1o **PROJECT** ΑΠΟΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ & ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

ΛΕΚΚΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΑΜ:1067430 Έτος 5ο

Περιεχόμενα

Η συγγραφή της αναφοράς πραγματοποιήθηκε με Latex με τη βοήθεια του TexStudio.

Α. Άσκηση 1

Ερώτημα 1

Γνωρίζουμε πως σε ένα Randomized αλγόριθμο υπάρχουν τέσσερις πιθανές ιδιότητες που μπορεί να έχει ένας κόμβος.Μπορεί 1) να είναι Running, δηλαδή να μην έχει σταθεροποιηθεί το χρώμα του, 2) να είναι Stopped, δηλαδή να έχει κάποιο χρώμα, 3) να είναι ενεργός, δηλαδή αυτό το γύρο θα προσπαθήσει να βρει χρώμα και 4) να είναι ανενεργός.

Στο πρώτο ερώτημα της άσκησης επιθυμούμε ο κόμβος να ενεργοποιείται με πιθανότητα pa. Συνεπώς η ανάλυση η ανάλυση για αυτόν τον αλγόριθμο όταν η πιθανότητα ενεργοποίησης είναι pa είναι η ακόλουθη:

Έστω ότι έχουμε ένα κόμβο u ο οποίος είναι running και έχει ως γείτονες k running κόμβους v.
Τώρα ας υποθέσουμε πως ο u είναι ενεργός και έχει τουλάχιστον k+1 διαθέσιμα χρώματα. Τότε A_{ri} είναι η πιθανότητα ο u να συγκρουστεί με τον v_i: 1/k+1. Δηλαδή $P_r(A_{ri})$ ≤1/k+1 (Φράζουμε διότι μπορεί να έχω παραπάνω χρώματα).Άμα ο vi είναι ανενεργός τότε δεν υπάρχει σύγκρουση.
Συνεπώς ισχύει το παρακάτω :$P_r(A_{ri}/v_{i\ \text{ενεργός}})$ ≤1/k+1.

Άμα v_i ενεργός με πιθανότητα pa τότε: $P_r(Av_i)$ ≤pa/k+1.Γενικά θέλω να υπολογίσω : $P_r(Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup ... \cup Av_k)$. Οπότε εφαρμόζω Union Bound και έχω: $P_r(Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup ... \cup Av_k) \leq \sum_{n=1}^{10} P_r(Av_i)) \leq k\cdot pa/k+1 \leq k\cdot pa/k \leq pa$.
Συνεχίζοντας η πιθανότητα να μην συγκρουστούν οι δύο κόμβοι είναι:
$P_r(1/Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup ... \cup Av_k)$ = 1-$P_r(Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup ... \cup Av_k) \geq pa$.
Άρα P_r(u να μην συγκρουστεί και να σταματήσει και να πάρει χρώμα)$\geq pa\cdot pa \geq pa^2$.

Βασιζόμενοι στο Lemma της διαφάνειας 61 του δευτερου σετ διαφανειών έχουμε: P_r(να μην σταματήσει)≤1-pa^2. Συνεπώς η πιθανότητα να μην σταματήσει σε T γύρους είναι: (1-pa^2)·(1-pa^2)·...(T φορές)≤(1-pa^2)^T.

Τέλος για να καταλήξω στο δεύτερο Corollary της διαφάνειας 61 του δευτερου σετ διαφανειών πρέπει αρχικα να καθορίσω το T=O($\log n$).Πρέπει δηλαδή να ορίσω τις σταθερές που κρύβει το O.Έχουμε: T=c·$\log_{\frac{1}{1-pa^2}} n$. Οπότε ένας κόμβος θα σταματήσει με πιθανότητα $\leq \left(\frac{1}{\frac{1}{1-pa^2}}\right)^{c\cdot\log_{\frac{1}{1-pa^2}} n} \leq \left(\frac{1}{1-pa^2}\right)^{-1\cdot c\cdot\log_{\frac{1}{1-pa^2}} n} \leq n^{-c}$.
Από Union Bound έχουμε : P_r(να μην έχει τελίωσει κάποιος κόμβος μετά από T γύρους)$\leq n \cdot n^{-c} = n^{-c+1}$. Οπότε η πιθανότητα να μην έχει τερματίσει κάποιος κόμβος μετά από c·$\log_{\frac{1}{1-pa^2}} n$ γύρους είναι το πολύ $\frac{1}{n^{c-1}}$. Συμπερασματικά, η

πιθανότητα να τερματίσει μετά από c$\cdot\log_{\frac{1}{1-pa^2}} n$ γύρους είναι $\leq 1 - \frac{1}{n^{c-1}}$,δηλαδή w.h.p.

$\square$

B. Άσκηση 2

Περιγραφή αλγορίθμου:

Σύμφωνα με τις διαφάνειες ο γρήγορος αλγόριθμος για χρωματισμό καταφέρνει μετά από $\log^* n$ γύρους να περιορίσει τον αριθμό των χρωμάτων από x σε 6.Βασιζόμενοι στον παραπάνω αλγόριθμο και στο γεγονός ότι σε κάθε γύρο μειώνει τον αριθμό των χρωμάτων από x σε O($\log x$) τότε μπορούμε να περιγράψουμε τον παρακάτω αλγόριθμο :
Έστω ότι έχουμε 6 χρώματα (0,1,2,3,4,5).Άν ένας κόμβος έχει ένα από τα χρώματα 3,4,5 τότε εκτελούνται τα παρακάτω βήματα: Ξαναχρωματίζουμε τον συγκεκριμένο κόμβο με το χρώμα του γονέα του και αντίστοιχα μόλις γίνει αυτό ο γονέας επιλέγει ένα από τα χρώματα 0,1,2.
Η διαδικασία επιλογής χρώματος του γονέα γίνεται με βάση το χρώμα που έχει ο δικός του γονέας.Οπότε έστω ότι επιλέγει το μικρότερο αποδεκτό χρώμα από τα 0,1,2 ώστε να διατηρηθεί η αρχή πυ λέει πως γειτονικοί κόμβοι δεν μπορούν να έχουν το ίδιο χρώμα.Δηλαδή π.χ άμα ο γονιός του είχε χρώμα 0 τότε αυτός θα χρωματιζόταν με 1.
Σύμφωνα με αυτό το loop συνεχίζουμε σε κάθε γύρο μέχρι να καταλήξουμε σε έναν αποδεκτό χρωματισμό του δένδρου που θα περιλαμβάνει μόνο 3 χρώματα χωρίς την ύπαρξη adjacent κόμβων.