Семинар 7. Инвариантные и собственные подпространства. Часть 1.

1. Инвариантные подпространства

Будем работать только с преобразованиями.

1.1. Определение

Определение 1.1. Подпространство $L' \subset L$ называется **инвариантным относительно преобразования** $\boldsymbol{\varphi}$, если

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \in L' \text{ или } \varphi(L') \subset L'.$$

Например:

- $\mathbf{o}$, L — вырожденные случаи.
- Поворот $\mathbb{R}^3$ вокруг $\mathbf{e}_3$ на $\pi/2$ (рис. 3). Инвариантные подпространства: $\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$.
- Ядро преобразования φ ($\ker \varphi$) всегда инвариантно относительно этого преобразования φ.
- $\operatorname{Im} \varphi$

Теорема 1.1. *Если какое-то подпространство содержит в себе образ, то L' инвариантно относительно φ.*

Доказательство.

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \subset \operatorname{Im} \varphi \subset L'$$

□

1.2. Свойства инвариантных подпространств

Предложение 1.1. *Сумма инвариантных подпространств инвариантна.*

Доказательство.

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{y} \in L_2, \varphi(\mathbf{y}) \in L_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) \in L_1 + L_2$$

□

Предложение 1.2. *Пересечение инвариантных подпространств инвариантно.*

Доказательство.

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{x} \in L_2, \varphi(\mathbf{x}) \in L_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \cap L_2$$

□

2. Матрица преобразования

2.1. Вид матрицы преобразования

Рассмотрим линейное пространство L, $\dim L = n$. Пусть $L' \subset L$, $\dim L' = k$ — инвариантное подпространство относительно φ, базис в $L' : \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, базис в $L : \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

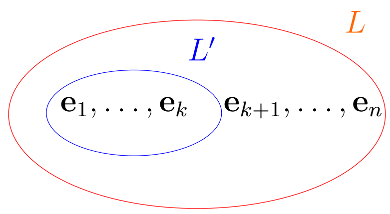

Рис. 1. Подпространство в L

Напомним, что матрица преобразования A строится из образов базисных векторов:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\varphi(e_1)} & \cdots & \boxed{\varphi(e_n)} \end{pmatrix}$$

Т.о. матрица преобразования в выбранном базисе имеет следующий вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O & A_4 \end{array}\right)^{\square}$$ — клетчочно–треугольный вид.[1]

Пусть теперь $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_s, \forall i \ L_i$ — инвариантное подпространство относительно φ.

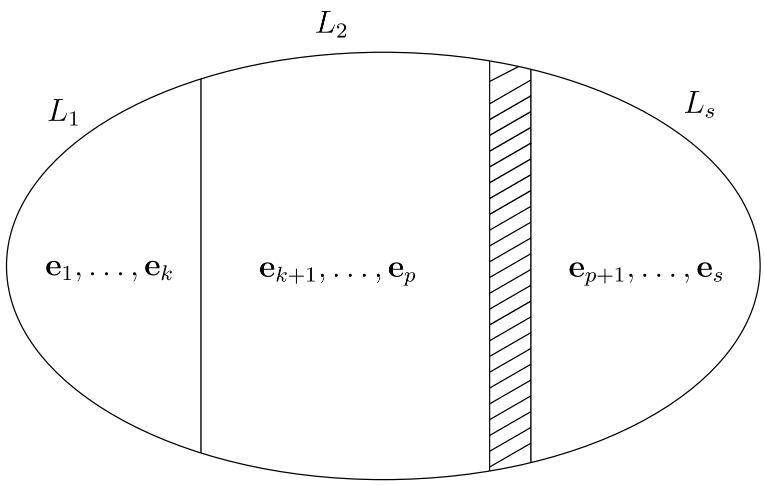

Рис. 2. Прямая сумма подпространств

Тогда матрица преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & O & \dots & O \\ O & \boxed{A_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}^{\square}$$ — клеточно–диагноальный вид.

Ширина и высота каждой клетки равны размерности инвариантного подпространства.

Пример 1
Найти инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^3$ относительно φ.

[1]Квадрат над матрицей значит, что матрица блочная.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Из вида A видно, что существует два не пересекающихся инвариантных подпространства.
$\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$.

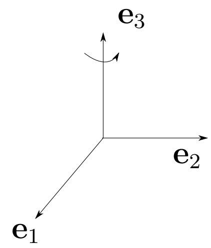

Рис. 3. К примеру 1

2.2. Геометрический смысл матрицы преобразования

Поговорим о геометрии. Научимся определять по внешнему виду матрицы ее геометрический смысл.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — отражение относительно $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — проекция.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — растяжение вдоль $\mathbf{e}_2$ в 3 раза.

Нам интересны матрицы вида:

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ — обобщённое растяжение $\Leftrightarrow \varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

3. Собственный вектор

3.1. Определение

Рассмотрим преобразование φ с матрицей A, тогда ненулевой вектор $\mathbf{x}$ называется собственным вектором, если $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$; λ — собственное значение.

Множество собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, образует собственное пространство.

3.2. Свойства

Предложение 3.1. *Собственный вектор (и только он) порождает одномерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Рассмотрим инвариантное подпространство $\langle \mathbf{x} \rangle \Rightarrow \varphi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}) = \alpha \lambda \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x} \rangle$. $\square$

4. Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов

$$\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{o}$$

Рассмотрим тождественное преобразование Id, матрица его преобразования E.

$$(\varphi - \lambda Id)(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$$

Перейдём к матричному виду:

$$(\varphi - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad (*)$$

Итак, мы получили СЛУ размеров $n \times n$. Она имеет либо одно решение (нулевое), но оно нам не интересно, т. к. $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, либо бесконечно много решений $\Rightarrow$ A должна быть вырожденной $\Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \to \lambda_i$ — собственное значение $\to (*) \to \mathbf{x}$ — собственный вектор.

Пример 2

Найти собственные значения и собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём λ из условия $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda - 15 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -5$$

Далее подставим числа λ в $(*)$:

1. $\lambda_1 = 1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right)$,

   $L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leftarrow$ Собственный вектор, перейдёт сам в себя т.к. $\lambda = 1$.
2. $\lambda_2 = 3 : L_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
3. $\lambda_3 = -5 : L_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$

Лемма 4.1. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, попарно линейно независимы.*

Соберём базис $\mathbf{f} \left\{ \underset{\mathbf{f}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}} \right\}$

$$\begin{array}{l} \varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1 \\ \varphi(\mathbf{f}_2) = 3\mathbf{f}_2 \\ \varphi(\mathbf{f}_3) = 5\mathbf{f}_3 \end{array} \to A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ в базисе } \mathbf{f}.$$

5. Диагонализируемость матрицы

Пример 3

Диагонализировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda E)=0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \underset{\text{Не забывайте про свойства детерминанта}}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0}$$

$\lambda = 1$ — корень алгебраической кратности 2.

$\lambda = 2$ — корень алгебраической кратности 1 (простой корень).

1. $\lambda = 1$

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right),\ L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{формирует} \\ \text{плоскость}}} \rangle$$

   $\dim L_1 = 2$ — геометрическая кратность (размерность собственного подпространства).
2. $\lambda = 2$

   $$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow\ L_1 = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Выберем базис: $\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Поэтому $\varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$, $\varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2$, $\varphi(\mathbf{f}_3) = 2\mathbf{f}_3$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

• Геометрическая кратность $\leqslant$ алгебраическая кратность

• Если геометрическая кратность строго меньше ($<$) алгебраической кратности хотя бы для одного λ, то преобразование недиагонализируемо.

Пример 4

Диагонализировать матрицу: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det\,(A-\lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

Получаем, что $\lambda = 2$ алгебраической кратности 3.

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);\ L_1 = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Получили, что геометрическая кратность (равна 1) меньше алгебраической кратности (равна 3). Тогда матрица недиагонализируема (не хватило собственных векторов).

Пример 5
Диагонализировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\,(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$\lambda = 1, \quad \underbrace{\lambda = \pm\, i}_{\substack{\text{отвечают за}\\ \text{инвариантную}\\ \text{плоскость}}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);\ L_1 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$$

Условие диагонализируемости матрицы:

1. *В частности*: $A_{n\times n}$ диагонализируема, если A имеет n различных вещественных собственных значений.
2. *В общем случае*: A диагонализируема $\Leftrightarrow$ L раскладывается в прямую сумму собственных подпространств.

Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK