# Содержание

## Семинар 1

# Семинар 1. Матрицы. Ранг матрицы.

## 1. Про матрицы

Уже умеем
- сложение и умножение на число (поэлементно)
- транспонировать
- умножать

Свойства умножения
1.° $A \cdot B \neq B \cdot A$ (если $A \cdot B = B \cdot A$, то $A$,$B$ — перестановочные матрицы)
2.° $A \cdot E = E \cdot A = A$
3.° $(AB)C = A(BC)$
4.° $A(B + C) = AB + AC$;   $(B + C)A = BA + CA$
5.° $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
6.° $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$

**Пример 1**

Верно ли:
а) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
Проверка:
$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$
Т.о. в общем случае выражение неверно.
б) $(A + B)^2 + (A - B)^2 = 2(A^2 + B^2)$
Проверка:
$$A^2 + AB + BA + B^2 + A^2 - AB - BA + B^2 = 2(A^2 + B^2)$$
Т.о. в общем случае выражение верно.

## 2. Элементарные преобразования строк

- умножение строки на число, неравное 0
- сложение строк

Также, элементарными преобразованиями являются:
- добавление к строке другой строки, умноженной на число
- перестановка строк

Очевидно, что элементарные преобразования обратимы.
Рассмотрим: $SA = A'$, где $S$ — матрица элементарного преобразования.
- умножение: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$
- сложение: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a + c & b + d \end{pmatrix}$

Элементарная матрица получается элементарными преобразованиями из единичной.
Для преобразования столбцов элементарную матрицу нужно умножать справа.
Запись нескольких преобразований: $S_1$,...,$S_N$, то $S_N \cdot ... \cdot S_1 A$.

Строки $a_1$,...,$a_k$ матрицы $A$ называются ЛНЗ (линейно-независимыми), если
- ЛНЗ: $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$,
  называются ЛЗ (линейно-зависимыми), если
- ЛЗ: $\exists\ \alpha_1$,...,$\alpha_k : \alpha_1^2 + ... + \alpha_k^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0$

Все свойства из аналита.
- Если есть нулевая строка, то матрица ЛЗ

- Если часть строк ЛЗ, то и матрица ЛЗ
- Любая часть ЛНЗ — ЛНЗ

Квадратная матрица вырожденная, если она содержит ЛЗ строки.

Элементарные преобразования не нарушают линейных зависимостей в матрице.

В частности: вырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в вырожденную матрицу, а невырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в невырожденную матрицу.

**Теорема 2.1.** *Каждая невырожденная матрица с помощью элементарных преобразований может быть превращена в единичную*

**Пример 2**

Привести к $E$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — ступенчатый вид матрицы}$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\xrightarrow[(2)+2(3)]{(1)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Теорема 2.2.** *Матрица невырождена* $\Leftrightarrow$ *раскладывается в произведение элементарных матриц.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$): см. метод Гаусса (пример 2).
$\exists\, T_1,...,T_M$ — элементарные преобразования строк: $T_M \cdot ... \cdot T_1 A = E$
Элементарные преобразования обратимы $\Rightarrow \exists\, S_1,...,S_M : S_M \cdot ... \cdot S_1 E = A \Leftrightarrow S_M \cdot ... \cdot S_1 = A$
($\Leftarrow$): $A = S_M \cdot ... \cdot S_1 E$
Т.к. единичная матрица невырождена, а элементарные преобразования вырожденности не меняют $\Rightarrow A$ невырождена. ☐

# 3. Обратная матрица

**Определение 3.1.** Матрица $X$ обратная к матрице $A$, если

$$XA = AX = E,$$

где $A$ — невырождена, $X$ — единственна.

Свойства:
1.° $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2.° $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

**Метод Жордана-Гаусса**

$$T_M \cdot ... \cdot T_1 A = E \quad |\cdot A^{-1}$$
$$T_M \cdot ... \cdot T_1 E = A^{-1}$$

**Пример 3**

Доказать, что $A$ невырождена и найти обратную, если

$$A^2+A+E=O$$

Доказательство:

$$A^2+A+E=O$$
$$A(A+E)+E=O$$
$$A(-A-E)=E$$
$$\det E=1, \qquad \det(A(-A-E))=\det A\cdot\det(-A-E)\Rightarrow \det A\neq 0.$$

Отсюда же следует, что

$$A^{-1}=-A-E$$

**Пример 4**

$$A^m=O \text{ — нильпотентная матрица}$$

Доказать

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+...+A^{m-1}$$

Доказательство:

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+...+A^{m-1} \quad |\cdot(E-A)$$
$$E=E-A+A-A^2+A^2+...+A^{m-1}-A^m=E$$

**Пример 5**

а)$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ б)$X\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

а) $AX=B \quad A^{-1}\cdot|$
$X=A^{-1}B$
б) $XA=B \quad |\cdot A^{-1}$
$X=BA^{-1}$
Найдём $A^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&5&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&5/2&1/2&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)-(1)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&5/2&1/2&0\\0&1/2&-1/2&1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)\times 2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&5/2&1/2&0\\0&1&-1&2\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{(1)-5/2\times(2)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-5\\0&1&-1&2\end{array}\right)$$

Т.о. $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$.

Ответ: а) $X=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$, б) $X=\begin{pmatrix}5&-8\\2&-3\end{pmatrix}$.

# 4. Ранг матрицы

Пусть у матрицы $A$ $r$ — ЛНЗ строк и нет ЛНЗ системы строк большего числа. Тогда $r$ — строчный ранг матрицы.

**Определение 4.1.** Строчный ранг матрицы — максимальное число ЛНЗ строк.

**Теорема 4.1.** *Система из $r$ строк ЛНЗ $\Leftrightarrow$ $\exists$ невырожденная подматрица порядка $r$.*

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc}
\cline{3-4}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cline{3-4}
\multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} \\
\multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot} & \multicolumn{1}{c}{\cdot}
\end{array}\right)$$

Первые две строки ЛНЗ. Вычерченный фрагмент содержит непропорциональные строки.

**Определение 4.2.** Подматрица порядка $r$ называется базисной, если она невырождена, а все квадратные подматрицы большего порядка вырождены.

**Определение 4.3.** Ранг матрицы — порядок базисной подматрицы.

Ранг матрицы равен строчному рангу. Ранг не меняется при элементарных преобразованиях.
Свойства:
$\operatorname{Rg} AB \leqslant \min(\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B)$

## 4.1. Алгоритм поиска ранга

Приводим матрицу к ступенчатому виду. Ранг — число ненулевых строк.

**Пример 6**

Найти Rg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} = 2$$

**Пример 7**

Найти Rg.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)\leftrightarrow(1)]{1/5\times(4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-2(1)]{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3 и 4 строчку можно вычеркнуть, т.к. они ЛЗ. Т.о. $\operatorname{Rg} = 2$.

**Пример 8**

Найти Rg в зависимости от параметра.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+3/2\times(1)]{(2)-3/2\times(1)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7 & \beta+9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(4)+2/5\times(1)]{(3)-5/7\times(2)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Rg} = 2$ при $\alpha = -\beta = 1$.
$\operatorname{Rg} = 3$ в остальных случаях.

**Пример 9**

Верно ли $\forall A, B$:
а) $\operatorname{Rg}(A+B) = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B$
Неверно, например:

$$A = B = E_2$$

б) $\operatorname{Rg}(A+B) \leqslant \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B$
Верно. Докажем:

$$\operatorname{Rg}(A+B) \leqslant Rg(\underbrace{A+B}_{\text{ЛЗ}}|A|B) = \operatorname{Rg}(A|B)$$

$$r = \operatorname{Rg} A, \qquad s = \operatorname{Rg} B$$

$$\operatorname{Rg}(A|B) \leqslant r+s$$

Т.е.

$$\operatorname{Rg}(A+B) \leqslant \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B.$$

Семинар 2

# Семинар 2. Системы линейных уравнений.

## 5. Запись систем линейных уравнений

Способы записи систем линейных уравнений:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Можно записать расширенную матрицу:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ или } (A|b)$$

Расширенная матрица выдерживает элементарные преобразования строк и перестановку столбцов (**аккуратно**, т.к. нужно соблюдать нумерацию столбцов).

$$(*) \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(*) \Leftrightarrow Ax = b$$

В школе геометрической интерпретацией системы линейных уравнений (СЛУ) размера 3 на 3 было пересечение (необязательно) плоскостей. Для любых $m$ и $n$ геометрическая интерпретация есть пересечение гиперплоскостей.

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения.

**Теорема 5.1** (Критерий Кронекера-Капелли). *Система совместна* $\Leftrightarrow \operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg}(A)$.

## 6. Поиск решений

Если матрица $A$ невырождена, то

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & A^{-1} \cdot | \\ x = A^{-1}b & \end{aligned}$$

**Метод Жордана-Гаусса**

$\exists T_1, \dots, T_M$ — элементарные преобразования

$T_M \cdot \dots \cdot T_1 A = E \qquad | \cdot A^{-1}b$

$T_M \cdot \dots \cdot T_1 b = A^{-1}b = x$

**Пример 1**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

*Решение:*
Запишем расширенную матрицу СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -4 & 1 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)/(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+4(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)/(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)+(3)]{(1)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ответ:$(x_1\ x_2\ x_3)^{\text{T}} = (5\ 5\ 3)^{\text{T}}$

**Пример 2**

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +6x_5 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & & -3x_5 & = 0 \\ x_1 & +11x_2 & +7x_3 & +6x_4 & +18x_5 & = 0 \end{cases}$$

*Решение:*
Данная система уравнений называется однородной. Она всегда совместна, т.к. имеет частное решение $x_i = 0, i = \overline{1{,}5}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 11 & 7 & 6 & 18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+2(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{(3)/(-6)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)-3(3)]{(2)+5(3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)/(-4)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-3(2)}$$

$$\to \left( \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{\text{главные неизв.}} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{\text{параметрические неизв.}} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

Эта матрица эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 = & -\frac{1}{2}x_4 & \\ x_2 = & -\frac{1}{2}x_4 & -x_5 \\ x_3 = & & -x_5 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Это и есть ответ к данной задаче.

$$< \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \text{— линейная оболочка.}$$

**Пример 3**

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & -8x_3 & +4x_4 & -4x_5 & = 3 \\ & 2x_2 & & & +4x_5 & = 2 \\ -3x_1 & +x_2 & +12x_3 & -6x_4 & -x_5 & = -8 \\ -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & -5x_5 & = -5 \end{cases}$$

*Решение:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 8 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 12 & -6 & -1 & -8 \\ -1 & -2 & 4 & -2 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)\longleftrightarrow(1)]{(4)\times(-1);(2)/(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 12 & -6 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & 8 & 4 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)+3(1)]{(4)-2(1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 14 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & -14 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-7(2)]{(4)+7(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Альтернатива Кронекера-Капелли:
Система несовместна $\Leftrightarrow$ она содержит строку $(0 \ \cdots \ 0|1)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Запишем фундаментальную систему решений (решение однородной системы):

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица ФСР выдерживает элементарные преобразования столбцов.

Будем говорить об однородной СЛУ. Столбцы ФСР — базис в пространстве решений однородной системы.

Пусть $\Phi'_{m\times n}$, $\Phi_{m\times n}$ — ФСР системы $Ax = 0$.

$$\exists C_{n\times n} : C\text{— неврожденная } \& \ \Phi'_{m\times n} = \Phi_{m\times n}C.$$

Число столбцов ФСР = числу свободных неизвестных = число всех неизвестных $(n)$ - число главных неизвестных $(\operatorname{Rg} A)$.

**Пример 4**

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 7 \\ -4x_1 & +5x_2 & & +x_4 & = 3 \end{cases}$$

*Решение:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ -4 & 5 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Очевидно, что ничего преобразовывать не надо, единичная матрица уже есть.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

**Пример 5**

Дана ФСР

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти $Ax = 0$.

*Решение:*

Припишем справа столбец неизвестных. Т.к. он линейно выражается через строки матрицы $A$, то это не изменит ранг нашей матрицы.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ -4 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\longleftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_2 \\ -4 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)+4(1)]{(3)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & x_4 + 4x_1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)+(2)]{(4)+(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & x_4 + 4x_1 + x_3 \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

**Пример 6**

При каких $\alpha$ и $\beta$ система совместна? Решить ее.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = \alpha \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 = \beta \end{cases}$$

*Решение:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[(3)\cdot 2;(4)\cdot 2]{(1)\cdot 3} \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -12 & 9 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 6 & -12 & 4 & 4 & 4 \\ -6 & 12 & -2 & -8 & 2\beta \end{array}\right) \xrightarrow[(4)+(1);(1)/3]{(3)-(1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & 2\beta+9 \end{array}\right) \qquad \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b) = 2 \Rightarrow \alpha = 1, \qquad 2\beta + 9 = 7$$

То есть $\alpha = 1, \beta = -1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-3(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 6.1. Примечание

Обратимся к примеру 3. Мы получили такую расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Она эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1 \quad -4x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ \quad x_2 \qquad\qquad + 2x_5 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_2 = 1 - 2x_5. \end{cases}$$

Тогда можно записать:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 \\ 1 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Так мы пришли к ответу, не прибегая к умножению матриц.

Семинар 3

# Семинар 3. Линейные пространства и подпространства.

## 7. Определение линейного пространства

**Определение 7.1.** Пространство $L$ — линейное пространство, если:
- $\forall x, y \in L : x + y \in L$
- $\forall x \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x \in L$

$+$ 8 аксиом:

1.° $x + y = y + x$
2.° $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.° $\exists\ o : \forall x \to x + o = x$
4.° $\exists\ (-x) : \forall x \to x + (-x) = o$
5.° $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6.° $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7.° $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
8.° $\exists\ 1 : x \cdot 1 = x$

Вектор — элемент линейного пространства.
- Понятия ЛЗ и ЛНЗ со всеми вытекающими свойствами полностью из аналита.

**Определение 7.2.** Базис в $L$ — конечная, упорядоченная ЛНЗ система векторов, такая что каждый вектор из $L$ по ней раскладывается.

Если базис состоит из $n$ векторов, то пространство называется $n$-мерным ($\dim L = n$).

Примеры:
- Векторы в $3^x$ ($\dim L = n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Столбцы высотой $n$ ($\dim L = n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Матрицы $m \times n$ ($\dim L = m \times n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Множество функций, определённых на отрезке [0,1]
- Многочлены ($\dim L = \infty$)
- Многочлены степени $\leqslant n$ ($\dim L = n + 1$). Базис:$\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$

**Определение 7.3.** Линейное подпространство. $L'$ — линейное подпространство в $L$, если:
- $\forall x, y \in L' : x + y \in L'$
- $\forall x \in L', \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x \in L'$

Пример: диагональные матрицы в пространстве обычных матриц.

# 8. Примеры

В примерах 1 — 3 вопрос следующий: является ли данное множество линейным подпространством в данном пространстве $L$.

**Пример 1**
L — множество n-мерных векторов.

*Решение:*
а) L' — множество векторов, координаты которых равны
Да, является; $\dim L' = 1$, базис: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$
б) L' — множество векторов, сумма координат которых равна 0
Да, является; $\dim L' = n-1$, базис: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$
в) L' — множество векторов, сумма координат которых равна 1
Нет, не является.

**Пример 2**
L — множество матриц размера $n \times n$.

*Решение:*
а) L' — матрицы с нулевой первой строкой
Да, является; $\dim L' = n^2 - n$
б) L' — множество диагональных матриц
Да, является; $\dim L' = n$
в) L' — множество верхнетреугольных матриц
Да, является; $\dim L' = \frac{n(n+1)}{2}$ (т.е. $(1 + 2 + \cdots + n)$)
г) L' — множество вырожденных матриц
Нет, не является; $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$

**Пример 3**
L — множество функций, определенных на отрезке [0,1].

*Решение:*
а) L' — множество функций, ограниченных на отрезке [0,1]
Да, является.
б) L' — множество строго монотонных функций
Нет, не является.
в) L' — множество строго возрастающих функций
$0 \cdot x = 0 \Longrightarrow$ нет, не является.

# 9. Примеры и способы задания линейных подпространств

0 — тоже линейное пространство

**Определение 9.1.** Линейная оболочка векторов $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ($< a_1, a_2, \cdots, a_k >$) — всевозможные линейные комбинации этих векторов:

$$< a_1, a_2, \cdots, a_k >= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \lambda_i \in R \right\}$$

**Пример 4**
Найти размерность и базис линейной оболочки

*Решение:*

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

Т.к. $\dim L' = \operatorname{Rg} A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & 2 \\ 1 & -7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-(1),\,(4)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$(3) = (4) \Rightarrow (4)$ вычеркиваем!

$\dim L' = 3$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Пример 5**
(условие — см. пример 4)

*Решение:*

$$< \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix} >$$

Задача не изменится, если взять

$$< \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Т.к. строка (3) ЛНЗ ((1)-2(2)=(3)), ее можно вычеркнуть.

$\dim L' = 2$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Пример 6**
Доказать, что матрицы A, B, C, D образуют базис в пространстве матриц $2 \times 2$ и найти координаты вектора F в этом базисе.

*Решение:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Если $A, B, C, D$ — базис, то $\exists!\ x_1, x_2, x_3, x_4$:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = F,$$

что эквивалентно СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 5 \\ -x_1 & +5x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 14 \\ x_1 & +x_2 & & +5x_4 & = 6 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +7x_4 & = 13 \end{cases}$$

Решая эту СЛУ, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Т.о., решив систему, убедились в единственности решения (факт базиса).

**Пример 7**
Найти размерность и базис линейной оболочки.

*Решение:*

$$< (1+t)^3, t^3, t + t^2, 1 >$$

Стандартный базис многочлена: $\{1, t, t^2, t^3\}$. Тогда координаты наших векторов в стандартном базисе есть:

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Тогда запишем матрицу, аналогично примеру 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 строка ЛНЗ, ее можно вычеркнуть. Тогда

$$\dim L' = 3, \text{ базис: } \left\{ t^3, t^2 + t, 1 \right\}.$$

**Пример 8**
Доказать, что

$$1, t - \alpha, (t - \alpha)^2, \ldots, (t - \alpha)^n$$

— базис в пространстве многочленов, степени не выше $n$. Найти в этом базисе разложение $P_n(t)$.

*Решение:*
Ответ на эту задачу дал математик Брук Тейлор:

$$P_n(t) = P_n(\alpha) + \frac{1}{1!} P'(\alpha)(t - \alpha) + \cdots + \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(\alpha)(t - \alpha)^n$$

Т.к. данное разложение $\exists!$, это базис. Запишем коэффициенты разложения:

$$\begin{pmatrix} P_n(\alpha) \\ \frac{1}{1!}P'_n(\alpha) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(\alpha) \end{pmatrix}$$

**Пример 9**
Найти размерность и базис подпространства, заданного в виде $Ax = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Решение:*
Решения однородной системы образуют линейные подпространства.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Алгоритм Гаусса}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Отсюда, получаем линейную оболочку:

$$< \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >, \qquad \dim L' = 2$$

Столбцы этой линейной оболочки будут являться базисом в этом линейном подпространстве.

**Пример 10**
Задать подпространство в виде однородной системы

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

*Решение:*
Задача по сути является задачей из прошлого семинара:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 3 & -1 & x_3 \\ 4 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -5x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -2x_2 - x_2 + x_4 \end{array}\right)$$

Для того, чтобы система была совместной, требуется равенство 0 последних двух строк. Отсюда ответ:

$$\begin{cases} -5x_1 \ +x_2 \ +x_3 \ = 0 \\ -2x_1 \ -x_2 \ +x_4 \ = 0 \end{cases}$$

Семинар 4

# Семинар 4. Замена базиса. Сумма и пересечение подпространств.

## 10. Замена базиса.

Рассмотрим базис $\overline{e}(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

Координаты $x$ в базисе $\overline{e}$: $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \overline{\xi}$

Тогда: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \overline{e}\overline{\xi}$.

Пусть есть два базиса $\overline{e}, \overline{e'}$. Выразим один базис через другой:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n \\ e_2' &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n' &= a_{n1}e_1 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow e_i' = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}e_j$$

$S$ — матрица перехода от $\overline{e}$ к $\overline{e'}$ ($\det S \neq 0$).

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overline{e'} = \overline{e}S}$$

Связь координат:

$$\begin{aligned} &x = \overline{e}\overline{\xi} \\ &x = \overline{e'}\overline{\xi'} = \overline{e}\,\underbrace{S\overline{\xi'}}_{\xi} \Rightarrow \boxed{\overline{\xi} = S\overline{\xi'}} \end{aligned}$$

**Пример 1**

Доказать, что $F : \left(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}5\\3\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$ и $G : \left(\begin{smallmatrix}-1\\4\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}4\\3\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$ — базис в $\mathbb{R}^3$

1° Найти $S$ от $F$ к $G$.

2° Зная $\overline{\xi'}$ в $G$, найти $\overline{\xi}$ в $F$.

dghfhf

*Решение:*

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det G = -47 \neq 0 \Rightarrow G - \text{базис}$$

1° $G = FS \quad F^{-1}|\cdot$

$F^{-1}G = S$

Пусть $F$ — невырожденная, тогда $\exists T_1,\dots,T_n$ (элементарные преобразования матриц):

$T_n \dots T_1 F = E \quad | \cdot F^{-1}G$

$T_n \dots T_1 G = F^{-1}G = S$

Т.е. преобразования, которые переведут $F$ в $E$, переведут $G$ в $S$.

$(F|G) \to (E|S)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow S = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.° $\overline{\xi} = S\overline{\xi'}$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\xi_1 + 4\xi_3 \\ -4\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 \\ 13\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix}$$

**Пример 2**

(Условие то же, что и в примере 1)

$F\colon < \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} >$ $\quad G\colon < \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} >$

*Решение:*

Заметим, что перед нами кососимметричные матрицы.

**Определение 10.1.** Кососимметричная (кососимметрическая) матрица — квадратная матрица $A$, удовлетворяющая соотношению:

$$A^{\mathrm{T}} = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i,j = \overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что $\dim L' = 3$. Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Тогда координаты наших векторов $F$ и $G$ в этом базисе:

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Выполним действия аналогично примеру 1 и получим:

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 40 & 9 \\ -3 & -11 & -2 \\ 8 & 37 & 8 \end{pmatrix}$$

# 11. Сумма и пересечение подпространств

Рассмотрим линейные подпространства $L_1$ и $L_2$.

**Определение 11.1.** Пересечением $L_1$ и $L_2$ называется множество векторов принадлежащих и $L_1$, и $L_2$.

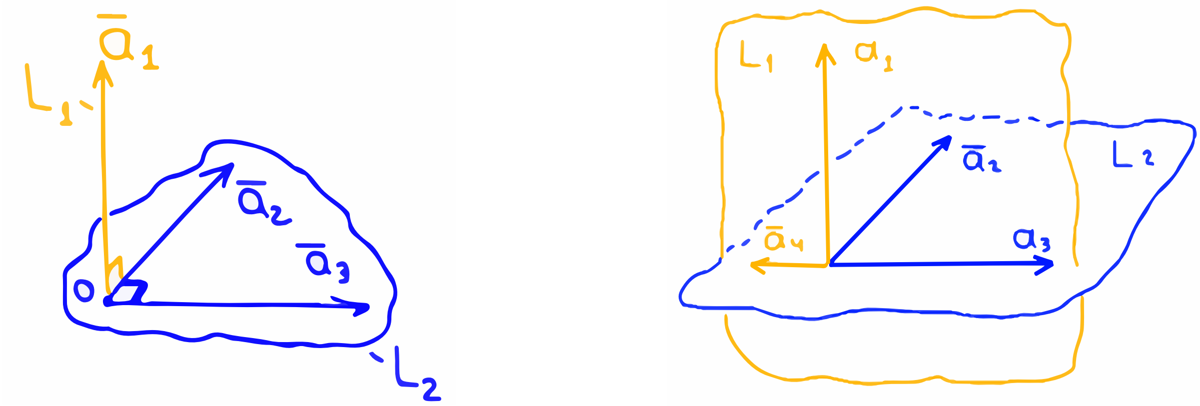
$L_1 \cap L_2$ — линейное подпространство.

**Определение 11.2.** Суммой $L_1$ и $L_2$ называется линейная оболочка их объединения.

**Определение 11.3.** Если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, то пишут так:

$$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2,$$

а сумму называют прямой суммой.




а)

б)

**Рис. 1.** Рисунки подпространств к примерам а) и б)

Если $L = L_1 \oplus L_2$, то говорят, что $L_1$ и $L_2$ — прямые дополнения друг друга.

**Примеры:**

а) $L_1 \colon < \bar{a}_1 > \qquad \dim L_1 = 1$

$L_2 \colon < \bar{a}_2, \bar{a}_3 > \qquad \dim L_2 = 2$

В данном случае вектора некомпланарны.

$L_1 + L_2 =< \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 >= \mathbb{R}^3$

$\dim(L_1 + L_2) = 3 = \dim L_1 + \dim L_2$

Т.о.

$$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$$

б) $L_1 \colon < \bar{a}_1, \bar{a}_4 > \qquad \dim L_1 = 2$

$L_2 \colon < \bar{a}_2, \bar{a}_3 > \qquad \dim L_2 = 2$

$L_1 + L_2 \colon < \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 >\colon \mathbb{R}^3$

Но $\dim(L_1 + L_2) = 3$, т.к. $\bar{a}_4$ можно выкинуть.

В общем случае:

$$\dim(L_1 + L_2) \leqslant \dim L_1 + \dim L_2$$

Ответ о размерности даёт формула Грассмана:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

# 12. Понятие проекции вектора на подпространство

**Определение 12.1.** Пусть $\exists a \in L_1,\, b \in L_2,\ x \in L_1 + L_2 :\ \exists! x = a + b \Leftrightarrow L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$. При этом вектор $a$ называется проекцией вектора $x$ на $L_1$ параллельно $L_2$.

**Пример 3**

Найти проекцию $X(0\ \ -1\ \ -1\ 4)^{\mathrm{T}}$ на подпространство $L_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ вдоль линейной оболочки $L_2 \colon < (1\ \ -1\ 1\ 0)^{\mathrm{T}} >$.

*Решение:*

$$L_1:(1\ 1\ 1\ 1\ |\ 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} \text{ или } L_1 :< \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} > .$$

$$L_2 \colon < \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} >$$

Разложим вектор $X$:

$$\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ -1\\ 4\end{pmatrix} = \underbrace{k\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}_{b\in L_2} + \underbrace{\alpha\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{a\in L_1}$$

Очевидно, что это уравнение задает нам СЛУ. Составим ее расширенную матрицу и решим систему:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \to \begin{pmatrix} k\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -3\\ 4\end{pmatrix}.$$

Отсюда легко найти, что

$$x_{\text{пр}} = \begin{pmatrix} 0\\ -1\\ -1\\ 4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ -3\\ 4\end{pmatrix}.$$

**Пример 4**

Найти размероность и базис суммы подпространств $U_1$ и $U_2$.

$$U_1 \colon < \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 0\\ 2\end{pmatrix} > \quad U_2 : \begin{cases} x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = 0\\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = 0\end{cases}$$

*Решение:*

$$U_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

Последняя строка ЛЗ со второй, ее можно вычеркнуть $\Rightarrow \dim U_1 = 2$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 3\\ 1\end{pmatrix} \right\}$.

Переведём способ задания $U_2$ из СЛУ в линейную оболочку. Для этого решим эту СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & 4 & 0\\ 3 & 1 & -2 & -2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix}, \quad \dim U_2 = 2, \quad \text{базис } U_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \right\}.$$

$$U_1 + U_2 \colon < \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} > .$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)} \begin{pmatrix}1 & 0 & - & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

3 строка ЛЗ с 2 и 4, ее можно вычеркнуть $\Rightarrow \dim(U_1+U_2)=3$, базис: $\left\{ \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\3\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \right\}$.

**Пример 5**

В условиях примера 4 найти размерность и базис пересечения.

*Решение:*

$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

$\dim(U_1+U_2) = 3$, $\dim U_1 = 2$, $\dim U_2 = 2 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 1$

**1 способ**

Зададим $U_1$ как систему: $U_1 \colon < \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\3\\1\end{smallmatrix}\right) >$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & x_2\\ -2 & 3 & x_3\\ 0 & 1 & x_4\end{array}\right) \xrightarrow[(4)-(2)]{(3)+2(1),(3)-3(2)} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & x_2\\ 0 & 0 & x_3+2x_1-3x_2\\ 0 & 0 & x_4-x_2\end{array}\right)$$

$U_1 : \begin{cases} 2x_1 \quad -3x_2 \quad +x_3 \qquad\quad = 0 \\ 2x_1 \quad\ +x_2 \qquad\qquad +x_4 \ = 0 \end{cases}$

$U_1 \cap U_2 = \begin{cases} U_1 \\ U_2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow < \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} > \text{(базис } U_1 \cap U_2\text{)}$$

**2 способ**

Базис $U_1 : a_1, a_2$

Базис $U_2 : b_1, b_2$

$P \in U_1, P \in U_2$;

$P = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$

Семинар 5

# Семинар 5. Линейные отображения. Часть 1.

## 13. Определение линейного отображения

**Определение 13.1.** Пусть заданы $L$ и $\overline{L}$ — два линейных пространства. Отображение $\varphi$ из $L$ в $\overline{L}$ — правило, по которому каждому вектору из $L$ ставится в соответствие единственный вектор из $\overline{L}$.
Обозначение: $\varphi : L \to \overline{L}$.

**Определение 13.2.** Сюрьекция — отображение, при котором каждый элемент из $\overline{L}$ является образом вектора из $L$.

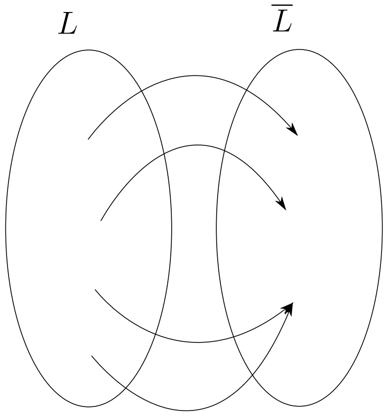



**Рис. 2.** Сюръективная функция

**Определение 13.3.** Инъекция — отображение, при котором каждый образ из $\overline{L}$ имеет единственный прообраз в $L$.

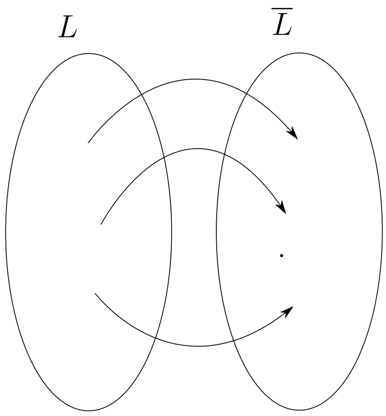



**Рис. 3.** Инъективная функция

**Определение 13.4.** Сюрьекция + инъекция = биекция — это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным (взаимно–однозначное соответствие).

**Определение 13.5.** Если в результате отображения $L = \overline{L}$, то такое отображение называется преобразованием.

**Определение 13.6.** Отображение $\pi$ называется **линейным**, если выполнено:

$$\begin{cases} \varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \\ \varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x). \end{cases}$$

Примеры:

- аффинные преобразования плоскости
- геометрия 3D (т.е. преобразования в трёхмерном пространстве: поворот, симметрия и т.д.)
- присвоение координат в линейном пространстве (пространство многочленов $\to$ пространство столбцов т.е. координатный изоморфизм)
- умножение на матрицу, транспонирование
- дифференцирование, интегрирование (только для определённого интеграла, чтобы избежать появление константы)

Очевидно, что $\varphi(0)=0$.

Рассмотрим ЛЗ систему векторов $a_1,\ldots,a_n$.

$$\alpha_1 a_1+\cdots+\alpha_n a_n=0.$$

Подействуем преобразованием $\varphi$:

$$\alpha_1\varphi(a_1)+\cdots+\alpha_n\varphi(a_n)=0.$$

Отсюда видно, что **система образов** — тоже ЛЗ система векторов с теми же коэффициентами. Но для ЛНЗ системы векторов данное утверждение не верно (контрпример: нуль–преобразование).

**Определение 13.7.** Образ $\varphi:\operatorname{Im}\varphi:\{\varphi(x)\in\overline{L}:x\in L\}$ — множество всех образов из $L$ в $\overline{L}$.

**Определение 13.8.** Ядро $\varphi:\ker\varphi:\{x\in L:\varphi(x)=0\}$ — множество векторов из $L$, которые переходят в 0.

**Определение 13.9.** Ранг $\varphi:r=\dim(\operatorname{Im}\varphi)$ — размерность образа.

**Пример 1**

Работаем в $\mathbb{R}^3$, ОНБ, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$.

Найти $\varphi$, если $\varphi$— ортогональная проекция на:

а) $L_1$: $[\mathbf{r},\ \mathbf{a}]=\mathbf{0}$

б) $L_2$: $(\mathbf{r},\ \mathbf{n})=0$

*Решение:*

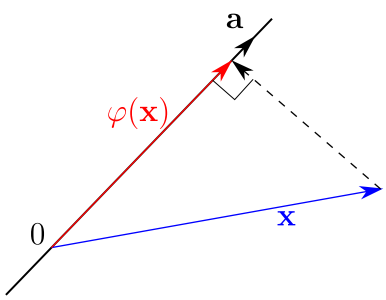



**Рис. 4.** К примеру 1а

а) $\varphi(\mathbf{x})=\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$ — формула для проекции вектора на прямую (из аналит. геометрии).

$\ker\varphi:(\mathbf{r},\mathbf{a})=0$ — плоскость, ортогональная вектору $\mathbf{a}$.

$\operatorname{Im}\varphi:[\mathbf{r},\mathbf{a}]=\mathbf{0}$.

$r=1$ (прямая).

б) $\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{p}$

$\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$

$\ker\varphi:[\mathbf{r},\mathbf{n}]=\mathbf{0}$.

$\operatorname{Im}\varphi:(\mathbf{r},\mathbf{n})=0$ (плоскость).

$r=2$ (плоскость).

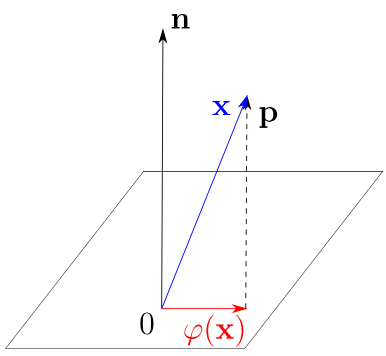



**Рис. 5.** К примеру 1б

# 14. Матрица линейного отображения

$\varphi : L \to \overline{L}, \dim L = n < \infty, \dim \overline{L} = m < \infty$
Базисы в $L : \mathbf{e}(e_1, \ldots, e_n)$, в $\overline{L} : \mathbf{f}(f_1, \ldots, f_m)$, $a \in L$. $\varphi(a) \in \overline{L}$.
Пусть $a$ имеет в $L$ координатный столбец $\mathbf{x}$, а $\varphi(a)$ в $\overline{L}$ координатный столбец $\mathbf{y}$. Построим такую матрицу $A$: $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\mathbf{x}} = \underset{m\times 1}{\mathbf{y}}$.
Пусть $\mathbf{x} = e_1 : (1\ 0\ \cdots\ 0)^{\mathrm{T}}$.
$y = \underbrace{\varphi(e_1)}_{\text{в базисе } f} = Ae_1 = A \cdot (1\ 0\ \cdots\ 0)^{\mathrm{T}} = a_1$ — первый столбец из A. Аналогично поступим с вторым, третьим и т.д. столбцами. Тогда матрица линейного отображения A имеет вид:

$$A = \left.\begin{pmatrix} \boxed{\varphi(e_1)} & \cdots & \boxed{\varphi(e_n)} \end{pmatrix}\right\} m$$

В данном случае, столбцы матрицы — это координатные столбцы $\varphi(e_i)$ в базисе $f$ т.к.:

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Подействуем на него преобразованием $\varphi$:

$$\varphi(a) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(e_n)$$

В примерах 2–5 вопрос следующий: найти $A$, если задано $\varphi$ — преобразование $\mathbb{R}^3$, в ОНБ.

**Пример 2**
$\varphi$ — поворот вокруг $e_3$ на угол $\frac{\pi}{2}$.

*Решение:*

$\underset{e_1, e_2, e_3}{L} \to \underset{e_1, e_2, e_3}{\overline{L}}$ [1].
$\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

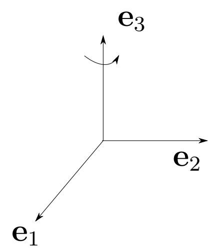


**Рис. 6.** К примеру 2

Для построения матрицы $A$ нам необходимо и достаточно образов преобразования.

**Пример 3**
$\varphi$ — ортогональное проецирование на $L : x = y = z$.

*Решение:*

$\underset{e_1, e_2, e_3}{L} \to \underset{e_1, e_2, e_3}{\overline{L}}$
$\varphi(\mathbf{x}) = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$
«Прогоним» через эту формулу все базисные векторы:

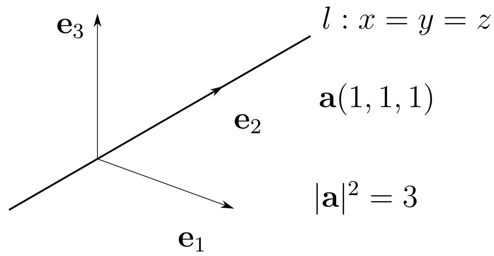


**Рис. 7.** К примеру 3

[1]Всегда в решении задачи обязательно нужно выбрать базисы.

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\mathbf{e}_1) &= \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\\ \varphi(\mathbf{e}_2) &= \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\\ \varphi(\mathbf{e}_3) &= \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

**Пример 4**

$\varphi$ - отражение относительно $\alpha$: $2x - 2y + z = 0$

*Решение:*

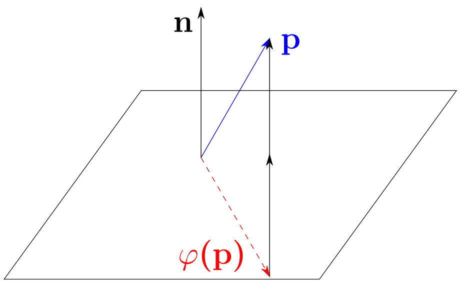



**Рис. 8.** К примеру 4

$$\underset{\mathrm{e_1,e_2,e_3}}{L} \to \underset{\mathrm{e_1,e_2,e_3}}{\overline{L}}$$

$\mathbf{n}(2;-2;1)$

$|\mathbf{n}|^2 = 9$

$\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - 2\dfrac{(\mathbf{p},\mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{n}$

$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) - 2\cdot\frac{2}{9}\left(\begin{smallmatrix}2\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)$ ; $\varphi(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}1\\8\\-4\end{smallmatrix}\right)$;

$\varphi(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}8\\-7\\4\end{smallmatrix}\right)$;

$\varphi(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}-4\\4\\1\end{smallmatrix}\right)$;

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 8 & -4\\ 8 & -7 & 4\\ -4 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

**Пример 5**

$L_1 : x = 0$

$L_2 : 2x = 2y = -z$

*Решение:*

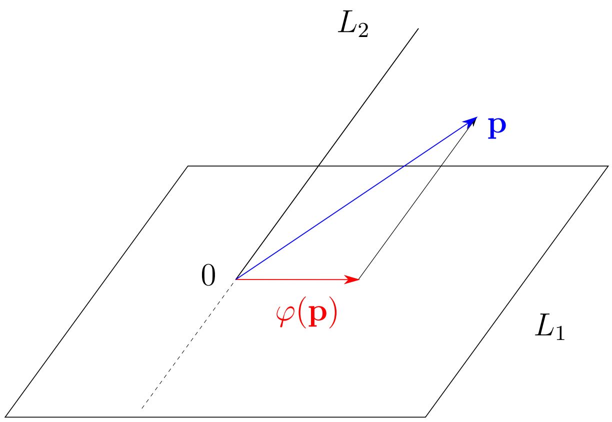



**Рис. 9.** К примеру 5

$$\underset{\mathrm{e_1,e_2,e_3}}{L} \to \underset{\mathrm{e_1,e_2,e_3}}{\overline{L}}$$

$\varphi$ — проецирование на $L_1||L_2$

$L_1 : \langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$, $L_2 : \langle\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}\rangle$

$\mathbf{p} = \underbrace{\alpha\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \beta\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)}_{\in L_1} + \underbrace{\gamma\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{smallmatrix}\right)}_{\in L_2}$

$\mathbf{e}_1 : \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \underbrace{\alpha\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \beta\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)}_{\varphi(\mathbf{e}_1)} + \gamma\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\2\end{smallmatrix}\right)$

$\mathbf{e}_2 : \varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$;

$\mathbf{e}_3 : \varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Понимая пример 5 как отображение, можно заметить, что $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, а значит, для описания всевозможных результатов в $\bar{L}$ можно было выбрать базис из двух векторов.

$f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\varphi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , $\varphi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\varphi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Пример 6**

$\varphi : \underset{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}{L} \Rightarrow \underset{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_4}{\bar{L}}$

$L : \langle \underset{=e_1}{1}, \underset{=e_2}{x}, \underset{=e_3}{x^2} \rangle$ , $L : \langle \underset{=f_1}{1}, \underset{=f_2}{x}, \underset{=f_3}{x^2}, \underset{=f_4}{x^3} \rangle$

*Решение:*

$\varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \int\limits_0^x 1dt = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) &= \int\limits_0^x tdt = \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_3) &= \int\limits_0^x t^2dt = \frac{x^3}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

# Семинар 6

# Семинар 6. Линейные отображения. Часть 2.

Для начала решим небольшой пример по прошлому семинару.

**Пример 1**
$\varphi : M_{2\times 2} \to M_{2\times 1}, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу линейного преобразования $A$.

*Решение:*

Запишем базисы:
$M_{2\times 2} : \mathbf{e}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$
$M_{2\times 1} : \mathbf{f}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$.
Для удобства в общем виде найдём, что значит наше преобразование:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b \\ c+4d \end{pmatrix}.$$

Далее «прогоним» через преобразование базис $\mathbf{e}$:
$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \left(\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_4) = \left(\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}\right)$.
Отсюда, получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 15. Рассмотрение ядра и образа

Рассмотрим $\varphi : \underset{\dim L = n}{L} \to \underset{\dim \overline{L} = m}{\overline{L}}$.
Ядро: $\ker\varphi : \{\mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$
Очевидно, что ЛНЗ решения такого уравнения формируют ФСР, а ФСР задаёт линейное подпространство. Вспоминая количество столбцов в ФСР, легко получить формулу:

$$\boxed{\dim\ker\varphi = n - \operatorname{Rg} A}. \tag{1}$$

Образ $\operatorname{Im}\varphi : \{\mathbf{y} \in \overline{L} : \exists \mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.
Аналогично $\operatorname{Im}\varphi \in \overline{L}$ формирует линейное подпространство т.к.

$$A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$
$$A\alpha\mathbf{x} = \alpha A\mathbf{x}.$$

Выберем в $L$ базис $\mathbf{e} : \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n \leftarrow \varphi$ (это обозначение значит «подействуем преобразованием $\varphi$»)
$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha_1\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_1)}_{=\mathbf{a}_1} + \cdots + \alpha_n\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_n)}_{=\mathbf{a}_n} = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$.
Заметим, что $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы $A$. Отсюда следует формула:

$$\boxed{\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Rg} A = r}. \tag{2}$$

Сложим формулы (1) и (2) и получим:

$$\boxed{\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n}. \tag{3}$$

В примерах 2–5: $L=\mathbb{R}^4, \overline{L}=\mathbb{R}^3, A=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -2\end{smallmatrix}\right)$.

**Пример 2**

Найти образ $\mathbf{x}=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

*Решение:*

$\varphi : A\mathbf{x}=\mathbf{y}$, т.е. нужно перемножить матрицу $A$ и вектор $\mathbf{x}$.

$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)=\mathbf{o}\Rightarrow$ ядро не пусто.

**Пример 3**

Найти прообраз $\mathbf{y}=\left(\begin{smallmatrix}4\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$.

*Решение:*

Итак $\varphi : \underline{A}\mathbf{x}=\underline{\mathbf{y}}$. Мы знаем то, что подчёркнуто. Очевидно, что мы получили СЛУ относительно $\mathbf{x}$. Решим ее.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 4\\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[(1)\leftrightarrow(3)]{(3)\cdot 0.5;(1)\cdot(-1)}\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{(2)-2(1)}\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)}\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{array}\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2\end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4\end{array}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\\x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}c_2$$

**Пример 4**

Найти ядро отображения.

*Решение:*

Для этого нужно решить СЛУ $A\mathbf{x}=\mathbf{o}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ker\varphi : \langle\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle^{2},\quad \dim\ker\varphi=2.$$

**Пример 5**

Найти образ $\operatorname{Im}\varphi$.

*Решение:*

[2] В примере 2 как раз и был вектор из $\ker\varphi$

$\operatorname{Im}\varphi : \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Очевидно, что $(2) = -2(1), (4) = (3) + (1) \Rightarrow 2$ и 4 строку можно вычеркнуть.

$\operatorname{Im}\varphi : \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$

$\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \ker \varphi = 4$

# 16. Два важных частных случая

1°. Если $\underline{\dim \ker \varphi = 0}$:
$\dim \operatorname{Im}\varphi = n = \operatorname{Rg} A \Rightarrow$ (столбцы ЛНЗ)
$\mathbf{y} \in \overline{L}\ \ker \varphi = 0$
Пусть $\mathbf{y} = A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$
$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker \varphi = \{0\} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$
Если $\ker \varphi = \{0\}$, то это <u>инъекция</u>.
Оказывается, верно и обратное:
Отображение инъективно $\Leftrightarrow \ker \varphi = 0$
Докажем в другую сторону:
Пусть $\dim \ker \varphi \geqslant 1 \Rightarrow \exists \mathbf{x}_0 \neq 0 \in \ker \varphi$
$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$
$A(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$ — противоречие инъекции $\Rightarrow \ker \varphi = \{0\}$
Число прообразов $= 0, 1, \infty$

2°. Если $\underline{\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^m = \overline{L}}$:
$\dim \operatorname{Im}\varphi = m = \operatorname{Rg} A$ — строки ЛНЗ $\leftarrow$ <u>сюръекция</u>

Биекция = сюръекция + инъекция
$\operatorname{Rg} A = n = m$
Т.о. **биекция задаётся невырожденной матрицей**. В таком случае

$$\dim L = \dim \overline{L}$$

Изоморфизм — биективное линейное отображение.
Если существует изоморфизм $L \to \overline{L}$, то говорят, что $L$ и $\overline{L}$ изоморфны.

**Теорема 16.1.** *$L$ и $\overline{L}$ изоморфны* $\iff \dim L = \dim \overline{L}$.

Для изоморфизма $\exists\ \varphi^{-1}$ — обратное отображение, его матрица $A^{-1}$.

**Пример 6**
Доказать, что отображение $\varphi(f(x)) = 2f(x) + f'(x)$ — изоморфизм в пространстве $P_2$ — многочленов степени не выше 2. Найти $\varphi^{-1}$.

*Решение:*

Стандартный базис $L$: $\{1, x, x^2\}$, где $\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_2 = x$, $\mathbf{e}_3 = x^2$.
Общий вид $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\dim L = 3$.

$$\varphi(f(x)) = 2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b = 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c), \quad \overline{L}\colon \{1, x, x^2\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(e_1) &= 2 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_2) &= 2x + 1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_3) &= 2x^2 + 2x \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rg} = 3 \Rightarrow$ изоморфизм. Найдем $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\varphi^{-1}\colon A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

## 17. Матрица отображения в новых базисах.

Пусть в $L$ и $\overline{L}$ выбраны базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$, задано отображение $\varphi\colon L \to \overline{L} : A$. Поменяем базисы: $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, $\mathbf{f}' = \mathbf{f}P$. Найдём $A'$:

$$\mathbf{x} \in L,\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}; \qquad \mathbf{y} \in L,\, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}$$

Из теории отображений: $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi}$; $\quad \boldsymbol{\eta}' = A'\boldsymbol{\xi}'$;
Из замены базиса: $\boldsymbol{\eta} = P\boldsymbol{\eta}'$; $\quad \boldsymbol{\xi} = S\boldsymbol{\xi}'$;

$$P\boldsymbol{\eta}' = A\boldsymbol{\xi} = AS\boldsymbol{\xi}' \Rightarrow \boldsymbol{\eta}' = P^{-1}AS\boldsymbol{\xi}' = A'\boldsymbol{\xi}' \Rightarrow \boxed{A' = P^{-1}AS.}$$

Если $\varphi$ — преобразование, то $P = S$ и $A' = S^{-1}AS$

**Пример 7**

Дано преобразование $\varphi$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{e}$. Смена базиса: $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти $A'$.

Воспользуемся $A' = S^{-1}AS$. Посчитаем $S^{-1}$:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

*Решение:*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# 18. Линейные функции

**Определение 18.1.** Функция $f(x)$ на линейном пространстве $L$ — правило, которое $\forall x \in L$ ставит в соответствие $f(x) \to \mathbb{R}$.

Функция $f$ линейная, если

$$\begin{cases} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) \end{cases}$$

Это частный случай линейного отображения при $m = 1$.

Примеры:

а) Присвоить вектору его $i$-тую координату.

б) Скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$.

в) Определённый интеграл.

$\underset{1\times n}{A}$ - строка функции $A = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)$, где $\varphi_i$ — образ $i$-го базисного вектора (т.е. $\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$)

Линейные функции образуют линейное пространство.

**Пример 8**

Может ли $\forall x \in L$ выполняться:

а) $f(x) > 0$? Ответ: нет, так как нет нуля;

б) $f(x) \geqslant 0$? Ответ: только если $f(x) \equiv 0$;

в) $f(x) = \alpha$? Ответ: только для $\alpha \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$.

*Решение:*

**Пример 9**

$P(t)$ — многочлен степени $\leqslant n$, $f(P(t)) = P'(1)$. Найти $A$.

*Решение:*

Базис: $\{1, t, \cdots, t^n\}$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) &= 0 \\ \varphi(\mathbf{e}_2) &= 1 \\ \varphi(\mathbf{e}_3) &= 2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(\mathbf{e}_{n+1}) &= n \end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

# 19. Инвариантные подпространства

Будем работать только с преобразованиями.

## 19.1. Определение

**Определение 19.1.** Подпространство $L' \subset L$ называется **инвариантным относительно преобразования $\varphi$**, если

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \in L' \text{ или } \varphi(L') \subset L'.$$

Например:

- $\mathbf{o}$, L — вырожденные случаи.
- Поворот $\mathbb{R}^3$ вокруг $\mathbf{e}_3$ на $\pi/2$ (рис. 12). Инвариантные подпространства: $\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$.
- Ядро преобразования $\varphi$ ($\ker \varphi$) всегда инвариантно относительно этого преобразования $\varphi$.
- $\operatorname{Im} \varphi$

  **Теорема 19.1.** *Если какое-то подпространство содержит в себе образ, то $L'$ инвариантно относительно $\varphi$.*

  *Доказательство.*

  $$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \subset \operatorname{Im} \varphi \subset L'$$

  □

## 19.2. Свойства инвариантных подпространств

**Предложение 19.1.** *Сумма инвариантных подпространств инвариантна.*

*Доказательство.*

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{y} \in L_2, \varphi(\mathbf{y}) \in L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) \in L_1 + L_2$$

□

**Предложение 19.2.** *Пересечение инвариантных подпространств инвариантно.*

*Доказательство.*

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{x} \in L_2, \varphi(\mathbf{x}) \in L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \cap L_2$$

□

# 20. Матрица преобразования

## 20.1. Вид матрицы преобразования

Рассмотрим линейное пространство $L$, $\dim L = n$. Пусть $L' \subset L$, $\dim L' = k$ — инвариантное подпространство относительно $\varphi$, базис в $L' : \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, базис в $L : \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Напомним, что матрица преобразования $A$ строится из образов базисных векторов:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\varphi(e_1)} & \cdots & \boxed{\varphi(e_n)} \end{pmatrix}$$

Т.о. матрица преобразования в выбранном базисе имеет следующий вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O & A_4 \end{array}\right)^{\square}$$ — клетчочно–треугольный вид.[3]

[3]Квадрат над матрицей значит, что матрица блочная.

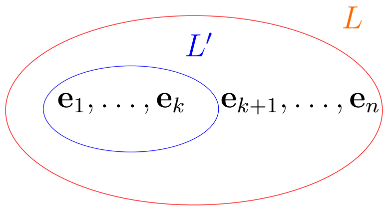



**Рис. 10.** Подпространство в L

Пусть теперь $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_s, \forall i\ L_i$ — инвариантное подпространство относительно $\varphi$.

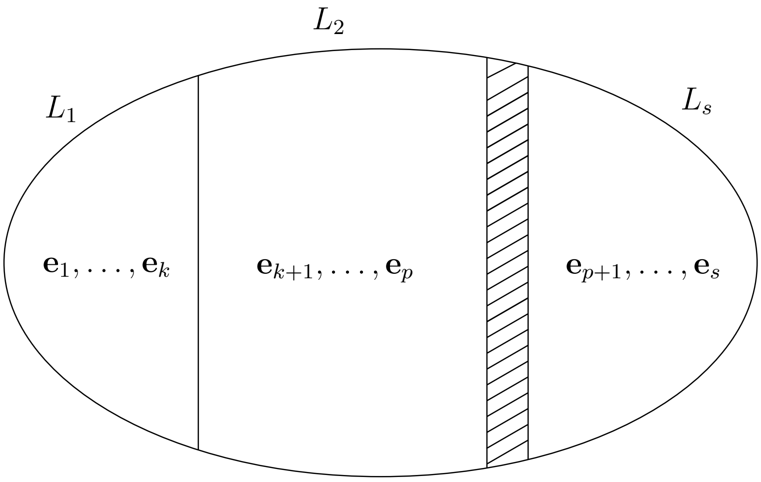



**Рис. 11.** Прямая сумма подпространств

Тогда матрица преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & O & \ldots & O \\ O & \boxed{A_2} & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & \boxed{A_s} \end{pmatrix} \square \text{ — клеточно–диагноальный вид.}$$

Ширина и высота каждой клетки равны размерности инвариантного подпространства.

**Пример 10**
Найти инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^3$ относительно $\varphi$.

*Решение:*

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Из вида $A$ видно, что существует два не пересекающихся инвариантных подпространства.
$\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$.

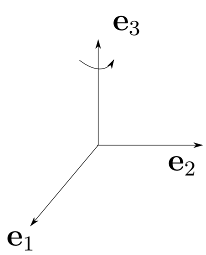



**Рис. 12.** К примеру 1

## 20.2. Геометрический смысл матрицы преобразования

Поговорим о геометрии. Научимся определять по внешнему виду матрицы ее геометрический смысл.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — отражение относительно $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — проекция.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — растяжение вдоль $\mathbf{e}_2$ в 3 раза.

Нам интересны матрицы вида:

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ — обобщённое растяжение $\Leftrightarrow \varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

# 21. Собственный вектор

## 21.1. Определение

Рассмотрим преобразование $\varphi$ с матрицей $A$, тогда ненулевой вектор $\mathbf{x}$ называется собственным вектором, если $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$; $\lambda$ — собственное значение.

Множество собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, образует собственное пространство.

## 21.2. Свойства

**Предложение 21.1.** *Собственный вектор (и только он) порождает одномерное инвариантное подпространство.*

*Доказательство.* Рассмотрим инвариантное подпространство $\langle \mathbf{x} \rangle \Rightarrow \varphi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}) = \alpha \lambda \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x} \rangle$. □

# 22. Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов

$$\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{o}$$

Рассмотрим тождественное преобразование $Id$, матрица его преобразования $E$.

$$(\varphi - \lambda Id)(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$$

Перейдём к матричному виду:

$$(\varphi - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{o} \tag{$*$}$$

Итак, мы получили СЛУ размеров $n \times n$. Она имеет либо одно решение (нулевое), но оно нам не интересно, т. к. $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, либо бесконечно много решений $\Rightarrow A$ должна быть вырожденной $\Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \to \lambda_i$ — собственное значение $\to (*) \to \mathbf{x}$ — собственный вектор.

**Пример 11**

Найти собственные значения и собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

Найдём $\lambda$ из условия $\det(A - \lambda E) = 0$:

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda - 15 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -5$

Далее подставим числа $\lambda$ в $(*)$:

$1^\circ$ $\lambda_1 = 1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right)$,

$L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leftarrow$ Собственный вектор, перейдёт сам в себя т.к. $\lambda = 1$.

$2^\circ$ $\lambda_2 = 3 : L_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$3^\circ$ $\lambda_3 = -5 : L_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$

**Лемма 22.1.** *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, попарно линейно независимы.*

Соберём базис $\mathbf{f}$ $\left\{ \underset{\mathbf{f}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}} \right\}$

$\varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$

$\varphi(\mathbf{f}_2) = 3\mathbf{f}_2 \to A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{f}$.

$\varphi(\mathbf{f}_3) = 5\mathbf{f}_3$

# 23. Диагонализируемость матрицы

**Пример 12**

Диагонализировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

$\det(A - \lambda E) = 0$:

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \underset{\text{Не забывайте про свойства детерминанта}}{(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0}$

$\lambda = 1$ — корень алгебраической кратности 2.

$\lambda = 2$ — корень алгебраической кратности 1 (простой корень).

1.° $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right), \; L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{формирует} \\ \text{плоскость}}} \rangle$$

$\dim L_1 = 2$ — геометрическая кратность (размерность собственного подпространства).

2.° $\lambda = 2$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \; L_1 = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Выберем базис: $\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Поэтому $\varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$, $\varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2$, $\varphi(\mathbf{f}_3) = 2\mathbf{f}_3$

**Ответ:** $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

• Геометрическая кратность $\leqslant$ алгебраическая кратность

• Если геометрическая кратность строго меньше ($<$) алгебраической кратности хотя бы для одного $\lambda$, то преобразование недиагонализируемо.

**Пример 13**

Диагонализировать матрицу: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

*Решение:*

$$\det\,(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

Получаем, что $\lambda = 2$ алгебраической кратности 3.

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \; L_1 = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Получили, что геометрическая кратность (равна 1) меньше алгебраической кратности (равна 3). Тогда матрица недиагонализируема (не хватило собственных векторов).

**Пример 14**
Диагонализировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

$$\det\,(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$\lambda = 1, \quad \underbrace{\lambda = \pm\, i}_{\substack{\text{отвечают за} \\ \text{инвариантную} \\ \text{плоскость}}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);\ L_1 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$$

**Условие диагонализируемости матрицы:**

1.° *В частности*: $A_{n\times n}$ диагонализируема, если $A$ имеет $n$ различных вещественных собственных значений.

2.° *В общем случае*: $A$ диагонализируема $\Leftrightarrow$ $L$ раскладывается в прямую сумму собственных подпространств.