Семинар 2. Системы линейных уравнений.

1. Запись систем линейных уравнений

Способы записи систем линейных уравнений:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Можно записать расширенную матрицу:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ или } (A|b)$$

Расширенная матрица выдерживает элементарные преобразования строк и перестановку столбцов (**аккуратно**, т.к. нужно соблюдать нумерацию столбцов).

$$(*) \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(*) \Leftrightarrow Ax = b$$

В школе геометрической интерпретацией системы линейных уравнений (СЛУ) размера 3 на 3 было пересечение (необязательно) плоскостей. Для любых m и n геометрическая интерпретация есть пересечение гиперплоскостей.

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения.

Теорема 1.1 (Критерий Кронекера-Капелли). *Система совместна* $\Leftrightarrow \mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A)$.

2. Поиск решений

Если матрица A невырождена, то

$$\begin{aligned} Ax = b \qquad & A^{-1} \cdot | \\ x = A^{-1}b \end{aligned}$$

Метод Жордана-Гаусса
$\exists T_1, \dots, T_M$ — элементарные преобразования
$T_M \cdot \dots \cdot T_1 A = E \qquad | \cdot A^{-1}b$
$T_M \cdot \dots \cdot T_1 b = A^{-1}b = x$
Пример 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -4 & 1 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)/(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+4(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)/(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)+(3)]{(1)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ответ:$(x_1\ x_2\ x_3)^{\mathrm{T}} = (5\ 5\ 3)^{\mathrm{T}}$

Пример 2

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +6x_5 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & & -3x_5 & = 0 \\ x_1 & +11x_2 & +7x_3 & +6x_4 & +18x_5 & = 0 \end{cases}$$

Данная система уравнений называется однородной. Она всегда совместна, т.к. имеет частное решение $x_i = 0, i = \overline{1,5}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 11 & 7 & 6 & 18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+2(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{(3)/(-6)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)-3(3)]{(2)+5(3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)/(-4)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-3(2)}$$

$$\to \left(\overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}^{\text{главные неизв.}} \underbrace{\boxed{\begin{array}{cc} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}}}_{\text{параметрические неизв.}} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

Эта матрица эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 = & -\frac{1}{2}x_4 & \\ x_2 = & -\frac{1}{2}x_4 & -x_5 \\ x_3 = & & -x_5 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Это и есть ответ к данной задаче.

$$< \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \text{— линейная оболочка.}$$

Пример 3

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & -8x_3 & +4x_4 & -4x_5 & = 3 \\ & 2x_2 & & & +4x_5 & = 2 \\ -3x_1 & +x_2 & +12x_3 & -6x_4 & -x_5 & = -8 \\ -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & -5x_5 & = -5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 8 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 12 & -6 & -1 & -8 \\ -1 & -2 & 4 & -2 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)\longleftrightarrow(1)]{(4)\times(-1);(2)/(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 12 & -6 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & 8 & 4 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)+3(1)]{(4)-2(1)}$$
$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 14 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & -14 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-7(2)]{(4)+7(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Альтернатива Кронекера-Капелли:
Система несовместна $\Leftrightarrow$ она содержит строку $(0\ \cdots\ 0|1)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Запишем фундаментальную систему решений (решение однородной системы):

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица ФСР выдерживает элементарные преобразования столбцов.

Будем говорить об однородной СЛУ. Столбцы ФСР — базис в пространстве решений однородной системы.

Пусть $\Phi'_{m\times n}$, $\Phi_{m\times n}$ — ФСР системы $Ax = 0$.

$$\exists C_{n\times n} : C\text{— невроженная } \&\ \Phi'_{m\times n} = \Phi_{m\times n} C.$$

Число столбцов ФСР = числу свободных неизвестных = число всех неизвестных (n) - число главных неизвестных ($\operatorname{Rg} A$).

Пример 4

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 7 \\ -4x_1 & +5x_2 & & +x_4 & = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ -4 & 5 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Очевидно, что ничего преобразовывать не надо, единичная матрица уже есть.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Пример 5
Дана ФСР

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти $Ax = 0$.

Припишем справа столбец неизвестных. Т.к. он линейно выражается через строки матрицы A, то это не изменит ранг нашей матрицы.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ -4 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\longleftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_2 \\ -4 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)+4(1)]{(3)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & x_4 + 4x_1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)+(2)]{(4)+(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & x_4 + 4x_1 + x_3 \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ 4x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases}$

Пример 6
При каких α и β система совместна? Решить ее.

$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = 3 \\ & & x_3 & -2x_4 & = \alpha \\ 3x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 2 \\ -3x_1 & +6x_2 & -x_3 & -4x_4 & = \beta \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[(3)\cdot 2;(4)\cdot 2]{(1)\cdot 3} \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -12 & 9 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 6 & -12 & 4 & 4 & 4 \\ -6 & 12 & -2 & -8 & 2\beta \end{array}\right) \xrightarrow[(4)+(1);(1)/3]{(3)-(1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & 2\beta + 9 \end{array}\right) \qquad \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b) = 2 \Rightarrow \alpha = 1, \qquad 2\beta + 9 = 7$$

То есть $\alpha = 1, \beta = -1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-3(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Примечание

Обратимся к примеру 3. Мы получили такую расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Она эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1 & & -4x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 3 \\ & x_2 & & & +2x_5 & = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 & = 3 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_2 & = 1 - 2x_5. \end{cases}$$

Тогда можно записать:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 \\ 1 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Так мы пришли к ответу, не прибегая к умножению матриц.