1ο **PROJECT** ΑΠΟΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ & ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

ΛΕΚΚΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΑΜ:1067430 Έτος 5ο

Περιεχόμενα

Η συγγραφή της αναφοράς πραγματοποιήθηκε με Latex με τη βοήθεια του TexStudio.

Α. Άσκηση 1

Ερώτημα 1

Γνωρίζουμε πως σε ένα Randomized αλγόριθμο υπάρχουν τέσσερις πιθανές ιδιότητες που μπορεί να έχει ένας κόμβος.Μπορεί 1) να είναι Running, δηλαδή να μην έχει σταθεροποιηθεί το χρώμα του, 2) να είναι Stopped, δηλαδή να έχει κάποιο χρώμα, 3) να είναι ενεργός, δηλαδή αυτό το γύρο θα προσπαθήσει να βρει χρώμα και 4) να είναι ανενεργός. Επιπλέον σύκρουση κόμβων πραγματοποιείται οταν δύο γειτονικοί κόμβοι έχουν το ίδιο χρώμα(Η έννοια αυτή χρησιμοποιείται στις παρακάτω αποδείξεις).

Στο πρώτο ερώτημα της άσκησης επιθυμούμε ο κόμβος να ενεργοποιείται με πιθανότητα p_a. Συνεπώς η ανάλυση η ανάλυση για αυτόν τον αλγόριθμο όταν η πιθανότητα ενεργοποίησης είναι p_a είναι η ακόλουθη:

Έστω ότι έχουμε ένα κόμβο u ο οποίος είναι running και έχει ως γείτονες k running κόμβους v.
Τώρα ας υποθέσουμε πως ο u είναι ενεργός και έχει τουλάχιστον k+1 διαθέσιμα χρώματα. Τότε A_{ri} είναι η πιθανότητα ο u να συγκρουστεί με τον v_i: $\frac{1}{k+1}$. Δηλαδή $Pr(A_{ri}) \leq \frac{1}{k+1}$ (Φράζουμε διότι μπορεί να έχω παραπάνω χρώματα).Άμα ο v_i είναι ανενεργός τότε δεν υπάρχει σύγκρουση.
Συνεπώς ισχύει το παρακάτω :$Pr(A_{ri}/v_i \text{ ενεργός}) \leq \frac{1}{k+1}$.

Άμα v_i ενεργός με πιθανότητα p_a τότε: $Pr(Av_i) \leq p_a/k+1$.Γενικά θέλω να υπολογίσω : $Pr(Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup ... \cup Av_k)$. Οπότε εφαρμόζω Union Bound και έχω: $Pr(Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup ... \cup Av_k) \leq \sum_{n=1}^{10} Pr(Av_i)) \leq k \cdot p_a/k+1 \leq k \cdot p_a/k \leq p_a$.
Συνεχίζοντας η πιθανότητα να μην συγκρουστούν οι δύο κόμβοι είναι:
$Pr(1/Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup ... \cup Av_k) = 1\text{-}Pr(Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup ... \cup Av_k) \geq p_a$.
Άρα Pr(u να μην συγκρουστεί και να σταματήσει και να πάρει χρώμα)$\geq p_a \cdot p_a \geq p_a^2$.

Βασιζόμενοι στο Lemma της διαφάνειας 61 του δευτερου σετ διαφανειών έχουμε: Pr(να μην σταματήσει)$\leq 1\text{-}p_a^2$. Συνεπώς η πιθανότητα να μην σταματήσει σε T γύρους είναι: $(1\text{-}p_a^2) \cdot (1\text{-}p_a^2) \cdot ...$(T φορές)$\leq (1\text{-}p_a^2)^T$.

Τέλος για να καταλήξω στο δεύτερο Corollary της διαφάνειας 61 του δευτερου σετ διαφανειών πρέπει αρχικα να καθορίσω το $T=O(\log n)$.Πρέπει δηλαδή να ορίσω τις σταθερές που κρύβει το O.Έχουμε: $T=c \cdot \log_{\frac{1}{1-pa^2}} n$. Οπότε ένας κόμβος θα σταματήσει με πιθανότητα $\leq (\frac{1}{\frac{1}{1-pa^2}})^{c \cdot \log_{\frac{1}{1-pa^2}} n} \leq (\frac{1}{1-pa^2})^{-1 \cdot c \cdot \log_{\frac{1}{1-pa^2}} n} \leq n^{-c}$.
Από Union Bound έχουμε : Pr(να μην έχει τελίωσει κάποιος κόμβος μετά από T γύρους)$\leq n \cdot n^{-c} = n^{-c+1}$. Οπότε η πιθανότητα να μην έχει τερματίσει κάποιος

κόμβος μετά από c$\cdot\log_{\frac{1}{1-pa^2}} n$ γύρους είναι το πολύ $\frac{1}{n^{c-1}}$. Συμπερασματικά, η πιθανότητα να τερματίσει μετά από c$\cdot\log_{\frac{1}{1-pa^2}} n$ γύρους είναι $\leq 1-\frac{1}{n^{c-1}}$,δηλαδή w.h.p.

□

Ερώτημα 2

Όταν pa=1 δηλαδή όταν η παράμετρος που δηλώνει την πιθανότητα ενεργοποίησης ενός κόμβου είναι ίση με 1, αυτό σημαίνει πως όλοι οι κόμβοι ψάχνουν να βρουν ένα διαθέσιμο χρώμα.
Από την απόδειξη του προηγούμενου ερωτήματος συνεχίζουμε από το σημείο υπολογισμού του Pr(Avi) και έχουμε: Pr(Avi)$\leq \frac{1}{k+1}$.
Οπότε εφαρμόζω Union Bound και έχω: Pr(Av1∪Av2∪Av3∪...∪Avk)$\leq\sum_{n=1}^{10}$Pr(Avi)) $\leq\frac{k}{k+1}\leq\frac{k}{k}\leq 1$.
Συνεχίζοντας η πιθανότητα να μην συγκρουστούν οι δύο κόμβοι είναι:
Pr(1/Av1∪Av2∪Av3∪...∪Avk) = 1-Pr(Av1∪Av2∪Av3∪...∪Avk)$\geq$0(Οριακά μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός).
Συνεπώς θα υπάρχει σχεδόν πάντα σύγκρουση μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων.
Δηλαδή δεν θα μπορέσουν να πάρουν σχεδόν ποτέ χρώμα το οποίο να συμβαδίζει με τους κανόνες χρωματισμού.Η αποδοτικότητα του συγκεκριμένου αλγορίθμου είναι πάρα πολυ μικρή.

Για να είναι ο αλγόριθμος αποδοτικός θα πρέπει να μειωθεί ο αριθμός των χρωμάτων σημαντικά διότι έτσι αποφεύγουμε περισσότερες συγκρούσεις,αφού λιγότεροι κόμβοι θα έχουν ίδιο χρώμα με τους γείτονές τους.

Β. Άσκηση 2

Περιγραφή αλγορίθμου:

Σύμφωνα με τις διαφάνειες ο γρήγορος αλγόριθμος για χρωματισμό καταφέρνει μετά από $\log^* n$ γύρους να περιορίσει τον αριθμό των χρωμάτων από x σε 6.Βασιζόμενοι στον παραπάνω αλγόριθμο και στο γεγονός ότι σε κάθε γύρο μειώνει τον αριθμό των χρωμάτων από x σε $\mathrm{O}(\log x)$ τότε μπορούμε να περιγράψουμε τον παρακάτω αλγόριθμο :

Έστω ότι έχουμε 6 χρώματα (0,1,2,3,4,5).
Αρχικά ορίζουμε υπορουτίνα η οποία θα χρησιμοποιηθεί για να διατηρείται η αρχή του χρωματισμού των γειτονικών κόμβων.Δηλαδή ότι δεν πρέπει γειτονικοί κόμβοι να έχουν το ίδιο χρώμα.
Υπορουτίνα:

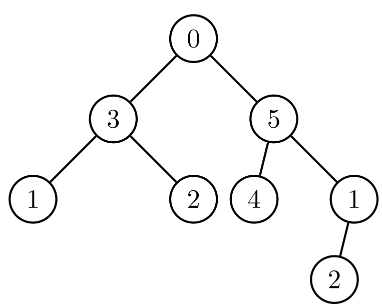
1. Η ρίζα επιλέγει ένα χρώμα από τα 0,1,2.
2. Κάθε κόμβος ξαναχρωματίζεται με το χρώμα που είχε ο γονιός του.

Αλγόριθμος:
Κάθε κόμβος σε παράλληλο χρόνο:

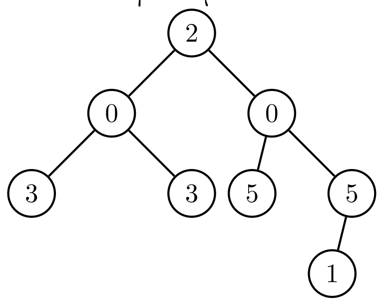
1. Τρέχει τον γρήγορο αλγόριθμο χρωματισμού μέχρι να φτάσει στα 6 χρώματα.
2. Για x =5,4,3:
   (α′) Εκτελεί την υπορουτίνα που αναφέρθηκε παραπάνω.
   (β′) Αν το χρώμα ενός κόμβου μετά την υπορουτίνα είναι 5 ή 4 ή 3 τότε επιλέγεται το μικρότερο και ελεύθερο νέο χρώμα από το 0,1,2 .

Αυτό το loop συνεχίζεται μέχρι να καταλήξουμε σε έναν αποδεκτό χρωματισμό του δένδρου που θα περιλαμβάνει μόνο 3 χρώματα χωρίς την ύπαρξη adjacent κόμβων.

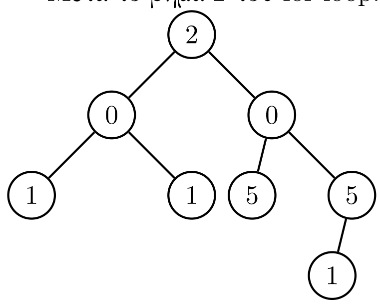
Στην συνέχεια παρουσιάζεται μια πιθανή εκτέλεση του παραπάνω αλγορίθμου:



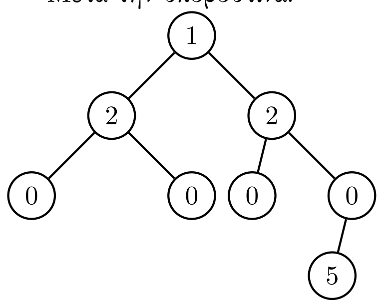
Μετά την υπορουτίνα:



Μετά το βήμα 2 του for loop:



Μετά την υπορουτίνα:



Μετά το βήμα 2 του for loop: