ЛЕКЦИЯ 27
Автоматы

1. Машина Тьюринга

Это абстрактный исполнитель, живущий на бесконечной ленте, в клетках которой находятся буквы α принадлежащие фиксированному алфавиту А. Каретка машины Тьюринга может двигаться по ленте влево или вправо. Каретка может видеть, что нарисовано на ленте (на текущей клетке). Также у нее есть возможность изменять символы на ленте, т.е. она может записать, изменить. А также у нее есть состояние q. При этом это состояние принадлежит множеству допустимых состояний Q. Подмножество состояний — состояние останова (остановки). Это подмножество конечно. Поведение этой машины детерминированно (оно задается увиденным символом и предыдущим состоянием). Она из исходного состояния переходит в новое состояние, в котором определено: 1) Состояние системы 2) Считанный символ 3) Действие.

Множества Q и A конечные. Возможно очень большие, но конечные. Мощность множества — число конечных состояний в нем.

Программа, которую мы написали, не хранится нигде. Типа в памяти каретки. Нужно её куда–то записать. Самое простое — написать не ленте. Тогда каретка, которая едет на двух лентах сразу — универсальная (программируемая) машина Тьюринга. О скорости работы нет разговора. Есть вопрос о вычислимости алгоритма.

2. Вычислимость функций (алгоритмов)

Что по сути такое алгоритм? Есть определенные возможные входные данные. Есть множество значений — множество возможных результатов. Алгоритм — своего рода функция, которая переводит множество определения в множество значений. Но невычислимые функции. Вычислимые функции (алгоритмы) — это алгоритмы. Функции называются вычислимыми, если есть возможность посчитать её через машину Тьюринга. То, что мы называем раличными алгоритмами (все виды сортировок) — это, с точки зрения вычислимости - один алгоритм. Нам ведь не важен путь (как и не важна скорость). Нам важно, что есть возможность получить результат, не более того. А какие алгоритмы невычислимые? Например, доказано, что нельзя вычислить вычислимость программы. Т.е. невозможно написать программу, которая посчитает, закончится программа или нет.

Исполнители A и B называются алгоритмически эквивалентными, если можно сэмулировать A на B и B на A.

3. Клеточные автоматы. Игра жизнь Джона Конвая

Простейшие автоматы — это клетки, живущие не линии. В клетках — нули и единицы. Состояние клетки зависит только от самой клетки и от двух ее ближайших соседей. В каждый следующий момент времени клетка меняет свое состояние в зависимости от своего и соседей состояний. При этом для всех клеток алгоритмы одинаковы. Всего есть 256 клеточных автоматов (возможных комбинаций для данных состояний триад клеток). Среди них есть и совсем простые. Интересны несколько из них. Одно — правило 30, т.к. порождает случайные хаотические структуры. Также есть правила жизни Джона Конвея. Если клетка была жива, то остается живой при 2 или 3 соседях. А если была мертва, то оживает при наличии трех соседей.

Рассматриваю пример 2(а) из 4 варианта. После того, как нашли предельную функцию, получилось, что

$$g_n(x) = \arcsin\frac{1}{6} - \arcsin\frac{nx}{1+6nx}.$$

Рассматриваем все это дело на $E = (1, +\infty)$. Пусть $t = \frac{1}{nx}$. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \& \forall x \in E \longmapsto 0 < t < 1.$$

А теперь мы подгоняем функцию так, чтобы было удобно:

$$f_n(x) = \arcsin\frac{nx}{1+6nx} = \arcsin\frac{1/t}{1+6/t} = \arcsin\frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{1}{6}t} = f(t),$$

тогда

$$f(0) = \arcsin\frac{1}{6}$$

и

$$f'(t) = -\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{(1+\frac{1}{6}t)^2 - \frac{1}{36}}\,(1+\frac{1}{6}t)}.$$

Теперь разлагаем по тейлору, приправляя лагранжем

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(\xi)}{1!}t = \arcsin\frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{(1+\frac{1}{6}\xi)^2 - \frac{1}{36}}\,(1+\frac{1}{6}\xi)}t, \quad \xi \in (0,1)$$

И тогда $g_n(x)$ имеет вид:

$$g_n(x) = \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{(1+\frac{1}{6}\xi)^2 - \frac{1}{36}}\,(1+\frac{1}{6}\xi)}\frac{1}{nx}.$$

Причем выполнено, что (т.к. вся эта штука убывает (доказывать мы этого конечно же не будем (-балл на экзамене за это (НЕ ОБОСНОВАЛ КОКОКОКОКОКОКО))))

$$\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{(1+\frac{1}{6}\xi)^2 - \frac{1}{36}}\,(1+\frac{1}{6}\xi)} \leqslant \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{(1+\frac{1}{6}\cdot 0)^2 - \frac{1}{36}}\,(1+\frac{1}{6}\cdot 0)} = C.$$

Тогда

$$g_n(x) \leqslant C \cdot \frac{1}{nx} \overset{E}{\leqslant} g_n(1) = C \cdot \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ оценили еденицей т.к. } \frac{1}{nx} \text{ убывает.}$$

И вот теперь мы доказали, что тогда и супремум будет стремиться к 0, значит по критерию все равномерно.

Г. С. Демьянов, VK
С. С. Клявинек, VK
А. С. Кожарин, VK