Семинар 8. Инвариантные и собственные подпространства. Часть 2.

Решение задач

Пример 6
Найти собственные значения и собственные векторы.
$p = \langle 1, t, t^2 \rangle$, если $\varphi(p) = t^2 p'' - tp' + 2p$.

Решение:
$$\left.\begin{aligned} \varphi(1) &= 2 : \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(t) &= t : \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(t^2) &= 2t : \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\2\end{smallmatrix}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$\lambda_1 = 1$, собственный вектор: $\{t\}$.
$\lambda_{2,3} = 2$, собственный вектор: $\{1, t^2\}$.
Для $\lambda_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow L_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.
Проверим: $\underline{\varphi(7t)} = -7t + 14t = \underline{7t}$.

Пример 7
При каких α преобразование диагонализируемо?
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Решение:
Решение основывается на данном утверждении:

$$\boxed{\textbf{Число столбцов ФСР} = n - \operatorname{Rg} A = \textbf{число собственных векторов}}$$

I. $\alpha^2 = 1:$
   (a) $\alpha = 1 : \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ — матрица уже диагональная.
   (b) $\alpha = -1 : \left(\begin{smallmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \lambda = 1$ — корень алгебраической кратности 3.
   Тогда система уравнений: $\left(\begin{smallmatrix}0&0&2&|&0\\0&0&0&|&0\\0&0&0&|&0\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow 2$ вектора, т.е. для построения базиса собственных векторов не хватает.

II. $\alpha^2 \neq 1:$
   $\lambda = 1$ — корень алгебраической кратности 2.
   $\lambda = \alpha^2$ — простой корень.
   (a) $\lambda = 1:$
   $\left(\begin{smallmatrix}0&0&\alpha^2-\alpha&|&0\\0&0&0&|&0\\0&0&\alpha-1&|&0\end{smallmatrix}\right)$, $\quad \operatorname{Rg} = 1, n = 3 \Rightarrow 2$ собственных вектора.
   (b) $\lambda = \alpha^2:$
   $\left(\begin{smallmatrix}1-\alpha^2&0&\alpha^2-\alpha&|&0\\0&1-\alpha^2&0&|&0\\0&0&0&|&0\end{smallmatrix}\right)$, $\quad \operatorname{Rg} = 2, n = 3 \Rightarrow 1$ собственный вектор.

Ответ: $\alpha \neq -1$.

Пример 8
Рассмотрим $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Вопрос: всегда ли существует одномерное инвариантное подпространство?

Решение:
Рассмотрим определитель третьего порядка:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \beta_1\lambda^2 + \beta_2\lambda + \beta_3$$

$$\left.\begin{matrix} P(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to+\infty} -\infty \\ P(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to-\infty} +\infty \end{matrix}\right. \Rightarrow P(\lambda) \text{ пересечет ноль и сменит знак} \Rightarrow \exists\lambda_0 : P(\lambda_0) = 0$$

Следовательно, существует вещественное собственное значение $\Rightarrow \exists$ собственный вектор $\Rightarrow \exists$ одномерное инвариантное пространство.

Этот же вывод справедлив для любой нечетной степени характеристического многочлена.

Пример 9
Доказать, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

Решение:
Рассмотрим преобразование φ с матрицей A,

$A' = S^{-1}AS$, характеристический многочлен $\det(A' - \lambda E)$.

$\det(A' - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) = \det S^{-1}\det(A - \lambda E)\det S = \det(SS^{-1})\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$.
Отсюда следует:

$$\det(A' - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$$

Очевидно, собственные значения не меняются при замене базиса.

Рассмотрим подробнее характеристический многочлен.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)}_{\text{только в этом члене есть } \lambda^n \text{ и } \lambda^{n-1}} + \dots + \tilde{P}(0) =$$

$$= (-1)^n\lambda^n - (-1)^n(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

Вспомним, что для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

справедлива теорема Виета, которую мы знаем еще из школы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1x_2 = c/a \end{cases}$$

Обобщенная теорема Виета:
Произведение корней: $(-1)^n \cdot \frac{\{\text{свободный член}\}}{\{\text{первый коэффициент}\}}$
Сумма корней: $-\frac{\{\text{второй коэффициент}\}}{\{\text{первый коэффициент}\}}$
$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n = (-1)^n \cdot \frac{\det A}{(-1)^n} = \det A$
$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = \operatorname{tr} A$ (т.е. след матрицы A).
Т.о. оказывается , что $\det A$ и $\operatorname{tr} A$ не зависят от выбора базиса.
Пример 10

Пусть A — матрица вращения $\mathbb{R}^3$. Найти угол вращения.

Решение:
Выберем ортонормированный базис так, что поворот вокруг $\mathbf{e}_3$.
В этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Т.к. $\operatorname{tr} A = 2\cos\alpha + 1 = \text{const}$:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} A - 1\right)}$$

Пример 11
Пусть $\lambda_1, \ \ldots \ , \lambda_n$ — собственные значения преобразования φ с матрицей A. Какие собственные значения у а) φ^2; б)φ^{-1} ?

Решение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{$*$}$$

1). $\varphi^2 : \ \det(A^2 - \widetilde{\lambda} E)$

$$(*)| \cdot \det(A + \lambda E) \Rightarrow \det(A - \lambda E)\det(A + \lambda E) = \det(A^2 - \lambda^2 E) = 0 \quad \Rightarrow \widetilde{\lambda} = \lambda^2$$

2). $\varphi^{-1} : \ \det(A^{-1} - \tilde{\lambda} E) = \det(A^{-1} - \tilde{\lambda} A^{-1} A) = 0$

$$\Rightarrow \det A^{-1} \cdot \det(E - \tilde{\lambda} A) = 0$$

Так как $\det A^{-1} \neq 0$ (матрица A невырожденная), то верно:

$$\det(E - \tilde{\lambda} A) = 0$$

Разделим равенство на $(-1)^n \tilde{\lambda}^n$:

$$\det(A - \frac{E}{\tilde{\lambda}}) = 0 \ \Rightarrow \ \tilde{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}.$$

Заметим, что собственные векторы при этом не изменятся.

Проекторы

Пусть $L = L_1 \oplus L_2$;
$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ — единственный прообраз, где $\mathbf{x}_1 \in L_1$, $\mathbf{x}_2 \in L_2$

Тогда: $P_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$ — проектор на $L_1 \parallel L_2$
$P_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2$ — проектор на $L_2 \parallel L_1$
$\operatorname{Im} P_1 = L_1$ и $\ker P_1 = L_2$
$\operatorname{Im} P_2 = L_2$ и $\ker P_2 = L_1$

$$P_1(\mathbf{x}) + P_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \ \Rightarrow \ (P_1 + P_2)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \ \Rightarrow \ P_1 + P_2 = \operatorname{Id}$$

Пример 12

Рассмотрим ортогональный проектор A в $\mathbb{R}^3$.
Найти собственные значения и собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Собственное значение $\lambda = 1$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
2. Собственное значение $\lambda = 0$: собственный вектор $\{\mathbf{e}_3\}$.

Пример 13

Пусть $L = L_1 \oplus L_2$.
$\dim L = n$, $\dim L_1 = k \Rightarrow \dim L_2 = n - k$.
Найти собственные значения и собственные векторы P_1,
где P_1 — проектор $L_1 \| L_2$

Решение:

Пусть базис в L_1: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$.
Пусть базис в L_2: $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
$P_1(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, P_1(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \ldots, P_1(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k$
$P_1(\mathbf{e}_{k+1}) = \cdots = P_1(\mathbf{e}_n) = \mathbf{o}$
Тогда матрица преобразования будет выглядеть таким образом:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

1. Собственное значение $\lambda = 1$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$.
2. Собственное значение $\lambda = 0$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

- Размерность образа при проектировании равна следу матрицы

$$\boxed{\operatorname{rg} P = \operatorname{tr} A}.$$

Пример 14

а) Доказать, что для проектора $\varphi^2 = \varphi$.
б) Доказать, что если $\varphi^2 = \varphi$ ($\varphi \neq 0, \not\equiv \mathrm{Id}$), то φ — проектор на образ $\|$ ядру.

Решение:

а) Т.к. имеем дело с проектором, все пространство раскладывается на прямую сумму двух подпространств:

$$L = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2.$$

Тогда, применив наше преобразование (т.е. проектор), получим:

$$\varphi(\mathbf{x}) = P_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1.$$

Теперь к полученному результату применим преобразование ещё раз. Т.к. вектор $\mathbf{x}_1$ лежит в L_1, то его проекция на L_1 и есть сам вектор $\mathbf{x}_1$:

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 \Rightarrow \boxed{\varphi^2 = \varphi}.$$

б) Пусть L — линейное пространство, $\varphi : \varphi^2 = \varphi$. Пусть $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{y} \in \operatorname{Im} \varphi$, $\mathbf{y} \in \ker \varphi$.

1. $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$ (т.к. $\mathbf{y} \in \ker\varphi$).
2. $\exists \mathbf{x} \in L : \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (т.к. $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\varphi$).
3. $\varphi^2(\mathbf{x}) = \varphi(\varphi(\mathbf{x})) \overset{\text{п.2)}}{=} \varphi(\mathbf{y}) \overset{\text{п.1)}}{=} \mathbf{o}$, откуда получаем, что $\mathbf{y}=\mathbf{o}$. Противоречие. Отсюда же следует, что

$$\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{o}\}$$

Рассмотрим подпространство L':

$$L' = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi \subset L.$$

$$\dim L' = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim L.$$

Отсюда следует, что наше подпространство L' и есть линейное пространство L:

$$L' \equiv L \Rightarrow L = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi.$$

Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK