

Пользуясь в этих предположениях формулами для погрешностей косвенных измерений (см. раздел (2.7)) можно получить следующие соотношения (выкладки здесь весьма громоздки, подробности можно найти в п. (??)):

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{D_{yy}}{D_{xx}} - k^2 \right)}, \quad (3.10)$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle x^2 \rangle}, \quad (3.11)$$

где использованы введённые выше сокращённые обозначения (3.8). Коэффициент $n-2$ отражает число независимых «степеней свободы»: n экспериментальных точек за вычетом двух условий связи (3.7).

В частном случае $y = kx$ имеем

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2 \right)}. \quad (3.12)$$

Условия применимости МНК. Формулы (3.7) (или (3.6)) позволяют провести прямую по *любому* набору экспериментальных данных, а формулы (??) (или (3.12)) — вычислить соответствующую среднеквадратичную ошибку для её коэффициентов. Однако далеко не всегда результат будет иметь физический смысл. Перечислим ограничения применимости данного метода.

В первую очередь метод наименьших квадратов — статистический, и поэтому он предполагает использование достаточно большого количества экспериментальных точек (желательно $n > 10$).

Поскольку метод предполагает наличие погрешностей только по y , оси следует выбирать так, чтобы погрешность σ_x откладываемой по оси абсцисс величины была минимальна.

Кроме того, метод предполагает, что все погрешности в опыте — случайны. Соответственно, формулы (??) и (3.12) применимы *только для оценки случайной составляющей* ошибки k и b . Если в опыте предполагаются достаточно большие систематические ошибки, они должны быть оценены *отдельно*. Отметим, что для оценки систематических ошибок не существует строгих математических методов, поэтому в таком случае проще и разумнее всего воспользоваться описанным выше графическим методом.

Наконец, стоит предостеречь от использования МНК «вслепую», без построения графика. Этот метод неспособен выявить такие «аномалии», как отклонения от линейной зависимости, немонотонность, случайные всплески и т.п. Все эти случаи могут быть легко обнаружены при построении графика и требуют особого рассмотрения.

Резюмируя, можно сформулировать универсальную практическую рекомендацию: если результаты какого-либо математического метода обработки данных существенно расходятся с тем, что можно получить «вручную» графически, есть все основания сомневаться в применимости метода в данной ситуации.

4. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ПРЕДСТАВЛЕНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ

4.1. Проведение измерений

Ключевым элементом проведения лабораторной работы является ведение лабораторного журнала. Журнал является главным источником информации о проведенном эксперименте. Приведем несколько правил и рекомендаций для оформления журнала.

4.1.1. Правила ведения лабораторного журнала

- Лабораторный журнал оформляется *строго от руки*. Для оформления лучше использовать большую тетрадь *формата А4* с несъемными листами. Это правило связано с тем, что никакой электронный журнал не обладает такой же информативностью и гибкостью в оформлении, как написанный от руки. Рукописные журналы используются на всех крупных физических экспериментах.
- В журнале необходимо фиксировать всю возможную информацию о проводимом эксперименте: название работы, дату и время проведения эксперимента, типы использованных приборов, схему установки, а также любые другие показатели, которые могут быть связаны с проведением работы и обработкой результатов.

Замечание. Недопустимым считается отсутствие какой-то информации в журнале поскольку она «есть в лабнике». Информация в описании может быть устаревшей или не соответствовать конкретной установке. Допускается использование элементов описания, нарисованных на компьютере, напечатанных и вклеенных в журнал.

- Лабораторный журнал должен содержать *максимально полную* информацию о процессе проведения эксперимента, а не только результаты измерений. Обязательно должны быть указаны все проводимые экспериментатором действия. По возможности должны присутствовать временные метки всех действий, для того, чтобы потом можно было сверить журнал с журналами других студентов, работающих в это время или с другой информацией.

Пример. В работах по термодинамике часто результаты измерений сильно зависят от окружающей температуры и влажности. Поэтому если в момент измерений, кто-то открывает дверь или окно в лаборатории, может случиться синхронный скачок измеряемых значений на всех установках. Этот скачок может быть не замечен на стадии измерений и обнаружен только при обработке. Если хотя бы в одном журнале есть запись о том, что была открыта дверь, а во всех остальных есть временные метки измерений, то можно при обработке учесть изменение условий.

- Не допускается исключение из журнала «неправильных» (или показавшихся неправильными) измерений. Если по какой-то причине сделано заключение о том, что измерение проведено в неправильных условиях, результаты должны быть сохранены, а в журнале должна быть сделана пометка о том, почему это измерение считается ненадежным. История знает много примеров, когда такие на первый взгляд «ошибочные» измерения приводили к открытиям.
- Рекомендуется дублировать в журнале показания приборов даже если они записываются автоматически электронным способом. Это позволяет избежать многих ошибок.
- Не допускается использование карандаша, корректора или черновиков!

4.1.2. Подготовка к работе

Перед выполнением учебной лабораторной работы необходимо

- ознакомиться с описанием работы и теоретическим введением по соответствующей теме. Это необходимо, чтобы получить представление об изучаемых явлениях, порядках измеряемых величин и связывающих их закономерностях, а также о методе измерения, используемых приборах и последовательности действий при проведении измерений;
- продумать предложенный в описании план действий, оценить необходимое количество измерений. Количество измерений студент должен оценивать самостоятельно исходя из а) требуемой точности измерений и б) планируемого времени выполнения работы;
- желательно заранее (в крайнем случае, на начальном этапе работы) представлять диапазон изменения измеряемых величин и выбрать для них соответствующие единицы измерения;

- предварительно оценить достижимую точность измерений, проанализировать возможные источники погрешностей и их влияние на погрешность конечного результата.

Для подготовки к выполнению работы рекомендуется наличие в журнале следующих элементов:

- название (не только номер!) и цели работы;
- схема установки и описание использованных приборов. Следует иметь в виду, что *реальная* схема конкретной установки может отличаться от той, что изображена в описании;
- основные теоретические положения и расчётные формулы для данной работы. Не следует переписывать (или перепечатывать) всё, что изложено в описании работы — нужно выделить ключевые моменты, необходимые для проведения работы и интерпретации результатов.
- план работы с оценкой количества измерений и времени, необходимого на выполнение каждого пункта. В процессе работы план может меняться, о чем должна быть сделана соответствующая пометка в журнале (с указанием причин).

4.1.3. Начало работы

В начале работы необходимо тщательно ознакомиться с экспериментальной установкой, проверить работоспособность приборов. Все сведения о приборах (в первую очередь класс точности, максимальное значение на шкале, по которой производятся измерения, и цену деления) и условиях эксперимента необходимо зафиксировать в лабораторном журнале. Рекомендуется переписать полные наименования приборов — в этом случае недостающую информацию о них можно всегда найти в интернете.

При сборке электрических схем источники питания подключаются к схеме в последнюю очередь. Регулировочные ручки напряжения или тока должны исходно находиться в нулевом положении.

Прежде чем приступить к основным измерениям, необходимо проверить работу установки. Первые измерения должны быть контрольными, чтобы убедиться, что все работает нормально, диапазон и точность измерений выбраны правильно. Если разброс повторных измерений не превышает инструментальную погрешность, то многократных измерений не требуется.

Замеченные неполадки в работе приборов и установок надо зафиксировать (делать соответствующую запись в тетради) и сообщить об этом преподавателю.

4.1.4. Выбор количества измерений

Выбор количества измерений является сложной задачей, для которой не существует единого алгоритма принятия решений. Тем не менее, каждый экспериментатор (в том числе, студент) должен самостоятельно решать, какое количество измерений является достаточным, базируясь на соображениях точности результатов, времени измерений и здравого смысла.

Измерение фиксированной величины. При измерении некоторой фиксированной величины количество необходимых измерений зависит от разброса результатов. Для первичной оценки этого разброса рекомендуется проделать измерения как минимум 3–4 раза (если позволяет время). Разброс полученных значений приблизительно соответствует статистической ошибке отдельного измерения. Если разброс существенно превышает точность измерительных приборов, то имеет смысл (опять же если позволяет время) провести более длительную серию (8–10) измерений, и после этого вычислить среднеквадратичное отклонение отдельного измерения от среднего.

Если остальные измерения в серии проводятся аналогичным образом, то разумно ожидать, что разброс остальных измерений будет таким же, и повторять длинную серию для всех измерений не нужно.

Пример. Допустим, требуется с помощью секундомера измерять периоды колебания маятника с точностью $\varepsilon = 0,1\%$. Предположим, что ошибка измерения связана только с временем реакции экспериментатора. Эта ошибка, очевидно, не зависит от длительности измерения и её можно измерить непосредственно: для этого можно 8–10 раз измерить время некоторого целого числа колебаний и по результатам вычислить среднеквадратичную погрешность времени реакции $\sigma_t^{\text{реакц}}$ (как правило, $\sigma_t^{\text{реакц}} \sim 0,2$ с).

По заданной абсолютной величине погрешности и требуемой точности ε находим необходимое полное время измерений: $t = \sigma_t / \varepsilon \sim 200$ с. Тогда все последующие измерения можно не повторять многократно, а проводить 1–2 раза в течение рассчитанного времени t .

Эти рассуждения не учитывают возможное отставание или опережение часов при больших t — предполагается, что часы откалиброваны с достаточной точностью (их «уход» за время t не превышает времени реакции).

Измерение зависимостей. При измерениях функциональной зависимости в первую очередь следует позаботиться о том, насколько хорошо будут восстанавливаться параметры этой зависимости. Число параметров не может быть больше, чем число экспериментальных точек (нельзя строить прямую по одной точке!), но даже в том случае, если число точек равно числу параметров, эксперимент нельзя считать удовлетворительным, поскольку нет возможности проверить, является ли модель правильной

и не было ли одно из измерений ошибочным. Точного правила по выбору количества точек нет, но для определения параметров прямой рекомендуется иметь как минимум 5–6 точек (а лучше 8–10). В случае с длительными измерениями, следует заранее планировать время таким образом, чтобы точки максимально равномерно лежали во всем диапазоне измерений. Также важно понимать, что в случае измерения зависимостей, количество точек с разными параметрами важнее, чем точность отдельного измерения, поскольку при аппроксимации параметров модели, накопленная информация по разным точкам все равно будет просуммирована.

Важно отметить, что часто параметры установки «плывут» («дрейфуют») во время проведения эксперимента, поэтому рекомендуется при измерениях делать проходы в одну и в другую сторону по всему диапазону значений.

4.1.5. Проведение измерений

Результаты измерений и сопутствующих вычислений должны быть представлены в *таблицах*. Таблицы должны иметь подписи с кратким описанием их содержания и, возможно, с пояснениями по структуре расположения данных. Заглавные столбцы (или строки) должны быть подписаны, в них должны быть указаны буквенные обозначения величин (введенные в тексте ранее) и их размерность.

При записи результатов измерений фиксируются *непосредственные показания прибора* — без какого либо пересчёта единиц измерения, округления и т.п. В частности, если прибор имеет шкалу, записывается *число делений* отклонения стрелки, и отдельно — цена деления (в отдельном столбце или перед таблицей). Пересчёт в физические единицы с учётом цены деления производится позже при обработке. Это позволяет минимизировать ошибки при снятии показаний.

Полезно строить предварительные графики (прямо в экспериментальном журнале) зависимостей измеряемых величин по мере получения результатов. При этом сразу выделяются области резких изменений, в которых измерения должны проводиться подробнее (больше точек), чем на участках плавного изменения. Если изучаемая закономерность, например линейность, выполняется только на некотором участке, то область измерений должна быть выбрана шире этого участка, чтобы можно было установить границы выполнения закономерности.

4.1.6. Расчёты, анализ и представление результатов

Полученные первичные результаты в виде таблиц и графиков используются для расчёта конечных значений величин и их погрешностей либо для нахождения зависимости измеряемых величин между собой. Все расчёты удобно проводить в той же рабочей тетради, где записаны пер-

вичные результаты измерений, и заносить в соответствующие свободные колонки таблиц с экспериментальными данными. Это поможет проводить проверку, анализ и сопоставление получаемого результата с исходными данными.

В общем случае лабораторный журнал и отчет — это два разных документа и могут быть оформлены по отдельности. Отчет не должен быть также подробен как и журнал с точки зрения деталей проведения эксперимента. Также в отчет можно не переписывать результаты измерений. Достаточно дать ссылки на соответствующие страницы журнала.

Для измеряемых величин окончательные результаты должны быть представлены в виде среднего значения, погрешности и количества проведенных измерений.

Для окончательной оценки качества результатов необходимо сравнить их с данными, приводимыми в справочниках.

Замечание. Совпадение или несовпадение измеренного значения со справочным не может считаться критерием правильности проведения работы. Во-первых, значения действительно могут отличаться. Материалы, используемые в лабораторных работах, не всегда являются чистыми и соответствуют справочнику. Во-вторых, могут быть объективные причины, по которым результаты разошлись. Поиск и объяснения этих причин является более важным, чем точное совпадение значений!

4.2. Анализ инструментальных погрешностей

Перед выполнением любого эксперимента необходимо предварительно проанализировать возможные погрешности используемых приборов. Их погрешности могут иметь как систематический, так и случайный характер. Можно говорить о некоторой единой оценке *инструментальной погрешности* прибора $\sigma_{\text{инстр}}$, которая учитывает обе составляющие.

При работе с прибором *со шкалой* (линейка, штангенциркуль, стрелочные приборы и т.д.) один из источников погрешности — необходимость выбора некоторого значения (интерполяции) между метками шкалы. Эта погрешность, которую как правило оценивают в *половину цены деления*, называется *погрешностью отсчёта* по шкале. Аналогичная погрешность есть и у приборов с цифровым дисплеем — это погрешность округления цифры последнего разряда. Данная погрешность может быть как случайной, так и систематической: в частности, если показания прибора стабильны (стрелка не дрожит и при повторных измерениях стрелка попадает в то же самое место шкалы), ошибка отсчёта будет систематической; если стрелка дрожит (или «плавает» последняя цифра разряда), ошибка будет случайной.

Замечание. Стоит по возможности избегать измерений в начале шкалы: если измеряемая величина лишь немногим превосходит цену деления (или единицу последнего разряда дисплея), относительная ошибка измерения резко возрастает.

Любой прибор имеет погрешность изготовления, калибровки, а также внутренние источники ошибок (например, шумы). Как правило, максимальные значения этих погрешностей определяются производителем и описаны в паспорте прибора. Погрешности могут зависеть от условий эксплуатации (температура, влажность и т.д.), что также должно отражаться в паспорте.

Пример. Согласно паспорту вольтметра В7-34, его относительная погрешность при работе на пределе измерений 1 В, оценивается по формуле

$$\varepsilon_x = \left[0,015 + 0,002 \left(\frac{1 \text{ В}}{U_x} - 1 \right) \right] \cdot [1 + 0,01 \cdot |t - 20|],$$

где U_x [В] — значение измеряемой величины, t [°C] — комнатная температура. Если измерения проводятся при температуре 24 °C и прибор показывает напряжение $U_x = 500$ мВ, то относительная погрешность равна $\varepsilon \approx 1,7\%$, а абсолютная $\delta U \approx \pm 8$ мВ.

Для стрелочных приборов традиционно используется понятие *класса точности*. Предельная инструментальная погрешность равна произведению класса точности (в процентах) на показание прибора при максимальном отклонении стрелки. В цифровых приборах погрешность, как правило, зависит от диапазона измерения, поэтому понятие класса точности для них не применяется.

Пример. Стрелочный вольтметр имеет диапазон измерения от 0 до 5 В и цену деления 10 мВ, а его класс точности равен 0,5. Следовательно, погрешность измерения, гарантируемая производителем, составляет $5 \text{ В} \cdot 0,5\% = 25$ мВ. Хотя цена деления меньше, в качестве погрешности следует взять именно ± 25 мВ. Не стоит рассчитывать на хорошую точность при измерениях напряжения менее 1 В, поскольку относительная ошибка составит более 2,5%.

Наконец, при считывании показаний стрелка прибора или цифры на циферблате могут «дрожать» (*флуктуировать*) вблизи некоторого значения. Это может быть связано как с разного рода шумами и помехами внутри прибора, так и с колебаниями самой измеряемой величины. Если записывается некоторое среднее значение показаний, то амплитуда флуктуаций должна быть учтена как дополнительная случайная погрешность.

Не стоит также забывать, что в процессе эксперимента почти наверняка возникнут дополнительные погрешности, связанные с конкретной

постановкой опыта и методикой измерений. Для нахождения результирующей погрешности измерения необходимо сложить все *независимые* источники ошибок среднеквадратичным образом:

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{\text{инстр}}^2 + \sigma_{\text{отсч}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2 + \dots}$$

Замечание. Отметим, что цену деления шкалы или разрядность дисплея *добросовестный* производитель выбирает таким образом, чтобы погрешность отсчёта и погрешность самого прибора были согласованы. В таком случае погрешность отсчёта по шкале отдельно учитывать не нужно — она уже учтена производителем при расчёте инструментальной погрешности.

4.3. Отчёт о работе

Лабораторная работа студента — миниатюрное научное исследование. Настоящие требования основаны на общепринятых стандартах научных публикаций, упрощённых для студентов младших курсов.

Отчёт о проделанной лабораторной работе должен представлять собой целостный документ, позволяющий читателю получить максимально полную информацию о проделанной работе и полученных результатах — без каких-либо дополнительных пояснений со стороны студента.

Материал в отчёте должен излагаться последовательно, а сам отчёт должен быть структурирован по разделам. Отчёт, как правило, содержит разделы: 1) аннотация, 2) теоретические сведения, 3) методика измерений, 4) используемое оборудование, 5) результаты измерений и обработка данных, 6) обсуждение результатов, 7) заключение. Структура и названия разделов могут незначительно варьироваться в зависимости от конкретного содержания работы.

Начальные разделы отчёта должны быть подготовлены *до проведения эксперимента* (при подготовке к работе). Непосредственно ход эксперимента должен фиксироваться в отдельном лабораторном журнале студента. Записи лабораторного журнала прикрепляются к отчёту в качестве приложения. Допускается ведение лабораторного журнала и оформление отчётов в одной рабочей тетради (формата А4).

Размерность измеренных величин — как в таблицах, так и на графиках — должна быть подобрана так, чтобы данные были удобны для чтения и *не содержали избыточное количество нулей*.

Помимо таблиц и графиков в тексте отчёта также должны быть представлены промежуточные результаты обработки данных (с соответствующими погрешностями), указаны используемые методы обработки данных и приведены соответствующие формулы. Окончательные и наиболее важные промежуточные результаты должны быть записаны с указанием по-

грешности (как абсолютной, так и относительной) и округлены согласно принятым в физике правилам округления.

4.3.1. Требования к содержанию разделов

Аннотация: краткое (1–2 абзаца) описание работы: её цели, используемые методы и приборы, ожидаемые результаты.

Теоретические сведения: краткий обзор основных понятий и теоретических законов, используемых или проверяемых в работе; упрощения и предположения, используемые при анализе и интерпретации результатов эксперимента; основные расчётные формулы.

Методика измерений: схема и описание экспериментальной установки; краткое описание основных методик проведения эксперимента, получения и обработки экспериментальных данных.

Используемое оборудование: перечень измерительных приборов, используемых в работе; инструментальные погрешности приборов и предварительный анализ их влияния на результаты опыта.

Результаты измерений и обработка данных: результаты проведенных измерений в форме таблиц и графиков; промежуточные и окончательные расчёты, в том числе расчёт погрешностей полученных результатов.

Обсуждение результатов: анализ точности проведённых измерений и достоверности результатов; обсуждение применимости использованных теоретических предположений; сравнение результатов с табличными (справочными) данными или результатами других экспериментов; обсуждение возможных причин ошибок и способов их устранения.

Заключение (или выводы): краткое резюме по результатам эксперимента: что удалось или не удалось измерить, были ли достигнуты поставлены цели, выводы по результатам работы и т.п.

4.3.2. Правила округления

Замечание. Все рассуждения в данном разделе относятся к *отчёту*. При заполнении лабораторного журнала не следует проводить никаких округлений, а напротив записывать всю доступную информацию.

Запись числовых значений, полученных в результате измерений, отличается от стандартной записи чисел, принятой в арифметике или в бухгалтерской отчётности. При десятичной записи результата важно следить за тем, какие цифры соответствуют реально измеренным в эксперименте,

Все цифры, начиная с первой ненулевой, называют *значащими*. Для корректной записи результата необходимо следить, чтобы количество значащих цифр было согласовано с погрешностью измерения. Перечислим правила, которыми необходимо руководствоваться при записи результатов:

- | | | | |
|--------------|------------------|----------------|-------------------|
| неправильно: | $1,245 \pm 0,05$ | $5,2 \pm 0,36$ | $1,24 \pm 0,012$ |
| правильно: | 1.25 ± 0.05 | 5.2 ± 0.4 | 1.240 ± 0.012 |

- | | | | |
|--------------|-----------------|-------------------|--------------------------------------|
| неправильно: | $5,27 \pm 0,86$ | $1,236 \pm 0,137$ | $1 \pm 0,239$ |
| правильно: | $5,3 \pm 0,9$ | $1,24 \pm 0,14$ | $1,0 \pm 0,2$ или
$1,00 \pm 0,24$ |

- Ноль на конце десятичного числа является значащей цифрой. Запись $l = 1,4$ м не эквивалентна $l = 1,40$ м, т.к. последняя подразумевает в 10 раз большую точность измерения. Например, не эквивалентны записи $m = 1$ т и $m = 1000$ кг, так как в первом случае одна значащая цифра, а во втором четыре.
- При необходимости нужно пользоваться *научной* (или *экспоненциальной*) формой записи числа, подбирая наиболее удобные единицы измерения. Например, если длина объекта определена с точностью ± 5 см и составляет $l = 123 \pm 5$ см, то вполне допустимы также записи: $l = 1,23 \pm 0,05$ м, или $l = (12,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-1}$ м, или $l = (1,23 \pm 0,05) \cdot 10^3$ мм, и т.п. Не вполне корректно было бы написать $l = 1230 \pm 50$ мм, поскольку такая запись подразумевает превышение точности как в измеренной величине, так и в оценке погрешности.
- Если погрешность физической величины не указана, то по умолчанию подразумевается, что она измерена с точностью до изменения

последней значащей цифры на единицу. Например, запись $l = 1,23$ м эквивалентна $l = 1,23 \pm 0,01$ м или $l = 123 \pm 1$ см, но не эквивалентна $l = 1230$ мм.

При записи *промежуточных результатов* и в промежуточных вычислениях, проводимых вручную, необходимо сохранять одну лишнюю значащую цифру, чтобы избежать ненужных ошибок округления. При вычислениях на калькуляторе необходимо следить, чтобы значащие цифры не вышли за пределы разрядности. То же касается примитивных средств для обработки данных, таких как электронные таблицы. Рекомендуется пользоваться только инженерными/научными калькуляторами, которые не имеют ограничений по разрядности, а также специализированными средствами обработки экспериментальных и статистических данных.

4.3.3. Построение графиков

Варьируя параметры системы, будем фиксировать пары величин (x_i, y_i) . В результате получим набор из n экспериментальных результатов («точек»)

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\},$$

которые изобразим на графике. Каждое измерение (x_i, y_i) имеет свою погрешность (случайную и/или систематическую). Для простоты примем, что погрешности у всех экспериментальных точек одинаковы и равны соответственно δx и δy . На графиках погрешности принято изображать в виде «крестов» размером $\pm \delta x$ по горизонтали и $\pm \delta y$ по вертикали.

Погрешности измерений приводят к тому, что если $n > 2$, то нельзя провести прямую, проходящую через все экспериментальные точки. Можно, тем не менее, попробовать провести «наилучшую» прямую, проходящую максимально близко ко всем точкам. В математической статистике такую процедуру называют также *линейной регрессией*.

Самый простой и грубый метод — провести наилучшую прямую «на глазок». Этот метод, конечно, нестрогий, но весьма наглядный. На практике к нему приходится часто прибегать для грубой и быстрой оценки промежуточных результатов. Для этого нужно приложить прозрачную линейку к графику так, чтобы по возможности кресты всех экспериментальных точек находились максимально близко к проводимой линии, а по обе стороны от неё оказалось примерно одинаковое количество точек.

Построив таким образом «наилучшую» прямую, можно найти её параметры: угловой коэффициент k и вертикальное смещение b . Этим же способом можно грубо оценить ошибку определения k и b . Смещая линейку вертикально в пределах крестов погрешностей, оценим погрешность δb . Аналогично, изменяя наклон линейки относительно условного «центра масс» экспериментального графика, получим оценку для погрешности

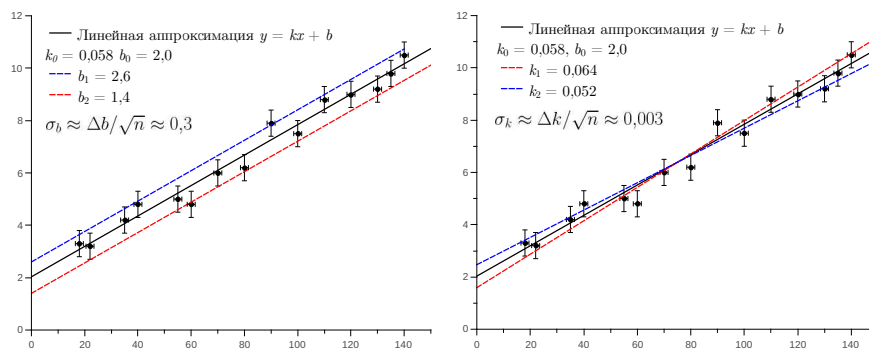


Рис. 4.1. Графический метод проведения прямой и оценки погрешностей

углового коэффициента δk . Если известно, что погрешности экспериментальных точек $(\delta x, \delta y)$ имеют преимущественно случайный характер, результат стоит разделить корень из числа точек: $\sigma_k \approx \delta k / \sqrt{n}$, $\sigma_b \approx \delta b / \sqrt{n}$ (для систематических погрешностей так делать не стоит).

Эта же процедура позволяет проверить, является ли измеренная зависимость в самом деле линейной: прямая должна пересекать большую часть (хотя бы 2/3) крестов погрешностей. В противном случае можно предполагать существенное отклонение экспериментальной зависимости от линейной теоретической. Отметим, что если кресты погрешностей на графике не отмечены, такой анализ провести затруднительно.

Существуют и аналитические методы подбора параметров (см. гл. 3), минимизирующие отклонения экспериментальных точек от некоторой теоретической зависимости (например, *метод наименьших квадратов*). Студентам первого курса рекомендуется осваивать их постепенно, по мере накопления опыта экспериментальной работы.

Пример. На рис. 4.2 изображены одни и те же экспериментальные точки при разных погрешностях измерений, график 4.2а, несомненно, указывает на нерегулярный ход изучаемой зависимости (кривая линия). Те же данные при больших погрешностях опыта (рис. 4.2б) успешно описываются прямой линией. Без указания крестов погрешностей разделить эти два случая было бы невозможно.

Нелинейные зависимости. Если теория предсказывает *нелинейную* функциональную зависимость между величинами, всегда можно сделать *замечную переменных* так, чтобы результирующий график получался линейным.

Заметим, что аналитические методы позволяют подбирать параметры и для нелинейных зависимостей. Хотя готовых формул для общего случая не существует, задача легко решается численно — и в большин-

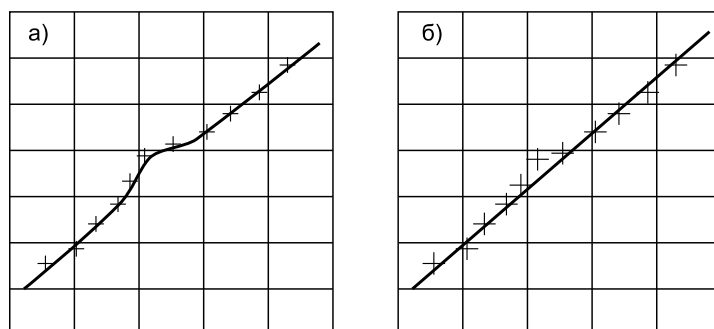


Рис. 4.2

стве современных программ обработки данных это сделать не сложнее, чем построить наилучшую прямую. Однако в учебной лаборатории такой подход использовать не рекомендуется.

Пример. Высота и время падения груза без начальной скорости в поле тяжести связаны соотношением $y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0$. Для того, чтобы получить линейную зависимость, можно построить график в координатах (y, t^2) . По угловому коэффициенту наилучшей прямой можно в таком случае вычислить ускорение свободного падения: $k = \frac{1}{2}g$.

Пример. В термодинамике и химии часто встречается зависимость вида $y = Ce^{-a/x}$. Чтобы определить коэффициенты C и a , можно построить график в координатах (u, v) , где $u = \ln y$ и $v = \frac{1}{x}$. В таком случае, как нетрудно видеть, $u = -av + \ln C$.

4.3.4. Рекомендации по оформлению графиков

Основная цель использования графиков — *наглядность* отображения результатов. В связи с этим к графикам предъявляются следующие требования:

- график должен иметь подпись (заглавие) с кратким описанием его содержания; подписи, данные и линии не должны быть нагромождены друг на друга так, что препятствовало бы их чтению;
- оси на графике должны быть *подписаны*: указаны буквенное обозначение величины и её единицы измерения; если величина безразмерна, указывается «отн. ед.» (относительные единицы);
- на осях должны быть отмечены *масштаб* и *положение нуля*; масштаб обозначается несколькими отметками с подписанными значениями.

ниями и дополнительными малыми отметками без подписей; масштаб должен быть удобным для чтения (использованы «круглые» числа, делящиеся на 10, 5 или 2);

- масштаб осей и начало отсчёта должны быть выбраны так, чтобы экспериментальные данные занимали всю площадь листа, отведённую под график;
- если график строится не «от нуля», это следует подчеркнуть отдельно, например «разрывом» оси;
- при необходимости сравнения данных из разных серий измерений, их следует размещать на одном графике, обозначая их разными символами или цветами;
- график с несколькими сериями данных должен быть снабжен «легендой», в которой указано соответствие серий данных и их обозначений; экспериментальные «точки» должны изображаться *символами конечных размеров* (позволяющими отличить их от случайных «пятен»);
- точки не должны быть без необходимости соединены линиями; также не нужно подписывать положение каждой точки графика (при необходимости можно указать положение 1-2 *особых* точек, если это не загромождает график);
- все экспериментальные точки должны быть снабжены *крестами погрешностей*, размер которых соответствует инструментальной погрешности измерения соответствующей величины (либо вычисленной по результатам косвенных измерений); кресты погрешностей можно не отмечать, только если погрешности малы (настолько, что они не будут видны на графике) или не известны;
- если теория предполагает некоторую (например, линейную) функциональную зависимость, на график должна быть тонкой линией нанесена соответствующая теоретическая кривая; расчёт параметров этой кривой (например, коэффициентов МНК для линейной зависимости) должен проводиться отдельно в тексте отчёта — с указанием используемых методов и формул; результаты таких расчётов и их погрешности указываются в легенде графика или в подписи к нему;
- оптимальный размер графика — от четверти до половины страницы (при условии, что отчёт оформляется на страницах формата А4).