Московский физико–технический институт

С.А. ЖЕСТКОВ

СЕМИНАРЫ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Весенний семестр, 2016–2017 учебный год

При поддержке команды
паблика BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK
К. Алексей, VK

Москва, 2017 г.

Оглавление

Семинар 1

Матрицы. Ранг матрицы.

1.1. Про матрицы

Уже умеем

- сложение и умножение на число (поэлементно)
- транспонировать
- умножать

Свойства умножения

1.° $A \cdot B \neq B \cdot A$ (если $A \cdot B = B \cdot A$, то A,B — перестановочные матрицы)
2.° $A \cdot E = E \cdot A = A$
3.° $(AB)C = A(BC)$
4.° $A(B+C) = AB + AC; \quad (B+C)A = BA + CA$
5.° $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
6.° $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

Пример 1

Верно ли:

а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Проверка:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Т.о. в общем случае выражение неверно.

б) $(A+B)^2 + (A-B)^2 = 2(A^2 + B^2)$

Проверка:

$$A^2 + AB + BA + B^2 + A^2 - AB - BA + B^2 = 2(A^2 + B^2)$$

Т.о. в общем случае выражение верно.

1.2. Элементарные преобразования строк

- умножение строки на число, неравное 0
- сложение строк

Также, элементарными преобразованиями являются:

- добавление к строке другой строки, умноженной на число
- перестановка строк

Очевидно, что элементарные преобразования обратимы.

Рассмотрим: $SA = A'$, где S — матрица элементарного преобразования.

- умножение: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

- сложение: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix}$

Элементарная матрица получается элементарными преобразованиями из единичной.
Для преобразования столбцов элементарную матрицу нужно умножать справа.
Запись нескольких преобразований: $S_1,...,S_N$, то $S_N \cdot ... \cdot S_1 A$.

Строки $a_1,...,a_k$ матрицы A называются ЛНЗ (линейно-независимыми), если

- ЛНЗ: $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$,
  называются ЛЗ (линейно-зависимыми), если
- ЛЗ: $\exists\ \alpha_1,...,\alpha_k : \alpha_1^2 + ... + \alpha_k^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0$

Все свойства из аналита.

- Если есть нулевая строка, то матрица ЛЗ
- Если часть строк ЛЗ, то и матрица ЛЗ
- Любая часть ЛНЗ — ЛНЗ

Квадратная матрица вырожденная, если она содержит ЛЗ строки.

Элементарные преобразования не нарушают линейных зависимостей в матрице.

В частности: вырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в вырожденную матрицу, а невырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в невырожденную матрицу.

Теорема 1.2.1. *Каждая невырожденная матрица с помощью элементарных преобразований может быть превращена в единичную*

Пример 2

Привести к E.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Решение:
Прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ — ступенчатый вид матрицы.

Обратный ход метода Гаусса:

$$\xrightarrow[(2)+2(3)]{(1)-(3)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+2(2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\times(-1)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Теорема 1.2.2. *Матрица невырождена $\Leftrightarrow$ раскладывается в произведение элементарных матриц.*

Доказательство. ($\Rightarrow$): см. метод Гаусса (пример 2).
$\exists\ T_1,...,T_M$ — элементарные преобразования строк: $T_M \cdot ... \cdot T_1 A = E$
Элементарные преобразования обратимы $\Rightarrow \exists\ S_1,...,S_M : S_M \cdot ... \cdot S_1 E = A \Leftrightarrow S_M \cdot ... \cdot S_1 = A$
($\Leftarrow$): $A = S_M \cdot ... \cdot S_1 E$
Т.к. единичная матрица невырождена, а элементарные преобразования вырожденности не меняют $\Rightarrow A$ невырождена. □

1.3. Обратная матрица

Определение 1.3.1. Матрица X обратная к матрице A, если

$$XA = AX = E,$$

где A — невырождена, X — единственна.

Свойства:
1.° $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2.° $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

Метод Жордана-Гаусса

$$T_M \cdot ... \cdot T_1 A = E \quad | \cdot A^{-1}$$
$$T_M \cdot ... \cdot T_1 E = A^{-1}$$

Пример 3

Доказать, что A невырождена и найти обратную, если

$$A^2 + A + E = O$$

Доказательство:

$$A^2 + A + E = O$$
$$A(A+E) + E = O$$
$$A(-A-E) = E$$
$$\det E = 1, \qquad \det(A(-A-E)) = \det A \cdot \det(-A-E) \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Отсюда же следует, что

$$A^{-1} = -A - E$$

Пример 4

$$A^m = O \text{ — нильпотентная матрица}$$

Доказать

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + ... + A^{m-1}$$

Доказательство:

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + ... + A^{m-1} \quad | \cdot (E-A)$$
$$E = E - A + A - A^2 + A^2 + ... + A^{m-1} - A^m = E$$

Пример 5

Решить уравнения:
а)$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ б)$X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:
а) $AX = B \quad A^{-1} \cdot |$
$X = A^{-1}B$
б) $XA = B \quad | \cdot A^{-1}$
$X = BA^{-1}$
Найдём A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{(1)-5/2\times(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Т.о. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

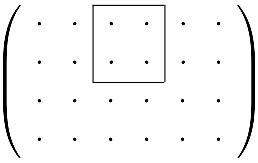
Ответ: а) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $X = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.4. Ранг матрицы

Пусть у матрицы A r — ЛНЗ строк и нет ЛНЗ системы строк большего числа. Тогда r — строчный ранг матрицы.

Определение 1.4.1. Строчный ранг матрицы — максимальное число ЛНЗ строк.

Теорема 1.4.1. *Система из r строк ЛНЗ* $\Leftrightarrow \exists$ *невырожденная подматрица порядка r.*



Первые две строки ЛНЗ. Вычерченный фрагмент содержит непропорциональные строки.

Определение 1.4.2. Подматрица порядка r называется базисной, если она невырождена, а все квадратные подматрицы большего порядка вырождены.

Определение 1.4.3. Ранг матрицы — порядок базисной подматрицы.

Ранг матрицы равен строчному рангу. Ранг не меняется при элементарных преобразованиях.
Свойства:
$\operatorname{Rg} AB \leqslant \min(\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B)$

1.4.1. Алгоритм поиска ранга

Приводим матрицу к ступенчатому виду. Ранг — число ненулевых строк.

Пример 6

Найти Rg.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} = 2$$

Пример 7

Найти Rg.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)\leftrightarrow(1)]{1/5\times(4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-2(1)]{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3 и 4 строчку можно вычеркнуть, т.к. они ЛЗ. Т.о. $\operatorname{Rg} = 2$.

Пример 8

Найти Rg в зависимости от параметра.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+3/2\times(1)]{(2)-3/2\times(1)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7 & \beta+9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[(4)+2/5\times(1)]{(3)-5/7\times(2)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rg} = 2$ при $\alpha = -\beta = 1$.

$\mathrm{Rg} = 3$ в остальных случаях.

Пример 9

Верно ли $\forall A, B$:

а) $\mathrm{Rg}(A+B) = \mathrm{Rg}\,A + \mathrm{Rg}\,B$

Неверно, например:

$$A = B = E_2$$

б) $\mathrm{Rg}(A+B) \leqslant \mathrm{Rg}\,A + \mathrm{Rg}\,B$

Верно. Докажем:

$$\mathrm{Rg}(A+B) \leqslant Rg(\underbrace{A+B}_{\text{лз}}|A|B) = \mathrm{Rg}(A|B)$$

$$r = \mathrm{Rg}\,A, \qquad s = \mathrm{Rg}\,B$$

$$\mathrm{Rg}(A|B) \leqslant r + s$$

Т.е.

$$\mathrm{Rg}(A+B) \leqslant \mathrm{Rg}\,A + \mathrm{Rg}\,B.$$

Семинар 2

Системы линейных уравнений.

2.1. Запись систем линейных уравнений

Способы записи систем линейных уравнений:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Можно записать расширенную матрицу:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ или } (A|b)$$

Расширенная матрица выдерживает элементарные преобразования строк и перестановку столбцов (**аккуратно**, т.к. нужно соблюдать нумерацию столбцов).

$$(*) \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(*) \Leftrightarrow Ax = b$$

В школе геометрической интерпретацией системы линейных уравнений (СЛУ) размера 3 на 3 было пересечение (необязательно) плоскостей. Для любых m и n геометрическая интерпретация есть пересечение гиперплоскостей.

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения.

Теорема 2.1.1 (Критерий Кронекера-Капелли). *Система совместна* $\Leftrightarrow \mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A)$.

2.2. Поиск решений

Если матрица A невырождена, то

$$\begin{aligned} Ax &= b \qquad A^{-1} \cdot | \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Метод Жордана-Гаусса

$\exists T_1, \dots, T_M$ — элементарные преобразования

$T_M \cdot \dots \cdot T_1 A = E \qquad | \cdot A^{-1}b$

$T_M \cdot \dots \cdot T_1 b = A^{-1}b = x$

Пример 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -4 & 1 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)/(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+4(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)/(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)+(3)]{(1)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ответ:$(x_1\ x_2\ x_3)^{\mathrm{T}} = (5\ 5\ 3)^{\mathrm{T}}$

Пример 2

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +6x_5 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & & -3x_5 & = 0 \\ x_1 & +11x_2 & +7x_3 & +6x_4 & +18x_5 & = 0 \end{array} \right.$$

Решение:

Данная система уравнений называется однородной. Она всегда совместна, т.к. имеет частное решение $x_i = 0, i = \overline{1,5}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 11 & 7 & 6 & 18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+2(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{(3)/(-6)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)-3(3)]{(2)+5(3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)/(-4)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-3(2)}$$

$$\to \left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{\text{главные неизв.}} \; \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{\text{параметрические неизв.}} \; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

Эта матрица эквивалентна системе

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 = & -\frac{1}{2}x_4 & \\ x_2 = & -\frac{1}{2}x_4 & -x_5 \\ x_3 = & & -x_5 \end{array} \right.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1,c_2 \in \mathbb{R}$$

Это и есть ответ к данной задаче.

$$\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{— линейная оболочка.}$$

Пример 3

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & -8x_3 & +4x_4 & -4x_5 & = 3 \\ & 2x_2 & & & +4x_5 & = 2 \\ -3x_1 & +x_2 & +12x_3 & -6x_4 & -x_5 & = -8 \\ -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & -5x_5 & = -5 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -3 & 8 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 12 & -6 & -1 & -8 \\ -1 & -2 & 4 & -2 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)\longleftrightarrow(1)]{(4)\times(-1);(2)/(2)} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 12 & -6 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & 8 & 4 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)+3(1)]{(4)-2(1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 14 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & -14 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-7(2)]{(4)+7(2)} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Альтернатива Кронекера-Капелли:

Система несовместна $\Leftrightarrow$ она содержит строку $(0 \ \cdots \ 0|1)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Запишем фундаментальную систему решений (решение однородной системы):

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица ФСР выдерживает элементарные преобразования столбцов.

Будем говорить об однородной СЛУ. Столбцы ФСР — базис в пространстве решений однородной системы.

Пусть $\Phi'_{m\times n}$, $\Phi_{m\times n}$ — ФСР системы $Ax = 0$.

$$\exists C_{n\times n} : C\text{— невроржденная } \& \ \Phi'_{m\times n} = \Phi_{m\times n}C.$$

Число столбцов ФСР = числу свободных неизвестных = число всех неизвестных (n) - число главных неизвестных $(\operatorname{Rg} A)$.

Пример 4

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 7 \\ -4x_1 & +5x_2 & & +x_4 & = 3 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ -4 & 5 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Очевидно, что ничего преобразовывать не надо, единичная матрица уже есть.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Пример 5

Дана ФСР

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти $Ax = 0$.

Решение:

Припишем справа столбец неизвестных. Т.к. он линейно выражается через строки матрицы A, то это не изменит ранг нашей матрицы.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ -4 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\longleftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_2 \\ -4 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)+4(1)]{(3)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & x_4 + 4x_1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)+(2)]{(4)+(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & x_4 + 4x_1 + x_3 \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ 4x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases}$

Пример 6

При каких α и β система совместна? Решить ее.

$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = 3 \\ & & x_3 & -2x_4 & = \alpha \\ 3x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 2 \\ -3x_1 & +6x_2 & -x_3 & -4x_4 & = \beta \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2&-4&3&-2&3\\ 0&0&1&-2&\alpha\\ 3&-6&2&2&2\\ -3&6&-1&-4&\beta\end{array}\right)\xrightarrow[(3)\cdot 2;(4)\cdot 2]{(1)\cdot 3}\left(\begin{array}{rrrr|r} 6&-12&9&-6&9\\ 0&0&1&-2&\alpha\\ 6&-12&4&4&4\\ -6&12&-2&-8&2\beta\end{array}\right)\xrightarrow[(4)+(1);(1)/3]{(3)-(1)}$$

$$\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 2&-4&3&-2&3\\ 0&0&1&-2&\alpha\\ 0&0&-5&10&-5\\ 0&0&7&-14&2\beta+9\end{array}\right)\qquad \operatorname{Rg}A=\operatorname{Rg}(A|b)=2\Rightarrow\alpha=1,\qquad 2\beta+9=7$$

То есть $\alpha=1,\beta=-1$.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2&-4&3&-2&3\\ 0&0&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)-3(2)}\left(\begin{array}{rrrr|r} 2&-4&0&4&0\\ 0&0&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)/2}\left(\begin{array}{rrrr|r} 1&-2&0&2&0\\ 0&0&1&-2&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1&0&-2&2&0\\ 0&1&0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\\x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-2\\0&2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

2.2.1. Примечание

Обратимся к примеру 3. Мы получили такую расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&0&-4&2&1&3\\ 0&1&0&0&2&1\end{array}\right)$$

Она эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1 \quad -4x_3 \quad +2x_4 \quad +x_5 &= 3\\ \quad x_2 \qquad\qquad\qquad +2x_5 &= 1,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 &= 3+4x_3-2x_4-x_5\\ x_2 &= 1-2x_5.\end{cases}$$

Тогда можно записать:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+4x_3-2x_4-x_5\\1-2x_5\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}4\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad x_3,x_4,x_5\in\mathbb{R}.$$

Так мы пришли к ответу, не прибегая к умножению матриц.

Семинар 3

Линейные пространства и подпространства.

3.1. Определение линейного пространства

Определение 3.1.1. Пространство L — линейное пространство, если:

- $\forall x, y \in L : x + y \in L$
- $\forall x \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x \in L$

$+$ 8 аксиом:

1.° $x + y = y + x$
2.° $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.° $\exists\ o : \forall x \to x + o = x$
4.° $\exists\ (-x) : \forall x \to x + (-x) = o$
5.° $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6.° $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7.° $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
8.° $\exists\ 1 : x \cdot 1 = x$

Вектор — элемент линейного пространства.

- Понятия ЛЗ и ЛНЗ со всеми вытекающими свойствами полностью из аналита.

Определение 3.1.2. Базис в L — конечная, упорядоченная ЛНЗ система векторов, такая что каждый вектор из L по ней раскладывается.

Если базис состоит из n векторов, то пространство называется n-мерным ($\dim L = n$).

Примеры:

- Векторы в 3^x ($\dim L = n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Столбцы высотой n ($\dim L = n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Матрицы $m \times n$ ($\dim L = m \times n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Множество функций, определённых на отрезке [0,1]
- Многочлены ($\dim L = \infty$)
- Многочлены степени $\leqslant n$ ($\dim L = n + 1$). Базис:$\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$

Определение 3.1.3. Линейное подпространство. L' — линейное подпространство в L, если:

- $\forall x, y \in L' : x + y \in L'$
- $\forall x \in L', \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x \in L'$

Пример: диагональные матрицы в пространстве обычных матриц.

3.2. Примеры

В примерах 1 — 3 вопрос следующий: является ли данное множество линейным подпространством в данном пространстве L.

Пример 1

L — множество n-мерных векторов.

Решение:

а) L' — множество векторов, координаты которых равны

Да, является; $\dim L' = 1$, базис: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$

б) L' — множество векторов, сумма координат которых равна 0

Да, является; $\dim L' = n-1$, базис: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

в) L' — множество векторов, сумма координат которых равна 1

Нет, не является.

Пример 2

L — множество матриц размера $n \times n$.

Решение:

а) L' — матрицы с нулевой первой строкой

Да, является; $\dim L' = n^2 - n$

б) L' — множество диагональных матриц

Да, является; $\dim L' = n$

в) L' — множество верхнетреугольных матриц

Да, является; $\dim L' = \frac{n(n+1)}{2}$ (т.е. $(1 + 2 + \cdots + n)$)

г) L' — множество вырожденных матриц

Нет, не является; $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$

Пример 3

L — множество функций, определенных на отрезке [0,1].

Решение:

а) L' — множество функций, ограниченных на отрезке [0,1]

Да, является.

б) L' — множество строго монотонных функций

Нет, не является.
в) L' — множество строго возрастающих функций
$0 \cdot x = 0 \Longrightarrow$ нет, не является.

3.3. Примеры и способы задания линейных подпространств

0 — тоже линейное пространство

Определение 3.3.1. Линейная оболочка векторов $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ($\langle a_1, a_2, \cdots, a_k \rangle$) — всевозможные линейные комбинации этих векторов:

$$\langle a_1, a_2, \cdots, a_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \lambda_i \in R \right\}$$

Пример 4
Найти размерность и базис линейной оболочки

Решение:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

Т.к. $\dim L' = \operatorname{Rg} A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & 2 \\ 1 & -7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-(1),\,(4)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) = (4) $\Rightarrow$ (4) вычеркиваем!

$\dim L' = 3$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Пример 5
(условие — см. пример 4)

Решение:

$$\langle \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rangle$$

Задача не изменится, если взять

$$\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Т.к. строка (3) ЛНЗ ((1)-2(2)=(3)), ее можно вычеркнуть.
$\dim L' = 2$, базис: $\left\{\begin{pmatrix}6 & 8 & 9\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

Пример 6
Доказать, что матрицы A, B, C, D образуют базис в пространстве матриц 2 × 2 и найти координаты вектора F в этом базисе.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 13\end{pmatrix}$$

Если A, B, C, D — базис, то $\exists!\ x_1, x_2, x_3, x_4$:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = F,$$

что эквивалентно СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 5\\ -x_1 & +5x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 14\\ x_1 & +x_2 & & +5x_4 & = 6\\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +7x_4 & = 13 \end{cases}$$

Решая эту СЛУ, получим:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

Т.о., решив систему, убедились в единственности решения (факт базиса).

Пример 7
Найти размерность и базис линейной оболочки.

Решение:

$$\langle (1+t)^3, t^3, t+t^2, 1\rangle$$

Стандартный базис многочлена: $\{1, t, t^2, t^3\}$. Тогда координаты наших векторов в стандартном базисе есть:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\ 3\\ 3\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Тогда запишем матрицу, аналогично примеру 4:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

1 строка ЛНЗ, ее можно вычеркнуть. Тогда

$$\dim L' = 3, \text{ базис: } \left\{t^3, t^2 + t, 1\right\}.$$

Пример 8
Доказать, что

$$1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \dots, (t-\alpha)^n$$

— базис в пространстве многочленов, степени не выше n. Найти в этом базисе разложение $P_n(t)$.

Решение:
Ответ на эту задачу дал математик Брук Тейлор:

$$P_n(t) = P_n(\alpha) + \frac{1}{1!}P'(\alpha)(t-\alpha) + \dots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(\alpha)(t-\alpha)^n$$

Т.к. данное разложение $\exists!$, это базис. Запишем коэффициенты разложения:

$$\begin{pmatrix} P_n(\alpha) \\ \frac{1}{1!}P_n'(\alpha) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(\alpha) \end{pmatrix}$$

Пример 9
Найти размерность и базис подпространства, заданного в виде $Ax = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение:
Решения однородной системы образуют линейные подпространства.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Алгоритм Гаусса}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Отсюда, получаем линейную оболочку:

$$\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad \dim L' = 2$$

Столбцы этой линейной оболочки будут являться базисом в этом линейном подпространстве.

Пример 10
Задать подпространство в виде однородной системы

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Решение:
Задача по сути является задачей из прошлого семинара:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 3 & -1 & x_3 \\ 4 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -5x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -2x_2 - x_2 + x_4 \end{array}\right)$$

Для того, чтобы система была совместной, требуется равенство 0 последних двух строк. Отсюда ответ:

$$\left\{\begin{array}{lllll} -5x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

Семинар 4

Замена базиса. Сумма и пересечение подпространств.

4.1. Замена базиса.

Рассмотрим базис $\overline{e}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Координаты x в базисе $\overline{e}$: $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \overline{\xi}$

Тогда: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \overline{e}\overline{\xi}$.

Пусть есть два базиса $\overline{e}, \overline{e'}$. Выразим один базис через другой:

$$\left.\begin{matrix} e'_1 = a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n \\ e'_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = a_{n1}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow e'_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}e_j$$

S — **матрица перехода** от $\overline{e}$ к $\overline{e'}$ $(\det S \neq 0)$.

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overline{e'} = \overline{e}S}$$

Связь координат:

$$\begin{aligned} x &= \overline{e}\overline{\xi} \\ x &= \overline{e'}\overline{\xi'} = \overline{e}\,\underbrace{S\overline{\xi'}}_{\xi} \Rightarrow \boxed{\overline{\xi} = S\overline{\xi'}} \end{aligned}$$

Пример 1

Доказать, что $F: \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $G: \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ — базис в $\mathbb{R}^3$

1.° Найти S от F к G.

2.° Зная $\overline{\xi'}$ в G, найти $\overline{\xi}$ в F.

Решение:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det G = -47 \neq 0 \Rightarrow G \text{ — базис}$$

1.° $G = FS \quad F^{-1}|\cdot$
$F^{-1}G = S$
Пусть F — невырожденная, тогда $\exists T_1, \ldots, T_n$ (элементарные преобразования матриц):
$T_n \ldots T_1 F = E \quad | \cdot F^{-1}G$
$T_n \ldots T_1 G = F^{-1}G = S$

Т.е. преобразования, которые переведут F в E, переведут G в S.
$(F|G) \to (E|S)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow S = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.° $\overline{\xi} = S\overline{\xi'}$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\xi_1 + 4\xi_3 \\ -4\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 \\ 13\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix}$$

Пример 2
(Условие то же, что и в примере 1)
$F\colon \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad G\colon \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
Решение:

Заметим, что перед нами кососимметричные матрицы.

Определение 4.1.1. **Кососимметричная (кососимметрическая) матрица** — квадратная матрица A, удовлетворяющая соотношению:

$$A^{\mathrm{T}} = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \; \forall i,j = \overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что $\dim L' = 3$. Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
Тогда координаты наших векторов F и G в этом базисе:

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Выполним действия аналогично примеру 1 и получим:

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 40 & 9 \\ -3 & -11 & -2 \\ 8 & 37 & 8 \end{pmatrix}$$

4.2. Сумма и пересечение подпространств

Рассмотрим линейные подпространства L_1 и L_2.

Определение 4.2.1. Пересечением L_1 и L_2 называется множество векторов принадлежащих и L_1, и L_2.

$L_1 \cap L_2$ — линейное подпространство.

Определение 4.2.2. Суммой L_1 и L_2 называется линейная оболочка их объединения.

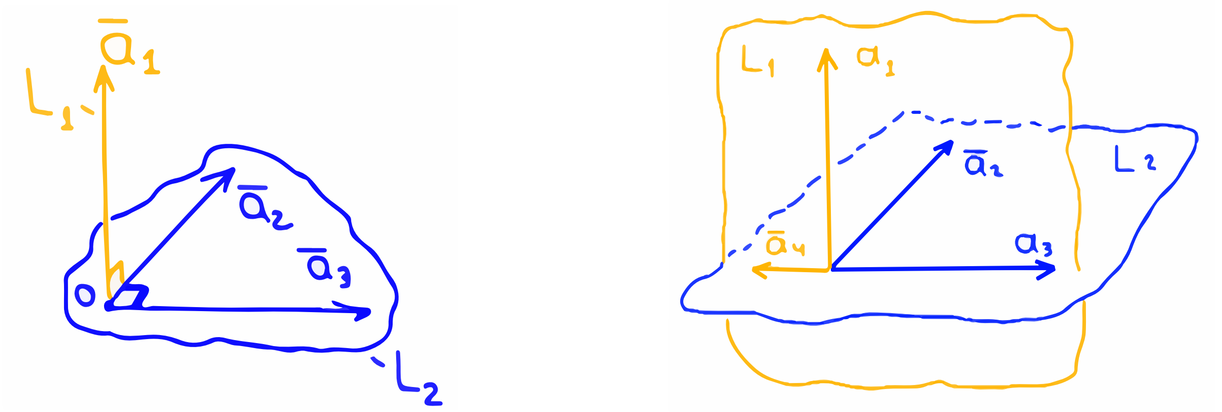
Определение 4.2.3. Если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, то пишут так:

$$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2,$$

а сумму называют прямой суммой.

Если $L = L_1 \oplus L_2$, то говорят, что L_1 и L_2 — прямые дополнения друг друга.

Примеры:



а)

б)

Рис. 4.1. Рисунки подпространств к примерам а) и б)

а) $L_1\colon\ \langle \overline{a}_1 \rangle \qquad \dim L_1 = 1$

$L_2\colon\ \langle \overline{a}_2, \overline{a}_3 \rangle \qquad \dim L_2 = 2$

В данном случае вектора некомпланарны.

$L_1 + L_2 = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$

$\dim(L_1 + L_2) = 3 = \dim L_1 + \dim L_2$

Т.о.

$$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$$

б) $L_1\colon\ \langle \overline{a}_1, \overline{a}_4 \rangle \qquad \dim L_1 = 2$

$L_2\colon\ \langle \overline{a}_2, \overline{a}_3 \rangle \qquad \dim L_2 = 2$

$L_1 + L_2\colon\ \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4 \rangle : \mathbb{R}^3$

Но $\dim(L_1 + L_2) = 3$, т.к. $\overline{a}_4$ можно выкинуть.

В общем случае:

$$\dim(L_1 + L_2) \leqslant \dim L_1 + \dim L_2$$

Ответ о размерности даёт формула Грассмана:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

4.3. Понятие проекции вектора на подпространство

Определение 4.3.1. Пусть $\exists a \in L_1,\ b \in L_2,\ \ x \in L_1 + L_2 :\ \ \exists! x = a + b \Leftrightarrow L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$. При этом вектор a называется проекцией вектора x на L_1 параллельно L_2.

Пример 3

Найти проекцию $X(0\ -1\ -1\ 4)^{\mathrm{T}}$ на подпространство $L_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ вдоль линейной оболочки L_2: $\langle (1\ -1\ 1\ 0)^{\mathrm{T}} \rangle$.

Решение:

$$L_1 : (1\ 1\ 1\ 1 \mid 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ или } L_1 : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$$L_2 \colon \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Разложим вектор X:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b \in L_2} + \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a \in L_1}$$

Очевидно, что это уравнение задает нам СЛУ. Составим ее расширенную матрицу и решим систему:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} k \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко найти, что

$$x_{\text{пр}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 4

Найти размероность и базис суммы подпространств U_1 и U_2.

$$U_1 \colon \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad U_2 : \begin{cases} x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$U_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Последняя строка ЛЗ со второй, ее можно вычеркнуть $\Rightarrow \dim U_1 = 2$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Переведём способ задания U_2 из СЛУ в линейную оболочку. Для этого решим эту СЛУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \dim U_2 = 2, \quad \text{базис } U_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$U_1 + U_2\colon \ \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & - & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

3 строка ЛЗ с 2 и 4, ее можно вычеркнуть $\Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = 3$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Пример 5

В условиях примера 4 найти размерность и базис пересечения.

Решение:

$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

$\dim(U_1 + U_2) = 3$, $\dim U_1 = 2$, $\dim U_2 = 2 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 1$

1 способ

Зададим U_1 как систему: $U_1\colon \ \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -2 & 3 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)-(2)]{(3)+2(1),(3)-3(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + 2x_1 - 3x_2 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \end{array}\right)$$

$$U_1 : \begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$U_1 \cap U_2 = \begin{cases} U_1 \\ U_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle (\text{базис } U_1 \cap U_2)$$

2 способ

Базис $U_1 : a_1, a_2$

Базис $U_2 : b_1, b_2$

$P \in U_1, P \in U_2;$

$P = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$

Семинар 5

Линейные отображения. Часть 1.

5.1. Определение линейного отображения

Определение 5.1.1. Пусть заданы L и $\overline{L}$ — два линейных пространства. Отображение φ из L в $\overline{L}$ — правило, по которому каждому вектору из L ставится в соответствие единственный вектор из $\overline{L}$.
Обозначение: $\varphi : L \to \overline{L}$.

Определение 5.1.2. Сюрьекция — отображение, при котором каждый элемент из $\overline{L}$ является образом вектора из L.

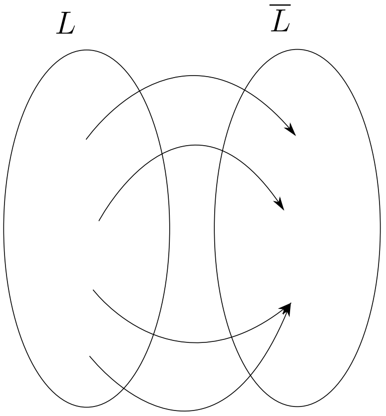


Рис. 5.1. Сюръективная функция

Определение 5.1.3. Инъекция — отображение, при котором каждый образ из $\overline{L}$ имеет единственный прообраз в L.

Определение 5.1.4. Сюрьекция + инъекция = биекция — это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным (взаимно–однозначное соответствие).

Определение 5.1.5. Если в результате отображения $L = \overline{L}$, то такое отображение называется преобразованием.

Определение 5.1.6. Отображение π называется линейным, если выполнено:

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x). \end{cases}$$

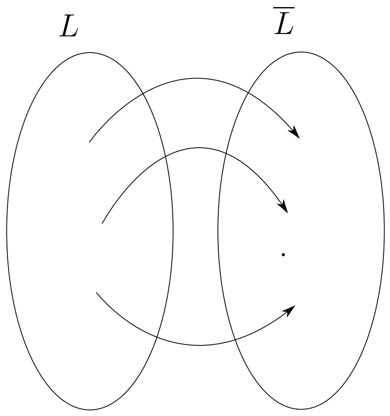


Рис. 5.2. Инъективная функция

Примеры:

- аффинные преобразования плоскости
- геометрия 3D (т.е. преобразования в трёхмерном пространстве: поворот, симметрия и т.д.)
- присвоение координат в линейном пространстве (пространство многочленов → пространство столбцов т.е. координатный изоморфизм)
- умножение на матрицу, транспонирование
- дифференцирование, интегрирование (только для определённого интеграла, чтобы избежать появление константы)

Очевидно, что $\varphi(0) = 0$.

Рассмотрим ЛЗ систему векторов $a_1, \dots, a_n$.

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Подействуем преобразованием φ:

$$\alpha_1 \varphi(a_1) + \dots + \alpha_n \varphi(a_n) = 0.$$

Отсюда видно, что система образов — тоже ЛЗ система векторов с теми же коэффициентами. Но для ЛНЗ системы векторов данное утверждение не верно (контрпример: нуль–преобразование).

Определение 5.1.7. Образ $\varphi : \operatorname{Im}\varphi : \{\varphi(x) \in \overline{L} : x \in L\}$ — множество всех образов из L в $\overline{L}$.

Определение 5.1.8. Ядро $\varphi : \ker\varphi : \{x \in L : \varphi(x) = 0\}$ — множество векторов из L, которые переходят в 0.

Определение 5.1.9. Ранг $\varphi : r = \dim(\operatorname{Im}\varphi)$ — размерность образа.

Пример 1

Работаем в $\mathbb{R}^3$, ОНБ, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$.

Найти φ, если φ— ортогональная проекция на:

а) L_1: $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$

б) L_2: $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$

Решение:

а) $\varphi(\mathbf{x}) = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$ — формула для проекции вектора на прямую (из аналит. геометрии).

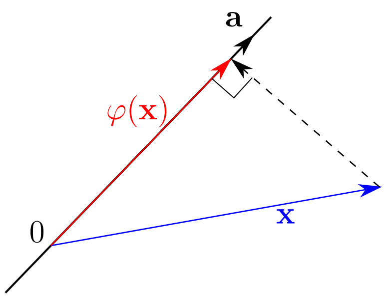


Рис. 5.3. К примеру 1а

$\ker\varphi : (\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0$ — плоскость, ортогональная вектору $\mathbf{a}$.

$\operatorname{Im}\varphi : [\mathbf{r}, \mathbf{a}]=\mathbf{0}$.

$r = 1$ (прямая).

б) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{p}$
$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$
$\ker\varphi : [\mathbf{r}, \mathbf{n}]{=}\mathbf{0}.$
$\operatorname{Im}\varphi : (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ (плоскость).
$r = 2$ (плоскость).

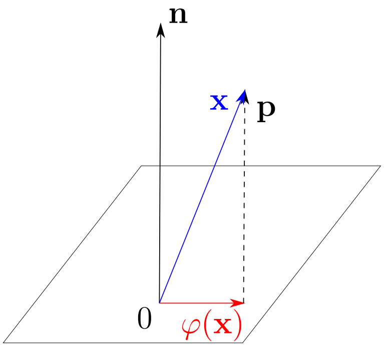


Рис. 5.4. К примеру 1б

5.2. Матрица линейного отображения

$\varphi : L \to \overline{L}, \dim L = n < \infty, \dim \overline{L} = m < \infty$
Базисы в $L : \mathbf{e}(e_1, \ldots, e_n)$, в $\overline{L} : \mathbf{f}(f_1, \ldots, f_m)$, $a \in L$. $\varphi(a) \in \overline{L}$.
Пусть a имеет в L координатный столбец $\mathbf{x}$, а $\varphi(a)$ в $\overline{L}$ координатный столбец $\mathbf{y}$. Построим такую матрицу A: $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\mathbf{x}} = \underset{m\times 1}{\mathbf{y}}$.
Пусть $\mathbf{x} = e_1 : (1\ 0\ \cdots\ 0)^{\mathrm{T}}$.
$y = \underset{\text{в базисе } f}{\varphi(e_1)} = Ae_1 = A\cdot(1\ 0\ \cdots\ 0)^{\mathrm{T}} = a_1$ — первый столбец из A. Аналогично поступим с вторым, третьим и т.д. столбцами. Тогда матрица линейного отображения A имеет вид:

$$A = \left.\left(\boxed{\varphi(e_1)}\ \cdots\ \boxed{\varphi(e_n)}\right)\right\}m$$

В данном случае, столбцы матрицы — это координатные столбцы $\varphi(e_i)$ в базисе f т.к.:

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Подействуем на него преобразованием φ:

$$\varphi(a) = \alpha_1\varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(e_n)$$

В примерах 2–5 вопрос следующий: найти A, если задано φ — преобразование $\mathbb{R}^3$, в ОНБ.

Пример 2
φ — поворот вокруг e_3 на угол $\frac{\pi}{2}$.

Решение:

$\underset{e_1,e_2,e_3}{L} \to \underset{e_1,e_2,e_3}{\overline{L}}$[1].
$\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 : \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$
$\varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 : \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$
$\varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 : \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$

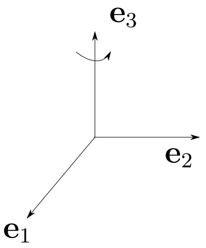


Рис. 5.5. К примеру 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для построения матрицы A нам необходимо и достаточно образов преобразования.

---

[1] Всегда в решении задачи обязательно нужно выбрать базисы.

Пример 3

φ — ортогональное проецирование на $L : x = y = z$.

Решение:

$$\underset{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3}{L} \to \underset{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3}{\overline{L}}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$

«Прогоним» через эту формулу все базисные векторы:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(\mathbf{e}_1) = \dfrac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(\mathbf{e}_2) = \dfrac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(\mathbf{e}_3) = \dfrac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

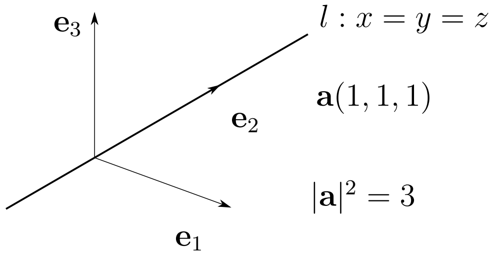


Рис. 5.6. К примеру 3

Пример 4

φ - отражение относительно α: $2x - 2y + z = 0$

Решение:

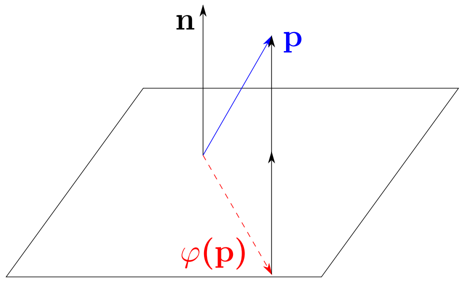


Рис. 5.7. К примеру 4

$$\underset{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3}{L} \to \underset{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3}{\overline{L}}$$

$\mathbf{n}(2; -2; 1)$

$|\mathbf{n}|^2 = 9$

$$\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - 2\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{n}$$

$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) - 2 \cdot \frac{2}{9}\left(\begin{smallmatrix}2\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)$; $\varphi(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}1\\8\\-4\end{smallmatrix}\right)$;

$\varphi(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}8\\-7\\4\end{smallmatrix}\right)$;

$\varphi(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}-4\\4\\1\end{smallmatrix}\right)$;

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 8 & -4\\ 8 & -7 & 4\\ -4 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Пример 5

$L_1 : x = 0$

$L_2 : 2x = 2y = -z$

Решение:

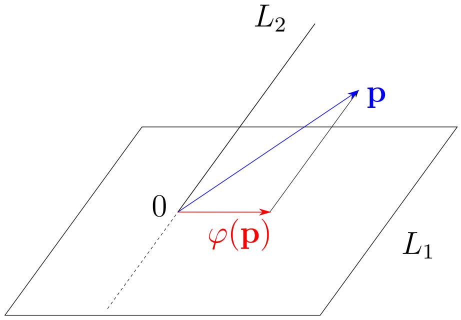


Рис. 5.8. К примеру 5

$$\underset{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3}{L} \to \underset{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3}{\overline{L}}$$

φ — проецирование на $L_1 || L_2$

$L_1 : \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$, $L_2 : \langle \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix} \rangle$

$\mathbf{p} = \underbrace{\alpha \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)}_{\in L_1} + \underbrace{\gamma \left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{smallmatrix}\right)}_{\in L_2}$

$\mathbf{e}_1 : \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \underbrace{\alpha \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)}_{\varphi(\mathbf{e}_1)} + \gamma \left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\2\end{smallmatrix}\right)$

$\mathbf{e}_2 : \varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2;$

$\mathbf{e}_3 : \varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3.$

Ответ: $\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

Понимая пример 5 как отображение, можно заметить, что $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, а значит, для описания всевозможных результатов в $\bar{L}$ можно было выбрать базис из двух векторов.

$f = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \right\}$

$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}-1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\varphi(\mathbf{e}_2) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\varphi(\mathbf{e}_3) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$;

$$A = \begin{pmatrix}-1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

Пример 6

$\varphi : \underset{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}{L} \Rightarrow \underset{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_4}{\bar{L}}$

$$L : \langle \underset{=e_1}{1}, \underset{=e_2}{x}, \underset{=e_3}{x^2} \rangle, \ L : \langle \underset{=f_1}{1}, \underset{=f_2}{x}, \underset{=f_3}{x^2}, \underset{=f_4}{x^3} \rangle$$

Решение:

$\varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$

$$\left.\begin{aligned}\varphi(e_1) &= \int\limits_0^x 1dt = x \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ \varphi(e_2) &= \int\limits_0^x tdt = \frac{x^2}{2} \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{smallmatrix}\right)\\ \varphi(e_3) &= \int\limits_0^x t^2dt = \frac{x^3}{3} \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}\right\} A = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Семинар 6

Линейные отображения. Часть 2.

Для начала решим небольшой пример по прошлому семинару.

Пример 1
$\varphi : M_{2\times 2} \to M_{2\times 1}, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу линейного преобразования A.

Решение:

Запишем базисы:
$M_{2\times 2} : \mathbf{e}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$
$M_{2\times 1} : \mathbf{f}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$.
Для удобства в общем виде найдём, что значит наше преобразование:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+4b\\ c+4d\end{pmatrix}.$$

Далее «прогоним» через преобразование базис $\mathbf{e}$:
$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \left(\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_4) = \left(\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}\right).$
Отсюда, получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

6.1. Рассмотрение ядра и образа

Рассмотрим $\varphi : \underset{\dim L = n}{L} \to \underset{\dim \overline{L} = m}{\overline{L}}$.
Ядро: $\ker\varphi : \{\mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$
Очевидно, что ЛНЗ решения такого уравнения формируют ФСР, а ФСР задаёт линейное подпространство. Вспоминая количество столбцов в ФСР, легко получить формулу:

$$\boxed{\dim\ker\varphi = n - \operatorname{Rg} A}. \tag{6.1}$$

Образ $\operatorname{Im}\varphi : \{\mathbf{y} \in \overline{L} : \exists \mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.
Аналогично $\operatorname{Im}\varphi \in \overline{L}$ формирует линейное подпространство т.к.

$$A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$
$$A\alpha\mathbf{x} = \alpha A\mathbf{x}.$$

Выберем в L базис $\mathbf{e} : \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$.
$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n \leftarrow \varphi$ (это обозначение значит «подействуем преобразованием φ»)

$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha_1 \underset{=\mathbf{a}_1}{\varphi(\mathbf{e}_1)} + \dots + \alpha_n \underset{=\mathbf{a}_n}{\varphi(\mathbf{e}_n)} = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle.$
Заметим, что $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы A. Отсюда следует формула:

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Rg} A = r}. \tag{6.2}$$

Сложим формулы (6.1) и (6.2) и получим:

$$\boxed{\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = n}. \tag{6.3}$$

В примерах 2–5: $L = \mathbb{R}^4, \overline{L} = \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Пример 2
Найти образ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение:
$\varphi : A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, т.е. нужно перемножить матрицу A и вектор $\mathbf{x}$.
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{o} \Rightarrow$ ядро не пусто.

Пример 3
Найти прообраз $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

Итак $\varphi : \underline{A}\mathbf{x} = \underline{\mathbf{y}}$. Мы знаем то, что подчёркнуто. Очевидно, что мы получили СЛУ относительно $\mathbf{x}$. Решим ее.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(3)]{(3)\cdot 0.5;(1)\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2$$

Пример 4
Найти ядро отображения.

Решение:

Для этого нужно решить СЛУ $A\mathbf{x} = \mathbf{o} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ker\varphi : \langle \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \rangle^{1}, \quad \dim\ker\varphi = 2.$$

Пример 5
Найти образ $\operatorname{Im}\varphi$.

Решение:

$$\operatorname{Im}\varphi : \langle \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ -4\\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $(2) = -2(1), (4) = (3) + (1) \Rightarrow 2$ и 4 строку можно вычеркнуть.

$$\operatorname{Im}\varphi : \langle \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$\dim\operatorname{Im}\varphi = 2$

$\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = 4$

6.2. Два важных частных случая

1° Если $\underline{\dim\ker\varphi = 0}$:
$\dim\operatorname{Im}\varphi = n = \operatorname{Rg} A \Rightarrow$ (столбцы ЛНЗ)
$\mathbf{y} \in \overline{L}$ $\ker\varphi = 0$
Пусть $\mathbf{y} = A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$
$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker\varphi = \{0\} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$
Если $\ker\varphi = \{0\}$, то это <u>инъекция</u>.
Оказывается, верно и обратное:
Отображение инъективно $\Leftrightarrow \ker\varphi = 0$
Докажем в другую сторону:
Пусть $\dim\ker\varphi \geqslant 1 \Rightarrow \exists \mathbf{x}_0 \neq 0 \in \ker\varphi$
$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$
$A(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$ — противоречие инъекции $\Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$
Число прообразов $= 0, 1, \infty$

2° Если $\underline{\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^m = \overline{L}}$:
$\dim\operatorname{Im}\varphi = m = \operatorname{Rg} A$ — строки ЛНЗ $\leftarrow$ <u>сюръекция</u>

Биекция = сюръекция + инъекция
$\operatorname{Rg} A = n = m$
Т.о. **биекция задаётся невырожденной матрицей**. В таком случае

$$\dim L = \dim\overline{L}$$

Изоморфизм — биективное линейное отображение.
Если существует изоморфизм $L \to \overline{L}$, то говорят, что L и $\overline{L}$ изоморфны.

---

[1] В примере 2 как раз и был вектор из $\ker\varphi$

Теорема 6.2.1. *L и $\overline{L}$ изоморфны* $\iff \dim L = \dim \overline{L}$.

Для изоморфизма $\exists\ \varphi^{-1}$ — обратное отображение, его матрица A^{-1}.

Пример 6

Доказать, что отображение $\varphi(f(x)) = 2f(x) + f'(x)$ — изоморфизм в пространстве P_2 — многочленов степени не выше 2. Найти φ^{-1}.

Решение:

Стандартный базис L: $\{1, x, x^2\}$, где $\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_2 = x$, $\mathbf{e}_3 = x^2$.
Общий вид $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\dim L = 3$.

$$\varphi(f(x)) = 2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b = 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c), \quad \overline{L}\colon \{1, x, x^2\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(e_1) &= 2 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_2) &= 2x + 1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_3) &= 2x^2 + 2x \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rg} = 3 \Rightarrow$ изоморфизм. Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\varphi^{-1}\colon A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6.3. Матрица отображения в новых базисах.

Пусть в L и $\overline{L}$ выбраны базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$, задано отображение $\varphi\colon L \to \overline{L} : A$. Поменяем базисы: $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, $\mathbf{f}' = \mathbf{f}P$. Найдём A':

$$\mathbf{x} \in L,\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}; \qquad \mathbf{y} \in L,\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}$$

Из теории отображений: $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi}$; $\quad \boldsymbol{\eta}' = A'\boldsymbol{\xi}'$;
Из замены базиса: $\boldsymbol{\eta} = P\boldsymbol{\eta}'$; $\quad \boldsymbol{\xi} = S\boldsymbol{\xi}'$;

$$P\boldsymbol{\eta}' = A\boldsymbol{\xi} = AS\boldsymbol{\xi}' \Rightarrow \boldsymbol{\eta}' = P^{-1}AS\boldsymbol{\xi}' = A'\boldsymbol{\xi}' \Rightarrow \boxed{A' = P^{-1}AS.}$$

Если φ — преобразование, то $P = S$ и $A' = S^{-1}AS$

Пример 7

Дано преобразование φ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{e}$. Смена базиса: $\mathbf{e}' = \mathbf{e} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти A'.

Воспользуемся $A' = S^{-1}AS$. Посчитаем S^{-1}:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Решение:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6.4. Линейные функции

Определение 6.4.1. Функция $f(x)$ на линейном пространстве L — правило, которое $\forall x \in L$ ставит в соответствие $f(x) \to \mathbb{R}$.

Функция f линейная, если

$$\begin{cases} f(x+y) & = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) & = \alpha f(x) \end{cases}$$

Это частный случай линейного отображения при $m = 1$.
Примеры:
а) Присвоить вектору его i-тую координату.
б) Скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$.
в) Определённый интеграл.

$\underset{1\times n}{A}$ - строка функции $A = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)$, где φ_i — образ i-го базисного вектора (т.е. $\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$)

Линейные функции образуют линейное пространство.

Пример 8
Может ли $\forall x \in L$ выполняться:
а) $f(x) > 0$? Ответ: нет, так как нет нуля;
б) $f(x) \geqslant 0$? Ответ: только если $f(x) \equiv 0$;
в) $f(x) = \alpha$? Ответ: только для $\alpha \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$.

Решение:

Пример 9
$P(t)$ — многочлен степени $\leqslant n$, $f(P(t)) = P'(1)$. Найти A.

Решение:

Базис: $\{1, t, \cdots, t^n\}$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) = &\ 0 \\ \varphi(\mathbf{e}_2) = &\ 1 \\ \varphi(\mathbf{e}_3) = &\ 2 \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \varphi(\mathbf{e}_{n+1}) = &\ n \end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Семинар 7

Инвариантные и собственные подпространства. Часть 1.

7.1. Инвариантные подпространства

Будем работать только с преобразованиями.

7.1.1. Определение

Определение 7.1.1. Подпространство $L' \subset L$ называется **инвариантным относительно преобразования φ**, если

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \in L' \text{ или } \varphi(L') \subset L'.$$

Например:

- $\mathbf{o}$, L — вырожденные случаи.
- Поворот $\mathbb{R}^3$ вокруг $\mathbf{e}_3$ на $\pi/2$ (рис. 7.3). Инвариантные подпространства: $\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$.
- Ядро преобразования φ ($\ker\varphi$) всегда инвариантно относительно этого преобразования φ.
- $\operatorname{Im}\varphi$

Теорема 7.1.1. *Если какое-то подпространство содержит в себе образ, то L' инвариантно относительно φ.*

Доказательство.

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \subset \operatorname{Im}\varphi \subset L'$$

□

7.1.2. Свойства инвариантных подпространств

Предложение 7.1.1. *Сумма инвариантных подпространств инвариантна.*

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{y} \in L_2, \varphi(\mathbf{y}) \in L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) \in L_1 + L_2$$

□

Предложение 7.1.2. *Пересечение инвариантных подпространств инвариантно.*

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{x} \in L_2, \varphi(\mathbf{x}) \in L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \cap L_2$$

□

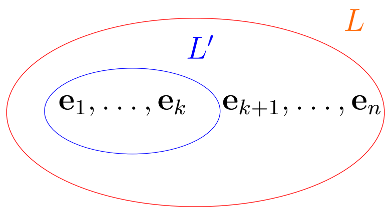


Рис. 7.1. Подпространство в L

7.2. Матрица преобразования

7.2.1. Вид матрицы преобразования

Рассмотрим линейное пространство L, $\dim L = n$. Пусть $L' \subset L$, $\dim L' = k$ — инвариантное подпространство относительно φ, базис в $L' : \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, базис в $L : \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Напомним, что матрица преобразования A строится из образов базисных векторов:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\varphi(e_1)} & \cdots & \boxed{\varphi(e_n)} \end{pmatrix}$$

Т.о. матрица преобразования в выбранном базисе имеет следующий вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O & A_4 \end{array}\right)^{\square} \quad \text{— клетчочно–треугольный вид.}^{[1]}$$

Пусть теперь $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_s, \forall i \; L_i$ — инвариантное подпространство относительно φ.

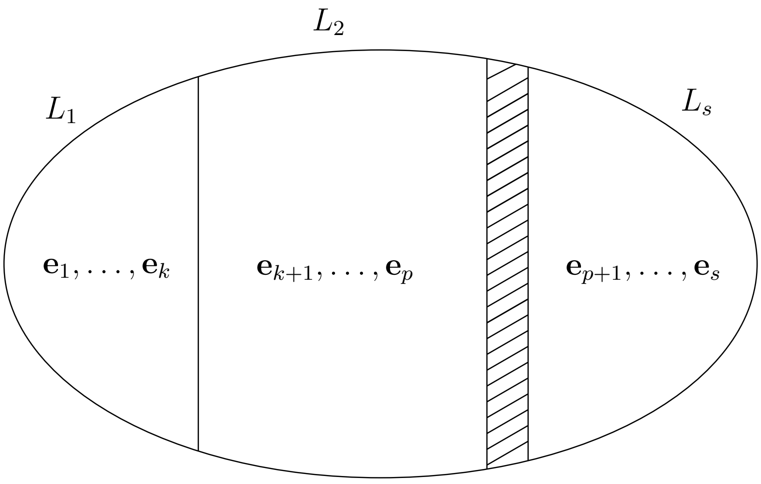


Рис. 7.2. Прямая сумма подпространств

Тогда матрица преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & O & \ldots & O \\ O & \boxed{A_2} & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}^{\square} \quad \text{— клеточно–диагноальный вид.}$$

---

[1] Квадрат над матрицей значит, что матрица блочная.

Ширина и высота каждой клетки равны размерности инвариантного подпространства.

Пример 1
Найти инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^3$ относительно φ.

Решение:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Из вида A видно, что существует два не пересекающихся инвариантных подпространства.
$\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$.

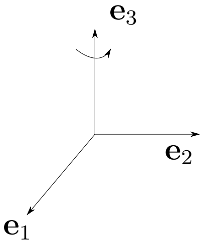


Рис. 7.3. К примеру 1

7.2.2. Геометрический смысл матрицы преобразования

Поговорим о геометрии. Научимся определять по внешнему виду матрицы ее геометрический смысл.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{— отражение относительно } \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{— проекция.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{— растяжение вдоль } \mathbf{e}_2 \text{ в 3 раза.}$$

Нам интересны матрицы вида:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{— обобщённое растяжение} \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i.$$

7.3. Собственный вектор

7.3.1. Определение

Рассмотрим преобразование φ с матрицей A, тогда ненулевой вектор $\mathbf{x}$ называется собственным вектором, если $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$; λ — собственное значение.

Множество собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, образует собственное пространство.

7.3.2. Свойства

Предложение 7.3.1. *Собственный вектор (и только он) порождает одномерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Рассмотрим инвариантное подпространство $\langle \mathbf{x} \rangle \Rightarrow \varphi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}) = \alpha \lambda \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x} \rangle$. □

7.4. Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов

$$\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

Рассмотрим тождественное преобразование Id, матрица его преобразования E.

$$(\varphi - \lambda Id)(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$$

Перейдём к матричному виду:

$$(\varphi - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad (*)$$

Итак, мы получили СЛУ размеров $n \times n$. Она имеет либо одно решение (нулевое), но оно нам не интересно, т. к. $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, либо бесконечно много решений $\Rightarrow A$ должна быть вырожденной $\Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \to \lambda_i$ — собственное значение $\to (*) \to \mathbf{x}$ — собственный вектор.

Пример 2

Найти собственные значения и собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Найдём λ из условия $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda - 15 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -5$$

Далее подставим числа λ в $(*)$:

1.° $\lambda_1 = 1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right),$

$L_1 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leftarrow$ Собственный вектор, перейдёт сам в себя т.к. $\lambda = 1$.

2.° $\lambda_2 = 3 : L_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$

3.° $\lambda_3 = -5 : L_3 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) \rangle$

Лемма 7.4.1. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, попарно линейно независимы.*

Соберём базис $\mathbf{f} \left\{ \underset{\mathbf{f}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}} \right\}$

$$\begin{array}{l} \varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1 \\ \varphi(\mathbf{f}_2) = 3\mathbf{f}_2 \to A' = \\ \varphi(\mathbf{f}_3) = 5\mathbf{f}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ в базисе } \mathbf{f}.$$

7.5. Диагонализируемость матрицы

Пример 3
Диагонализировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \underset{\text{Не забывайте про свойства детерминанта}}{(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0}$$

$\lambda = 1$ — корень алгебраической кратности 2.
$\lambda = 2$ — корень алгебраической кратности 1 (простой корень).

1.° $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right),\ L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{формирует} \\ \text{плоскость}}} \rangle$$

$\dim L_1 = 2$ — геометрическая кратность (размерность собственного подпространства).

2.° $\lambda = 2$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow\ L_1 = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Выберем базис: $\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Поэтому $\varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$, $\varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2$, $\varphi(\mathbf{f}_3) = 2\mathbf{f}_3$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Геометрическая кратность $\leqslant$ алгебраическая кратность

- Если геометрическая кратность строго меньше ($<$) алгебраической кратности хотя бы для одного λ, то преобразование недиагонализируемо.

Пример 4

Диагонализировать матрицу: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\det\,(A-\lambda E)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3=0$$

Получаем, что $\lambda=2$ алгебраической кратности 3.

$$\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right);\ L_1=\langle\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right)\rangle=\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle$$

Получили, что геометрическая кратность (равна 1) меньше алгебраической кратности (равна 3). Тогда матрица недиагонализируема (не хватило собственных векторов).

Пример 5
Диагонализировать матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Решение:

$$\det\,(A-\lambda E)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$$

$$\lambda=1,\quad \underbrace{\lambda=\pm\, i}_{\substack{\text{отвечают за}\\ \text{инвариантную}\\ \text{плоскость}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right);\ L_1=\langle\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$$

Условие диагонализируемости матрицы:

1° *В частности*: $A_{n\times n}$ диагонализируема, если A имеет n различных вещественных собственных значений.

2° *В общем случае*: A диагонализируема $\Leftrightarrow$ L раскладывается в прямую сумму собственных подпространств.

Семинар 8

Инвариантные и собственные подпространства. Часть 2.

8.1. Решение задач

Пример 6
Найти собственные значения и собственные векторы.
$p = \langle 1, t, t^2 \rangle$, если $\varphi(p) = t^2 p'' - tp' + 2p$.

Решение:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1) &= 2 : \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(t) &= t : \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(t^2) &= 2t : \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$, собственный вектор: $\{t\}$.
$\lambda_{2,3} = 2$, собственный вектор: $\{1, t^2\}$.

Для λ_1 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow L_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Проверим: $\underline{\varphi(7t)} = -7t + 14t = \underline{7t}$.

Пример 7
При каких α преобразование диагонализируемо?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Решение:
Решение основывается на данном утверждении:

$$\boxed{\textbf{Число столбцов ФСР} = n - \operatorname{Rg} A = \textbf{число собственных векторов}}$$

I. $\alpha^2 = 1$:
   (a) $\alpha = 1 : \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ — матрица уже диагональная.
   (b) $\alpha = -1 : \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \lambda = 1$ — корень алгебраической кратности 3.

   Тогда система уравнений: $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow$ 2 вектора, т.е. для построения базиса собственных векторов не хватает.

II. $\alpha^2 \neq 1$:

$\lambda = 1$ — корень алгебраической кратности 2.

$\lambda = \alpha^2$ — простой корень.

(a) $\lambda = 1$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{array}\right)$, $\quad \mathrm{Rg} = 1, n = 3 \Rightarrow 2$ собственных вектора.

(b) $\lambda = \alpha^2$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha^2 & 0 & \alpha^2-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\quad \mathrm{Rg} = 2, n = 3 \Rightarrow 1$ собственный вектор.

Ответ: $\alpha \neq -1$.

Пример 8

Рассмотрим $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Вопрос: всегда ли существует одномерное инвариантное подпространство?

Решение:

Рассмотрим определитель третьего порядка:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \beta_1\lambda^2 + \beta_2\lambda + \beta_3$$

$$\begin{array}{l} P(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to+\infty} -\infty \\ P(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to-\infty} +\infty \end{array} \Rightarrow P(\lambda) \text{ пересечет ноль и сменит знак} \Rightarrow \exists\lambda_0 : P(\lambda_0) = 0$$

Следовательно, существует вещественное собственное значение $\Rightarrow \exists$ собственный вектор $\Rightarrow \exists$ одномерное инвариантное пространство.

Этот же вывод справедлив для любой нечетной степени характеристического многочлена.

Пример 9

Доказать, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

Решение:

Рассмотрим преобразование φ с матрицей A,

$A' = S^{-1}AS$, характеристический многочлен $\det(A' - \lambda E)$.

$\det(A' - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) = \det S^{-1}\det(A - \lambda E)\det S = \det(SS^{-1})\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$.

Отсюда следует:

$$\det(A' - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$$

Очевидно, собственные значения не меняются при замене базиса.

Рассмотрим подробнее характеристический многочлен.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)}_{\text{только в этом члене есть } \lambda^n \text{ и } \lambda^{n-1}} + \cdots + \tilde{P}(0) =$$

$$= (-1)^n\lambda^n - (-1)^n(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + \det A$$

Вспомним, что для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

справедлива теорема Виета, которую мы знаем еще из школы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 x_2 = c/a \end{cases}$$

Обобщенная теорема Виета:

Произведение корней: $(-1)^n \cdot \frac{\{\text{свободный член}\}}{\{\text{первый коэффициент}\}}$
Сумма корней: $-\frac{\{\text{второй коэффициент}\}}{\{\text{первый коэффициент}\}}$
$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n \cdot \frac{\det A}{(-1)^n} = \det A$
$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = \operatorname{tr} A$ (т.е. след матрицы A).
Т.о. оказывается , что $\det A$ и $\operatorname{tr} A$ не зависят от выбора базиса.

Пример 10
Пусть A — матрица вращения $\mathbb{R}^3$. Найти угол вращения.

Решение:
Выберем ортонормированный базис так, что поворот вокруг $\mathbf{e}_3$.
В этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Т.к. $\operatorname{tr} A = 2\cos\alpha + 1 = \text{const}$:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1)}$$

Пример 11
Пусть $\lambda_1, \ \dots \ , \lambda_n$ — собственные значения преобразования φ с матрицей A. Какие собственные значения у а) φ^2; б)φ^{-1} ?

Решение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad (*)$$

1). $\varphi^2 : \ \det(A^2 - \widetilde{\lambda} E)$

$$(*)| \cdot \det(A + \lambda E) \Rightarrow \det(A - \lambda E)\det(A + \lambda E) = \det(A^2 - \lambda^2 E) = 0 \quad \Rightarrow \widetilde{\lambda} = \lambda^2$$

2). $\varphi^{-1} : \ \det(A^{-1} - \tilde{\lambda} E) = \det(A^{-1} - \tilde{\lambda} A^{-1} A) = 0$

$$\Rightarrow \det A^{-1} \cdot \det(E - \tilde{\lambda} A) = 0$$

Так как $\det A^{-1} \neq 0$ (матрица A невырожденная), то верно:

$$\det(E - \tilde{\lambda} A) = 0$$

Разделим равенство на $(-1)^n \tilde{\lambda}^n$:

$$\det(A - \frac{E}{\tilde{\lambda}}) = 0 \ \Rightarrow \ \tilde{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}.$$

Заметим, что собственные векторы при этом не изменятся.

8.2. Проекторы

Пусть $L = L_1 \oplus L_2$;
$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ — единственный прообраз, где $\mathbf{x}_1 \in L_1$, $\mathbf{x}_2 \in L_2$

$$\begin{gathered}\text{Тогда: } P_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1 \text{ — проектор на } L_1 \parallel L_2 \\ P_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 \text{ — проектор на } L_2 \parallel L_1 \\ \operatorname{Im} P_1 = L_1 \text{ и } \ker P_1 = L_2 \\ \operatorname{Im} P_2 = L_2 \text{ и } \ker P_2 = L_1\end{gathered}$$

$$P_1(\mathbf{x}) + P_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \ \Rightarrow\ (P_1 + P_2)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \ \Rightarrow\ P_1 + P_2 = \mathrm{Id}$$

Пример 12
Рассмотрим ортогональный проектор A в $\mathbb{R}^3$.
Найти собственные значения и собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:
1.° Собственное значение $\lambda = 1$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
2.° Собственное значение $\lambda = 0$: собственный вектор $\{\mathbf{e}_3\}$.

Пример 13
Пусть $L = L_1 \oplus L_2$.
$\dim L = n$, $\dim L_1 = k \Rightarrow \dim L_2 = n - k$.
Найти собственные значения и собственные векторы P_1,
где P_1 — проектор $L_1 \| L_2$

Решение:
Пусть базис в L_1: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$.
Пусть базис в L_2: $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
$P_1(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, P_1(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \ldots, P_1(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k$
$P_1(\mathbf{e}_{k+1}) = \cdots = P_1(\mathbf{e}_n) = \mathbf{o}$
Тогда матрица преобразования будет выглядеть таким образом:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

1.° Собственное значение $\lambda = 1$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$.
2.° Собственное значение $\lambda = 0$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
- Размерность образа при проектировании равна следу матрицы

$$\boxed{\operatorname{rg} P = \operatorname{tr} A}.$$

Пример 14
а) Доказать, что для проектора $\varphi^2 = \varphi$.

б) Доказать, что если $\varphi^2 = \varphi$ ($\varphi \neq 0, \not\equiv \mathrm{Id}$), то φ — проектор на образ $\|$ ядру.

Решение:
а) Т.к. имеем дело с проектором, все пространство раскладывается на прямую сумму двух подпространств:

$$L = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2.$$

Тогда, применив наше преобразование (т.е. проектор), получим:

$$\varphi(\mathbf{x}) = P_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1.$$

Теперь к полученному результату применим преобразование ещё раз. Т.к. вектор $\mathbf{x}_1$ лежит в L_1, то его проекция на L_1 и есть сам вектор $\mathbf{x}_1$:

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 \Rightarrow \boxed{\varphi^2 = \varphi}.$$

б) Пусть L — линейное пространство, $\varphi : \varphi^2 = \varphi$. Пусть $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\varphi$, $\mathbf{y} \in \ker\varphi$.

1.° $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$ (т.к. $\mathbf{y} \in \ker\varphi$).
2.° $\exists \mathbf{x} \in L : \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (т.к. $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\varphi$).
3.° $\varphi^2(\mathbf{x}) = \varphi(\varphi(\mathbf{x})) \overset{\text{п.2)}}{=} \varphi(\mathbf{y}) \overset{\text{п.1)}}{=} \mathbf{o}$, откуда получаем, что $\mathbf{y}=\mathbf{o}$. Противоречие. Отсюда же следует, что

$$\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{o}\}$$

Рассмотрим подпространство L':

$$L' = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi \subset L.$$

$$\dim L' = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim L.$$

Отсюда следует, что наше подпространство L' и есть линейное пространство L:

$$L' \equiv L \Rightarrow L = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi.$$

Семинар 10

Критерий Сильвестра. Евклидовы пространства.

10.1. Критерий Сильвестра

10.1.1. Положительно и отрицательно определенные функции

Квадратичная функция называется **положительно определенной**, если для любого вектора $x \neq 0$, верно: $k(x) > 0$. Например, функция $\mathbf{k}(x) = x_1^2 + 4x_2^2$.

Квадратичная функция называется **отрицательно определенной**, если для любого вектора $x \neq 0$, верно: $k(x) < 0$. Например, функция $\mathbf{k}(x) = -2x_1^2 - x_2^2$.

Важной является следующая задача: определить, является ли квадратичная функция положительно определенной. Мы уже можем дать ответ на этот вопрос. Для этого можно привести функцию к каноническому виду, и в случае если на диагонали находятся только «+1», дать утвердительный ответ, иначе дать отрицательный ответ. Однако, оказывается, что для того, чтобы выяснить положительную определенность функции необязательно приводить ее к каноническому виду. Ответ на поставленный вопрос дает критерий Сильвестра.

10.1.2. Критерий Сильвестра

Теорема 10.1.1 (Критерий Сильвестра)**.** *Для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы миноры ее матрицы удовлетворяли неравенствам:*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1k} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Миноры в левой части называются главными минорами матрицы.

Доказательство. Центральный тезис: при методе элементарных преобразований главные миноры в процессе не меняются в силу свойств детерминанта.

Необходимость: в диагональном виде все диагональные элементы положительны, поэтому в исходном виде $M_k > 0$.

Достаточность: Докажем по индукции. Для первого элемента: $M_1 > 0 \Rightarrow \beta_{11} = \varepsilon_1 > 0$. Тогда на k-ом шаге:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & \dots & \varepsilon_k & \\ \hline & O & & C_k \end{array}\right)$$

В таком виде $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{M_{k+1}}{M_k} > 0$, т.к. $M_{k+1} > 0$ и $M_k > 0$. □

Пример 1

Является ли квадратичная функция $\mathbf{k}(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ положительно определенной?

Решение:

Матрица квадратичной функция: $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим главные миноры: $\Delta_1 = |2| = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 > 0$.

Все главные миноры положительны, таким образом получили

Ответ: да, является положительно определенной.

Пример 2

Дана квадратичная функция: $\mathbf{k}(x) = x_1^2 + \lambda x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. При каком λ функция $\mathbf{k}(x)$ положительно определена?

Решение:

Матрица квадратичной функции: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы ее главные миноры были положительны. Рассмотрим их:

$$\Delta_1 = |1| = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\lambda - 4 > 0.$$

Получили систему из двух условий: $\begin{cases} \lambda - 1 > 0, \\ 3\lambda - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda > \dfrac{4}{3}$.

Ответ: $\lambda > \dfrac{4}{3}$.

Пример 3

При каких α квадратичная форма $\mathbf{k}(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3$ положительно определена?

Решение:

Матрица квадратичной функции: $B = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы ее главные миноры были положительны. Рассмотрим их:

$$\Delta_1 = |2| = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 2 - \alpha^2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\alpha^2 > 0.$$

Получили систему из двух условий: $\begin{cases} 2-\alpha^2>0, \\ 5-3\alpha^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right).$

Пример 4

Доказать, что для отрицательной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались, начиная со знака «−».

Решение:

Рассмотрим квадратичную функцию $\mathbf{k}(x)$ с матрицей B. Пусть она отрицательно определена. Тогда функция $-\mathbf{k}(x)$ с матрицей $-B$ определена положительно. Поэтому критерием (необходимым и достаточным) отрицательной определенности функции $\mathbf{k}(x)$ является положительность всех главных миноров матрицы:

$$-B = \begin{pmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1n} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} & \cdots & -\beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta_{n1} & -\beta_{n2} & \cdots & -\beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря:

$$\Delta_1 = -\beta_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & -\beta_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

Опираясь на свойства детерминанта (вынесем минус из каждой строки, всего k раз, где k – порядок минора), перепишем последнее:

$$\Delta_1 = \beta_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \dots$$

Таким образом, доказали важное следствие критерия Сильвестра: для отрицательной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались, начиная со знака «−».

С целью не забыть, с какого знака начинается чередование, полезно помнить, квадратичная функция с матрицей E (где E - единичная матрица) положительна определена, а квадратичная функция с матрицей $-E$ отрицательно определена.

10.2. Евклидовы пространства

10.2.1. Определения

Определение 10.2.1. Линейное пространство $\mathcal{E}$ называется евклидовы, если на нем задано скалярное произведение.

Определение 10.2.2. Скалярное произведение в вещественном линейном пространстве L ставит в соответствие число, обозначаемое $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, таким образом, что для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и чисел α, β выполнены следующие условия:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$.
3) $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
4) $\forall \mathbf{x} \neq 0 \longmapsto (\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$.

Видно, что «школьное» скалярное произведение подходит. Иначе говоря, задана положительно определенная квадратичная форма.

Пример 5
Является ли в пространстве многочленов степени $\leqslant n$ скалярным произведением

$$(\mathbf{p},\,\mathbf{q}) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

Решение:
Проверим условия, определенные для скалярного произведения:

1) $p \cdot q = q \cdot p$.

2, 3) Определённый интеграл обладает свойствами линейности.

4) Если $p(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[-1, 1]$:

$$(\mathbf{p},\,\mathbf{p}) = \int\limits_{-1}^{1} p^2(t)dt,$$

$p^2(t)$ — четная функция. Значение этого интеграла — площадь подграфика. Т.к. $p(t) \not\equiv 0$, эта площадь не отрицательна $\Rightarrow (\mathbf{p},\,\mathbf{p}) > 0$.

Таким образом, так действительно определено скалярное произведение в пространстве многочленов.

10.3. Матрица Грама

10.3.1. Определение

Определение 10.3.1. Выберем базис $\mathbf{e}\,\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}$ — координаты векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{e}$. Вспомним, что тогда скалярное произведение запишется так:

$$(\mathbf{x},\,\mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}\Gamma\boldsymbol{\eta},$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n,\,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n,\,\mathbf{e}_2) & \ldots & (\mathbf{e}_n,\,\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

— матрица Грама.

10.3.2. Свойства матрицы Грама

Свойства матрицы Грама:

1) Симметричность.

2) Положительная ориентированность.

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_2) \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2)^2 < \mathbf{e}_1^2\ \mathbf{e}_2^2$$

Для линейно независимых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \longmapsto (\mathbf{x},\,\mathbf{y})^2 < \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2$.
Для линейно зависимых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \longmapsto (\mathbf{x},\,\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2$.

Итак,

$$\boxed{\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \longmapsto (\mathbf{x},\ \mathbf{y})^2 \leqslant \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2}$$

— неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Определим длину вектора как

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\ \mathbf{x})},$$

а угол между векторами

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}.$$

Пример 6

Посчитать скалярное произведение, если $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

Решение:

$(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{\eta} = (-1 - 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$

Для выражения матрицы Грама в новом базисе используется следующая формула:

$$\boxed{\Gamma' = S^{\mathrm{T}}\Gamma S}$$

10.4. Типы базисов

Пусть задан $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n$ — ортогональный базис.

Тогда $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{h}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{h}_n$.

Чему равны коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$?

В ортогональных базисах скалярное произведение $(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = 0$ при $i \neq j$.

$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{h}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{h}_n| \cdot \mathbf{h}_1$

$(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1) = \alpha_1|\mathbf{h}|_1^2$, где $\alpha_1 = \dfrac{(\mathbf{x},\ \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}$

Т. е. $\alpha_i = \dfrac{(\mathbf{x},\ \mathbf{h}_i)}{|\mathbf{h}_i|^2}$, поэтому

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 + \cdots + \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{h}_n)}{|\mathbf{h}_n|^2}\mathbf{h}_n$$

Вектор равен сумме ортогональных проекций этого вектора на базисные вектора данного базиса.

Выполнено только для ортогонального базиса, иначе произведение $(\mathbf{h}_i,\ \mathbf{h}_j) = 0$ при $i \neq j$ не будет выполнено.

Определение 10.4.1. Ортонормированный базис — базис, в котором

$$(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma = E$, $(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\eta}$.

Определение 10.4.2. Рассмотрим подпространство $U \in E$. Тогда $U^{\perp}$ называется ортогональным дополнением подпространства U, если

$$U^{\perp} : \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \perp U\}, \text{ т.е. } \mathbf{y} \perp \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in U, U \oplus U^{\perp} = \mathcal{E}$$

Пример 7

Дано U. Найти $U^{\perp}$ в $\mathcal{E}^3$.

Решение:

$\Gamma = E$; $U = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$; $\quad U^{\perp} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$;

$$\begin{cases} y_1 - 5y_2 + y_3 = 0; \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 0; \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow U^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$$

Почему $U^{\perp}$ ортогональное дополнение? Дело в том, что его сумма с U дает нам все евклидово пространство.

$$\underset{k}{U} \oplus \underset{n-k}{U}^{\perp} = \underset{n}{\mathcal{E}}$$

Пример 8

Дано U. Найти $U^{\perp}$ в $\mathcal{E}^3$. $\Gamma = E$, $U : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{cases} x_1 - 3x_2 \quad +4x_3 = 0; \\ x_1 \qquad\quad -3x_3 = 0 \end{cases}; \qquad U^{\perp} = ?$

Решение:

По аналогии предыдущему примеру, получаем: $U^{\perp} : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$.

Пример 9

Дано U. Найти $U^{\perp}$ как СЛУ. $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix}$, $U = \begin{cases} x_1 \qquad\quad +x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 \qquad\quad = 0 \end{cases}; \qquad U^{\perp} = ?$

Решение:

Из матрицы, задающей подпространство U, получаем, что $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пусть $U^{\perp}$ задана как $\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle$. Тогда:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -y_2 + 3y_3 = 0$$

Ответ: $-y_2 + 3y_3 = 0$

Пример 10

Найти проекцию $\mathbf{x}$ на подпространство U. (Здесь $\Gamma = E$)

$$U\colon \langle \underset{\mathbf{a}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}} \rangle, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{Пр}_U^{\mathbf{x}} = ?$$

Решение:

Первый способ:

$\mathbf{x} = \underbrace{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}_{\in\,\mathbf{a}} + \underbrace{c}_{\in\,\mathbf{b}}$, причем $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$.

Домножим это выражение скалярно на $\mathbf{a}$ и на $\mathbf{b}$ и составим систему:

$$\begin{cases} (\mathbf{x},\, \mathbf{a}) = \alpha\,|\mathbf{a}|^2 + \beta(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + 0 \\ (\mathbf{x},\, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + \beta\,|\mathbf{b}|^2 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3\alpha + 3\beta \\ 0 = 3\alpha + 6\beta \end{cases}$$

Отсюда $\alpha = 2, \beta = -1$. Искомая проекция равна:

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{x}} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Второй способ:

Как было показано выше, в ОНБ проекция вектора равна сумме проекций на каждый из базисных векторов. Однако в случае произвольного базиса это не так:

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{x}} \neq \text{Пр}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} + \text{Пр}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}} \text{ — не работает, если } \mathbf{a} \not\perp \mathbf{b} \quad !$$

Было бы здорово, если бы в U был базис $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}$ такой, что $\mathbf{a}' \perp \mathbf{b}'$, тогда соотношение будет работать. Для этого *ортогонализируем* базис:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \text{Пр}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b},\, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Итак, в U мы нашли новый базис: $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Здесь уже можем пользоваться приведенным соотношением для нахождения проекции:

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{x}} = \text{Пр}_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}} + \text{Пр}_{\mathbf{b}'}^{\mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{x},\, \mathbf{a}')}{|\mathbf{a}'|^2}\mathbf{a}' + \frac{(\mathbf{x},\, \mathbf{b}')}{|\mathbf{b}'|^2}\mathbf{b}' = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Замечание. Хотя мы и нашли новый базис, координаты векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ все ещё выражены в старом базисе, а поэтому и скалярное произведение мы считаем, используя матрицу Грама в старом базисе.

Семинар 11

Евклидовы пространства. Сопряженное преобразование.

Решим пару примеров на пройденные темы.

Пример 1
Может ли данная матрица быть матрицей Грама?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:
Вспомним из семинара 10 свойства матрицы Грама.

- Симметричность
- Положительная определённость

Наша матрица симметрична, проверим на положительную определенность.

$M_1 = 1 \geqslant 0$

$M_2 = -3 \leqslant 0$

Матрица не положительно определена $\Rightarrow$ не матрица Грама.

Пример 2
Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a}(1 \quad 0 - 2 \quad 2)^T$ на $U : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \quad \Gamma = E$.

Решение:
Можно записать U как

$$U(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1|0) \qquad U : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$U^{\perp} : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\mathbf{a} = \text{Пр}_U^{\mathbf{a}} + \text{Пр}_{U^{\perp}}^{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \text{Пр}_U^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \text{Пр}_{U^{\perp}}^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

11.1. Ортогонализация Грама-Шмидта

Пусть дан базис $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$

Наша задача: построить отрогональный базис $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n$

1) $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$

2) $\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \text{Пр}_{\mathbf{h}_1}^{\mathbf{f}_2} = \mathbf{f}_2 - \dfrac{(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_2)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1$

3) $\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \text{Пр}_{\langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle}^{\mathbf{f}_3} = \mathbf{f}_3 - \dfrac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 - \dfrac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2$

Для построения ортонормированного базиса, каждый вектор нужно разделить на его длину, т.е.

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{|\mathbf{h}_i|}.$$

Пример 3

Ортонормировать систему векторов со стандартным (т.е. $\Gamma = E$) скалярным произведением

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Решение:

На первом шаге возьмем вектор $\mathbf{f}_1$ за основу нового базиса, т.е. $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, |\mathbf{h}_1| = \sqrt{10}$.

На втором шаге найдем следующий вектор по рекуррентной формуле, полученной выше

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{h}_2| = \sqrt{23}.$$

Можно убедиться, что $(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = 0$.

Далее, найдем третий вектор

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -8 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad |\mathbf{h}_3| = \sqrt{17}.$$

Осталось только нормировать полученный базис, т.е. разделить каждый вектор на его длину.

Ответ: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{23}}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Пример 4

В пространстве многочленов, степени не выше второй, задано скалярное произведение в таком виде:

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Построить ортогональный базис в этом пространстве.

Решение:

За основу возьмем стандартный базис $\{\underset{\mathbf{f}_1}{1}, \underset{\mathbf{f}_2}{t}, \underset{\mathbf{f}_3}{t^2}\}$. Пусть первый вектор в нашем новом базисе $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1 = 1$. Найдем длину $\mathbf{h}_1$[1]:

$$|\mathbf{h}_1|^2 = \int\limits_{-1}^{1} 1^2 dt = 2.$$

Для ортогонализации необходимо найти скалярное произведения $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$. Будем искать их по заданному определению:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot t = 0 \Rightarrow 1 \perp t.$$

Теперь подставим числа в рекуррентную формулу и получим второй вектор базиса:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_2 \quad |\mathbf{h}_2|^2 = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Т.к. $(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2) = 0$,

$$(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_3) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot t^2 = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1,$$

то

$$\mathbf{h}_3 = t^2 - \frac{2}{3 \cdot 2} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$.

11.2. Сопряжённые преобразования

11.2.1. Определение

Определение 11.2.1. Линейное преобразование евклидова пространства φ^* называется <u>сопряжённым с преобразованием φ</u>, если

$$\boxed{(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}}$$

Пусть в базисе $\mathbf{e}$: $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}$. Матрицы преобразований φ и φ^* равны соответственно A и A^*, то есть:

$$\varphi(\mathbf{x}) = A\boldsymbol{\xi};\ \varphi^*(\mathbf{y}) = A^*\boldsymbol{\eta}$$

$$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) \Leftrightarrow (A\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma(A^*\boldsymbol{\eta})$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma A^*\boldsymbol{\eta}$$

Отбросив $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\eta}$ в обоих частях последнего равенства (т.к. данное равенство выполнено для любых $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\eta}$), получим:

$$\boxed{A^{\mathrm{T}}\Gamma = \Gamma A^*}$$

В ортонормированном базисе получим:

$$\boxed{A^{\mathrm{T}} = A^*}$$

---

[1] Как может показаться длина единицы равна 1. Но т.к. по определению длина вектора — корень из его скалярного произведения самого на себя, это не так.

11.2.2. Свойства сопряжённых преобразований

1) Характеристические многочлены совпадают.
2) Если подпространство $U \in \mathcal{E}$ инвариантно относительно φ, то его ортогональное дополнение $U^{\perp}$ инвариантно относительно φ^*.

Доказательство. (пункт 2): Возьмём произвольные $x \in U$ и $y \in U^{\perp}$.
$\varphi(\mathbf{x}) \in U \Rightarrow (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) \Rightarrow \varphi^*(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}$, то есть $\varphi^*(\mathbf{x}) \in U^{\perp}$ □

11.2.3. Самосопряжённые преобразования

Определение 11.2.2. Линейное преобразование евклидова пространства φ называется самосопряжённы если

$$\boxed{(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y}))}$$

В ортонормированном базисе получим:

$$A = A^{\mathrm{T}}, \text{где } A \text{ – симметрическая} \Leftrightarrow \varphi \text{ – симметрическое}$$

△ Наличие пары комплексных корней в уравнении $\det(A - \lambda E) = 0$ порождает двумерное инвариантное подпространство без собственных векторов. ▲

Лемма 11.2.1. *Самосопряжённое преобразование φ имеет только вещественные собственные значения.*

Доказательство. Пусть есть пара комплексных корней $\Rightarrow$ существует двумерное инвариантное подпространство L' *без собственных векторов.* Для этого пространства преобразование φ задается:

$$\varphi(L')\colon \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \text{ причем для собственных значений } \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$(\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 = 0$
$\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$
$D = \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + 4\beta^2 = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geqslant 0$
$\Rightarrow$ в этом пространстве существует собственный вектор. Противоречие. □

Лемма 11.2.2. *Собственные подпространства самосопряженных преобразований φ ортогональны (собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны).*

Доказательство. $\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \\ \varphi(\mathbf{y}) = \mu\mathbf{y} \\ \lambda \neq \mu \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y})) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{matrix}\right) \ominus$
$0 = (\lambda - \mu)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, что и требовалось доказать. □

11.2.4. Центральная теорема

Теорема 11.2.1. *φ — самосопряженное $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $U = U_1 \oplus ... \oplus U_n$ — сумма всех собственных подпространств. Докажем, что $U = \mathcal{E} \Leftrightarrow U^{\perp} = 0$
$\varphi(U^{\perp})$ — самосопряженное $\overset{\text{Лемма 1}}{\Rightarrow} \exists\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ собственный вектор $\in U^{\perp}$, но все собственные векторы $\in U \Rightarrow U^{\perp} = 0 \Rightarrow U = \mathcal{E} \Rightarrow$ существует базис из собственных векторов, этот базис можно сделать. □

Этот базис можно сделать ортогональным в силу леммы 11.2.2.

Геометрический смысл

1) "Сжатие" вдоль перпендикулярного направления
2) Ортогональное проецирование
3) Отражение

Пример 5

В ортонормированном базисе φ задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найти ОНБ из собственных векторов.

Решение:

В ОНБ: $-A = A^{\mathbf{T}} \Rightarrow \varphi$ — самосопряженное преобразование.

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -3 \\ \lambda = -2 \end{array}\right.$$

$$1)\lambda = -3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \mathbf{f}_1$$

$$1)\lambda = 2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 : \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbf{f}_2$$

$$\mathbf{e'}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e'}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 6

В ортонормированном базисе φ задана матрица A. Найти ОНБ из собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{В ОНБ} \quad A = A^{\mathbf{T}} \Rightarrow \varphi \text{ — самосопряженное}$$

Решение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{rl} \lambda = 3 & \text{кратность } 2 \\ \lambda = -3 & \text{кратность } 1 \end{array}$$

$$1)\lambda = 3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 \rangle$$

$$2)\lambda = -3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 \rangle$$

$\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$

$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3$

$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\ \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

В этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Семинар 12

Ортогональное преобразование и функции на евклидовых пространствах.

12.1. Ортогональные матрицы.

Рассмотрим два ОНБ
$$\mathbf{e} \text{ и } \mathbf{e}' = \mathbf{e}S.$$
В этих базисах
$$\Gamma = E \text{ и } \Gamma' = E.$$
Мы знаем, что
$$\Gamma' = S^{\mathrm{T}}\Gamma S.$$
Из этих равенств следует, что
$$S^{\mathrm{T}}S = E \Rightarrow S^{\mathrm{T}} = S^{-1}. \tag{$*$}$$
Такие матрицы, для которых выполнено ($*$), называются ортогональными, причем
$$\det S^{\mathrm{T}}S = \det S \det S^{\mathrm{T}} = \det E.$$
Т.к. $\det S = \det S^{\mathrm{T}}$, то
$$\det^2 S = 1 \Rightarrow \det S = \pm 1.$$

Рассмотрим подробнее матрицу S.
Матрица S состоит из столбцов $s_i^{\uparrow}$
$$S = \begin{pmatrix} s_1^{\uparrow} & s_2^{\uparrow} & \cdots & s_n^{\uparrow} \end{pmatrix},$$
тогда S^{T} из строк $\vec{s}_i$
$$S^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \\ \vdots \\ \vec{s}_n \end{pmatrix}.$$
Т.к. для матрицы S выполнено ($*$), то
$$\begin{pmatrix} s_1^{\uparrow} & s_2^{\uparrow} & \cdots & s_n^{\uparrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \\ \vdots \\ \vec{s}_n \end{pmatrix} = E,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} s_i s_j = 1, \forall i = j \\ s_i s_j = 0, \forall i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow s_i s_j = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Таким образом, столбцы/строки матрицы S формируют ОНБ.

Если мы имеем дело с матрицами размерами 2×2, то они имеют вид:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

12.2. Ортогональное преобразование.

Определение 12.2.1. Преобразование φ с матрицей A евклидового пространства $\mathcal{E}$ называется ортогональным, если оно сохранет скалярное произведение, т.е.

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \longmapsto (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Также сохраняются углы и длины — геометрический смысл «движения».

Из семинара 11:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \longmapsto (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})),$$

где φ^* — сопряженное преобразование. Заменим $\mathbf{y}$ на $\varphi(\mathbf{y})$ (т.к. говорим об ортогональных преобразованиях)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \varphi^*\varphi(\mathbf{y})).$$

Используя свойство линейности, перепишем равенство так

$$(\mathbf{x}, \varphi^*\varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{y}) = 0.$$

Т.к. это равенство выполнено для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$:

$$\varphi^*\varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{y} = \mathbf{o} \Rightarrow \varphi^*\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \Rightarrow \varphi^*\varphi = \mathrm{Id},$$

где Id — тождественное преобразование. Т.е. мы получили, что $A^*A = E$. В ОНБ $A^* = A^{\mathrm{T}}$, откуда следует, что

$$\boxed{A^{\mathrm{T}}A = E},$$

т.е. ортогональное преобразование задает ортогональная матрица.

Свойства:

1) Ортогональное преобразование инъективно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in Ker\ \varphi$, т.е. $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.
$(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o} \Rightarrow$ инъекция. □

2) Собственные значения ортогонального преобразования равны ±1.

Доказательство. $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.
$(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = \lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \Leftrightarrow \lambda^2 = 1.$ □

3) Пусть подпространство $U \subset \mathcal{E}$. Если U инвариантно относительно φ, то $U^{\perp}$ инвариантно относительно φ.

Пример 1

φ переводит столбцы матрицы A в столбцы B. Скалярное произведение стандартное. Ортогонально ли φ?

Решение:

<u>Первый способ</u>

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{x}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \varphi(\mathbf{x})\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) = 15$

$\mathbf{y}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi(\mathbf{y})\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{y})) = 15$

$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 65 \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{x})) = 65$

$(\mathbf{y},\mathbf{y}) = 5 \quad (\varphi(\mathbf{y}),\varphi(\mathbf{y})) = 5$

$\Rightarrow \varphi$ — ортогональное.

Может возникнуть мысль, что достаточно проверить два соотношения из трех, однако этого оказывается недостаточно:

$(\mathbf{x},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha\underline{(\mathbf{x},\mathbf{x})} + \beta\utilde{(\mathbf{x},\mathbf{y})} = (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{z})) = (\varphi(\mathbf{x}),\alpha\varphi(\mathbf{x})+\beta\varphi(\mathbf{y}))$

$= \alpha(\utilde{\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{x})}) + \beta(\underline{\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{y})})$

Контрпример:

$\mathbf{x}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \varphi(\mathbf{x})\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) = 6 \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{y})) = 15$

$\mathbf{y}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi(\mathbf{y})\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ **но!** $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 8 \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{x})) = 10$

$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 65 \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{x})) = 65$

$(\mathbf{y},\mathbf{y}) = 5 \quad (\varphi(\mathbf{y}),\varphi(\mathbf{y})) = 5$

Длины не сохраняются $\Rightarrow$ не ортогонально!

<u>Второй способ:</u>

$$X\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Транспонируя с обеих сторон, получаем:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножая второе уравнение на первое *слева*, получим

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} XX^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Если X — ортогональна $\Rightarrow XX^{\mathrm{T}} = E$

$$\begin{pmatrix} 65 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Предложение верно} \Rightarrow \varphi \text{ ортогонально}$$

12.3. Полярное разложение

Теорема 12.3.1. *Любое линейное преобразование евклидова пространства φ представимо в виде $\varphi = q$, где q — ортогональное преобразование, а s — самосопряженное преобразование.*

Иначе говоря, любая матрица A раскладывается в произведение

$$A = QS, \tag{☼}$$

где Q — ортогональная матрица, S — симметрическая матрица.

То есть существует такое ортогональное преобразование P : $P^{-1}SP = D$ — диагональная матрица.

$S = PDP^{-1} \Rightarrow (☼) \Rightarrow A = \underbrace{QP}_{Q_1}\, D\, \underbrace{P^{-1}}_{Q_2} \Rightarrow \boxed{A = Q_1DQ_2}$, где Q_1,Q_2 — ортогональные матрицы, D — диагональная.

12.4. Билинейные функции на евклидовом пространстве

Определение 12.4.1. Линейное преобразование φ называется присоединенным к билинейной форме $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \to b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y}))$

Фиксируем базис $\mathbf{e}, \varphi : A, \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}, \varphi(\mathbf{y}) = A\boldsymbol{\eta}$.

Пусть B — матрица билинейной формы.

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \Gamma A \boldsymbol{\eta}$$

$$\boxed{B = \Gamma A} \Rightarrow A = \Gamma^{-1} B$$

Пример 2

Найти матрицу присоединенного преобразования.

$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad k(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$

Решение:

$\exists T_1 \dots T_m$ элементарные преобразования строк такие, что

$$T_1 \dots T_m \Gamma = E | \cdot \Gamma^{-1} B$$

$$T_1 \dots T_m B = A$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

В ортонормированном базисе $\Gamma = E \Rightarrow A = B$

У симметричной квадратичной функции в ортонормированном базисе матрица B равна матрице A.

Если A задаёт самосопряжённое преобразование $\Rightarrow \exists$ ортонормированный базис из собственных векторов $\Rightarrow A$ имеет диагональный вид $\Rightarrow B$ также имеет диагональный вид.

Теорема 12.4.1. *В евклидовом пространстве для любой квадратичной формы существует ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид.*

Пример 3

В ортонормированном базисе задана квадратичная форма. Найти ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид.
$k(\mathbf{x}) = -4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$

Решение:
$B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = A,$ т.к базис ортонормированный

A — симметрическая $\Rightarrow A$ — самосопряжённое преобразование.
$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -9 \end{array}\right.$

1) $\lambda = 1$
$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right)$; $L_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$; $\mathbf{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

2) $\lambda = -9$
$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$; $L_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$; $\mathbf{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

В ортонормированном базисе, составленном из векторов $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = B$$

$$k(\mathbf{x}) = \tilde{x}_1^2 - 9\tilde{x}_2^2$$

Вернёмся в линейное подпространство.

Теорема 12.4.2. *Пусть даны квадратичные функции $k(\boldsymbol{x})$ и $h(\boldsymbol{x})$, причём $h(\boldsymbol{x})$ — положительно определена. Тогда в L существует базис, в котором $k(\boldsymbol{x})$ имеет диагональный вид, а $h(\boldsymbol{x})$ – канонический вид.*

Доказательство. Пусть H — вспомогательное скалярное произведение, $\Gamma = H$.

1) $h(\mathbf{x})$ приводится к каноническому виду. В ортонормированном базисе $\hat{H} = E$.
2) K приводится к $\hat{K}$. В ортонормированном базисе $\hat{K} = S^{\mathrm{T}}KS$.

Для $\tilde{K}$ $\exists$ ОНБ, в котором она имеет диагональный вид,
$\tilde{K} = \mathrm{diag}(\dots), \tilde{H} = E$.

☐

Алгоритм

$A = H^{-1}K$ — присоединенное преобразование, K — квадратичная форма;
A — самосопряженное $\Rightarrow$ $\exists$ ОНБ из собственных векторов $\Rightarrow$ $H = E$.

Пример 4

Привести две квадратичные формы к диагональному виду:

$$k(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2; h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2;$$

$h(\mathbf{x})$ положительно определена.

Решение:
$\triangle$
$\det(H^{-1}K - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det(H^{-1}(K - \lambda H)) = 0$

$\det H^{-1}\det(K-\lambda H)=0\;\Rightarrow\;\det(K-\lambda H)=0$

▲

$\Gamma = H\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix};\;K=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 8 & 6\end{pmatrix};\;\det(K-\lambda H)=0;\;\det\begin{pmatrix}4-\lambda & 8-\lambda\\ 8-\lambda & 6-3\lambda\end{pmatrix}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{r}\lambda=-4\\ \lambda=5\end{array}\right.$

$1)\,\lambda=-4\;\;\mathbf{h}_1=\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$

$2)\,\lambda=5\;\;\mathbf{h}_2=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

$|\mathbf{h}_1|^2=(\mathbf{h}_1,\,\mathbf{h}_2)=\begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}=9,\;|\mathbf{h}_1|=3,\;|\mathbf{h}_2|=3\sqrt{2}$

$\tilde{\mathbf{h}}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2/3\end{pmatrix}\quad\tilde{\mathbf{h}}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1/3\end{pmatrix}$

В этом базисе:

$\Gamma=\widetilde{H}=E\quad\hat{h}(\mathbf{x})=\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2;$

$A=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=K\Rightarrow\;\hat{k}(\mathbf{x})=-4\tilde{x}_1^2+5\tilde{x}_2^2$