Семинар 6. Линейные отображения. Часть 2.

Для начала решим небольшой пример по прошлому семинару.

Пример 1

$\varphi : M_{2\times 2} \to M_{2\times 1}, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу линейного преобразования A.

Запишем базисы:

$M_{2\times 2} : \mathbf{e}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$

$M_{2\times 1} : \mathbf{f}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

Для удобства в общем виде найдём, что значит наше преобразование:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b \\ c + 4d \end{pmatrix}.$$

Далее «прогоним» через преобразование базис $\mathbf{e}$:

$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_4) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Отсюда, получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Рассмотрение ядра и образа

Рассмотрим $\varphi : \underset{\dim L = n}{L} \to \underset{\dim \overline{L} = m}{\overline{L}}$.

Ядро: $\ker\varphi : \{\mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$

Очевидно, что ЛНЗ решения такого уравнения формируют ФСР, а ФСР задаёт линейное подпространство. Вспоминая количество столбцов в ФСР, легко получить формулу:

$$\boxed{\dim\ker\varphi = n - \operatorname{Rg} A}. \tag{1}$$

Образ $\operatorname{Im}\varphi : \{\mathbf{y} \in \overline{L} : \exists \mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.

Аналогично $\operatorname{Im}\varphi \in \overline{L}$ формирует линейное подпространство т.к.

$$A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$
$$A\alpha\mathbf{x} = \alpha A\mathbf{x}.$$

Выберем в L базис $\mathbf{e} : \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n \leftarrow \varphi$ (это обозначение значит «подействуем преобразованием φ»)

$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha_1\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_1)}_{=\mathbf{a}_1} + \cdots + \alpha_n\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_n)}_{=\mathbf{a}_n} = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$.

Заметим, что $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы A. Отсюда следует формула:

$$\boxed{\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Rg} A = r}. \tag{2}$$

Сложим формулы (1) и (2) и получим:

$$\boxed{\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n}. \tag{3}$$

В примерах 2–5: $L = \mathbb{R}^4, \overline{L} = \mathbb{R}^3, A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Пример 2

Найти образ $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$\varphi : A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, т.е. нужно перемножить матрицу A и вектор $\mathbf{x}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{o} \Rightarrow$ ядро не пусто.

Пример 3

Найти прообраз $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Итак $\varphi : \underline{A}\mathbf{x} = \underline{\mathbf{y}}$. Мы знаем то, что подчёркнуто. Очевидно, что мы получили СЛУ относительно $\mathbf{x}$. Решим ее.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(3)]{(3)\cdot 0.5;(1)\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2$$

Пример 4

Найти ядро отображения.

Для этого нужно решить СЛУ $A\mathbf{x} = \mathbf{o} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ker\varphi : \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$[1], $\quad \dim\ker\varphi = 2.$

Пример 5

Найти образ $\operatorname{Im}\varphi$.

$$\operatorname{Im}\varphi : \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $(2) = -2(1), (4) = (3) + (1) \Rightarrow 2$ и 4 строку можно вычеркнуть.

$\operatorname{Im}\varphi : \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\dim\operatorname{Im}\varphi = 2$

$\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = 4$

[1] В примере 2 как раз и был вектор из $\ker\varphi$

2. Два важных частных случая

1. Если $\underline{\dim\ker\varphi = 0}$:
   $\dim\operatorname{Im}\varphi = n = \operatorname{Rg} A \Rightarrow$ (столбцы ЛНЗ)
   $\mathbf{y} \in \overline{L}$ $\ker\varphi = 0$
   Пусть $\mathbf{y} = A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$
   $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker\varphi = \{0\} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$
   Если $\ker\varphi = \{0\}$, то это <u>инъекция</u>.
   Оказывается, верно и обратное:
   Отображение инъективно $\Leftrightarrow \ker\varphi = 0$
   Докажем в другую сторону:
   Пусть $\dim\ker\varphi \geqslant 1 \Rightarrow \exists \mathbf{x}_0 \neq 0 \in \ker\varphi$
   $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$
   $A(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$ — противоречие инъекции $\Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$
   Число прообразов $= 0, 1, \infty$
2. Если $\underline{\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^m = \overline{L}}$:
   $\dim\operatorname{Im}\varphi = m = \operatorname{Rg} A$ — строки ЛНЗ $\leftarrow$ <u>сюръекция</u>

Биекция = сюръекция + инъекция
$\operatorname{Rg} A = n = m$
Т.о. **биекция задаётся невырожденной матрицей**. В таком случае

$$\dim L = \dim \overline{L}$$

Изоморфизм — биективное линейное отображение.
Если существует изоморфизм $L \to \overline{L}$, то говорят, что L и $\overline{L}$ изоморфны.

Теорема 2.1. *L и $\overline{L}$ изоморфны $\Longleftrightarrow$ $\dim L = \dim \overline{L}$.*

Для изоморфизма $\exists\ \varphi^{-1}$ — обратное отображение, его матрица A^{-1}.

Пример 6
Доказать, что отображение $\varphi(f(x)) = 2f(x) + f'(x)$ — изоморфизм в пространстве P_2 — многочленов степени не выше 2. Найти φ^{-1}.

Стандартный базис L: $\{1, x, x^2\}$, где $\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_2 = x$, $\mathbf{e}_3 = x^2$.
Общий вид $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\dim L = 3$.

$$\varphi(f(x)) = 2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b = 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c), \quad \overline{L}\colon \{1, x, x^2\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(e_1) &= 2 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_2) &= 2x + 1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_3) &= 2x^2 + 2x \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Rg} = 3 \Rightarrow$ изоморфизм. Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\varphi^{-1}\colon A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Матрица отображения в новых базисах.

Пусть в L и $\overline{L}$ выбраны базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$, задано отображение $\varphi\colon L \to \overline{L} : A$. Поменяем базисы: $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, $\mathbf{f}' = \mathbf{f}P$. Найдём A':

$$\mathbf{x} \in L,\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}; \qquad \mathbf{y} \in L,\, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}$$

Из теории отображений: $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi}$; $\quad \boldsymbol{\eta}' = A'\boldsymbol{\xi}'$;
Из замены базиса: $\boldsymbol{\eta} = P\boldsymbol{\eta}'$; $\quad \boldsymbol{\xi} = S\boldsymbol{\xi}'$;

$$P\boldsymbol{\eta}' = A\boldsymbol{\xi} = AS\boldsymbol{\xi}' \Rightarrow \boldsymbol{\eta}' = P^{-1}AS\boldsymbol{\xi}' = A'\boldsymbol{\xi}' \Rightarrow \boxed{A' = P^{-1}AS.}$$

Если φ — преобразование, то $P = S$ и $A' = S^{-1}AS$

Пример 7
Дано преобразование φ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{e}$. Смена базиса: $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти A'.

Воспользуемся $A' = S^{-1}AS$. Посчитаем S^{-1}:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Линейные функции

Определение 4.1. Функция $f(x)$ на линейном пространстве L — правило, которое $\forall x \in L$ ставит в соответствие $f(x) \to \mathbb{R}$.

Функция f линейная, если
$$\begin{cases} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) \end{cases}$$

Это частный случай линейного отображения при $m = 1$.
Примеры:
а) Присвоить вектору его i-тую координату.
б) Скалярное произведение $(\mathbf{x},\, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$.
в) Определённый интеграл.

$\underset{1\times n}{A}$ - строка функции $A = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)$, где φ_i — образ i-го базисного вектора (т.е. $\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$)

Линейные функции образуют линейное пространство.

Пример 8
Может ли $\forall x \in L$ выполняться:
а) $f(x) > 0$? Ответ: нет, так как нет нуля;
б) $f(x) \geqslant 0$? Ответ: только если $f(x) \equiv 0$;
в) $f(x) = \alpha$? Ответ: только для $\alpha \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$.

Пример 9
$P(t)$ — многочлен степени $\leqslant n$, $f(P(t)) = P'(1)$. Найти A.

Базис: $\{1, t, \cdots, t^n\}$

$$\begin{array}{rl} \varphi(\mathbf{e}_1) = & 0 \\ \varphi(\mathbf{e}_2) = & 1 \\ \varphi(\mathbf{e}_3) = & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \varphi(\mathbf{e}_{n+1}) = & n \end{array}$$

Отсюда получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
С. Паша, VK
Г. Мадина, VK
К. Ксения, VK