Семинар 1. Матрицы. Ранг матрицы.

1. Про матрицы

Уже умеем

- сложение и умножение на число (поэлементно)
- транспонировать
- умножать

Свойства умножения

1.° $A \cdot B \neq B \cdot A$ (если $A \cdot B = B \cdot A$, то A,B — перестановочные матрицы)

2.° $A \cdot E = E \cdot A = A$

3.° $(AB)C = A(BC)$

4.° $A(B+C) = AB + AC; \quad (B+C)A = BA + CA$

5.° $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

6.° $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$

Пример 1

Верно ли:

а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Проверка:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Т.о. в общем случае выражение неверно.

б) $(A+B)^2 + (A-B)^2 = 2(A^2 + B^2)$

Проверка:

$$A^2 + AB + BA + B^2 + A^2 - AB - BA + B^2 = 2(A^2 + B^2)$$

Т.о. в общем случае выражение верно.

2. Элементарные преобразования строк

- умножение строки на число, неравное 0
- сложение строк

Также, элементарными преобразованиями являются:

- добавление к строке другой строки, умноженной на число
- перестановка строк

Очевидно, что элементарные преобразования обратимы.

Рассмотрим: $SA = A'$, где S — матрица элементарного преобразования.

- умножение: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

- сложение: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$

Элементарная матрица получается элементарными преобразованиями из единичной.
Для преобразования столбцов элементарную матрицу нужно умножать справа.
Запись нескольких преобразований: $S_1,...,S_N$, то $S_N \cdot ... \cdot S_1 A$.

Строки $a_1,...,a_k$ матрицы A называются ЛНЗ (линейно-независимыми), если

- ЛНЗ: $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$,

  называются ЛЗ (линейно-зависимыми), если

- ЛЗ: $\exists\ \alpha_1,...,\alpha_k : \alpha_1^2 + ... + \alpha_k^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0$

Все свойства из аналита.

- Если есть нулевая строка, то матрица ЛЗ
- Если часть строк ЛЗ, то и матрица ЛЗ
- Любая часть ЛНЗ — ЛНЗ

Квадратная матрица вырожденная, если она содержит ЛЗ строки.

Элементарные преобразования *не нарушают* линейных зависимостей в матрице.

В частности: вырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в вырожденную матрицу, а невырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в невырожденную матрицу.

Теорема 2.1. *Каждая невырожденная матрица с помощью элементарных преобразований может быть превращена в единичную*

Пример 2

Привести к E.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — ступенчатый вид матрицы}$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\xrightarrow[(2)+2(3)]{(1)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 2.2. *Матрица невырождена* $\Leftrightarrow$ *раскладывается в произведение элементарных матриц.*

Доказательство. ($\Rightarrow$): см. метод Гаусса (пример 2).
$\exists\ T_1,...,T_M$ — элементарные преобразования строк: $T_M \cdot ... \cdot T_1 A = E$
Элементарные преобразования обратимы $\Rightarrow \exists\ S_1,...,S_M : S_M \cdot ... \cdot S_1 E = A \Leftrightarrow S_M \cdot ... \cdot S_1 = A$
($\Leftarrow$): $A = S_M \cdot ... \cdot S_1 E$
Т.к. единичная матрица невырождена, а элементарные преобразования вырожденности не меняют $\Rightarrow A$ невырождена. □

3. Обратная матрица

Определение 3.1. Матрица X обратная к матрице A, если

$$XA = AX = E,$$

где A — невырождена, X — единственна.

Свойства:

1.° $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.° $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

Метод Жордана-Гаусса

$$T_M \cdot ... \cdot T_1 A = E \quad | \cdot A^{-1}$$
$$T_M \cdot ... \cdot T_1 E = A^{-1}$$

Пример 3

Доказать, что A невырождена и найти обратную, если

$$A^2 + A + E = O$$

Доказательство:

$$A^2 + A + E = O$$
$$A(A + E) + E = O$$
$$A(-A - E) = E$$
$$\det E = 1, \qquad \det(A(-A - E)) = \det A \cdot \det(-A - E) \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Отсюда же следует, что

$$A^{-1} = -A - E$$

Пример 4

$$A^m = O \text{ — нильпотентная матрица}$$

Доказать

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + ... + A^{m-1}$$

Доказательство:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + ... + A^{m-1} \quad | \cdot (E - A)$$
$$E = E - A + A - A^2 + A^2 + ... + A^{m-1} - A^m = E$$

Пример 5

а)$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ б)$X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

а) $AX = B \quad A^{-1} \cdot |$
$X = A^{-1}B$
б) $XA = B \quad | \cdot A^{-1}$
$X = BA^{-1}$
Найдём A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)-5/2\times(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Т.о. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $X = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Ранг матрицы

Пусть у матрицы A r — ЛНЗ строк и нет ЛНЗ системы строк большего числа. Тогда r — строчный ранг матрицы.

Определение 4.1. Строчный ранг матрицы — максимальное число ЛНЗ строк.

Теорема 4.1. *Система из r строк ЛНЗ $\Leftrightarrow \exists$ невырожденная подматрица порядка r.*

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \cline{3-4} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cline{3-4} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

Первые две строки ЛНЗ. Вычерченный фрагмент содержит непропорциональные строки.

Определение 4.2. Подматрица порядка r называется базисной, если она невырождена, а все квадратные подматрицы большего порядка вырождены.

Определение 4.3. Ранг матрицы — порядок базисной подматрицы.

Ранг матрицы равен строчному рангу. Ранг не меняется при элементарных преобразованиях.
Свойства:
$\operatorname{Rg} AB \leqslant \min(\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B)$

4.1. Алгоритм поиска ранга

Приводим матрицу к ступенчатому виду. Ранг — число ненулевых строк.

Пример 6

Найти Rg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} = 2$$

Пример 7

Найти Rg.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)\leftrightarrow(1)]{1/5\times(4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-2(1)]{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3 и 4 строчку можно вычеркнуть, т.к. они ЛЗ. Т.о. $\operatorname{Rg} = 2$.

Пример 8

Найти Rg в зависимости от параметра.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+3/2\times(1)]{(2)-3/2\times(1)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7 & \beta+9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[(4)+2/5\times(1)]{(3)-5/7\times(2)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rg} = 2$ при $\alpha = -\beta = 1$.
$\mathrm{Rg} = 3$ в остальных случаях.

Пример 9

Верно ли $\forall A, B$:

а) $\mathrm{Rg}(A+B) = \mathrm{Rg}\,A + \mathrm{Rg}\,B$

Неверно, например:

$$A = B = E_2$$

б) $\mathrm{Rg}(A+B) \leqslant \mathrm{Rg}\,A + \mathrm{Rg}\,B$

Верно. Докажем:

$$\mathrm{Rg}(A+B) \leqslant Rg(\underbrace{A+B}_{\text{ЛЗ}}|A|B) = \mathrm{Rg}(A|B)$$

$$r = \mathrm{Rg}\,A, \qquad s = \mathrm{Rg}\,B$$

$$\mathrm{Rg}(A|B) \leqslant r + s$$

Т.е.

$$\mathrm{Rg}(A+B) \leqslant \mathrm{Rg}\,A + \mathrm{Rg}\,B.$$