Семинар 11. Евклидовы пространства. Сопряженное преобразование.

Для построения ортонормированного базиса, каждый вектор нужно разделить на его длину, т.е.

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{|\mathbf{h}_i|}.$$

Пример 1

Ортонормировать систему векторов со стандартным (т.е. «школьным») скалярным произведением

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix}4 & 0 & 4 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix}1 & 13 & -1 & -3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Решение:

На первом шаге возьмем вектор $\mathbf{f}_1$ за основу нового базиса, т.е. $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, |\mathbf{h}_1| = \sqrt{10}$.

На втором шаге найдем следующий вектор по рекуррентной формуле, полученной выше

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix}4\\0\\4\\1\end{pmatrix} - \frac{10}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}, \quad |\mathbf{h}_2| = \sqrt{23}.$$

Можно убедиться, что $(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = 0$.

Далее, найдем третий вектор

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix}2 & 7 & 0 & -8\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad |\mathbf{h}_3| = \sqrt{17}.$$

Осталось только нормировать полученный базис, т.е. разделить каждый вектор на его длину.

Ответ: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{23}}\begin{pmatrix}3 & -2 & 3 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2 & 7 & 0 & 8\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Пример 2

В пространстве многочленов, степени не выше второй, задано скалярное произведение в таком виде:

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Построить ортогональный базис в этом пространстве.

Решение:

За основу возьмем стандартный базис $\{\underset{\mathbf{f}_1}{1}, \underset{\mathbf{f}_2}{t}, \underset{\mathbf{f}_3}{t^2}\}$. Пусть первый вектор в нашем новом базисе $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1 = 1$. Найдем длину $\mathbf{h}_1$[1]:

$$|\mathbf{h}_1|^2 = \int\limits_{-1}^{1} 1^2 dt = 2.$$

Для ортогонализации необходимо найти скалярное произведения $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$. Будем искать их по заданному определению:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot t = 0 \Rightarrow 1 \perp t.$$

[1]Как может показаться длина единицы равна 1. Но т.к. по определению длина вектора — корень из его скалярного произведения самого на себя, это не так.

Теперь подставим числа в рекуррентную формулу и получим второй вектор базиса:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_2 \quad |\mathbf{h}_2|^2 = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Т.к. $(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2) = 0$,

$$(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_3) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot t^2 = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1,$$

то

$$\mathbf{h}_3 = t^2 - \frac{2}{3 \cdot 2} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$.

С. А. Жестков, VK
Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Алексей, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK