Семинар 10. Критерий Сильвестра. Евклидовы пространства.

1. Критерий Сильвестра

1.1. Положительно и отрицательно определенные функции

Квадратичная функция называется **положительно определенной**, если для любого вектора $x \neq 0$, верно: $k(x) > 0$. Например, функция $\mathbf{k}(x) = x_1^2 + 4x_2^2$.

Квадратичная функция называется **отрицательно определенной**, если для любого вектора $x \neq 0$, верно: $k(x) < 0$. Например, функция $\mathbf{k}(x) = -2x_1^2 - x_2^2$.

Важной является следующая задача: определить, является ли квадратичная функция положительно определенной. Мы уже можем дать ответ на этот вопрос. Для этого можно привести функцию к каноническому виду, и в случае если на диагонали находятся только «+1», дать утвердительный ответ, иначе дать отрицательный ответ. Однако, оказывается, что для того, чтобы выяснить положительную определенность функции необязательно приводить ее к каноническому виду. Ответ на поставленный вопрос дает критерий Сильвестра.

1.2. Критерий Сильвестра

Теорема 1.1 (Критерий Сильвестра)**.** *Для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы миноры ее матрицы удовлетворяли неравенствам:*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Миноры в левой части называются главными минорами матрицы.

Доказательство. Центральный тезис: при методе элементарных преобразований главные миноры в процессе не меняются в силу свойств детерминанта.

Необходимость: в диагональном виде все диагональные элементы положительны, поэтому в исходном виде $M_k > 0$.

Достаточность: Докажем по индукции. Для первого элемента: $M_1 > 0 \Rightarrow \beta_{11} = \varepsilon_1 > 0$. Тогда на k-ом шаге:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & \dots & \varepsilon_k & \\ \hline & O & & C_k \end{array}\right)$$

В таком виде $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{M_{k+1}}{M_k} > 0$, т.к. $M_{k+1} > 0$ и $M_k > 0$. □

Пример 1

Является ли квадратичная функция $\mathbf{k}(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ положительно определенной?

Решение:

Матрица квадратичной функция: $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим главные миноры: $\Delta_1 = |2| = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 > 0$.

Все главные миноры положительны, таким образом получили
Ответ: да, является положительно определенной.

Пример 2
Дана квадратичная функция: $\mathbf{k}(x) = x_1^2 + \lambda x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. При каком λ функция $\mathbf{k}(x)$ положительно определена?

Решение:
Матрица квадратичной функции: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы ее главные миноры были положительны. Рассмотрим их:

$$\Delta_1 = |1| = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\lambda - 4 > 0.$$

Получили систему из двух условий: $\begin{cases} \lambda - 1 > 0, \\ 3\lambda - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda > \dfrac{4}{3}$.

Ответ: $\lambda > \dfrac{4}{3}$.

Пример 3
При каких α квадратичная форма $\mathbf{k}(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3$ положительно определена?

Решение:
Матрица квадратичной функции: $B = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы ее главные миноры были положительны. Рассмотрим их:

$$\Delta_1 = |2| = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 2 - \alpha^2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\alpha^2 > 0.$$

Получили систему из двух условий: $\begin{cases} 2 - \alpha^2 > 0, \\ 5 - 3\alpha^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \left(-\sqrt{\dfrac{5}{3}}, \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$.

Пример 4
Доказать, что для отрицательной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались, начиная со знака «$-$».

Решение:
Рассмотрим квадратичную функцию $\mathbf{k}(x)$ с матрицей B. Пусть она отрицательно определена. Тогда функция $-\mathbf{k}(x)$ с матрицей $-B$ определена положительно. Поэтому критерием (необходимым и достаточным) отрицательной определенности функции $\mathbf{k}(x)$ является положительность всех главных миноров матрицы:

$$-B = \begin{pmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1n} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} & \cdots & -\beta_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -\beta_{n1} & -\beta_{n2} & \cdots & -\beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря:

$$\Delta_1 = -\beta_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & -\beta_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots$$

Опираясь на свойства детерминанта (вынесем минус из каждой строки, всего k раз, где k – порядок минора), перепишем последнее:

$$\Delta_1 = \beta_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \ldots$$

Таким образом, доказали важное следствие критерия Сильвестра: для отрицательной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались, начиная со знака «$-$».

С целью не забыть, с какого знака начинается чередование, полезно помнить, квадратичная функция с матрицей E (где E - единичная матрица) положительна определена, а квадратичная функция с матрицей $-E$ отрицательно определена.

2. Евклидовы пространства

2.1. Определения

Определение 2.1. Линейное пространство $\mathcal{E}$ называется евклидовы, если на нем задано скалярное произведение.

Определение 2.2. Скалярное произведение в вещественном линейном пространстве L ставит в соответствие число, обозначаемое $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$, таким образом, что для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и чисел α, β выполнены следующие условия:

1) $(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = (\mathbf{y},\ \mathbf{x})$.
2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{z}) = (\mathbf{x},\ \mathbf{z}) + (\mathbf{y},\ \mathbf{z})$.
3) $(\alpha\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$.
4) $\forall \mathbf{x} \neq 0 \longmapsto (\mathbf{x},\ \mathbf{x}) > 0$.

Видно, что «школьное» скалярное произведение подходит. Иначе говоря, *задана положительно определенная квадратичная форма.*

Пример 5

Является ли в пространстве многочленов степени $\leqslant n$ скалярным произведением

$$(\mathbf{p},\ \mathbf{q}) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

Решение:

Проверим условия, определенные для скалярного произведения:

1) $p \cdot q = q \cdot p$.

2, 3) Определённый интеграл обладает свойствами линейности.

4) Если $p(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[-1, 1]$:

$$(\mathbf{p},\ \mathbf{p}) = \int\limits_{-1}^{1} p^2(t)dt,$$

$p^2(t)$ — четная функция. Значение этого интеграла — площадь подграфика. Т.к. $p(t) \not\equiv 0$, эта площадь не отрицательна $\Rightarrow (\mathbf{p},\, \mathbf{p}) > 0$.

Таким образом, так действительно определено скалярное произведение в пространстве многочленов.

3. Матрица Грама

3.1. Определение

Определение 3.1. Выберем базис $\mathbf{e}\,\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}$ — координаты векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{e}$. Вспомним, что тогда скалярное произведение запишется так:

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}\Gamma\boldsymbol{\eta},$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

— матрица Грама.

3.2. Свойства матрицы Грама

Свойства матрицы Грама:

1) Симметричность.
2) Положительная ориентированность.

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_2) \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2)^2 < \mathbf{e}_1^2\ \mathbf{e}_2^2$$

Для линейно независимых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \longmapsto (\mathbf{x},\, \mathbf{y})^2 < \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2$.

Для линейно зависимых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \longmapsto (\mathbf{x},\, \mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2$.

Итак,

$$\boxed{\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \longmapsto (\mathbf{x},\, \mathbf{y})^2 \leqslant \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2}$$

— неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Определим длину вектора как

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\, \mathbf{x})},$$

а угол между векторами

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}.$$

Пример 6

Посчитать скалярное произведение, если $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

Решение:

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{\eta} = (-1 - 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$$

Для выражения матрицы Грама в новом базисе используется следующая формула:

$$\boxed{\Gamma' = S^{\mathrm{T}}\Gamma S}$$

4. Типы базисов

Пусть задан $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n$ — ортогональный базис.

Тогда $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{h}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{h}_n$.

Чему равны коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$?

В ортогональных базисах скалярное произведение $(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = 0$ при $i \neq j$.

$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{h}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{h}_n | \cdot \mathbf{h}_1$

$(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1) = \alpha_1 |\mathbf{h}|_1^2$, где $\alpha_1 = \dfrac{(\mathbf{x},\ \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}$

Т. е. $\alpha_i = \dfrac{(\mathbf{x},\ \mathbf{h}_i)}{|\mathbf{h}_i|^2}$, поэтому

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 + \cdots + \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{h}_n)}{|\mathbf{h}_n|^2}\mathbf{h}_n$$

Вектор равен сумме ортогональных проекций этого вектора на базисные вектора данного базиса.

Выполнено только для ортогонального базиса, иначе произведение $(\mathbf{h}_i,\ \mathbf{h}_j) = 0$ при $i \neq j$ не будет выполнено.

Определение 4.1. Ортонормированный базис — базис, в котором

$$(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma = E$, $(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\eta}$.

Определение 4.2. Рассмотрим подпространство $U \in E$. Тогда $U^\perp$ называется ортогональным дополнением подпространства U, если

$$U^\perp : \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \perp U\}, \text{ т.е. } \mathbf{y} \perp \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in U, U \oplus U^\perp = \mathcal{E}$$

Пример 7

Дано U. Найти $U^\perp$ в $\mathcal{E}^3$.

Решение:

$\Gamma = E$; $U = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$; $\quad U^\perp = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$;

$$\begin{cases} y_1 - 5y_2 + y_3 = 0; \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 0; \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow U^\perp = \langle \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$$

Почему $U^\perp$ ортогональное дополнение? Дело в том, что его сумма с U дает нам все евклидово пространство.

$$\underset{k}{U} \oplus \underset{n-k}{U}^\perp = \underset{n}{\mathcal{E}}$$

Пример 8

Дано U. Найти $U^\perp$ в $\mathcal{E}^3$. $\Gamma = E$, $U : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \quad +4x_3 = 0; \\ x_1 \qquad\quad -3x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad U^\perp = ?$

Решение:

По аналогии предыдущему примеру, получаем: $U^{\perp} : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$.

Пример 9

Дано U. Найти $U^{\perp}$ как СЛУ. $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix}$, $U = \begin{cases} x_1 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$; $\quad U^{\perp} = ?$

Решение:

Из матрицы, задающей подпространство U, получаем, что $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пусть $U^{\perp}$ задана как $\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle$. Тогда:

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = 0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -y_2 + 3y_3 = 0$$

Ответ: $-y_2 + 3y_3 = 0$

Пример 10

Найти проекцию $\mathbf{x}$ на подпространство U. (Здесь $\Gamma = E$)

$$U : \langle \underset{\mathbf{a}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Пр}_U^{\mathbf{x}} = ?$$

Решение:

<u>Первый способ:</u>

$\mathbf{x} = \underbrace{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}_{\in\,\mathbf{a}} + \underbrace{c}_{\in\,\mathbf{b}}$, причем $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$.

Домножим это выражение скалярно на $\mathbf{a}$ и на $\mathbf{b}$ и составим систему:

$$\begin{cases} (\mathbf{x},\, \mathbf{a}) = \alpha\,|\mathbf{a}|^2 + \beta(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + 0 \\ (\mathbf{x},\, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + \beta\,|\mathbf{b}|^2 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3\alpha + 3\beta \\ 0 = 3\alpha + 6\beta \end{cases}$$

Отсюда $\alpha = 2, \beta = -1$. Искомая проекция равна:

$\text{Пр}_U^{\mathbf{x}} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Второй способ:</u>

Как было показано выше, в ОНБ проекция вектора равна сумме проекций на каждый из базисных векторов. Однако в случае произвольного базиса это не так:

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{x}} \neq \text{Пр}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} + \text{Пр}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}} \text{ — не работает, если } \mathbf{a} \not\perp \mathbf{b} \;\; !$$

Было бы здорово, если бы в U был базис $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}$ такой, что $\mathbf{a}' \perp \mathbf{b}'$, тогда соотношение будет работать. Для этого *ортогонализируем* базис:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \text{Пр}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b},\ \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, в U мы нашли новый базис: $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Здесь уже можем пользоваться приведенным соотношением для нахождения проекции:

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{x}} = \text{Пр}_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}} + \text{Пр}_{\mathbf{b}'}^{\mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{a}')}{|\mathbf{a}'|^2}\mathbf{a}' + \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{b}')}{|\mathbf{b}'|^2}\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Замечание. Хотя мы и нашли новый базис, координаты векторов **x**, **a**, **b** все ещё выражены в старом базисе, а поэтому и скалярное произведение мы считаем, используя матрицу Грама в *старом* базисе.

С. А. Жестков, VK
Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Алексей, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK