

Семинар 7. Инвариантные и собственные подпространства. Часть 1.

1. Инвариантные подпространства

Будем работать только с преобразованиями.

1.1. Определение

Определение 1.1. Подпространство $L' \subset L$ называется **инвариантным относительно преобразования φ** , если

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \in L' \text{ или } \varphi(L') \subset L'.$$

Например:

- \mathbf{o}, L — вырожденные случаи.
- Поворот \mathbb{R}^3 вокруг \mathbf{e}_3 на $\pi/2$ (рис. 3). Инвариантные подпространства: $\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$.
- Ядро преобразования φ ($\ker \varphi$) всегда инвариантно относительно этого преобразования φ .
- $\text{Im } \varphi$

Теорема 1.1. Если какое-то подпространство содержит в себе образ, то L' инвариантно относительно φ .

Доказательство.

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \in \text{Im } \varphi \subset L'$$

□

1.2. Свойства инвариантных подпространств

Предложение 1.1. Сумма инвариантных подпространств инвариантна.

Доказательство.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{y} \in L_2, \varphi(\mathbf{y}) \in L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) \in L_1 + L_2$$

□

Предложение 1.2. Пересечение инвариантных подпространств инвариантно.

Доказательство.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{x} \in L_2, \varphi(\mathbf{x}) \in L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \cap L_2$$

□

2. Матрица преобразования

2.1. Вид матрицы преобразования

Рассмотрим линейное пространство L , $\dim L = n$. Пусть $L' \subset L$, $\dim L' = k$ — инвариантное подпространство относительно φ , базис в $L' : \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$, базис в $L : \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

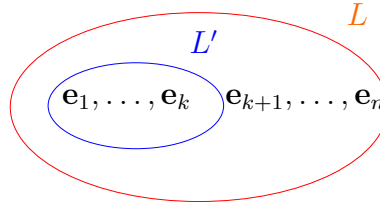


Рис. 1. Подпространство в L

Напомним, что матрица преобразования A строится из образов базисных векторов:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\varphi(e_1)} & \cdots & \boxed{\varphi(e_n)} \end{array} \right)$$

Т.о. матрица преобразования в выбранном базисе имеет следующий вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O & A_4 \end{array} \right)^{\square} \text{ — клеточно-треугольный вид.}^1$$

Пусть теперь $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_s, \forall i L_i$ — инвариантное подпространство относительно φ .

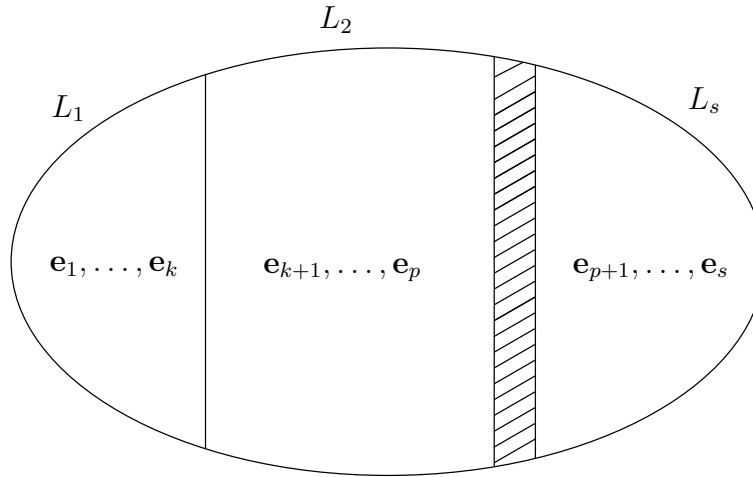


Рис. 2. Прямая сумма подпространств

Тогда матрица преобразования имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boxed{A_1} & O & \cdots & O \\ \hline O & \boxed{A_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \cdots & \boxed{A_s} \end{array} \right)^{\square} \text{ — клеточно-диагональный вид.}$$

Ширина и высота каждой клетки равны размерности инвариантного подпространства.

Пример 1

Найти инвариантные подпространства в \mathbb{R}^3 относительно φ .

¹Квадрат над матрицей значит, что матрица блочная.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Из вида A видно, что существует два не пересекающихся инвариантных подпространства.

$\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$.

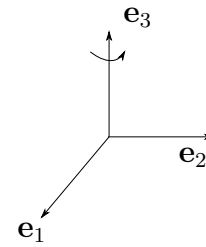


Рис. 3. К примеру 1

2.2. Геометрический смысл матрицы преобразования

Поговорим о геометрии. Научимся определять по внешнему виду матрицы ее геометрический смысл.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — отражение относительно $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — проекция.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — растяжение вдоль \mathbf{e}_2 в 3 раза.

Нам интересны матрицы вида:

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ — обобщённое растяжение $\Leftrightarrow \varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

3. Собственный вектор

3.1. Определение

Рассмотрим преобразование φ с матрицей A , тогда ненулевой вектор \mathbf{x} называется **собственным вектором**, если $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$; λ — собственное значение.

Множество собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, образует собственное пространство.

3.2. Свойства

Предложение 3.1. *Собственный вектор (и только он) порождает одномерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Рассмотрим инвариантное подпространство $\langle \mathbf{x} \rangle \Rightarrow \varphi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}) = \alpha \lambda \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x} \rangle$. □

4. Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов

$$\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{o}$$

Рассмотрим тождественное преобразование Id , матрица его преобразования E .

$$(\varphi - \lambda Id)(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$$

Перейдём к матричному виду:

$$(\varphi - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (*)$$

Итак, мы получили СЛУ размеров $n \times n$. Она имеет либо одно решение (нулевое), но оно нам не интересно, т. к. $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, либо бесконечно много решений $\Rightarrow A$ должна быть вырожденной $\Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \rightarrow \lambda_i$ — собственное значение $\rightarrow (*) \rightarrow \mathbf{x}$ — собственный вектор.

Пример 2

Найти собственные значения и собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём λ из условия $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 1 \\ -2 & -3 - \lambda & 2 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda - 15 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -5$$

Далее подставим числа λ в (*):

$$1. \lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \leftarrow$ Собственный вектор, перейдёт сам в себя т.к. $\lambda = 1$.

$$2. \lambda_2 = 3 : L_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$3. \lambda_3 = -5 : L_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle$$

Лемма 4.1. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, попарно линейно независимы.

$$\text{Соберём базис } \mathbf{f} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3$$

$$\varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$$

$$\varphi(\mathbf{f}_2) = 3\mathbf{f}_2 \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ в базисе } \mathbf{f}.$$

$$\varphi(\mathbf{f}_3) = 5\mathbf{f}_3$$

5. Диагонализированность матрицы

Пример 3

Диагонализировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0:$$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -2 \\ 2 & 2 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

Не забывайте про свойства детерминанта

$\lambda = 1$ — корень алгебраической кратности 2.

$\lambda = 2$ — корень алгебраической кратности 1 (простой корень).

$$1. \lambda = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right), L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{формирует плоскость}}$$

$\dim L_1 = 2$ — геометрическая кратность (размерность собственного подпространства).

$$2. \lambda = 2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Выберем базис: $\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Поэтому $\varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$, $\varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2$, $\varphi(\mathbf{f}_3) = 2\mathbf{f}_3$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

• Геометрическая кратность \leq алгебраическая кратность

• Если геометрическая кратность строго меньше ($<$) алгебраической кратности хотя бы для одного λ , то преобразование **недиагонализуемо**.

Пример 4

Диагонализировать матрицу: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^3 = 0$$

Получаем, что $\lambda = 2$ алгебраической кратности 3.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Получили, что геометрическая кратность (равна 1) меньше алгебраической кратности (равна 3). Тогда матрица **недиагонализуема** (не хватило собственных векторов).

Пример 5

Диагонализировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det (A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda = 1, \quad \underbrace{\lambda = \pm i}_{\substack{\text{отвечают за} \\ \text{инвариантную} \\ \text{плоскость}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \quad L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Условие диагонализируемости матрицы:

1. В частности: $A_{n \times n}$ диагонализируема, если A имеет n различных вещественных собственных значений.
2. В общем случае: A диагонализируема $\Leftrightarrow L$ раскладывается в прямую сумму собственных подпространств.

Команда **BOTAY!**:

Д. Георгий, [VK](#)

К. Ксения, [VK](#)

Г. Мадина, [VK](#)

С. Паша, [VK](#)

М. Матвей, [VK](#)