

Семинар 11. Евклидовы пространства. Сопряженное преобразование.

Решим пару примеров на пройденные темы.

Пример 1

Может ли данная матрица быть матрицей Грама?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Вспомним из семинара 10 свойства матрицы Грама.

- Симметричность
- Положительная определённость

Наша матрица симметрична, проверим на положительную определенность.

$$M_1 = 1 \geq 0$$

$$M_2 = -3 \leq 0$$

Матрица не положительно определена \Rightarrow не матрица Грама.

Пример 2

Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a}(1 \ 0 \ -2 \ 2)^T$ на $U : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$; $\Gamma = E$.

Решение:

Можно записать U как

$$U(1 \ 1 \ 1 \ 1|0) \quad U : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U^\perp : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathbf{a} = \text{Pr}_U^{\mathbf{a}} + \text{Pr}_{U^\perp}^{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \text{Pr}_U^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \text{Pr}_{U^\perp}^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

$$\text{Pr}_U^{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Ортогонализация Грама-Шмидта

Пусть дан базис $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$

Наша задача: построить ортогональный базис $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$

$$1. \ \mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$$

$$2. \ \mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \text{Pr}_{\mathbf{h}_1}^{\mathbf{f}_2} = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_2)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1$$

$$3. \ \mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \text{Pr}_{\langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle}^{\mathbf{f}_3} = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2} \mathbf{h}_2$$

Для построения ортонормированного базиса, каждый вектор нужно разделить на его длину, т.е.

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{|\mathbf{h}_i|}.$$

Пример 3

Ортонормировать систему векторов со стандартным (т.е. $\Gamma = E$) скалярным произведением

$$\mathbf{f}_1 = (1 \ 2 \ 1 \ 2)^T, \quad \mathbf{f}_2 = (4 \ 0 \ 4 \ 1)^T, \quad \mathbf{f}_3 = (1 \ 13 \ -1 \ -3)^T.$$

Решение:

На первом шаге возьмем вектор \mathbf{f}_1 за основу нового базиса, т.е. $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1 = (1 \ 2 \ 1 \ 2)^T$, $|\mathbf{h}_1| = \sqrt{10}$.

На втором шаге найдем следующий вектор по рекуррентной формуле, полученной выше

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{h}_2| = \sqrt{23}.$$

Можно убедиться, что $(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = 0$.

Далее, найдем третий вектор

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2} \mathbf{h}_2 = (2 \ 7 \ 0 \ -8)^T, \quad |\mathbf{h}_3| = \sqrt{17}.$$

Осталось только нормировать полученный базис, т.е. разделить каждый вектор на его длину.

Ответ: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} (1 \ 2 \ 1 \ 2)^T$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{23}} (3 \ -2 \ 3 \ -1)^T$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{17}} (2 \ 7 \ 0 \ 8)^T$.

Пример 4

В пространстве многочленов, степени не выше второй, задано скалярное произведение в таком виде:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Построить ортогональный базис в этом пространстве.

Решение:

За основу возьмем стандартный базис $\{1, t, t^2\}$. Пусть первый вектор в нашем новом базисе $\mathbf{h}_1 =$

$\mathbf{f}_1 = 1$. Найдем длину \mathbf{h}_1 ¹:

$$|\mathbf{h}_1|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dt = 2.$$

Для ортогонализации необходимо найти скалярное произведение \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 . Будем искать их по заданному определению:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \int_{-1}^1 1 \cdot t = 0 \Rightarrow 1 \perp t.$$

Теперь подставим числа в рекуррентную формулу и получим второй вектор базиса:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_2 \quad |\mathbf{h}_2|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Т.к. $(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2) = 0$,

$$(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_3) = \int_{-1}^1 1 \cdot t^2 = \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

¹Как может показаться длина единицы равна 1. Но т.к. по определению длина вектора — корень из его скалярного произведения самого на себя, это не так.

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2} \mathbf{h}_2 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1,$$

то

$$\mathbf{h}_3 = t^2 - \frac{2}{3 \cdot 2} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$.

2. Сопряжённые преобразования

2.1. Определение

Определение 2.1. Линейное преобразование евклидова пространства φ^* называется *сопряжённым с преобразованием φ* , если

$$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$$

Пусть в базисе \mathbf{e} : $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}$. Матрицы преобразований φ и φ^* равны соответственно A и A^* , то есть:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= A\boldsymbol{\xi}; \quad \varphi^*(\mathbf{y}) = A^*\boldsymbol{\eta} \\ (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) &= (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) \Leftrightarrow (A\boldsymbol{\xi})^T \Gamma \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^T \Gamma (A^*\boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\xi}^T A^T \Gamma \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\xi}^T \Gamma A^* \boldsymbol{\eta} \end{aligned}$$

Отбросив $\boldsymbol{\xi}^T$ и $\boldsymbol{\eta}$ в обеих частях последнего равенства (т.к. данное равенство выполнено для любых $\boldsymbol{\xi}^T$ и $\boldsymbol{\eta}$), получим:

$$A^T \Gamma = \Gamma A^*$$

В ортонормированном базисе получим:

$$A^T = A^*$$

2.2. Свойства сопряжённых преобразований

1. Характеристические многочлены совпадают.
2. Если подпространство $U \in \mathcal{E}$ инвариантно относительно φ , то его ортогональное дополнение U^\perp инвариантно относительно φ^* .

Доказательство. (пункт 2): Возьмём произвольные $x \in U$ и $y \in U^\perp$.

$\varphi(\mathbf{x}) \in U \Rightarrow (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) \Rightarrow \varphi^*(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}$, то есть $\varphi^*(\mathbf{x}) \in U^\perp$ □

2.3. Самосопряжённые преобразования

Определение 2.2. Линейное преобразование евклидова пространства φ называется *самосопряжённым*, если

$$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y}))$$

В ортонормированном базисе получим:

$$A = A^T, \text{ где } A - \text{симметрическая} \Leftrightarrow \varphi - \text{симметрическое}$$

△ Наличие пары комплексных корней в уравнении $\det(A - \lambda E) = 0$ порождает двумерное инвариантное подпространство без собственных векторов. ▲

Лемма 2.1. Самосопряжённое преобразование φ имеет только вещественные собственные значения.

Доказательство. Пусть есть пара комплексных корней \Rightarrow существует двумерное инвариантное подпространство L' без собственных векторов. Для этого пространства преобразование φ задается:

$$\varphi(L') : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \text{ причем для собственных значений } \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$$

$$D = \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + 4\beta^2 = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geq 0$$

\Rightarrow в этом пространстве существует собственный вектор. Противоречие. \square

Лемма 2.2. Собственные подпространства самосопряженных преобразований φ ортогональны (собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны).

$$\text{Доказательство. } \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \\ \varphi(\mathbf{y}) = \mu\mathbf{y} \\ \lambda \neq \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y})) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \ominus$$

$$0 = (\lambda - \mu)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}, \text{ что и требовалось доказать. } \square$$

2.4. Центральная теорема

Теорема 2.1. φ — самосопряженное $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ — сумма всех собственных подпространств. Докажем, что $U = \mathcal{E} \Leftrightarrow U^\perp = 0$

$\varphi(U^\perp)$ — самосопряженное $\xrightarrow{\text{Лемма 1}} \exists \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ собственный вектор $\in U^\perp$, но все собственные векторы $\in U \Rightarrow U^\perp = 0 \Rightarrow U = \mathcal{E} \Rightarrow$ существует базис из собственных векторов, этот базис можно сделать. \square

Этот базис можно сделать ортогональным в силу леммы 2.2.

Геометрический смысл

- 1) "Сжатие" вдоль перпендикулярного направления
- 2) Ортогональное проектирование
- 3) Отражение

Пример 5

В ортонормированном базисе φ задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найти ОНБ из собственных векторов.

Решение:

В ОНБ: $-A = A^T \Rightarrow \varphi$ — самосопряженное преобразование.

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$$1) \lambda = -3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbf{f}_1$$

$$1) \lambda = 2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 : \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbf{f}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 6

В ортонормированном базисе φ задана матрица A . Найти ОНБ из собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{В ОНБ } A = A^T \Rightarrow \varphi - \text{самосопряженное}$$

Решение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \lambda = 3 & \text{кратность } 2 \\ \lambda = -3 & \text{кратность } 1 \end{array}$$

$$1) \lambda = 3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 \right\rangle$$

$$2) \lambda = -3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 \right\rangle$$

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$$

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Команда [BOTAY!](#):

Д. Георгий, [VK](#)

К. Алексей, [VK](#)

К. Ксения, [VK](#)

Г. Мадина, [VK](#)

С. Паша, [VK](#)

М. Матвей, [VK](#)