	40
<b>8</b>	<b>Инвариантные и собственные подпространства. Часть 2.</b>	<b>42</b>
8.1	Решение задач . . . . .	42
8.2	Проекторы . . . . .	45

<b>10 Критерий Сильвестра. Евклидовы пространства.</b>	<b>47</b>
10.1 Критерий Сильвестра . . . . .	47
10.2 Евклидовы пространства . . . . .	49
10.3 Матрица Грама . . . . .	50
10.4 Типы базисов . . . . .	51
<b>11 Евклидовы пространства. Сопряженное преобразование.</b>	<b>54</b>
11.1 Ортогонализация Грама-Шмидта . . . . .	55
11.2 Сопряжённые преобразования . . . . .	56
<b>12 Ортогональное преобразование и функции на евклидовых пространствах.</b>	<b>60</b>
12.1 Ортогональные матрицы. . . . .	60
12.2 Ортогональное преобразование. . . . .	61
12.3 Полярное разложение . . . . .	63
12.4 Билинейные функции на евклидовом пространстве . . . . .	63

# Семинар 1

## Матрицы. Ранг матрицы.

### 1.1. Про матрицы

Уже умеем

- сложение и умножение на число (поэлементно)
- транспонировать
- умножать

Свойства умножения

- 1.°  $A \cdot B \neq B \cdot A$  (если  $A \cdot B = B \cdot A$ , то  $A, B$  — перестановочные матрицы)
- 2.°  $A \cdot E = E \cdot A = A$
- 3.°  $(AB)C = A(BC)$
- 4.°  $A(B + C) = AB + AC$ ;  $(B + C)A = BA + CA$
- 5.°  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- 6.°  $(AB)^T = B^T A^T$

#### Пример 1

Верно ли:

а)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Проверка:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Т.о. в общем случае выражение неверно.

б)  $(A + B)^2 + (A - B)^2 = 2(A^2 + B^2)$

Проверка:

$$A^2 + AB + BA + B^2 + A^2 - AB - BA + B^2 = 2(A^2 + B^2)$$

Т.о. в общем случае выражение верно.

### 1.2. Элементарные преобразования строк

- умножение строки на число, отличное 0
- сложение строк

Также, элементарными преобразованиями являются:

- добавление к строке другой строки, умноженной на число
- перестановка строк

Очевидно, что элементарные преобразования обратимы.

Рассмотрим:  $SA = A'$ , где  $S$  — матрица элементарного преобразования.

- умножение:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

- сложение:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$

Элементарная матрица получается элементарными преобразованиями из единичной.

Для преобразования столбцов элементарную матрицу нужно умножать справа.

Запись нескольких преобразований:  $S_1, \dots, S_N$ , то  $S_N \cdot \dots \cdot S_1 A$ .

Строки  $a_1, \dots, a_k$  матрицы  $A$  называются ЛНЗ (линейно-независимыми), если

- ЛНЗ:  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ,  
называются ЛЗ (линейно-зависимыми), если
- ЛЗ:  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : \alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$

Все свойства из анализа.

- Если есть нулевая строка, то матрица ЛЗ
- Если часть строк ЛЗ, то и матрица ЛЗ
- Любая часть ЛНЗ — ЛНЗ

Квадратная матрица вырожденная, если она содержит ЛЗ строки.

Элементарные преобразования не нарушают линейных зависимостей в матрице.

В частности: вырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в вырожденную матрицу, а невырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в невырожденную матрицу.

**Теорема 1.2.1.** *Каждая невырожденная матрица с помощью элементарных преобразований может быть превращена в единичную*

## Пример 2

Привести к  $E$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(2)(1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{— ступенчатый вид матрицы.}$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\xrightarrow[(2)+2(3)]{(1)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Теорема 1.2.2.** *Матрица невырождена  $\Leftrightarrow$  раскладывается в произведение элементарных матриц.*

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ): см. метод Гаусса (пример 2).

$\exists T_1, \dots, T_M$  — элементарные преобразования строк:  $T_M \cdot \dots \cdot T_1 A = E$

Элементарные преобразования обратимы  $\Rightarrow \exists S_1, \dots, S_M : S_M \cdot \dots \cdot S_1 E = A \Leftrightarrow S_M \cdot \dots \cdot S_1 = A$

( $\Leftarrow$ ):  $A = S_M \cdot \dots \cdot S_1 E$

Т.к. единичная матрица невырождена, а элементарные преобразования вырожденности не меняют  $\Rightarrow A$  невырождена.  $\square$

## 1.3. Обратная матрица

**Определение 1.3.1.** Матрица  $X$  обратная к матрице  $A$ , если

$$XA = AX = E,$$

где  $A$  — невырождена,  $X$  — единственна.

Свойства:

$$1.^{\circ} (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$2.^{\circ} (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**Метод Жордана-Гаусса**

$$T_M \cdot \dots \cdot T_1 A = E \quad | \cdot A^{-1}$$

$$T_M \cdot \dots \cdot T_1 E = A^{-1}$$

### Пример 3

Доказать, что  $A$  невырождена и найти обратную, если

$$A^2 + A + E = O$$

Доказательство:

$$A^2 + A + E = O$$

$$A(A + E) + E = O$$

$$A(-A - E) = E$$

$$\det E = 1, \quad \det(A(-A - E)) = \det A \cdot \det(-A - E) \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Отсюда же следует, что

$$A^{-1} = -A - E$$

### Пример 4

$$A^m = O \text{ — нильпотентная матрица}$$

Доказать

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{m-1}$$

Доказательство:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{m-1} \quad | \cdot (E - A)$$

$$E = E - A + A - A^2 + A^2 + \dots + A^{m-1} - A^m = E$$

### Пример 5

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{а) } AX = B \quad | \cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\text{б) } XA = B \quad | \cdot A^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Найдём  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \times \frac{1}{2}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \times 2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1) - 5/2 \times (2)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{Т.о. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ б) } X = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

## 1.4. Ранг матрицы

Пусть у матрицы  $A$   $r$  — ЛНЗ строк и нет ЛНЗ системы строк большего числа. Тогда  $r$  — строчный ранг матрицы.

**Определение 1.4.1.** Строчный ранг матрицы — максимальное число ЛНЗ строк.

**Теорема 1.4.1.** Система из  $r$  строк ЛНЗ  $\Leftrightarrow \exists$  невырожденная подматрица порядка  $r$ .

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Первые две строки ЛНЗ. Вычерченный фрагмент содержит непропорциональные строки.

**Определение 1.4.2.** Подматрица порядка  $r$  называется базисной, если она невырождена, а все квадратные подматрицы большего порядка вырождены.

**Определение 1.4.3.** Ранг матрицы — порядок базисной подматрицы.

Ранг матрицы равен строчному рангу. Ранг не меняется при элементарных преобразованиях.

Свойства:

$$\text{Rg } AB \leq \min(\text{Rg } A, \text{Rg } B)$$

### 1.4.1. Алгоритм поиска ранга

Приводим матрицу к ступенчатому виду. Ранг — число ненулевых строк.

**Пример 6**

Найти  $\text{Rg}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(3 \cdot 1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} = 2$$

**Пример 7**

Найти  $\text{Rg}$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4) \leftrightarrow (1)]{1/5 \times (4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-(2 \cdot 1)]{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3 и 4 строчку можно вычеркнуть, т.к. они ЛЗ. Т.о.  $\text{Rg} = 2$ .

**Пример 8**

Найти  $\text{Rg}$  в зависимости от параметра.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (4)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+3/2 \times (1)]{(2)-3/2 \times (1)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7 & \beta + 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(4)+2/5 \times (1)]{(3)-5/7 \times (2)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Rg} = 2$  при  $\alpha = -\beta = 1$ .

$\text{Rg} = 3$  в остальных случаях.

**Пример 9**

Верно ли  $\forall A, B$ :

а)  $\text{Rg}(A + B) = \text{Rg } A + \text{Rg } B$

Неверно, например:

$$A = B = E_2$$

б)  $\text{Rg}(A + B) \leq \text{Rg } A + \text{Rg } B$

Верно. Докажем:

$$\text{Rg}(A + B) \leq \underbrace{\text{Rg}(A + B | A | B)}_{\text{ЛЗ}} = \text{Rg}(A | B)$$

$$r = \text{Rg } A, \quad s = \text{Rg } B$$

$$\text{Rg}(A | B) \leq r + s$$

Т.е.

$$\text{Rg}(A + B) \leq \text{Rg } A + \text{Rg } B.$$