Оглавление

Вступление

Это уже больше половины задуманного учебника по теории категорий. Автор поставил целью написать учебник, доступный мат.логикам и функциональным программистам, в котором не будет ни слова про гомотопии и гомологии. Почти все русскоязычные книги по теории категорий написаны алгебраистами для алгебраистов, в нагрузку к теории категорий в них предлагают изучать гомологическую алгебру. Исключение составляет книга Голдблатта „Топосы“, но она, по мнению автора, как учебник не очень годится (хотя сама по себе интересная). Для чтения книги нужно шапочное знакомство с понятиями „группа“, „свободная группа“ и „гомоморфизм групп“. Если читатель их не знает, советую сначала прочитать популярную книжку Александрова „Введение в теорию групп“.

Символ $\Leftrightarrow$ означает „тогда и только тогда“.

Символ $\wedge$ означает „и“, автор иногда вставляет его между формулами.

Символ $\square$ отмечает конец доказательства.

Глава 1

Категории, изоморфизмы

Категории – это некоторые математические структуры, частными случаями которых являются частично упорядоченные множества, а также полугруппы с единицей (в том числе группы). Во многих случаях категорию удобно представлять как „обобщённое частично упорядоченное множество“, в других случаях как „обобщённую полугруппу с единицей“. Чуть позже мы дадим точные определения этих понятий.

Определение 1.1. *Категория* K задаётся следующим набором данных:

1. Совокупностью *объектов*, которые мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C \ldots$

2. Совокупностью *морфизмов*, или *стрелок*, которые мы будем обозначать строчными латинскими буквами $f, g, h \ldots$

3. Операциями *dom* и *cod*, которые сопоставляют каждой стрелке f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются *началом* и *концом* f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, наглядно изображается так

   $$f\colon A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B$$

   В этом случае говорят, что f – стрелка (или морфизм) из A в B.

4. Операцией *композиции*, которая по каждой паре стрелок f и g, расположенных так

   $$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

(то есть, $cod(f) = dom(g)$), выдаёт некоторую стрелку

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

(она называется *композицией* f и g).

5. Операцией id, которая по каждому объекту A выдаёт некоторую стрелку

$$A \xrightarrow{id_A} A$$

(она называется *тождественной* или *единичной стрелкой* объекта A, а также *тождественным* или *единичным морфизмом* объекта A, можно называть эту стрелку и просто *тождеством* объекта A).

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции.
Для любой тройки стрелок f, g, h, расположенных так

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества.
Для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено равенство $f \circ id_A = f$.
Для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено равенство $id_B \circ f = f$.

Замечание 1.2. Часто вместо id_A пишут 1_A.

Пример 1.3. Категория множеств Set. Её объектами являются произвольные множества $A, B, C \ldots$, а морфизмами – упорядоченные тройки вида $(A, \mathfrak{f}, B)$, где $\mathfrak{f}$ – функция из A в B (определённая на всех элементах A). Операции dom и cod задаются равенствами:

$$dom(A, \mathfrak{f}, B) = A$$

$$cod(A, \mathfrak{f}, B) = B$$

Тождественный морфизм id_A есть по определению $(A, \mathfrak{id}_A, A)$, где $\mathfrak{id}_A$ есть тождественная функция из A в A.
Композицией морфизмов $(A, \mathfrak{f}, B)$ и $(B, \mathfrak{g}, C)$ будет морфизм $(A, \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}, C)$.

В принципе, можно было бы определить морфизмы как пары $(\mathfrak{f}, B)$, потому что начало однозначно находится по $\mathfrak{f}$ (это область определения $\mathfrak{f}$). Но конец надо указывать явно, так как по функции $\mathfrak{f}$ он однозначно не находится (множество значений $\mathfrak{f}$ может быть строго меньше B). Например, функцию, определённую на всех действительных числах и тождественно равную нулю, можно считать действующей во множество натуральных чисел, рациональных чисел, или действительных чисел, по желанию.

Соглашение 1.4. Совокупность всех объектов категории K будем обозначать $Ob(\mathsf{K})$. Совокупность всех стрелок категории K будем обозначать $Mor(\mathsf{K})$. Совокупность всех стрелок из A в B в категории K будем обозначать $\mathsf{K}(A, B)$.

Замечание 1.5. Часто вместо $\mathsf{K}(A, B)$ пишут $Hom_{\mathsf{K}}(A, B)$.

С теоретико-множественной точки зрения совокупность объектов Set (то есть, совокупность всех множеств) не является множеством, она слишком велика. То же относится и к совокупности морфизмов Set.

Определение 1.6. Категория K называется *локально малой*, если $\mathsf{K}(A, B)$ является множеством для любых A и B.

Определение 1.7. Категория K называется *малой*, если $Mor(\mathsf{K})$ (то есть, объединение всех $\mathsf{K}(A, B)$) является множеством.

Всякая малая категория является локально малой. Обратное неверно. Set является локально малой, но не является малой.

Совокупность объектов $Ob(\mathsf{K})$ малой категории тоже является множеством, потому что объектов „не больше“, чем морфизмов. В самом деле, каждому объекту A соответствует его единичный морфизм id_A, причём разным объектам соответствуют разные единичные морфизмы (из $id_A = id_B$ следует $dom(id_A) = dom(id_B)$, поэтому $A = B$).

Замечание 1.8. Категории приходится делить на „большие“и „малые“ по техническим причинам, чтобы избежать парадоксов, близких к парадоксу Кантора из теории множеств.

Определение 1.9. *Полугруппа с единицей* – это множество M (будем обозначать его элементы $f, g, h \ldots$), на котором задана двухместная операция умножения $g \circ f$ и выделен элемент e (двусторонняя единица), причём для любых элементов f, g, h выполнены равенства:

1. Ассоциативность умножения.
   $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

2. Свойства двусторонней единицы.
   $f \circ e = f$
   $e \circ f = f$

Пример 1.10. Примеры полугрупп с единицей:

1. Любая группа.

2. Множество натуральных чисел с операцией умножения.

3. Множество натуральных чисел с операцией сложения (двусторонней единицей будет 0).

4. Множество слов в некотором алфавите с операцией приписывания (двусторонней единицей будет пустое слово).

Любая малая категория K с единственным объектом (обозначим его A) задаёт некоторую полугруппу с единицей. Элементами этой полугруппы будут стрелки категории (то есть, множество M – это $Mor(\mathsf{K})$). Любая стрелка $f \in \mathsf{K}(A, A)$, поэтому существует композиция любых двух стрелок, операция композиции ассоциативна и существует двусторонняя единица id_A. Обратно, любую полугруппу с единицей можно превратить в малую категорию с единственным объектом (надо выбрать произвольный объект A и положить $dom(f) = cod(f) = A$ для всех элементов полугруппы).

Определение 1.11. Множество M называется *предупорядоченным* (или просто *предпорядком*), если на нём задано рефлексивное транзитивное отношение $\lesssim$ (*отношение предпорядка*). Это значит, что для любых элементов множества (будем их обозначать $A, B, C \ldots$) выполнены следующие условия

1. Рефлексивность.
   $A \lesssim A$

2. Транзитивность.
   $A \lesssim B$ и $B \lesssim C$ влечёт $A \lesssim C$

Если выполнено также свойство антисимметричности

$A \lesssim B$ и $B \lesssim A$ влечёт $A = B$

то множество называется *частично упорядоченным* (или просто *частичным порядком*).

Определение 1.12. Категория K называется *категорией предпорядка*, если $\mathsf{K}(A, B)$ содержит не больше одной стрелки для любых A и B. Иными словами, если у двух стрелок одинаковое начало и одинаковый конец, то эти стрелки равны.

Любая малая категория предпорядка задаёт некоторое предупорядоченное множество. Его элементами будут объекты категории (то есть, множество M – это $Ob(\mathsf{K})$), а отношение предпорядка задаётся условием

$A \lesssim B$ если и только если существует стрелка из A в B

Рефлексивность следует из наличия тождественных стрелок id_A, а транзитивность – из наличия композиции стрелок. Обратно, любое предупорядоченное множество можно превратить в малую категорию предпорядка. Её объектами будут элементы этого множества, надо лишь для любых объектов со свойством $A \lesssim B$ произвольным образом выбрать единственную стрелку из A в B. Например, можно считать стрелкой саму упорядоченную пару (A, B). В этом случае будет

$$id_A = (A, A)$$

$$(B, C) \circ (A, B) = (A, C)$$

Независимо от конкретного выбора стрелок, верны ассоциативность композиции и свойства тождества, потому что любые две стрелки с одинаковым началом и одинаковым концом равны. Например, если $f\colon A \to B$, то $f \circ id_A\colon A \to B$, поэтому $f \circ id_A = f$.

Определение 1.13. Стрелка $f\colon A \to B$ называется *изоморфизмом*, если существует стрелка $g\colon B \to A$ со свойствами

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

Такая стрелка g называется *обратной* к f.

Обратная стрелка может быть только одна. Предположив, что к f есть две обратные стрелки g_1 и g_2, мы получим

$$g_1 \circ f \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$$

$$g_1 \circ f \circ g_2 = g_1 \circ id_B = g_1$$

поэтому $g_1 = g_2$. Обратную стрелку к f, если она существует, будем обозначать f^{-1}.

Определение 1.14. Объекты A и B называются *изоморфными*, если между ними есть изоморфизм. Это обозначается $A \cong B$.

Упражнение 1.15. Композиция двух изоморфизмов является изоморфизмом. Тождественные стрелки являются изоморфизмами. Стрелка, обратная к изоморфизму, является изоморфизмом. Для любых A и B

1. $A \cong A$
2. $A \cong B$ влечёт $B \cong A$
3. $A \cong B$ и $B \cong C$ влечёт $A \cong C$

Пример 1.16. В Set два множества A и B изоморфны $\Leftrightarrow$ они равномощны.

Пример 1.17. Малая категория с одним объектом задаёт группу $\Leftrightarrow$ все её стрелки являются изоморфизмами (то есть, обратимы).

Пример 1.18. Малая категория предпорядка задаёт частичный порядок $\Leftrightarrow$ изоморфные объекты равны. Действительно, объекты A и B в категории предпорядка изоморфны $\Leftrightarrow$ существуют стрелки $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$, то есть $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$ (равенства $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$ выполняются автоматически, поскольку любые две стрелки с одинаковым началом и одинаковым концом равны).

Глава 2

Другое определение категории

Определение 1.1 является стандартным, но реально мы пользуемся немного другим.

Определение 2.1. На практике категория обычно задаётся следующим набором данных:

1. Совокупностью *объектов*, которые мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C \ldots$

2. Совокупностью *протоморфизмов*, или *протострелок*, которые мы будем обозначать готическими буквами $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \ldots$

3. Трёхместным отношением $\mathfrak{f}\colon A \to B$ (или $A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B$), которое означает „$\mathfrak{f}$ можно считать стрелкой из A в B“. По протоморфизму его начало и конец не обязаны определяться однозначно, в этом разница.

4. Операцией *композиции*, которая по каждой паре протострелок $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$, расположенных так

$$A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B \xrightarrow{\mathfrak{g}} C$$

   выдаёт некоторую протострелку $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ (она называется *композицией* $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$), причём верно $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}\colon A \to C$.

5. Операцией $\mathfrak{id}$, которая по каждому объекту A выдаёт некоторую протострелку $\mathfrak{id}_A$, причём верно $\mathfrak{id}_A\colon A \to A$.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции.
   Для любой тройки протострелок $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, расположенных так

   $$A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B \xrightarrow{\mathfrak{g}} C \xrightarrow{\mathfrak{h}} D$$

   выполнено равенство $(\mathfrak{h} \circ \mathfrak{g}) \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{h} \circ (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f})$.

2. Свойства тождества.
   Для любой протострелки $\mathfrak{f} \colon A \to B$ выполнено равенство $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{id}_A = \mathfrak{f}$.
   Для любой протострелки $\mathfrak{f} \colon A \to B$ выполнено равенство $\mathfrak{id}_B \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$.

Подчёркиваю, единственное отличие от определения 1.1 в том, что по протоморфизму его начало и конец не обязаны определяться однозначно.

Имея такой набор данных, мы можем построить категорию в смысле определения 1.1. В качестве морфизмов из A в B берутся упорядоченные тройки $(A, \mathfrak{f}, B)$, для которых верно $\mathfrak{f} \colon A \to B$. При этом:

$$dom(A, \mathfrak{f}, B) = A$$

$$cod(A, \mathfrak{f}, B) = B$$

$$id_A = (A, \mathfrak{id}_A, A)$$

$$(B, \mathfrak{g}, C) \circ (A, \mathfrak{f}, B) = (A, \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}, C)$$

Именно так мы строили категорию Set, протоморфизмами в этом случае были теоретико-множественные функции. В примере 1.11 мы строили категорию по предупорядоченному множеству, в этом случае достаточно взять единственный протоморфизм $* \colon A \to B$ для всех A и B со свойством $A \lesssim B$.

Замечание 2.2. Слово „протоморфизм“ и определение 14.12 взяты из книги Freyd, Scedrov „Categories, Allegories“.

Глава 3

Функторы

Функторы – это правильные отображения категорий друг в друга. Частными случаями функторов являются монотонные отображения упорядоченных множеств, а также гомоморфизмы полугрупп с единицей (в том числе гомоморфизмы групп).

Определение 3.1. *Функтор* F из категории K_1 в категорию K_2 – это пара отображений (обозначаемых одной буквой)

$$F\colon Ob(\mathsf{K}_1) \to Ob(\mathsf{K}_2)$$

$$F\colon Mor(\mathsf{K}_1) \to Mor(\mathsf{K}_2)$$

первое из которых отображает объекты K_1 в объекты K_2, а второе – морфизмы K_1 в морфизмы K_2, причём сохраняются *dom*, *cod*, *id* и композиция. Это значит, что для любых f, g, A, B, C из категории K_1 выполнено:

1. $f\colon A \to B$ влечёт $F(f)\colon F(A) \to F(B)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ влечёт $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Соглашение 3.2. Функторы будем обозначать буквами F, G, H.
Если функтор F действует из категории K_1 в категорию K_2, будем это записывать как $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ или $\mathsf{K}_1 \xrightarrow{F} \mathsf{K}_2$.

Пример 3.3. Если K_1 и K_2 – малые категории с одним объектом каждая, то функторы между ними взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам соответствующих полугрупп с единицей. Функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ переводит единственный объект K_1 в единственный объект K_2, сохраняет композицию стрелок и двустороннюю единицу. Таким образом, отображение $F\colon Mor(\mathsf{K}_1) \to Mor(\mathsf{K}_2)$ является гомоморфизмом полугрупп с единицей.

Пример 3.4. Если K_1 и K_2 – малые категории предпорядка, то функторы между ними взаимно однозначно соответствуют монотонным отображениям соответствующих предпорядков. Если $A \lesssim B$, то $F(A) \lesssim F(B)$, поскольку единственная стрелка из A в B переходит в единственную стрелку из $F(A)$ в $F(B)$. Обратно, любое монотонное отображение $Ob(\mathsf{K}_1)$ в $Ob(\mathsf{K}_2)$ превращается в функтор единственно возможным способом (проверьте детали).

Упражнение 3.5. Проверьте, что функторы переводят изоморфизмы в изоморфизмы и обратные стрелки в обратные.

Определение 3.6. Каждой категории K сопоставляется *тождественный функтор* $Id_{\mathsf{K}}\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$, действующий так:

$$Id_{\mathsf{K}}(A) = A$$

$$Id_{\mathsf{K}}(f) = f$$

для любых A и f категории K.

Определение 3.7. Каждой паре функторов F и G, расположенных так

$$\mathsf{K}_1 \xrightarrow{F} \mathsf{K}_2 \xrightarrow{G} \mathsf{K}_3$$

сопоставляется их *композиция* $G \circ F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_3$, которая определяется равенствами:

$$(G \circ F)(A) = G(F(A))$$

$$(G \circ F)(f) = G(F(f))$$

для любых A и f категории K_1.

Определение 3.8. Категория Cat имеет в качестве объектов все малые категории, а в качестве протоморфизмов – функторы.

Замечание 3.9. Морфизмами будут упорядоченные тройки вида $(\mathsf{K}_1, F, \mathsf{K}_2)$, где $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$. Здесь ситуация примерно такая, как при построении категории Set (только хуже) – по функтору (то есть, паре отображений) категории K_1 и K_2 восстановить в общем случае нельзя, поэтому их надо указывать явно.

Упражнение 3.10. Проверьте, что категория Cat локально малая.

Замечание 3.11. Попытка образовать категорию всех категорий (не только малых) приводит к парадоксу, близкому к парадоксу Кантора.

Определение 3.12. Функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ называется *изоморфизмом категорий*, если к нему существует (однозначно определённый) обратный функтор $F^{-1}\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$ такой, что:

$$F \circ F^{-1} = Id_{\mathsf{K}_2}$$

$$F^{-1} \circ F = Id_{\mathsf{K}_1}$$

В этом случае категории K_1 и K_2 называются *изоморфными* (пишется $\mathsf{K}_1 \cong \mathsf{K}_2$).

Для малых категорий это определение даёт в точности изоморфизм в категории Cat.

Глава 4

Конкретные категории

Часто встречаются „категории множеств с некоторой дополнительной структурой". Например, объектами категории Grp являются произвольные группы, а протоморфизмами – гомоморфизмы групп. Точно так же можно рассматривать категорию линейных пространств и линейных отображений, категорию топологических пространств и непрерывных отображений и т.д. Не обязательно брать такие большие категории. Можно взять несколько (каких угодно) топологических пространств и их непрерывные отображения друг в друга, это будет категория. Не обязательно брать и все отображения. Если взять только сюръективные или только инъективные отображения, всё равно получится категория, потому что композиция сюръективных (инъективных) отображений тоже сюръективна (инъективна) и все тождественные отображения сюръективны (инъективны). Общим для всех таких категорий является наличие „хорошего" функтора в категорию множеств Set. Этот функтор по любому объекту (группе, линейному пространству, топологическому пространству и т.д.) выдаёт его множество-носитель.

Определение 4.1. Функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ называется *строгим*, если для любых A, B, f, g из категории K_1 верно следующее утверждение

$$f\colon A \to B \wedge g\colon A \to B \wedge F(f) = F(g) \text{ влечёт } f = g$$

Иными словами, F отображает $\mathsf{K}_1(A, B)$ в $\mathsf{K}_2(F(A), F(B))$ инъективно для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$.

Содержательно, строгость означает, что стрелка f определена однозначно, если мы знаем $dom(f), cod(f)$ и $F(f)$.

Определение 4.2. *Конкретная категория* задаётся следующим набором данных:

1. Категория K.
2. Строгий функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, этот функтор называется *стирающим* или *забывающим* функтором.

Заметим, что при нашем определении конкретная категория – это не категория, а пара „категория и функтор“.

Все перечисленные выше категории „множеств с дополнительной структурой“ являются конкретными, если в качестве стирающих функторов брать функторы „множества-носителя“. Рассмотрим подробнее категорию Grp. Каждой группе Gr соответствует её множество-носитель $F(Gr)$. Гомоморфизмы групп задаются как отображения множеств-носителей, сохраняющие дополнительную структуру (умножение и двустороннюю единицу). Гомоморфизм полностью определён, если известно соответствующее отображение множеств-носителей, из этого следует строгость F. Композиция гомоморфизмов определяется как композиция соответствующих отображений множеств-носителей, поэтому F является функтором.

Теорема 4.3. *Для любой малой категории* K *существует строгий функтор* $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$.

Доказательство. Определим функтор F следующими равенствами:

$$F(A) = \{f \in Mor(\mathsf{K})\colon cod(f) = A\}$$

$$F(g)(f) = g \circ f$$

Таким образом, каждому объекту A сопоставляется множество $F(A)$ всех стрелок с концом A. Каждой стрелке $g\colon A \to B$ сопоставляется функция $F(g)\colon F(A) \to F(B)$, которая по любому элементу $f \in F(A)$ выдаёт $g \circ f \in F(B)$. Стрелка g однозначно определяется по A и $F(g)$, поскольку $g = F(g)(id_A)$, из этого следует строгость F.
□

В частном случае, когда категория K задаёт группу (то есть, в K один объект и все стрелки являются изоморфизмами), мы получаем известную *теорему Кэли*: любая группа может быть представлена как группа перестановок некоторого множества (а именно, множества её элементов).

Замечание 4.4. Уже локально малую категорию не всегда можно сделать конкретной (выбрав подходящий функтор в Set). Но простейший естественный контрпример, приходящий автору на ум, содержит слово „гомотопия“.

Замечание 4.5. О терминологии. Некоторые люди вместо слова „строгий“ используют странное слово „унивалентный“. Юрий Иванович Манин на вопрос автора по терминологии ответил „Когда мы с С. Гельфандом писали “Методы гомологической алгебры” (русская публикация 1988), мы пользовались вполне установившейся русской терминологией. Полезные классы функторов назывались строгими, полными, или одновременно теми и другими (см. стр. 84). “Унивалентных” функторов тогда я не встречал“.

Глава 5

Диаграммы

Различные утверждения о категориях удобно представлять с помощью картинок определённого вида, называемых *диаграммами*.

Определение 5.1. *Диаграмма* в категории K – это ориентированный граф, вершинам которого сопоставлены некоторые объекты K, а рёбрам – некоторые морфизмы K.

Определение 5.2. *Путём* в диаграмме называется последовательность стрелок, расположенных так

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n$$

где $n \geqslant 1$. Каждому пути сопоставим композицию всех входящих в него стрелок $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$.
Диаграмма называется *коммутативной*, если для любых вершин A и B в диаграмме любые два пути из A в B дают равные композиции стрелок.

Пример 5.3. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

означает, что $g \circ f = h$.

Пример 5.4. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "l"] & D \end{tikzcd}$$

означает, что $g \circ f = l \circ h$.

Пример 5.5. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "f"] \end{tikzcd}$$

означает, что $f = f \circ f = f \circ f \circ f = \ldots$

Упражнение 5.6. Проверьте, что в категориях предпорядка все диаграммы коммутативны.

Пример 5.7. Свойства тождества выражаются следующими коммутативными диаграммами:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ A \arrow[u, "id_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[d, "id_B"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Соглашение 5.8. Если какая-то стрелка в диаграмме нарисована пунктиром, это означает „эта стрелка – единственная, которая делает диаграмму коммутативной, находясь в указанном положении“.

Пример 5.9. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dotted] & A \end{tikzcd}$$

означает „существует ровно одна стрелка из объекта B в объект A“.

Пример 5.10. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "h"] &
\end{tikzcd}$$

означает „существует единственная стрелка h со свойством $f_1 \circ h = g_1 \wedge f_2 \circ h = g_2$“.

Глава 6

Естественные преобразования

В этой главе будет мало примеров, но в следующей мы всё наверстаем. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ и $G\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$.

Определение 6.1. *Естественным преобразованием* τ функтора F в функтор G называется отображение

$$\tau\colon Ob(\mathsf{K}_1) \to Mor(\mathsf{K}_2)$$

выдающее по каждому объекту $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ стрелку $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$, причём для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $f\colon A \to B$ должна быть коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

В этом случае пишут $\tau\colon F \to G$ или $F \xrightarrow{\tau} G$.

Определение 6.2. Каждому функтору $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ сопоставляется *тождественное преобразование* $id_F\colon F \to F$, которое по каждому объекту $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ выдаёт стрелку $id_{F(A)}\colon F(A) \to F(A)$.

Упражнение 6.3. Проверьте, что id_F является естественным преобразованием, доказав коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "id_{F(A)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "id_{F(B)}"] & F(B) \end{tikzcd}$$

Определение 6.4. Каждой паре естественных преобразований $\tau\colon F \to G$ и $\sigma\colon G \to H$ (где F, G, H – функторы из K_1 в K_2) сопоставляется их *композиция* $\sigma \circ \tau\colon F \to H$, которая по каждому объекту $A \in Ob(K_1)$ выдаёт стрелку $\sigma_A \circ \tau_A$.

Упражнение 6.5. Проверьте, что $\sigma \circ \tau$ является естественным преобразованием, доказав коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \arrow[r, "\sigma_B"] & H(B) \end{tikzcd}$$

(оба квадрата коммутативны, надо доказать коммутативность внешнего прямоугольника).

Определение 6.6. Пусть K_1 и K_2 – малые категории. *Категорией функторов* $\mathsf{K}_2^{\mathsf{K}_1}$ называется категория, объектами которой являются функторы $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$, а протоморфизмами – естественные преобразования
$\tau\colon F \to G$.

Пример 6.7. Пусть K_1 и K_2 – малые категории предпорядка. Соответствующие отношения предпорядка на $Ob(\mathsf{K}_1)$ и $Ob(\mathsf{K}_2)$ обозначим $\lesssim_1$ и $\lesssim_2$. В этом случае $\mathsf{K}_2^{\mathsf{K}_1}$ тоже является малой категорией предпорядка. С точностью до изоморфизма категорий, её можно описать так: объектами являются монотонные отображения $Ob(\mathsf{K}_1)$ в $Ob(\mathsf{K}_2)$ (обозначим их $F, G, H \ldots$), при этом порядок $F \lesssim G$ на множестве отображений задаётся условием

$$F \lesssim G \Leftrightarrow \text{для всякого } A \in Ob(\mathsf{K}_1) \text{ верно } F(A) \lesssim_2 G(A)$$

Действительно, монотонные отображения взаимно однозначно соответствуют функторам. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ должно сопоставлять каждому $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ стрелку $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$. Такие стрелки существуют (и однозначно определены) $\Leftrightarrow$ для всякого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ верно $F(A) \lesssim_2 G(A)$. Таким образом, между любыми двумя функторами в данном случае может быть не больше одного естественного преобразования.

Упражнение 6.8. Проверьте, что для малых K_1 и K_2 категория $\mathsf{K}_2^{\mathsf{K}_1}$ тоже малая.

Определение 6.9. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ называется *естественным изоморфизмом*, если существует (однозначно определённое) обратное преобразование $\tau^{-1}\colon G \to F$, для которого выполнены условия:

$$\tau \circ \tau^{-1} = id_G$$

$$\tau^{-1} \circ \tau = id_F$$

В этом случае функторы F и G называются *естественно изоморфными* или просто *изоморфными* (пишется $F \cong G$).

Упражнение 6.10. Проверьте, что $\tau\colon F \to G$ является естественным изоморфизмом $\Leftrightarrow$ для любого A стрелка $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$ является изоморфизмом.

Глава 7

Топосы вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$

Для „больших“ категорий существование категории функторов очевидно не всегда. Существует ли категория $\mathsf{Set}^{\mathsf{Set}}$? Если да, то она должна быть очень „большой“. Один важный частный случай мы рассмотрим отдельно.

Соглашение 7.1. Мы будем считать, что для любой малой категории K существует категория $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$. Категорию K в этой ситуации будем называть *шкалой*.

Упражнение 7.2. Проверьте, что все такие категории $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ локально малы.

Категории вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K малая, являются важными примерами так называемых *топосов*. Неформально, топосы – это категории, сильно похожие на Set. Объекты любого топоса можно воспринимать как некие „обобщённые“ или „нестандартные“ множества.

Пример 7.3. Возьмём в качестве шкалы K следующую малую категорию предпорядка (на диаграмме показаны все её объекты и все стрелки)

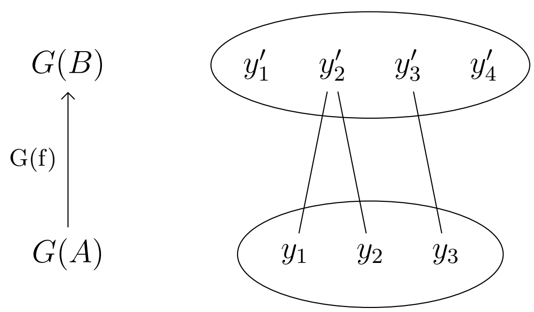
$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop left, "id_B"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"] \end{tikzcd}$$

Шкалу K будем воспринимать как „время“. Есть два момента времени A и B, причём A предшествует B (поскольку $A \lesssim B$). Функтор

$G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ определяется парой множеств $G(A)$ и $G(B)$, а также функцией между ними $G(f)$.

$$\begin{tikzcd} G(B) \\ G(A) \arrow[u, "G(f)"] \end{tikzcd}$$

Например, пусть множество $G(A)$ состоит из трёх элементов $\{y_1, y_2, y_3\}$, множество $G(B)$ состоит их четырёх элементов $\{y'_1, y'_2, y'_3, y'_4\}$, а функция $G(f)$ отображает $G(A)$ в $G(B)$ как показано на картинке:



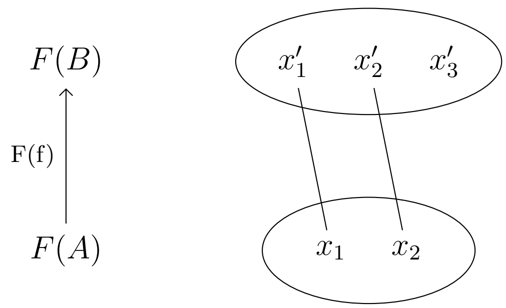
Это значит, что

$$G(f)(y_1) = y'_2$$

$$G(f)(y_2) = y'_2$$

$$G(f)(y_3) = y'_3$$

Содержательно, функтор G – это „множество, меняющееся со временем“. В момент времени A мы видим элементы y_1, y_2, y_3. В момент времени B выясняется, что y_1 равен y_2 (о чём в момент времени A мы ещё не знали) и эти элементы „слипаются“ в один элемент y'_2. Элемент y_3 остаётся обособленным и переходит в элемент y'_3. Вдобавок, появляются два новых элемента y'_1 и y'_4, о существовании которых в момент времени A мы не знали. Рассмотрим другой функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, выглядящий так:



Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ определяется парой функций

$$\tau_A\colon F(A) \to G(A)$$

$$\tau_B\colon F(B) \to G(B)$$

для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \\
F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Например, пусть

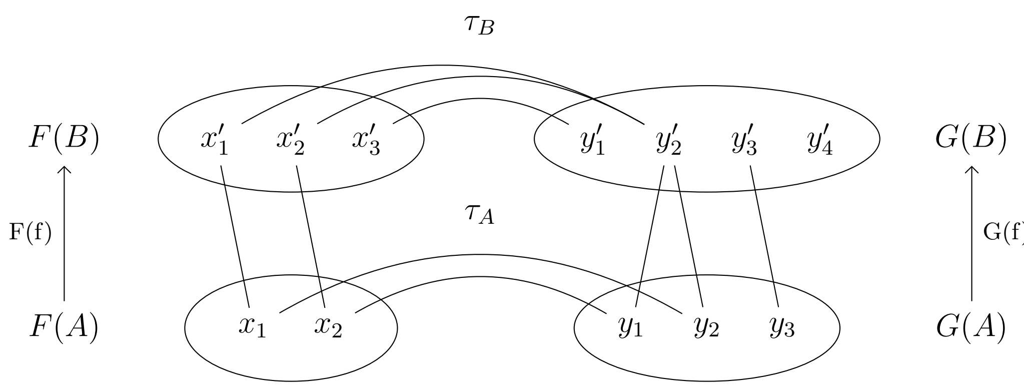
$$\tau_B(x_1') = y_2'$$

$$\tau_B(x_2') = y_2'$$

$$\tau_B(x_3') = y_1'$$

$$\tau_A(x_1) = y_2$$

$$\tau_A(x_2) = y_1$$



Коммутативность диаграммы означает равенство следующих функций

$$\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$$

Это значит, что для любого $x \in F(A)$ выполнено равенство

$$\tau_B(F(f)(x)) = G(f)(\tau_A(x))$$

Иными словами

$$F(f)(x) = x' \wedge \tau_B(x') = y' \wedge \tau_A(x) = y \text{ влечёт } G(f)(y) = y'$$

для любых $x \in F(A)$, $x' \in F(B)$, $y \in G(A)$ и $y' \in G(B)$.

Определение 7.4. Пусть M – полугруппа с единицей. M*-множеством* называется множество-носитель X вместе с заданным на нём *действием* полугруппы M. Это значит, что для любых $f \in M$ и $x \in X$ определён некоторый элемент $f(x) \in X$, причём выполнены следующие условия:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$e(x) = x$$

для любых $f, g \in M$ и $x \in X$.

Содержательно, каждому элементу f полугруппы M сопоставляется функция из X в X. Эта функция переводит x в $f(x)$. Условия означают, что произведение $g \circ f$ переходит в композицию соответствующих функций, а двусторонняя единица e – в тождественную функцию id_X.

Определение 7.5. Пусть даны два M-множества с носителями X и Y. *Гомоморфизмом M-множеств* называется функция $t\colon X \to Y$, сохраняющая действие. Это значит, что

$$t(f(x)) = f(t(x))$$

для любых $f \in M$ и $x \in X$.

Пример 7.6. Возьмём в качестве шкалы K малую категорию с одним объектом A, обозначим буквой M соответствующую полугруппу с единицей. Таким образом, M – это $Mor(\mathsf{K})$ с композицией в качестве умножения и двусторонней единицей id_A. Категорию $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ с точностью до изоморфизма категорий можно описать следующим образом: её объектами являются M-множества, а протострелками – их гомоморфизмы. Действительно, каждый функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ определяется множеством $F(A)$ и отображением $F\colon Mor(\mathsf{K}) \to Mor(\mathsf{Set})$, переводящим каждую стрелку $f\colon A \to A$ в стрелку $F(f)\colon F(A) \to F(A)$. Это отображение задаёт действие M на носителе $F(A)$ по правилу

$$f(x) = F(f)(x)$$

для любых $f \in M$ и $x \in F(A)$. Функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ задаёт действие M на носителе $G(A)$ по правилу

$$f(y) = G(f)(y)$$

для любых $f \in M$ и $y \in G(A)$. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ определяется функцией $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$, которая является гомоморфизмом M-множеств.

Упражнение 7.7. Проверьте детали, посмотрев на следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \\
F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Пример 7.8. Возьмём в качестве шкалы K следующую категорию (на диаграмме показаны все её объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ задаётся парой множеств $F(A)$ и $F(B)$ и парой функций между ними

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, shift left, "F(f)"] \arrow[r, shift right, "F(g)"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

Как множества, так и функции совершенно произвольны. Оказывается, есть взаимно однозначное соответствие между такими функторами и ориентированными графами. Рассмотрим для примера следующий граф

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "e"] & Y \arrow[d, "b"] \\ Z \arrow[r, "d"] & V \end{tikzcd}$$

Сопоставим ему функтор следующим образом. В качестве $F(A)$ возьмём множество рёбер $\{a, b, c, d, e\}$. В качестве $F(B)$ возьмём множество вершин $\{X, Y, Z, V\}$. В качестве $F(f)$ и $F(g)$ возьмём функции, сопоставляющие каждому ребру его начало и конец, соответственно. Естественным преобразованиям функторов соответствуют некие „гомоморфизмы графов“, отображающие вершины одного графа в вершины другого, а рёбра в рёбра с сохранением начал и концов. Категорию графов и их гомоморфизмов в дальнейшем будем обозначать Grph.

Глава 8

Терминальные объекты, элементы

Определение 8.1. Объект $A \in Ob(\mathsf{K})$ называется *терминальным* в категории K, если для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$ существует ровно одна стрелка из B в A.

$$B \dashrightarrow A$$

Пример 8.2. В Set терминальными объектами являются одноэлементные множества и только они. Единственная функция из множества B в одноэлементное множество A переводит все элементы B в единственный элемент A.

Теорема 8.3. *Все терминальные объекты изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – терминальные объекты в некоторой категории. Есть единственная стрелка $f\colon A_1 \to A_2$ и единственная стрелка $g\colon A_2 \to A_1$.

$$A_1 \overset{f}{\dashrightarrow} A_2 \qquad\qquad A_2 \overset{g}{\dashrightarrow} A_1$$

Композиция $g \circ f\colon A_1 \to A_1$ должна быть единственной стрелкой из A_1 в A_1, а композиция $f \circ g\colon A_2 \to A_2$ должна быть единственной стрелкой из A_2 в A_2. Но есть стрелки $id_{A_1}\colon A_1 \to A_1$ и $id_{A_2}\colon A_2 \to A_2$, поэтому

$$g \circ f = id_{A_1}$$

$$f \circ g = id_{A_2}$$

□

Пример 8.4. В Cat терминальными объектами являются категории с единственным объектом и единственной (тождественной) стрелкой

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "id_X"] \end{tikzcd}$$

Единственный функтор из категории K в терминальную категорию переводит все объекты K в единственный объект терминальной категории, а все стрелки K в единственную стрелку.

Пример 8.5. В категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ терминальные объекты – это функторы F, для которых множества $F(A)$ одноэлементные при любых $A \in Ob(K)$, а стрелки $F(f)$ единственно возможные между одноэлементными множествами.

Пример 8.6. Пусть K – категория предпорядка. Объект A является терминальным $\Leftrightarrow$ A является наибольшим элементом относительно $\lesssim$. В самом деле, наличие (необходимо единственной в категории предпорядка) стрелки из любого B в A означает, что $B \lesssim A$ для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$.

Замечание 8.7. Если предпорядок не является частичным порядком, наибольших элементов может быть несколько. Например, отношение $A \lesssim B$, тождественно истинное для любых A и B, является предпорядком, в котором все элементы наибольшие.

Соглашение 8.8. Если предполагается, что в категории выбран какой-то терминальный объект (из всех возможных), будем обозначать его символом 1. Единственную стрелку из объекта B в 1 будем обозначать $!_B$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dotted, "!_B"] & 1 \end{tikzcd}$$

Упражнение 8.9. Проверьте, что $!_1 = id_1$.

Упражнение 8.10. Проверьте, что для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено $!_B \circ f = !_A$.

Теорема 8.11. *Пусть стрелка $f\colon A \to 1$ является изоморфизмом. Тогда объект A тоже терминальный и единственная стрелка из B в A выглядит так $f^{-1} \circ !_B$.*

Доказательство. Легко проверить, что $f^{-1} \circ !_B\colon B \to A$. Докажем единственность. Пусть есть некоторая стрелка $h\colon B \to A$. Тогда $f \circ h\colon B \to 1$, поэтому

$$f \circ h = !_B$$

следовательно

$$h = f^{-1} \circ !_B$$

□

Следствие 8.12. *Любой объект, изоморфный терминальному, сам является терминальным.*

Соглашение 8.13. Будем считать, что в Set выбрано в качестве 1 некоторое одноэлементное множество $\{*\}$ с единственным элементом $*$ (конкретный выбор совершенно не важен).

Определение 8.14. *Элементами*, или *точками* объекта B называются стрелки вида $f\colon 1 \to B$.

Замечание 8.15. Стрелка $f\colon A \to B$ переводит элементы A в элементы B следующим образом: каждый элемент $g\colon 1 \to A$ переходит в элемент $f \circ g\colon 1 \to B$.

Пример 8.16. В Set точки множества B взаимно однозначно соответствуют элементам B в обычном теоретико-множественном смысле. Действительно, функция из $\{*\}$ в B однозначно определяется элементом B, в который переходит $*$.

Пример 8.17. Пусть даны два множества A и B, точка $g\colon \{*\} \to A$, переводящая $*$ в некоторое $a \in A$ и функция $f\colon A \to B$. В этом случае $f \circ g\colon \{*\} \to B$ переводит $*$ в $f(a) \in B$. Это показывает, как теоретико-множественное применение функции к аргументу изображается с помощью композиции.

Пример 8.18. В категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ в качестве 1 выберем функтор $1\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, для которого $1(A) = \{*\}$ для всех $A \in Ob(\mathsf{K})$. Пусть дан функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Элементы функтора G – это естественные преобразования $\tau\colon 1 \to G$. Каждая стрелка (в Set) $\tau_A\colon \{*\} \to G(A)$ выделяет элемент множества $G(A)$. Условия естественности

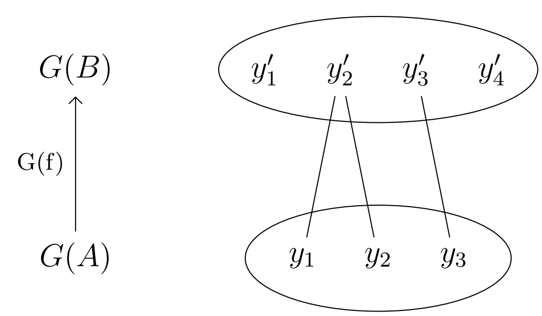
$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \\
\{*\} \arrow[u, dotted, "!_{\{*\}}"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

означают, что для каждой стрелки $f\colon A \to B$ соответствующая функция $G(f)\colon G(A) \to G(B)$ переводит выделенный элемент множества $G(A)$ в выделенный элемент множества $G(B)$.

Пример 8.19. Рассмотрим категорию $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ со шкалой K

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[loop left, "id_B"] \\
A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}$$

и функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, имеющий вид



Элементы функтора G – это пары элементов $y \in G(A), y' \in G(B)$ со свойством $G(f)(y) = y'$. В данном случае элементов три, они задаются парами $(y_1, y_2'), (y_2, y_2')$ и (y_3, y_3'). Содержательно, точка в данном случае – это „мировая линия точки во времени“.

Замечание 8.20. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ переводит элементы функтора F в элементы функтора G. Элемент $\sigma\colon 1 \to F$ переходит в элемент $\tau \circ \sigma\colon 1 \to G$. Тут полезно ещё раз посмотреть на картинку на стр. 28.

Пример 8.21. Пусть K – малая категория с одним объектом A, задающая полугруппу с единицей M. Функтор $1\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ определяет M-множество с носителем $\{*\}$ и действием

$$f(*) = *$$

для всякого $f \in M$. Пусть дан функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Он задаёт M-множество с носителем $G(A)$ и действием

$$f(y) = G(f)(y)$$

для любых $f \in M$ и $y \in G(A)$. В этом случае элементы G соответствуют неподвижным элементам $G(A)$, то есть таким $y \in G(A)$, что $G(f)(y) = y$ для всех $f \in M$.

Упражнение 8.22. Проверьте детали, посмотрев на коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \\
\{*\} \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[u, dotted, "!_{\{*\}}"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Пример 8.23. В категории графов $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ над шкалой K (показаны все объекты и все стрелки, кроме единичных)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

терминальный объект 1 имеет вид

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[loop above, "*"]
\end{tikzcd}$$

(это граф с одной вершиной и одним ребром, которое необходимо должно быть петлёй). Точка графа – это пара (V, r), где V – вершина графа, а r – петля, то есть ребро из V в V.

Пример 8.24. В категории групп Grp терминальным объектом 1 будет группа из одного единичного элемента $\{e\}$. Тут мы видим неприятную ситуацию – в каждой группе Gr с категорной точки зрения есть только один элемент. Действительно, есть ровно один гомоморфизм из $\{e\}$ в Gr (переводящий e в единичный элемент группы Gr). Таким образом, элементы множества-носителя группы Gr не соответствуют её категорным элементам. Тем не менее, определение 8.14 удобно и мы будем им пользоваться.

Глава 9

Двойственные категории

Для каждой категории K мы определим двойственную категорию K^{op}, в которой те же объекты, а стрелки формально обращены в противоположную сторону. Это значит, что стрелка из A в B в K считается стрелкой из B в A в K^{op}.

Определение 9.1. Для данной категории K *двойственная категория* K^{op} задаётся следующим набором данных:

1. Объекты $A, B, C \ldots$ в K^{op} те же, что в K.
2. Стрелки $f, g, h \ldots$ в K^{op} те же, что в K.
3. $f : B \to A$ в K^{op} в том и только том случае, если $f : A \to B$ в K.
4. Композиция $f \circ g$ в K^{op} по определению равна композиции $g \circ f$ в K (обратите внимание на разный порядок множителей).
5. Тождественные стрелки id_A в K^{op} те же, что в K.

Пример 9.2. Слева некоторая категория K, справа K^{op} (показаны все стрелки)

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[loop left, "id_C"] \\
B \arrow[u, "g"] \arrow[loop left, "id_B"] \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[uu, bend right, "g \circ f"'] \arrow[loop left, "id_A"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f \circ g"'] \arrow[loop right, "id_C"] \\
B \arrow[d, "f"] \arrow[loop right, "id_B"] \\
A \arrow[loop right, "id_A"]
\end{tikzcd}$$

Замечание 9.3. Операции *dom* и *cod* в K^{op} соответствуют *cod* и *dom* в категории K.

Упражнение 9.4. Проверьте, что $(\mathsf{K}^{op})^{op} = \mathsf{K}$ (это не просто изоморфизм категорий, а точное совпадение).

Упражнение 9.5. Проверьте, что изоморфизмы в K остаются изоморфизмами в K^{op}.

Каждому понятию теории категорий соответствует некоторое двойственное понятие, которое получается, если „сделать то же самое в двойственной категории". Например, двойственным к понятию „терминальный объект" является понятие „начальный объект".

Определение 9.6. Объект $A \in Ob(\mathsf{K})$ называется *начальным объектом* в категории K, если для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$ существует ровно одна стрелка из A в B.

$$A \dashrightarrow B$$

Упражнение 9.7. Проверьте, что объект A является начальным в K $\Leftrightarrow$ объект A является терминальным в K^{op}.

Пример 9.8. В Set есть единственный начальный объект, это пустое множество $\emptyset$. Из $\emptyset$ в любое множество B есть ровно одна функция – с пустым графиком.

Пример 9.9. В любой категории вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ есть единственный начальный объект – это функтор F, для которого множество $F(A)$ пустое при любом $A \in Ob(K)$, а стрелки $F(f)$ единственно возможные между пустыми множествами.

Упражнение 9.10. Проверьте, что в категории предпорядка объект A является начальным $\Leftrightarrow$ A является наименьшим элементом относительно предпорядка $\lesssim$.

Упражнение 9.11. Проверьте, что в Set^{op} много начальных объектов и только один терминальный.

Упражнение 9.12. В категории групп начальный объект совпадает с терминальным (это группа из одного единичного элемента $\{e\}$).

Соглашение 9.13. Если предполагается, что в категории выбран какой-то начальный объект (из всех возможных), будем обозначать его символом 0. Единственную стрелку из объекта 0 в B будем обозначать $\Box_B \colon 0 \to B$.

$$0 \xrightarrow{\Box_B} B$$

Теорема 9.14. *Все начальные объекты изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – начальные объекты в некоторой категории. Есть единственная стрелка $f \colon A_1 \to A_2$ и единственная стрелка $g \colon A_2 \to A_1$.

$$A_1 \xrightarrow{f} A_2 \qquad\qquad A_2 \xrightarrow{g} A_1$$

Композиция $g \circ f \colon A_1 \to A_1$ должна быть единственной стрелкой из A_1 в A_1, а композиция $f \circ g \colon A_2 \to A_2$ должна быть единственной стрелкой из A_2 в A_2. Но есть стрелки $id_{A_1} \colon A_1 \to A_1$ и $id_{A_2} \colon A_2 \to A_2$, поэтому

$$g \circ f = id_{A_1}$$

$$f \circ g = id_{A_2}$$

□

Другое доказательство. Начальные объекты в K – это терминальные объекты в K^{op}. Мы знаем, что все терминальные объекты изоморфны. Изоморфизмы в K те же, что в K^{op}. Следовательно, все начальные объекты изоморфны.

□

Второе доказательство является примером применения так называемого *принципа двойственности.* Для каждого утверждения в языке теории категорий можно формально написать двойственное утверждение, заменив dom на cod, cod на dom и все композиции $g \circ f$ на $f \circ g$. Например, двойственным к утверждению „все терминальные объекты изоморфны“ будет утверждение „все начальные объекты изоморфны“.

Теорема 9.15. *(Принцип двойственности). Если некоторое утверждение, записанное в теоретико-категорном языке, верно для всех категорий, то и двойственное к нему утверждение верно для всех категорий.*

Доказательство. Если утверждение верно для некоторой категории K, то двойственное утверждение верно для категории K^{op}. Если утверждение верно для всех категорий K, то двойственное утверждение верно для всех категорий вида K^{op} (то есть, двойственных к чему-нибудь). Но любая категория двойственна к чему-нибудь в силу равенства
$\mathsf{K} = (\mathsf{K}^{op})^{op}$.
$\square$

Конечно, это не строгая формулировка и не строгое доказательство, не будем пытаться его формализовать (хотя это не особенно трудно). Подробное изложение можно найти в книге Маклейна „Категории для работающего математика“.

Упражнение 9.16. Пусть стрелка $f\colon A \to 0$ является изоморфизмом. Докажите, что объект A начальный и единственная стрелка из A в B выглядит так $\square_B \circ f$.

Следствие 9.17. *Объект, изоморфный начальному, сам является начальным.*

Следующее определение обобщает такое наблюдение: монотонное отображение упорядоченных множеств остаётся монотонным, если оба множества „перевернуть вверх ногами“.

Определение 9.18. Каждому функтору $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ сопоставим функтор $F^{op}\colon \mathsf{K}_1^{op} \to \mathsf{K}_2^{op}$, который действует на объектах и на стрелках точно так же, как F. Иными словами, F и F^{op} совпадают как протоморфизмы категорий, но у них разные начала и концы.

Упражнение 9.19. Проверьте, что F^{op} является функтором (то есть, сохраняет композицию, тождественные стрелки, *dom* и *cod*).

В старых книгах по теории категорий то, что мы называем функтором, называли *ковариантным функтором.* Использовали также понятие *контравариантный функтор.*

Определение 9.20. *Контравариантный функтор* F из категории K_1 в категорию K_2 – это пара отображений (обозначаемых одной буквой)

$$F\colon Ob(\mathsf{K}_1) \to Ob(\mathsf{K}_2)$$

$$F\colon Mor(\mathsf{K}_1) \to Mor(\mathsf{K}_2)$$

первое из которых отображает объекты K_1 в объекты K_2, а второе – морфизмы K_1 в морфизмы K_2, причём для любых f, g, A, B, C из категории K_1 выполнено:

1. $f\colon A \to B$ влечёт $F(f)\colon F(B) \to F(A)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ влечёт $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

Упражнение 9.21. Проверьте, что контравариантные функторы из K_1 в K_2 взаимно однозначно соответствуют обычным (ковариантным) функторам из K_1 в K_2^{op}.

Упражнение 9.22. Проверьте, что контравариантные функторы из K_1 в K_2 взаимно однозначно соответствуют обычным (ковариантным) функторам из K_1^{op} в K_2.

Глава 10

Произведения

Определение 10.1. *Произведение* двух объектов A и B в категории K задаётся следующим набором данных:

1. Объектом $C \in Ob(\mathsf{K})$.

2. Упорядоченной парой стрелок $f_1\colon C \to A$ и $f_2\colon C \to B$, эти стрелки называются *первой проекцией* и *второй проекцией*.

При этом требуется, чтобы для любого объекта $D \in Ob(\mathsf{K})$ и любой упорядоченной пары стрелок $g_1\colon D \to A$ и $g_2\colon D \to B$ существовала единственная стрелка из D в C, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Читатель, возможно, уже почувствовал, что все определения в теории категорий даются „с точностью до изоморфизма“. Это некоторый общий принцип, который можно строго доказать (формализовав язык теории категорий), но мы не будем. В частности, у пары объектов A и B может быть много произведений, но все они изоморфны между собой (мы это докажем).

Соглашение 10.2. Если предполагается, что для двух объектов A и B выбрано некоторое произведение (из всех возможных), объект произведения будем обозначать $A \times B$, а проекции $pr_1^{A \times B}$ и $pr_2^{A \times B}$. Если A и B ясны из контекста, будем обозначать проекции просто pr_1 и pr_2. Будем обозначать $\langle g_1, g_2 \rangle$ единственную стрелку, делающую коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

Мы видим, что

$$pr_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_1$$

$$pr_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_2$$

$pr_1 \circ f = g_1 \wedge pr_2 \circ f = g_2$ влечёт $f = \langle g_1, g_2 \rangle$
для любой стрелки $f\colon D \to A \times B$

Пример 10.3. Произведением множеств A и B в Set является декартово произведение $A \times B$, то есть множество упорядоченных пар вида (a, b), где $a \in A, b \in B$. Здесь круглые скобки обозначают обычную теоретико-множественную упорядоченную пару (например, по Куратовскому). Проекции определяются так

$$pr_1(a, b) = a$$

$$pr_2(a, b) = b$$

Функция $\langle g_1, g_2 \rangle\colon D \to A \times B$ определяется равенством

$$\langle g_1, g_2 \rangle(x) = (g_1(x), g_2(x))$$

для любого $x \in D$. Разберёмся, что будет, если в качестве множества D взять $\{*\}$.

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\ A & & B \\ & \{*\} \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle"] & \end{tikzcd}$$

Стрелка $g_1 \colon \{*\} \to A$ задаёт некоторый элемент A. Стрелка $g_2 \colon \{*\} \to B$ задаёт некоторый элемент B. Диаграмма утверждает, что существует единственный элемент $A \times B$ (это $\langle g_1, g_2 \rangle$), первая проекция которого равна g_1, а вторая проекция равна g_2.

$$pr_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_1$$

$$pr_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_2$$

Тут следует ещё раз посмотреть пример 8.17. Если g_1 переводит $*$ в некоторое $a \in A$, а g_2 переводит $*$ в некоторое $b \in B$, то $\langle g_1, g_2 \rangle$ переводит $*$ в упорядоченную пару (a, b). Таким образом, точки $A \times B$ взаимно однозначно соответствуют парам „точка A и точка B“.

Замечание 10.4. Стрелки вида $f \colon A \times B \to C$ в Set соответствуют функциям от двух аргументов $f(a, b)$, где $a \in A, b \in B$.

Упражнение 10.5. Произведением двух групп Gr_1 и Gr_2 в Grp будет множество пар вида (x, y), где x – элемент носителя Gr_1, y – элемент носителя Gr_2; с двусторонней единицей (e, e) и умножением

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)$$

Проекциями будут гомоморфизмы $pr_1 \colon Gr_1 \times Gr_2 \to Gr_1$ и
$pr_2 \colon Gr_1 \times Gr_2 \to Gr_2$, действующие так

$$pr_1(x, y) = x$$

$$pr_2(x, y) = y$$

Определение 10.6. *Произведением категорий* K_1 и K_2 называется категория $\mathsf{K}_1 \times \mathsf{K}_2$, заданная следующим образом:

1. Объектами $\mathsf{K}_1 \times \mathsf{K}_2$ являются пары (A, B), где
   $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$
   $B \in Ob(\mathsf{K}_2)$

2. Морфизмами из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) являются пары (f, g), где
   $f \in \mathsf{K}_1(A_1, A_2)$
   $g \in \mathsf{K}_2(B_1, B_2)$

3. Композицией морфизмов
   $(f_1, g_1)\colon (A_1, B_1) \to (A_2, B_2)$ и
   $(f_2, g_2)\colon (A_2, B_2) \to (A_3, B_3)$
   является морфизм
   $(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)\colon (A_1, B_1) \to (A_3, B_3)$
   Иными словами,
   $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$

4. Тождественной стрелкой объекта (A, B) является стрелка (id_A, id_B)

Проекциями будут функторы $pr_1\colon \mathsf{K}_1 \times \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$ и $pr_2\colon \mathsf{K}_1 \times \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_2$, действующие так

$$pr_1(A, B) = A$$

$$pr_1(f, g) = f$$

$$pr_2(A, B) = B$$

$$pr_2(f, g) = g$$

Упражнение 10.7. Проверьте, что это определение даёт произведение в Cat.

Упражнение 10.8. Проверьте, что категория $\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$ изоморфна категории $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где шкала K имеет следующий вид (два объекта, стрелки только тождественные)

$$id_A \circlearrowright A \qquad B \circlearrowleft id_B$$

Замечание 10.9. Категории, в которых все стрелки тождественные, называются *дискретными*.

Упражнение 10.10. В категории предпорядка произведение $A \times B$ – это пересечение $A \sqcap B$, то есть наибольший (относительно $\lesssim$) объект C со свойством $C \lesssim A \wedge C \lesssim B$.

Замечание 10.11. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& 1 \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle"] &
\end{tikzcd}$$

(внизу терминальный объект) однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет произведение в категории Set. В произвольных категориях это не так. Например, в категории групп Grp для любой группы A есть ровно одна стрелка из 1 в A (см. пример 8.24), поэтому такая „упрощённая“ диаграмма вообще не налагает ограничений на $A \times B$.

Докажем несколько свойств произведений.

Теорема 10.12. $\langle g_1, g_2 \rangle \circ f = \langle g_1 \circ f, g_2 \circ f \rangle$
если обе части равенства определены.

Доказательство. Начнём с коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle"] & B \\
& C \arrow[ul, "g_1 \circ f"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g_2 \circ f"'] &
\end{tikzcd}$$

Удалив объект D и стрелки g_1, g_2, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "g_1 \circ f"] \arrow[ur, "g_2 \circ f"'] \arrow[uu, "\langle g_1, g_1 \rangle \circ f" description] &
\end{tikzcd}$$

По определению произведения, коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "g_1 \circ f"] \arrow[ur, "g_2 \circ f"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_1 \rangle \circ f" description] &
\end{tikzcd}$$

(стрелка единственная по определению произведения). Но следующая диаграмма тоже коммутативна

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "g_1 \circ f"] \arrow[ur, "g_2 \circ f"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1 \circ f, g_2 \circ f \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

поэтому $\langle g_1, g_2 \rangle \circ f = \langle g_1 \circ f, g_2 \circ f \rangle$
□

Теорема 10.13. $\langle pr_1^{A\times B}, pr_2^{A\times B} \rangle = id_{A\times B}$

Доказательство. Сравниваем диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& A \times B \arrow[ul, "pr_1"] \arrow[ur, "pr_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle pr_1, pr_2 \rangle" description] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& A \times B \arrow[ul, "pr_1"] \arrow[ur, "pr_2"'] \arrow[uu, "id_{A\times B}" description] &
\end{tikzcd}$$

□

Упражнение 10.14. $\langle pr_1 \circ f, pr_2 \circ f \rangle = f$
если левая часть равенства определена.

Определение 10.15. Для двух стрелок $f\colon A \to C$ и $g\colon B \to D$ их *произведение* $f \times g\colon A \times B \to C \times D$ определяется следующим равенством

$$f \times g = \langle f \circ pr_1, g \circ pr_2 \rangle$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & C \\
A \times B \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dotted, "f \times g"] & C \times D \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
B \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

Пример 10.16. В Set произведением $f \times g$ будет функция, действующая так

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$$

для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Теорема 10.17. $id_A \times id_B = id_{A \times B}$

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] & A \\
A \times B \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dotted, "id_{A \times B}"] & A \times B \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
B \arrow[r, "id_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Можно также сделать подсчёт

$$id_A \times id_B = \langle id_A \circ pr_1, id_B \circ pr_2 \rangle = \langle pr_1, pr_2 \rangle = id_{A \times B}$$

□

Теорема 10.18. $(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)$ *если обе части равенства определены.*

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & C_1 \\
A_1 \times A_2 \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dotted, "f_1 \times f_2"] & B_1 \times B_2 \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dotted, "g_1 \times g_2"] & C_1 \times C_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2
\end{tikzcd}$$

Заметим, что правая часть равенства может быть определена, а левая нет (если $B_1 \times B_2$ не существует).
□

Упражнение 10.19. Если $A_1 \cong A_2$ и $B_1 \cong B_2$, то $A_1 \times B_1 \cong A_2 \times B_2$.

Теорема 10.20. $(g_1 \times g_2) \circ \langle f_1, f_2 \rangle = \langle g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2 \rangle$
если обе части равенства определены.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[r, "g_1"] & C_1 \\
A \arrow[ur, bend left, "f_1"] \arrow[dr, bend right, "f_2"'] \arrow[r, dotted, "\langle f_1, f_2 \rangle"] & B_1 \times B_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \arrow[r, dotted, "g_1 \times g_2"] & C_1 \times C_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
 & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2
\end{tikzcd}$$

Заметим, что правая часть равенства может быть определена, а левая нет (если $B_1 \times B_2$ не существует).
□

Упражнение 10.21. В топосах вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ произведением функторов F и G является функтор $F \times G$, определённый следующими равенствами:

$$(F \times G)(A) = F(A) \times G(A)$$

$$(F \times G)(f) = F(f) \times G(f)$$

Проекциями $pr_1 \colon F \times G \to F$ и $pr_2 \colon F \times G \to G$ будут естественные преобразования с компонентами:

$$pr_1 \colon F(A) \times G(A) \to F(A)$$

$$pr_2 \colon F(A) \times G(A) \to G(A)$$

Для естественных преобразований $\tau \colon H \to F$ и $\sigma \colon H \to G$ стрелкой $\langle \tau, \sigma \rangle$ будет естественное преобразование с компонентами

$$\langle \tau_A, \sigma_A \rangle \colon H(A) \to F(A) \times G(A)$$

Упражнение 10.22. Если коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] & B \\ & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h_1"] \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] & \\ A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "h_2"] & B \end{tikzcd}$$

то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] & \\ A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "h_2"] & B \\ & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h_1"] \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

Теорема 10.23. *Если есть два произведения A и B*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

то $C \cong D$.

Доказательство. Пусть у объектов A и B есть два произведения

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

По определению произведения, должны существовать стрелки
$h_1\colon D \to C$ и $h_2\colon C \to D$, делающие коммутативными следующие диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_1"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_2"] &
\end{tikzcd}
$$

Перерисуем эти диаграммы так

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, dotted, "h_1"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, dotted, "h_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

и ещё вот так

$$
\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[u, dotted, "h_1"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, dotted, "h_2"] &
\end{tikzcd}
$$

Из них можно составить коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, "h_1"'] & B \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, "h_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "h_2"'] & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[u, "h_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Уберём лишнее и получим коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, "h_1 \circ h_2" description] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "h_2 \circ h_1" description] &
\end{tikzcd}
$$

По определению произведения, коммутативны следующие диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_1 \circ h_2" description] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_2 \circ h_1" description] &
\end{tikzcd}
$$

(стрелки единственные по определению произведения). Из этого следует, что

$$h_1 \circ h_2 = id_C$$

$$h_2 \circ h_1 = id_D$$

поскольку следующие диаграммы тоже коммутативны.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[uu, "id_C"] \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[uu, "id_D"] \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Другое доказательство. Для данных объектов A и B категории K определим новую категорию K_1, объектами которой являются „вилки“ следующего вида

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Морфизмом между „вилками“

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

по определению будет любая стрелка $h\colon D \to C$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Композицией морфизмов $h_2 \circ h_1$ в K_1 по определению будет их композиция $h_2 \circ h_1$ в категории K. Тут надо посмотреть упражнение 10.22 и понять, почему композиция морфизмов в K_1 является морфизмом в K_1. Тождественным морфизмом для вилки

$$
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

по определению будет id_D.

$$
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "id_D"'] &
\end{tikzcd}
$$

Поскольку композиция и единичные стрелки в K_1 такие же, как в K, любой изоморфизм в K_1 будет изоморфизмом в K. Произведение A и B является терминальным объектом в K_1 (именно это утверждает определение произведения). Но все терминальные объекты изоморфны и изоморфизмы между ними единственно возможные (теорема 8.3). Поэтому существует изоморфизм $h \colon D \to C$, для которого коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "h"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, dotted, "h^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

□

Теорема 10.24. *Если стрелка $f\colon C \to A\times B$ является изоморфизмом, то C является произведением A и B с проекциями $pr_1^{A\times B}\circ f$ и $pr_2^{A\times B}\circ f$.*

Доказательство. Рассмотрим категорию вилок K_1, как при доказательстве предыдущей теоремы. Рассмотрим две вилки

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "pr_1\circ f"'] \arrow[dr, "pr_2\circ f"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Они изоморфны в K_1, поскольку следующие диаграммы коммутативны

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & C \arrow[l, "pr_1\circ f"'] \arrow[r, "pr_2\circ f"] \arrow[u, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "pr_1\circ f"'] \arrow[dr, "pr_2\circ f"] & \\
A & A\times B \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[u, "f^{-1}"'] & B
\end{tikzcd}$$

(это значит, что f и f^{-1} являются морфизмами в K_1). Дальше вспоминаем, что произведение является терминальным объектом в K_1 и объект, изоморфный терминальному, сам является терминальным (теорема 8.11).

□

Другое доказательство (прямое).

Будем доказывать коммутативность следующей диаграммы (на ней видно, как устроены проекции и новая пара)

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "f^{-1} \circ \langle g_1, g_2 \rangle"] &
\end{tikzcd}
$$

Коммутативна следующая диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[u, "f^{-1}"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Добавим кое-что снизу и получим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[u, "f^{-1}"'] & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[u, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle"] &
\end{tikzcd}
$$

Уберём лишнее и получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "f^{-1} \circ \langle g_1, g_2 \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

Осталось доказать единственность. Предположим, что для некоторой стрелки $h\colon D \to C$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Перерисуем её так

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "pr_1 \circ f"'] \arrow[r, "pr_2 \circ f"] & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Надстроим сверху и получим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & C \arrow[l, "pr_1 \circ f"'] \arrow[r, "pr_2 \circ f"] \arrow[u, "f"'] & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Уберём лишнее

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[uu, "f \circ h"'] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Из коммутативности этой диаграммы следует, что

$$f \circ h = \langle g_1, g_2 \rangle$$

поэтому

$$h = f^{-1} \circ \langle g_1, g_2 \rangle$$

□

Замечание 10.25. Произведение в Set тоже определено только с точностью до изоморфизма (с теоретико-категорной точки зрения). Произведением конечных множеств с мощностями m и n будет любое множество мощностью $m \times n$ с подходящими проекциями. Какими именно проекциями – смотрите предыдущую теорему.

Теорема 10.26. *Произведение A и 1 существует всегда, причём* $A \times 1 \cong A$.

Доказательство. В качестве произведения A и 1 работает следующая вилка

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "!_A"] & \\ A & & 1 \end{tikzcd}$$

потому что

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "!_A"] & \\ A & & 1 \\ & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2 = !_D"'] \arrow[uu, dotted, "g_1"] & \end{tikzcd}$$

□

Замечание 10.27. При любом выборе произведения A и 1 изоморфизм $A \times 1 \cong A$ выглядит так:

$$pr_1 \colon A \times 1 \to A$$

$$\langle id_A, !_A \rangle \colon A \to A \times 1$$

Действительно, $!_A \circ pr_1^{A\times 1} = pr_2^{A\times 1}$ (обе эти стрелки из $A \times 1$ в 1), поэтому

$$\langle id_A, !_A \rangle \circ pr_1 = \langle id_A \circ pr_1, !_A \circ pr_1 \rangle = \langle pr_1, pr_2 \rangle = id_{A\times 1}$$

$$pr_1 \circ \langle id_A, !_A \rangle = id_A$$

Упражнение 10.28. Пусть в категории K есть терминальный объект и выбрано некоторое произведение A и 1 для любого $A \in Ob(\mathsf{K})$. Рассмотрим следующий функтор $F \colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$$F(A) = A \times 1$$

$$F(f) = f \times id_1$$

Проверьте, что изоморфизмы из замечания 10.27 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F \to Id_{\mathsf{K}}$$

$$\tau^{-1}\colon Id_{\mathsf{K}} \to F$$

посмотрев на следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A\times 1 \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "f\times id_1"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B\times 1 \arrow[r, "pr_1"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\langle id_A, !_A\rangle"] \arrow[d, "f"'] & A\times 1 \arrow[d, "f\times id_1"] \\
B \arrow[r, "\langle id_B, !_B\rangle"] & B\times 1
\end{tikzcd}$$

Замечание 10.29. В таких случаях обычно говорят „изоморфизмы 10.27 естественны по A“. Это нестрогое выражение подразумевает „некоторые два функтора естественно изоморфны“, причём функторы предлагается угадать.

Замечание 10.30. Изоморфизм $A\times 0 \cong 0$, верный в Set и во всех топосах, в общем случае неверен. Контрпример – категория групп Grp, в которой начальный объект совпадает с терминальным (это группа из одного единичного элемента $\{e\}$), поэтому $A\times 0 \cong A\times 1 \cong A$.

Теорема 10.31. *Если существует произведение A и B, то существует и произведение B и A, причём $A\times B \cong B\times A$.*

Доказательство. В качестве произведения B и A работает следующая вилка

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "pr_2^{A\times B}"'] \arrow[dr, "pr_1^{A\times B}"] & \\
B & & A
\end{tikzcd}$$

потому что

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "pr_2^{A\times B}"'] \arrow[dr, "pr_1^{A\times B}"] & \\
B & & A \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_2, g_1\rangle"] &
\end{tikzcd}$$

□

Замечание 10.32. Изоморфизм $A \times B \cong B \times A$ выглядит так:

$$\langle pr_2, pr_1 \rangle \colon A \times B \to B \times A$$

$$\langle pr_2, pr_1 \rangle \colon B \times A \to A \times B$$

Упражнение 10.33. Проверьте, что эти стрелки обратны друг к другу.

Определение 10.34. Категория называется *категорией с произведениями пар объектов*, если в ней есть произведение любой пары объектов.

Замечание 10.35. На практике обычно предполагается, что для любой пары объектов выбрано некоторое произведение из всех возможных. Строго говоря, в этом случае надо говорить о *категории с выбранными произведениями пар объектов*. При наличии аксиомы выбора разница, конечно, невелика, но иногда приходится работать без аксиомы выбора по чисто техническим причинам.

Упражнение 10.36. Пусть K – категория с выбранными произведениями пар объектов. Рассмотрим следующие функторы $F \colon \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ и $G \colon \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$$F(A, B) = A \times B$$

$$F(f, g) = f \times g$$

$$G(A, B) = B \times A$$

$$G(f, g) = g \times f$$

Проверьте, что изоморфизмы из замечания 10.32 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau \colon F \to G$$

$$\tau^{-1} \colon G \to F$$

посмотрев на следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\langle pr_2, pr_1\rangle"] \arrow[d, "f\times g"'] & B \times A \arrow[d, "g\times f"] \\ C \times D \arrow[r, "\langle pr_2, pr_1\rangle"] & D \times C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \times A \arrow[r, "\langle pr_2, pr_1\rangle"] \arrow[d, "g\times f"'] & A \times B \arrow[d, "f\times g"] \\ D \times C \arrow[r, "\langle pr_2, pr_1\rangle"] & C \times D \end{tikzcd}$$

Замечание 10.37. В таких случаях обычно нестрого говорят „изоморфизмы 10.32 естественны по A и B“.

Определение 10.38. Пусть дано некоторое множество I и некоторое семейство объектов $\{A_i \mid i \in I\}$, где $A_i \in Ob(\mathsf{K})$. *Конусом* будем называть любой объект $C \in Ob(\mathsf{K})$ вместе с произвольным набором стрелок $f_i\colon C \to A_i$, индексированных элементами I. *Морфизмом между конусами* (D, g) и (C, f) будем называть любую стрелку $h\colon D \to C$, делающую коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "f_i"] & \\ & A_i \\ D \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Определение 10.39. *Произведением семейства объектов* $\{A_i \mid i \in I\}$ называется терминальный объект в категории конусов.

Соглашение 10.40. Произведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\prod_{i\in I} A_i$ с проекциями $pr_i\colon \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ и единственной стрелкой $\langle g_i\rangle_{i\in I}$ для любого семейства стрелок $\{g_i\colon D \to A_i \mid i \in I\}$, делающей коммутативными все диаграммы следующего вида

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} A_i \arrow[dr, "pr_i"] & \\
& A_i \\
D \arrow[uu, "\langle g_i\rangle_{i\in I}"] \arrow[ur, "g_i"'] &
\end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Соглашение 10.41. Если множество I конечно (возьмём для ясности $I = \{1, 2, \ldots, n\}$), произведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ с проекциями $pr_i \colon A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_i$ и стрелками $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$, делающими коммутативными соответствующие диаграммы.

Пример 10.42. Произведение трёх объектов определяется следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
& & A \times B \times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dl, "pr_2"] \arrow[dr, "pr_3"] & \\
A & B & & C \\
& & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[ur, "g_3"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2, g_3\rangle"] &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 10.43. В Set, Cat, Grp и категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K – малая, существуют произведения любых множеств объектов (как конечных, так и бесконечных).

Пример 10.44. Произведение пустого семейства объектов – это терминальный объект.

$$\begin{tikzcd}
1 \\
D \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

Пример 10.45. Произведение семейства, состоящего из одного объекта A – это, например, объект A с единственной проекцией $id_A \colon A \to A$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "id_A"'] \\
A & \\
& D \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, dotted, "g"']
\end{tikzcd}$$

Теперь мы докажем, что произведение конечного числа объектов можно строить с помощью произведения пар следующим способом $((\ldots(A_1 \times A_2) \times \ldots) \times A_n)$.

Теорема 10.46. *Если в категории* K *есть терминальный объект и произведение любой пары объектов, то в* K *есть произведение любого конечного семейства объектов.*

Доказательство (по индукции). Пусть уже построено произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Определим $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$ как $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}$ с набором проекций

$$pr_1 = pr_1^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$pr_2 = pr_2^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$\ldots$$

$$pr_n = pr_n^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$pr_{n+1} = pr_2^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

Стрелка $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1} \rangle$ задаётся следующим равенством

$$\langle g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1} \rangle = \langle \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle, g_{n+1} \rangle$$

□

Пример 10.47.

$$
\begin{tikzcd}
 & & A\times B\times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dl, "pr_2"] \arrow[dr, "pr_3"] & \\
A & B & & C \\
 & & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2, g_3\rangle"] \arrow[ur, "g_3"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & & (A\times B)\times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dd, "pr_2"] \\
 & A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & & \\
A & & B & C \\
 & & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[u, "g_2"] \arrow[ur, "g_3"'] \arrow[uul, dotted, bend left, "\langle g_1, g_2\rangle"] \arrow[uuur, dotted, "\langle\langle g_1, g_2\rangle, g_3\rangle"] &
\end{tikzcd}
$$

$$pr_1^{A\times B\times C} = pr_1^{A\times B} \circ pr_1^{(A\times B)\times C}$$

$$pr_2^{A\times B\times C} = pr_2^{A\times B} \circ pr_1^{(A\times B)\times C}$$

$$pr_3^{A\times B\times C} = pr_2^{(A\times B)\times C}$$

$$\langle g_1, g_2, g_3\rangle = \langle\langle g_1, g_2\rangle, g_3\rangle$$

Упражнение 10.48. Проверьте, что эта конструкция действительно даёт произведение трёх объектов A, B, C.

Можно строить произведение конечного числа объектов и таким способом $(A_1 \times (\ldots \times (A_{n-1} \times A_n)\ldots))$. Порядок расстановки скобок неважен в силу следующей теоремы.

Теорема 10.49. *Если существуют оба произведения $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$, то $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$*

Доказательство. Изоморфизмы выглядят так

$$\langle pr_1 \circ pr_1, \langle pr_2 \circ pr_1, pr_2\rangle\rangle \colon (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$$

$$\langle\langle pr_1, pr_1 \circ pr_2\rangle, pr_2 \circ pr_2\rangle \colon A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$$

$\square$

Упражнение 10.50. Можете показать, что эти стрелки обратны друг к другу.

Замечание 10.51. Проще показать, что $A \times (B \times C)$ с подходящими проекциями тоже является произведением трёх объектов A, B, C, а все произведения изоморфны, как терминальные объекты в соответствующей категории конусов.

Упражнение 10.52. (Для трудолюбивых людей). Пусть K – категория с выбранными произведениями пар объектов. Рассмотрим следующие функторы $F\colon \mathsf{K} \times \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ и $G\colon \mathsf{K} \times \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$$F(A, B, C) = (A \times B) \times C$$

$$F(f, g, h) = (f \times g) \times h$$

$$G(A, B, C) = A \times (B \times C)$$

$$G(f, g, h) = f \times (g \times h)$$

Проверьте, что изоморфизмы из доказательства теоремы 10.49 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F \to G$$

$$\tau^{-1}\colon G \to F$$

Определение 10.53. Категория называется *категорией с конечными произведениями*, если в ней есть терминальный объект и произведение любой пары объектов. Равносильное условие: в категории есть произведение любого конечного семейства объектов.

Замечание 10.54. На практике обычно предполагается, что для любого конечного семейства объектов выбрано некоторое произведение из всех возможных. Строго говоря, в этом случае надо говорить о *категории с выбранными конечными произведениями.*

Пример 10.55. Пусть K – локально малая категория, в которой есть произведение некоторой пары объектов A и B. Верны следующие изоморфизмы

$$\mathsf{K}(D, A \times B) \cong \mathsf{K}(D, A) \times \mathsf{K}(D, B) \quad \text{для любого } D \in Ob(\mathsf{K})$$

(это изоморфизмы в Set). Каждой стрелке $h\colon D \to A \times B$ соответствует пара стрелок $pr_1 \circ h\colon D \to A$ и $pr_2 \circ h\colon D \to B$, а каждой паре стрелок $g_1\colon D \to A$ и $g_2\colon D \to B$ соответствует стрелка $\langle g_1, g_2 \rangle\colon D \to A \times B$.

Определение 10.56. Пусть K – локально малая категория. Определим функтор $Hom_{\mathsf{K}}\colon \mathsf{K}^{op} \times \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ следующим образом

$$Hom_{\mathsf{K}}(A, B) = \mathsf{K}(A, B)$$

$$Hom_{\mathsf{K}}(f_1, f_2)(h) = f_2 \circ h \circ f_1$$

для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}), f_1 \in \mathsf{K}(A', A), f_2 \in \mathsf{K}(B, B'), h \in \mathsf{K}(A, B)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] & B \arrow[d, "f_2"] \\ A' \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "f_2 \circ h \circ f_1"'] & B' \end{tikzcd}$$

Заметим, что $Hom_{\mathsf{K}}(f_1, f_2)\colon \mathsf{K}(A, B) \to \mathsf{K}(A', B')$.

Упражнение 10.57. Пусть K – локально малая категория, в которой есть произведение некоторой пары объектов A и B. Рассмотрим следующие функторы $F\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$ и $G\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$

$$F(D) = \mathsf{K}(D, A \times B)$$

$$F(f)(h) = h \circ f$$

$$G(D) = \mathsf{K}(D, A) \times \mathsf{K}(D, B)$$

$$G(f)(g_1, g_2) = (g_1 \circ f, g_2 \circ f)$$

для любых $D \in Ob(\mathsf{K}), f \in \mathsf{K}(C, D)$,
$h \in \mathsf{K}(D, A \times B), g_1 \in \mathsf{K}(D, A), g_2 \in \mathsf{K}(D, B)$
Проверьте, что изоморфизмы из примера 10.55 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F \to G$$

$$\tau^{-1}\colon G \to F$$

(Одна из соответствующих коммутативных диаграмм нарисована ниже, $\circ f$ означает умножение справа на f)

$$\begin{tikzcd} D & \mathsf{K}(D, A \times B) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\circ f"] & \mathsf{K}(D, A) \times \mathsf{K}(D, B) \arrow[d, "(\circ f) \times (\circ f)"] \\ C \arrow[u, "f"] & \mathsf{K}(C, A \times B) \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{K}(C, A) \times \mathsf{K}(C, B) \end{tikzcd}$$

Замечание 10.58. О терминологии. По-английски стрелку вида $f \times g$ называют “product map”, а стрелку вида $\langle f, g\rangle$ называют как попало или никак. По-русски в некоторых книгах стрелку $\langle f, g\rangle$ явно неудачно называют „произведением“, для стрелки $f \times g$ в этом случае приходится придумывать странные названия. В принципе, в силу примера 10.55 стрелку вида $\langle f, g\rangle$ можно называть просто „упорядоченной парой“, хотя она и отличается в Set от упорядоченной пары по Куратовскому.

Глава 11

Копроизведения

Копроизведение – это произведение в двойственной категории.

Определение 11.1. *Копроизведение* двух объектов A и B в категории K задаётся следующим набором данных:

1. Объектом $C \in Ob(\mathsf{K})$.
2. Упорядоченной парой стрелок $f_1 \colon A \to C$ и $f_2 \colon B \to C$, эти стрелки называются *первой копроекцией* и *второй копроекцией*.

При этом требуется, чтобы для любого объекта $D \in Ob(\mathsf{K})$ и любой упорядоченной пары стрелок $g_1 \colon A \to D$ и $g_2 \colon B \to D$ существовала единственная стрелка из C в D, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, dotted] & \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Упражнение 11.2. Копроизведения определены с точностью до изоморфизма.

Соглашение 11.3. Если предполагается, что для двух объектов A и B выбрано некоторое копроизведение (из всех возможных), объект копроизведения будем обозначать $A+B$, а копроекции k_1^{A+B} и k_2^{A+B}. Если

A и B ясны из контекста, будем обозначать копроекции просто k_1 и k_2. Будем обозначать $[g_1, g_2]$ единственную стрелку, делающую коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A+B \arrow[dd, dotted, "{[g_1,g_2]}"] & \\
A \arrow[ur, "k_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & B \arrow[ul, "k_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Мы видим, что

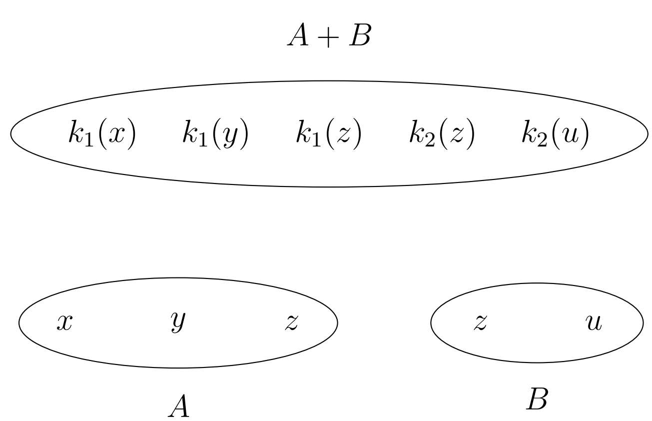
$$[g_1, g_2] \circ k_1 = g_1$$

$$[g_1, g_2] \circ k_2 = g_2$$

$f \circ k_1 = g_1 \wedge f \circ k_2 = g_2$ влечёт $f = [g_1, g_2]$
для любой стрелки $f \colon A + B \to D$.

Пример 11.4. В Set копроизведение множеств A и B – это их дизъюнктное объединение $A + B$, то есть объединение непересекающихся изоморфных копий A и B (если A и B не пересекаются, можно взять просто объединение). Стрелки $k_1 \colon A \to A + B$ и $k_2 \colon B \to A + B$ – это вложения A в $A + B$ и B в $A + B$ соответственно.

Пример 11.5.



Упражнение 11.6. Разберитесь, как устроена стрелка $[g_1, g_2]$ в Set. Она определяется некоторым „разбором случаев“.

Пример 11.7. В категории предпорядка копроизведение $A + B$ – это объединение $A \sqcup B$, то есть наименьший (относительно $\lesssim$) объект C со свойством $A \lesssim C \wedge B \lesssim C$.

Упражнение 11.8. В категории Cat копроизведение $\mathsf{K}_1 + \mathsf{K}_2$ – это дизъюнктное объединение изоморфных копий категорий K_1 и K_2 со множеством объектов $Ob(\mathsf{K}_1) + Ob(\mathsf{K}_2)$ и множеством морфизмов $Mor(\mathsf{K}_1) + Mor(\mathsf{K}_2)$. Если картинку 9.2 воспринимать как единую категорию, то это будет $\mathsf{K} + \mathsf{K}^{op}$, надо только переименовать объекты и стрелки, чтобы они не повторялись два раза.

Замечание 11.9. В категории групп копроизведение существует, но устроено сложнее, чем можно подумать (и я не хочу его описывать). Если взять просто дизъюнктное объединение, как умножать элементы из разных частей?

Упражнение 11.10. $f \circ [g_1, g_2] = [f \circ g_1, f \circ g_2]$
если обе части равенства определены.

Упражнение 11.11. $[k_1^{A+B}, k_2^{A+B}] = id_{A+B}$

Упражнение 11.12. $[f \circ k_1, f \circ k_2] = f$
если левая часть равенства определена.

Определение 11.13. Для двух стрелок $f\colon C \to A$ и $g\colon D \to B$ их *копроизведение* $f + g\colon C + D \to A + B$ определяется следующим равенством

$$f + g = [k_1 \circ f, k_2 \circ g]$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "k_1"'] & C \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A + B & C + D \arrow[l, dotted, "f+g"'] \\
B \arrow[u, "k_2"] & D \arrow[l, "g"] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.14. $id_A + id_B = id_{A+B}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "k_1"'] & A \arrow[l, "id_A"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A + B & A + B \arrow[l, dotted, "id_{A+B}"'] \\
B \arrow[u, "k_2"] & B \arrow[l, "id_B"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.15. $(f_1 + f_2) \circ (g_1 + g_2) = (f_1 \circ g_1) + (f_2 \circ g_2)$
если обе части равенства определены.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "k_1"'] & B_1 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "k_1"'] & C_1 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \arrow[l, dotted, "f_1 + f_2"'] & C_1 + C_2 \arrow[l, dotted, "g_1 + g_2"'] \\
A_2 \arrow[u, "k_2"] & B_2 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[u, "k_2"] & C_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.16. $[f_1, f_2] \circ (g_1 + g_2) = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$
если обе части равенства определены.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[dl, bend right, "f_1"'] \arrow[d, "k_1"] & C_1 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A & B_1 + B_2 \arrow[l, dotted, "{[f_1, f_2]}"'] & C_1 + C_2 \arrow[l, dotted, "g_1 + g_2"'] \\
 & B_2 \arrow[ul, bend left, "f_2"] \arrow[u, "k_1"'] & C_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Пример 11.17. В топосах вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ копроизведением функторов F и G является функтор $F + G$, определённый следующими равенствами:

$$(F + G)(A) = F(A) + G(A)$$

$$(F + G)(f) = F(f) + G(f)$$

Копроекциями $k_1\colon F \to F+G$ и $k_2\colon G \to F+G$ будут естественные преобразования с компонентами:

$$k_1\colon F(A) \to F(A)+G(A)$$

$$k_2\colon G(A) \to F(A)+G(A)$$

Для естественных преобразований $\tau\colon F \to H$ и $\sigma\colon G \to H$ стрелкой $[\tau,\sigma]$ будет естественное преобразование с компонентами

$$[\tau_A,\sigma_A]\colon F(A)+G(A) \to H(A)$$

Упражнение 11.18. Проверьте детали.

Упражнение 11.19. Копроизведение A и 0 существует всегда, причём $A+0 \cong A$.

Упражнение 11.20. Если существует копроизведение A и B, то существует и копроизведение B и A, причём $A+B \cong B+A$.

Определение 11.21. Пусть дано некоторое множество I и некоторое семейство объектов $\{A_i \mid i \in I\}$, где $A_i \in Ob(\mathsf{K})$. *Коконусом* будем называть любой объект $C \in Ob(\mathsf{K})$ вместе с произвольным набором стрелок $f_i\colon A_i \to C$, индексированных элементами I. *Морфизмом между коконусами* (C,f) и (D,g) будем называть любую стрелку $h\colon C \to D$, делающую коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dd, "h"'] & \\
& A_i \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[dl, "g_i"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Определение 11.22. *Копроизведением семейства объектов* $\{A_i \mid i \in I\}$ называется начальный объект в категории коконусов.

Соглашение 11.23. Копроизведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\sum_{i \in I} A_i$ с копроекциями $k_i \colon A_i \to \sum_{i \in I}$ и единственной стрелкой $[g_i]_{i \in I}$ для любого семейства стрелок $\{g_i \colon A_i \to D \mid i \in I\}$, делающей коммутативными все диаграммы следующего вида

$$\begin{tikzcd}
\sum_i A_i \arrow[dd, "{[g_i]_{i \in I}}"'] & \\
& A_i \arrow[ul, "k_i"'] \arrow[dl, "g_i"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Соглашение 11.24. Если множество I конечно (возьмём для ясности $I = \{1, 2, \ldots, n\}$), копроизведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ с копроекциями $k_i \colon A_i \to A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ и стрелками $[g_1, g_2, \ldots, g_n]$, делающими коммутативными соответствующие диаграммы.

Пример 11.25. Копроизведение трёх объектов определяется следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
& & A + B + C \arrow[dd, dotted, "{[g_1, g_2, g_3]}"] & \\
A \arrow[urr, "k_1"] \arrow[drr, "g_1"'] & B \arrow[ur, "k_2"'] \arrow[dr, "g_2"] & & C \arrow[ul, "k_3"'] \arrow[dl, "g_3"] \\
& & D &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.26. В Set, Cat и категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K – малая, существуют копроизведения любых множеств объектов (как конечных, так и бесконечных).

Пример 11.27. Копроизведение пустого семейства объектов – это начальный объект.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, dotted] \\ D \end{tikzcd}$$

Пример 11.28. Копроизведение семейства, состоящего из одного объекта A – это, например, объект A с единственной копроекцией $id_A \colon A \to A$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, dotted, "g"] \\ A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & D \end{tikzcd}$$

Упражнение 11.29. Если в категории K есть начальный объект и копроизведение любой пары объектов, то в K есть копроизведение любого конечного семейства объектов.

Упражнение 11.30. Если существуют оба копроизведения $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$, то $(A+B)+C \cong A+(B+C)$

Замечание 11.31. Изоморфизм $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$, верный в Set и во всех топосах, в общем случае неверен. Контрпример – категория Set^{op}, поскольку в Set неверен двойственный изоморфизм $A + (B \times C) \cong (A + B) \times (A + C)$. Можно найти гораздо „меньший“ контрпример среди упорядоченных множеств (любая не дистрибутивная решётка).

Пример 11.32. Пусть K – локально малая категория, в которой есть копроизведение некоторой пары объектов A и B. Тогда

$$\mathsf{K}(A+B, D) \cong \mathsf{K}(A, D) \times \mathsf{K}(B, D) \quad \text{для любого } D \in Ob(\mathsf{K}).$$

(это изоморфизмы в Set). Каждой стрелке $h\colon A+B \to D$ соответствует пара стрелок $h \circ k_1\colon A \to D$ и $h \circ k_2\colon B \to D$, а каждой паре стрелок $g_1\colon A \to D$ и $g_2\colon B \to D$ соответствует стрелка $[g_1, g_2]\colon A+B \to D$.

Упражнение 11.33. Пусть K – локально малая категория, в которой есть копроизведение некоторой пары объектов A и B. Рассмотрим следующие функторы $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ и $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$

$$F(D) = \mathsf{K}(A+B, D)$$

$$F(f)(h) = f \circ h$$

$$G(D) = \mathsf{K}(A, D) \times \mathsf{K}(B, D)$$

$$G(f)(g_1, g_2) = (f \circ g_1, f \circ g_2)$$

для любых $D \in Ob(\mathsf{K}), f \in \mathsf{K}(D, C)$,
$h \in \mathsf{K}(A+B, D), g_1 \in \mathsf{K}(A, D), g_2 \in \mathsf{K}(B, D)$
Проверьте, что изоморфизмы из примера 11.32 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F \to G$$

$$\tau^{-1}\colon G \to F$$

(Одна из соответствующих коммутативных диаграмм нарисована ниже, $f\circ$ означает умножение слева на f)

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "f"] & \mathsf{K}(A+B, D) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f\circ"] & \mathsf{K}(A, D) \times \mathsf{K}(B, D) \arrow[d, "(f\circ)\times(f\circ)"] \\
C & \mathsf{K}(A+B, C) \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{K}(A, C) \times \mathsf{K}(B, C)
\end{tikzcd}$$

Глава 12

Сопряжённые функторы

Если воспринимать категории как „обобщённые упорядоченные множества“, а функторы как „обобщённые монотонные отображения“, то сопряжённость – это „обобщённое соответствие Галуа“. Это пояснение для тех, кто знает, что такое соответствие Галуа, а кто не знает, может о нём не беспокоиться.

Определение 12.1. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\mathsf{K}_1 \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_2$$

Чтобы удобнее различать, будем обозначать объекты категории K_1 буквами A, B, C, а объекты категории K_2 буквами X, Y, Z. Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ есть взаимно однозначное соответствие между стрелками вида $g\colon A \to G(X)$ и стрелками вида $f\colon F(A) \to X$, в некотором смысле „естественное“ по A и X.
Говоря строже, для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ есть отображения

$$\Phi_{A,X}\colon \mathsf{K}_1(A, G(X)) \to \mathsf{K}_2(F(A), X)$$

$$\Gamma_{A,X}\colon \mathsf{K}_2(F(A), X) \to \mathsf{K}_1(A, G(X))$$

(обычно мы будем писать просто Φ и Γ, без индексов), взаимно обратные и естественные в смысле следующих равенств

- $\Gamma(\Phi(g)) = g$
- $\Phi(\Gamma(f)) = f$
- $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$
- $\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$

Функтор F в этом случае называется *левым сопряжённым*, а функтор G *правым сопряжённым*. Говорят также, что F *сопряжён слева* к G, а G *сопряжён справа* к F.

Замечание 12.2. Можно попытаться проиллюстрировать условия естественности следующими неформальными картинками. Если стрелки g и f соответствуют друг другу при сопряжении

$$\begin{array}{ccc} & A \xrightarrow{g} G(X) & \\ \Phi_{A,X}\big\downarrow & & \big\uparrow\Gamma_{A,X} \\ & F(A) \xrightarrow{f} X & \end{array}$$

то соответствуют друг другу также стрелки $g \circ h$ и $f \circ F(h)$

$$\begin{array}{ccc} & B \xrightarrow{h} A \xrightarrow{g} G(X) & \\ \Phi_{B,X}\big\downarrow & & \big\uparrow\Gamma_{B,X} \\ & F(B) \xrightarrow{F(h)} F(A) \xrightarrow{f} X & \end{array}$$

и стрелки $G(h) \circ g$ и $h \circ f$

$$\begin{array}{ccc} & A \xrightarrow{g} G(X) \xrightarrow{G(h)} G(Y) & \\ \Phi_{A,Y}\big\downarrow & & \big\uparrow\Gamma_{A,Y} \\ & F(A) \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h} Y & \end{array}$$

Теорема 12.3. *Для сопряжённых функторов верны следующие равенства*

- $\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$
- $\Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$

Доказательство. Чтобы доказать равенство

$$\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$$

применим к обеим частям Γ и получим равносильное равенство (поскольку Γ взаимно однозначно)

$$G(h) \circ g = \Gamma(h \circ \Phi(g))$$

которое действительно верно, потому что

$$\Gamma(h \circ \Phi(g)) = G(h) \circ \Gamma(\Phi(g)) = G(h) \circ g$$

Чтобы доказать равенство

$$\Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$$

применим к обеим частям Φ и получим равносильное равенство (поскольку Φ взаимно однозначно)

$$f \circ F(h) = \Phi(\Gamma(f) \circ h)$$

которое действительно верно, потому что

$$\Phi(\Gamma(f) \circ h) = \Phi(\Gamma(f)) \circ F(h) = f \circ F(h)$$

□

Пример 12.4. Пусть функторы F и G взаимно обратные, то есть

$$G \circ F = Id_{\mathsf{K}_1}$$

$$F \circ G = Id_{\mathsf{K}_2}$$

В этом случае $F \dashv G$. Стрелке $f\colon F(A) \to X$ соответствует стрелка $G(f)\colon A \to G(X)$, а стрелке g соответствует стрелка $F(g)$. В этом случае также $G \dashv F$, поскольку взаимная обратность – отношение симметричное.

Пример 12.5. Пусть K_1 и K_2 – частично упорядоченные множества, а F и G – монотонные отображения. В этом случае сопряжённость $F \dashv G$ означает выполнение следующего условия

$$F(A) \leqslant X \Leftrightarrow A \leqslant G(X)$$

Это один из вариантов определения соответствия Галуа.

Пример 12.6. Пусть M и N – некоторые множества, а $f\colon M \to N$ некоторая функция. Пусть $\mathcal{P}(M)$ и $\mathcal{P}(N)$ – множества подмножеств M и N, упорядоченные по включению. Рассмотрим две монотонные функции

$$\mathcal{P}(M) \underset{f^*}{\overset{\Sigma_f}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(N)$$

Σ_f переводит любое подмножество M в его образ при отображении f, а f^* переводит любое подмножество N в его прообраз относительно f. Если $A \subseteq M$ и $X \subseteq N$, то

$$\Sigma_f(A) \subseteq X \Leftrightarrow A \subseteq f^*(X)$$

(образ A является подмножеством X $\Leftrightarrow$ A является подмножеством прообраза X), поэтому $\Sigma_f \dashv f^*$

Замечание 12.7. Обозначения Σ_f и f^*могут показаться странными, но это некоторый стандарт в категорной логике.

Пример 12.8. Рассмотрим категорию Cat и категорию графов Grph. Каждой малой категории можно сопоставить граф, вершинами которого будут объекты категории, а рёбрами – морфизмы. Тем самым задан „стирающий“ функтор $G\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{Grph}$. Этот функтор строгий (говорят, что Cat является *конкретной над* Grph). Он как бы забывает, как делать композицию и какие стрелки являются единичными, оставляя только *dom* и *cod*. К функтору G есть левый сопряжённый $F\colon \mathsf{Grph} \to \mathsf{Cat}$, который по графу A выдаёт категорию $F(A)$, свободно порождённую этим графом. Объектами категории будут вершины графа, а морфизмами из вершины V в вершину V' – конечные последовательности рёбер вида $(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1)$, где $n \geqslant 1$ и рёбра расположены цепочкой

$V \xrightarrow{r_1} V_1 \xrightarrow{r_2} \ldots \xrightarrow{r_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{r_n} V'$ (допускается, чтобы некоторые из вершин цепочки совпадали, цепочка может „петлять“). Каждую такую последовательность можно воспринимать как „формальную композицию“ $r_n \circ r_{n-1} \circ \ldots \circ r_1$. Кроме того, для каждой вершины V формально добавляется новая стрелка id_V. Удобно использовать в качестве всех id_V последовательность длины ноль (и работать с ней как с протоморфизмом), в этом случае композиция в категории $F(A)$ будет просто приписыванием последовательностей друг к другу. Если A – граф и X – малая категория, то каждый морфизм графов $g \in \mathsf{Grph}(A, G(X))$ взаимно однозначно определяет функтор $f \in \mathsf{Cat}(F(A), X)$, действующий на объектах и стрелках категории $F(A)$ так

$$f(V) = g(V)$$

$$f(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1) = g(r_n) \circ g(r_{n-1}) \circ \ldots \circ g(r_1)$$

$$f(id_V) = id_{g(V)}$$

Упражнение 12.9. Пусть дан набор категорий и функторов, расположенных так

$$\mathsf{K}_1 \underset{G_1}{\overset{F_1}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_2 \underset{G_2}{\overset{F_2}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_3$$

Пусть $F_1 \dashv G_1$ и $F_2 \dashv G_2$. Проверьте, что $F_2 \circ F_1 \dashv G_1 \circ G_2$

Упражнение 12.10. Если $F \dashv G$, то $G^{op} \dashv F^{op}$

$$\mathsf{K}_1 \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_2$$

$$\mathsf{K}_2^{op} \underset{F^{op}}{\overset{G^{op}}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_1^{op}$$

Это упражнение позволяет нам применять к сопряжённости принцип двойственности. Любому верному утверждению о левых сопряжённых функторах соответствует двойственное верное утверждение о правых сопряжённых функторах, и наоборот. Мы уже видели пример такой двойственности при доказательстве теоремы 12.3 (где второе равенство двойственно первому).

Определение 12.11. Положим по определению

- $\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$
- $\varepsilon_X = \Phi(id_{G(X)})$

Заметим, что

$$\eta_A \colon A \to G(F(A))$$

$$\varepsilon_X \colon F(G(X)) \to X$$

Упражнение 12.12. Для сопряжённых функторов

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Grph} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{Cat} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

из примера 12.8 стрелка $\eta_A \colon A \to G(F(A))$ является вложением графа A в граф $G(F(A))$.

Теорема 12.13. *Верны следующие равенства*

- $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$
- $\Phi(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$

для любых $f \colon F(A) \to X$ *и* $g \colon A \to G(X)$

Доказательство.

$$\Gamma(f) = \Gamma(f \circ id_{F(A)}) = G(f) \circ \Gamma(id_{F(A)}) = G(f) \circ \eta_A$$

$$\Phi(g) = \Phi(id_{G(X)} \circ g) = \Phi(id_{G(X)}) \circ F(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$$

□

Теорема 12.14. *Стрелки* $\eta_A \colon A \to G(F(A))$ *и* $\varepsilon_X \colon F(G(X)) \to X$ *являются компонентами естественных преобразований.*

Доказательство. Разберём случай η. Надо доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(h))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) \end{tikzcd}$$

для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $h\colon A \to B$. Равенство

$$\eta_B \circ h = G(F(h)) \circ \eta_A$$

в силу предыдущей теоремы равносильно

$$\eta_B \circ h = \Gamma(F(h))$$

И это действительно правда, потому что

$$\eta_B \circ h = \Gamma(id_{F(B)}) \circ h = \Gamma(id_{F(B)} \circ F(h)) = \Gamma(F(h))$$

(второе равенство по теореме 12.3).
□
В случае ε надо доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(G(X)) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "F(G(h))"'] & X \arrow[d, "h"] \\ F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

для любых $X, Y \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $h\colon X \to Y$. Доказательство совершенно симметрично предыдущему (принцип двойственности).
□

Определение 12.15. *Единицей сопряжения* будем называть естественное преобразование $\eta\colon Id_{\mathsf{K}_1} \to G \circ F$ с компонентами $\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$. *Коединицей сопряжения* будем называть естественное преобразование $\varepsilon\colon F \circ G \to Id_{\mathsf{K}_2}$ с компонентами $\varepsilon_X = \Phi(id_{G(X)})$.

Теорема 12.16. *Пусть $F \dashv G$. Тогда коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\ & G(X) & & X \end{tikzcd}$$

для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $g\colon A \to G(X)$. Это значит, для любой стрелки $g\colon A \to G(X)$ есть ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to X$ такая, что $g = G(f) \circ \eta_A$.

Доказательство. Должно быть

$$f = \Phi(g)$$

потому что

$$g = G(f) \circ \eta_A = \Gamma(f)$$

(второе равенство по теореме 12.13).
□

По принципу двойственности немедленно получаем такой результат.

Теорема 12.17. *Пусть $F \dashv G$. Тогда коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "F(g)"] & & A \arrow[d, dotted, "g"] \\ X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & & G(X) \end{tikzcd}$$

для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $f\colon F(A) \to X$. Это значит, для любой стрелки $f\colon F(A) \to X$ есть ровно одна стрелка $g\colon A \to G(X)$ такая, что $f = \varepsilon_X \circ F(g)$.

Есть несколько определений сопряжённости (равносильных исходному), которые используют η или ε в качестве основных понятий.

Определение 12.18. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть естественное преобразование $\eta\colon Id_{\mathsf{K}_1} \to G \circ F$ такое, что для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $g\colon A \to G(X)$ существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to X$ со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

Замечание 12.19. Если единственную стрелку f обозначать $\Phi(g)$, диаграмма примет вид

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(\Phi(g))"] & F(A) \arrow[d, dotted, "\Phi(g)"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

Теорема 12.20. *Определение 12.18 равносильно исходному определению сопряжённости (определению 12.1).*

Доказательство. Из определения 12.1 следует определение 12.18 в силу теорем 12.14 и 12.16. В обратную сторону, пусть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(\Phi(g))"] & F(A) \arrow[d, dotted, "\Phi(g)"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

Положим по определению $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$ и докажем равенства

- $\Gamma(\Phi(g)) = g$

- $\Phi(\Gamma(f)) = f$
- $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$
- $\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$

Первое равенство непосредственно видно по диаграмме, поскольку

$$\Gamma(\Phi(g)) = G(\Phi(g)) \circ \eta_A = g$$

Четвёртое равенство доказывается так

$$\Gamma(h \circ f) = G(h \circ f) \circ \eta_A = G(h) \circ G(f) \circ \eta_A = G(h) \circ \Gamma(f)$$

Третье равенство доказывается сравнением диаграммы

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "g \circ h"'] & G(F(B)) \arrow[d, dotted, "G(\Phi(g \circ h))"] & F(B) \arrow[d, dotted, "\Phi(g \circ h)"] \\
 & G(X) & X
\end{tikzcd}$$

с диаграммой

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "h"'] & G(F(B)) \arrow[d, "G(F(h))"] & F(B) \arrow[d, "F(h)"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(\Phi(g))"] & F(A) \arrow[d, "\Phi(g)"] \\
 & G(X) & X
\end{tikzcd}$$

Наконец, чтобы доказать второе равенство, для заданной стрелки f возьмём в качестве g стрелку $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$ и сравним коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "G(f) \circ \eta_A"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, "f"] \\
 & G(X) & X
\end{tikzcd}$$

с диаграммой

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "G(f)\circ\eta_A"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(\Phi(G(f)\circ\eta_A))"] \\ & G(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, dotted, "\Phi(G(f)\circ\eta_A)"] \\ X \end{tikzcd}$$

□

Упражнение 12.21. Пусть Grp – категория групп. Рассмотрим стирающий функтор $G\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$, выдающий по каждой группе её множество-носитель, а также функтор $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Grp}$, выдающий по множеству A свободную группу со множеством образующих A.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{Grp} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Покажите, что $F \dashv G$, если в качестве стрелки $\eta_A\colon A \to G(F(A))$ брать вложение множества образующих A во множество всех элементов свободной группы $F(A)$.

Чтобы задать сопряжённость, не обязательно предполагать заранее, что F является функтором, достаточно знать его действие на объектах.

Теорема 12.22. *Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также функтор $G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$ и отображение $F\colon Ob(\mathsf{K}_1) \to Ob(\mathsf{K}_2)$. Пусть для каждого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ задана стрелка $\eta_A\colon A \to G(F(A))$ такая, что что для любого $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $g\colon A \to G(X)$ существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to X$ со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] \\ & G(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\ X \end{tikzcd}$$

Тогда есть ровно один способ определить действие F на стрелках, при котором F становится функтором, а набор стрелок η_A – естественным преобразованием.

Доказательство. Чтобы η было естественным преобразованием, должна быть коммутативна следующая диаграмма для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $h\colon A \to B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(h))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) \end{tikzcd}$$

Но существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to F(B)$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) & F(B) \end{tikzcd}$$

Чтобы это было яснее, перерисуем её так

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta_B \circ h"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\ & G(F(B)) & F(B) \end{tikzcd}$$

Эту единственную стрелку f и возьмём в качестве $F(h)$. Свойства функтора

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

$$F(h_2 \circ h_1) = F(h_2) \circ F(h_1)$$

следуют из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "id_A"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(id_{F(A)})"] & F(A) \arrow[d, dotted, "id_{F(A)}"] \\ A \arrow[r, "\eta_A"] & G(F(A)) & F(A) \end{tikzcd}$$

и диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h_1"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f_1)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f_1"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "h_2"'] & G(F(B)) \arrow[d, dotted, "G(f_2)"] & F(B) \arrow[d, dotted, "f_2"] \\
C \arrow[r, "\eta_C"] & G(F(C)) & F(C)
\end{tikzcd}
$$

□

Ещё одно определение сопряжённости использует ε в качестве основного понятия.

Определение 12.23. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть естественное преобразование $\varepsilon \colon F \circ G \to Id_{\mathsf{K}_2}$ такое, что для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $f \colon F(A) \to X$ существует ровно одна стрелка $g \colon A \to G(X)$ со свойством $f = \varepsilon_X \circ F(g)$

$$
\begin{tikzcd}
 & F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "F(g)"] & A \arrow[d, dotted, "g"] \\
X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & G(X)
\end{tikzcd}
$$

Замечание 12.24. Если единственную стрелку g обозначать $\Gamma(f)$, диаграмма примет вид

$$
\begin{tikzcd}
 & F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "F(\Gamma(f))"] & A \arrow[d, dotted, "\Gamma(f)"] \\
X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & G(X)
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 12.25. Проверьте, что определение 12.23 равносильно определению 12.1 (примените принцип двойственности).

Чтобы задать сопряжённость, не обязательно предполагать заранее, что G является функтором, достаточно знать его действие на объектах.

Теорема 12.26. *Пусть даны две категории* K_1 *и* K_2*, а также функтор* $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ *и отображение* $G\colon Ob(\mathsf{K}_2) \to Ob(\mathsf{K}_1)$*. Пусть для каждого* $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ *задана стрелка* $\varepsilon_X\colon F(G(X)) \to X$ *такая, что для любого* $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ *и любой стрелки* $f\colon F(A) \to X$ *существует ровно одна стрелка* $g\colon A \to G(X)$ *со свойством* $f = \varepsilon_X \circ F(g)$

$$\begin{tikzcd}
 & F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "F(g)"] & A \arrow[d, dotted, "g"] \\
X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

Тогда есть ровно один способ определить действие G *на стрелках, при котором* G *становится функтором, а набор стрелок* ε_X *– естественным преобразованием.*

Доказательство. Применяем принцип двойственности к теореме 12.22. □

Определение 12.27. Пусть K – категория с произведениями пар объектов. *Экспонентой* объектов A и B называется объект B^A (определённый с точностью до изоморфизма) вместе со стрелкой $ev_{A,B}\colon B^A \times A \to B$ такой, что для любых $C \in Ob(\mathsf{K})$ и $f\colon C \times A \to B$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "g \times id_A"] & C \arrow[d, dotted, "g"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev_{A,B}"] & B^A
\end{tikzcd}$$

Это значит, что есть единственная стрелка $g\colon C \to B^A$ такая, что $f = ev_{A,B} \circ (g \times id_A)$. Стрелку $ev_{A,B}$ часто называют *отображением вычисления*, нижние индексы при ней не пишут, если они ясны из контекста.

Замечание 12.28. Единственную стрелку g в этом случае традиционно обозначают $\Lambda(f)$

$$\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\Lambda(f) \times id_A"] & C \arrow[d, dotted, "\Lambda(f)"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev_{A,B}"] & B^A
\end{tikzcd}$$

Пример 12.29. В Set объект B^A – это множество всех функций из A в B, а ev и $\Lambda(f)$ определяются следующими равенствами

$$ev(h, a) = h(a)$$

$$\Lambda(f)(c)(a) = f(c, a)$$

где h – элемент B^A (то есть, функция из A в B), f – функция из $C \times A$ в B, $a \in A$, $c \in C$.

Определение 12.30. Категория называется *декартово замкнутой*, если в ней есть терминальный объект и для любой пары объектов существуют произведение и экспонента. В дальнейшем, говоря о какой-либо декартово замкнутой категории, мы всегда будем предполагать, что в ней выбраны некоторое произведение и некоторая экспонента (из всех возможных) для любой пары объектов.

Упражнение 12.31. Пусть дана декартово замкнутая категория K и некоторый объект $A \in Ob(\mathsf{K})$. Определим два функтора $F \colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ и $G \colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$$F(C) = C \times A$$

$$F(h) = h \times id_A$$

$$G(B) = B^A$$

$$G(h) = \Lambda(h \circ ev)$$

Покажите, что $F \dashv G$.

Замечание 12.32. Для краткости можно обозначать эти функторы $(-) \times A$ и $(-)^A$.

Упражнение 12.33. Покажите, что элементы экспоненты (то есть, стрелки вида $g\colon 1 \to B^A$) взаимно однозначно соответствуют стрелкам из A в B.

Упражнение 12.34. Cat является декартово замкнутой категорией (мы уже строили экспоненты в Cat под названием „категории функторов“).

Упражнение 12.35. Категория всех частично упорядоченных множеств и их монотонных отображений является декартово замкнутой.

Замечание 12.36. Все категории вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K малая, являются декартово замкнутыми, но построить в них экспоненту мы в данный момент не сможем, построим позже.

Теорема 12.37. *Правые сопряжённые функторы сохраняют терминальные объекты. Точнее, если $F \dashv G$, то $G(1)$ является терминальным объектом.*

Доказательство. Надо доказать, что для любого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ существует единственная стрелка из A в $G(1)$. Это стрелка

$$A \xrightarrow{\Gamma(!_{F(A)})} G(1)$$

соответствующая при сопряжении единственной стрелке

$$F(A) \xrightarrow{!_{F(A)}} 1$$

□

Теорема 12.38. *Правые сопряжённые функторы сохраняют произведения пар. Точнее, если $F \dashv G$ и существует произведение $X \times Y$ с проекциями pr_1 и pr_2, то $G(X \times Y)$ с проекциями $G(pr_1)$ и $G(pr_2)$ является произведением $G(X)$ и $G(Y)$.*

Доказательство. Необходимо доказать коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & G(X \times Y) \arrow[dl, "G(pr_1)"'] \arrow[dr, "G(pr_2)"] & \\
G(X) & & G(Y) \\
 & A \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

В качестве единственной стрелки возьмём $\Gamma(\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle)$

$$\begin{tikzcd}
 & G(X \times Y) \arrow[dl, "G(pr_1)"'] \arrow[dr, "G(pr_2)"] & \\
G(X) & & G(Y) \\
 & A \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\Gamma(\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle)" description] &
\end{tikzcd}$$

соответствующую при сопряжении стрелке $\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle$

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
X & & Y \\
 & F(A) \arrow[ul, "\Phi(g_1)"] \arrow[ur, "\Phi(g_2)"'] \arrow[uu, dotted, "\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Упражнение 12.39. Проверьте детали.

Теорема 12.40. *Правые сопряжённые функторы сохраняют произведения любых множеств объектов (не только конечных, но и бесконечных). Точнее, если* $F \dashv G$ *и существует произведение* $\prod_{i \in I} X_i$ *с проекциями* pr_i, *то* $G(\prod_{i \in I} X_i)$ *с проекциями* $G(pr_i)$ *является произведением семейства объектов* $\{G(X_i) \mid i \in I\}$.

Упражнение 12.41. Докажите.

Упражнение 12.42. Множество-носитель произведения любого семейства групп является произведением их множеств-носителей.

В силу принципа двойственности немедленно получаем следующие теоремы.

Теорема 12.43. *Левые сопряжённые функторы сохраняют начальные объекты. Точнее, если $F \dashv G$, то $F(0)$ является начальным объектом.*

Теорема 12.44. *Левые сопряжённые функторы сохраняют копроизведения пар. Точнее, если $F \dashv G$ и существует копроизведение $A+B$ с копроекциями k_1 и k_2, то $F(A+B)$ с копроекциями $F(k_1)$ и $F(k_2)$ является копроизведением $F(A)$ и $F(B)$.*

Теорема 12.45. *Левые сопряжённые функторы сохраняют копроизведения любых множеств объектов (не только конечных, но и бесконечных). Точнее, если $F \dashv G$ и существует копроизведение $\sum_{i\in I} A_i$ с копроекциями k_i, то $F(\sum_{i\in I} A_i)$ с копроекциями $F(k_i)$ является копроизведением семейства объектов $\{F(A_i) \mid i \in I\}$.*

Пример 12.46. Глядя на пример 12.6, мы видим, что образ объединения любого семейства множеств равен объединению их образов. А также, прообраз пересечения любого семейства множеств равен пересечению их прообразов. На самом деле, при взятии прообраза сохраняются не только пересечения, но и объединения. Это связано с тем, что функтор f^* имеет также и правый сопряжённый $f^* \dashv \Pi_f$ и полная картина выглядит так

$$\mathcal{P}(M) \underset{f^*}{\overset{\Sigma_f}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(N) \underset{\Pi_f}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(M)$$

$\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f$. Монотонное отображение Π_f переводит всякое подмножество $A \subseteq M$ в подмножество N, заданное так

$$\Pi_f(A) = \{y \in N \mid f^*(\{y\}) \subseteq A\}$$

Если использовать кванторы и логические связки, можно выписать такие определения

$$\Sigma_f(A) = \{y \in N \mid \exists x \in M(x \in A \land f(x) = y)\}$$

$$\Pi_f(A) = \{y \in N \mid \forall x \in M(f(x) = y \Rightarrow x \in A)\}$$

Упражнение 12.47. В декартово замкнутых категориях верны следующие изоморфизмы

$$A \times 0 \cong 0$$

$$A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C$$

$$A \times (\textstyle\sum_{i \in I} B_i) \cong \textstyle\sum_{i \in I} A \times B_i$$

$$1^A \cong 1$$

$$(B \times C)^A \cong B^A \times C^A$$

$$(\textstyle\prod_{i \in I} B_i)^A \cong \textstyle\prod_{i \in I} B_i^A$$

Упражнение 12.48. Пусть K – декартово замкнутая категория, $A \in Ob(\mathsf{K})$. Определим функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}^{op}$

$$F(B) = A^B$$

$$F(h) = \Lambda(ev \circ (id_{A^C} \times h))$$

где $h\colon B \to C$. Проверьте, что $F \dashv F^{op}$, посмотрев на следующие изоморфизмы

$$\mathsf{K}^{op}(A^B, C) \cong \mathsf{K}(C, A^B) \cong \mathsf{K}(C \times B, A) \cong \mathsf{K}(B \times C, A) \cong \mathsf{K}(B, A^C)$$

Упражнение 12.49. В декартово замкнутых категориях верны следующие изоморфизмы

$$A^0 \cong 1$$

$$A^{B+C} \cong A^B \times A^C$$

$$A^{\sum_{i \in I} B_i} \cong \textstyle\prod_{i \in I} A^{B_i}$$

Упражнение 12.50. Попытайтесь доказать следующие изоморфизмы

$$A^1 \cong A$$

$$A^{B \times C} \cong (A^C)^B$$

Упражнение 12.51. Если в декартово замкнутой категории с начальным объектом верно $0 \cong 1$, то эта категория вырожденная, то есть все её объекты изоморфны терминальному. Указание: рассмотрите объекты A^0 и A^1.

Упражнение 12.52. Категория групп не является декартово замкнутой.

Теорема 12.53. *Если $F_1 \dashv G$ и $F_2 \dashv G$, то $F_1 \cong F_2$. Иными словами, левый сопряжённый функтор к заданному функтору G, если он существует, определён однозначно с точностью до естественного изоморфизма.*

Доказательство. Возьмём некоторый объект $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$. Рассмотрим категорию K_A, объектами которой являются стрелки вида $g\colon A \to G(X)$, а морфизмом между объектами $g_1\colon A \to G(Z)$ и $g_2\colon A \to G(X)$ будет любая стрелка $h\colon Z \to X$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & G(Z) \arrow[d, "G(h)"] & Z \arrow[d, "h"] \\
 & G(X) & X
\end{tikzcd}
$$

Пусть $F_1 \dashv G$ и $F_2 \dashv G$. Единицу первого сопряжения обозначим η, где $\eta_A\colon A \to G(F_1(A))$, а единицу второго сопряжения обозначим η', где $\eta'_A\colon A \to G(F_2(A))$. Стрелки η_A и η'_A обе являются начальными объектами категории K_A, все начальные объекты изоморфны, поэтому существует изоморфизм $i_A\colon F_1(A) \to F_2(A)$, делающий коммутативной следующую диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta'_A"'] & G(F_1(A)) \arrow[d, "G(i_A)"] & F_1(A) \arrow[d, "i_A"] \\
 & G(F_2(A)) & F_2(A)
\end{tikzcd}
$$

и обратный к нему $i_A^{-1}\colon F_2(A) \to F_1(A)$, делающий коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[dr, "\eta_A"'] & G(F_2(A)) \arrow[d, "G(i_A^{-1})"] & F_2(A) \arrow[d, "i_A^{-1}"] \\
& G(F_1(A)) & F_1(A)
\end{tikzcd}$$

Остаётся проверить, что стрелки i_A и i_A^{-1} являются компонентами естественных изоморфизмов

$i\colon F_1 \to F_2$

$i^{-1}\colon F_2 \to F_1$

Естественность i означает коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "F_1(h)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(h)"] \\
F_1(B) \arrow[r, "i_B"] & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $h\colon A \to B$. Коммутативность этой диаграммы означает равенство

$F_2(h) \circ i_A = i_B \circ F_1(h)$

Это равенство доказывается сравнением коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& G(F_1(A)) \arrow[d, "G(i_A)"] & F_1(A) \arrow[d, "i_A"] \\
A \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[r, "\eta'_A"'] \arrow[d, "h"'] & G(F_2(A)) \arrow[d, "G(F_2(h))"] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(h)"] \\
B \arrow[r, "\eta'_B"] & G(F_2(B)) & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

с диаграммой

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F_1(A)) \arrow[d, "G(F_1(h))"] & F_1(A) \arrow[d, "F_1(h)"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "\eta'_B"'] & G(F_1(B)) \arrow[d, "G(i_B)"] & F_1(B) \arrow[d, "i_B"] \\
& G(F_2(B)) & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

Стрелки в правых частях диаграмм должны совпадать, поскольку

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta'_B \circ h"'] & G(F_1(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F_1(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\
& G(F_2(B)) & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

Естественность i^{-1} доказывается аналогично (или можно сослаться на упражнение 6.10).
□

Упражнение 12.54. Покажите, что правый сопряжённый функтор к заданному функтору F, если он существует, определён однозначно с точностью до естественного изоморфизма.

Приведём ещё одно определение сопряжённости, которое встречается в некоторых книгах.

Определение 12.55. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть два естественных преобразования $\eta\colon Id_{\mathsf{K}_1} \to G \circ F$ и $\varepsilon\colon F \circ G \to Id_{\mathsf{K}_2}$, для которых коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "id_{F(A)}"'] & F(G(F(A))) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "\eta_{G(X)}"] \arrow[dr, "id_{G(X)}"'] & G(F(G(X))) \arrow[d, "G(\varepsilon_X)"] \\ & G(X) \end{tikzcd}$$

для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$.

Замечание 12.56. Если обозначить через $F\eta$ естественное преобразование с компонентами $F(\eta_A)$, через εF естественное преобразование с компонентами $\varepsilon_{F(A)}$, через ηG естественное преобразование с компонентами $\eta_{G(X)}$ и через $G\varepsilon$ естественное преобразование с компонентами $G(\varepsilon_X)$, диаграммы становится легче запомнить

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "id_F"'] & F \circ G \circ F \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "id_G"'] & G \circ F \circ G \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Теорема 12.57. *Определение 12.55 эквивалентно определению 12.1.*

Доказательство. Пусть $F \dashv G$ в смысле определения 12.1. Тогда

$$\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \Phi(\eta_A) = \Phi(\Gamma(id_{F(A)}) = id_{F(A)}$$

$$G(\varepsilon_X) \circ \eta_{G(X)} = \Gamma(\varepsilon_X) = \Gamma(\Phi(id_{G(X)}) = id_{G(X)}$$

поэтому $F \dashv G$ в смысле определения 12.55. В обратную сторону, если $F \dashv G$ в смысле определения 12.55, полагаем по определению

$$\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$$

$$\Phi(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$$

и доказываем равенства из определения 12.1 в качестве упражнения.
$\square$

Глава 13

Эквациональная аксиоматика декартово замкнутых категорий

„Эквациональная“ значит „заданная равенствами“. На рисунке 13.1 выписан некоторый набор равенств, выполненных в любой декартово замкнутой категории. Стараясь сделать нагляднее, я их записал в виде „правил вывода“. Например, второе правило читается так: если $f\colon C \to A$ и $g\colon C \to B$, то $pr_1 \circ \langle f, g\rangle = f$. Как обычно, мы не пишем буквенные индексы при pr_1, pr_2, ev и Λ, если они ясны из контекста.

Теорема 13.1. *Категория является декартово замкнутой в том и только том случае, если в ней выполнены равенства, показанные на рисунке 13.1. Иными словами, декартово замкнутая категория задаётся следующим набором данных (помимо перечисленных в определении 1.1):*

1. *Объект* 1 *и для любого объекта* A *стрелка* $!_A\colon A \to 1$.
2. *Для любых объектов* A *и* B *некоторый объект* $A \times B$ *и стрелки* $pr_1\colon A \times B \to A$ *и* $pr_2\colon A \times B \to B$.
3. *Для любых стрелок* $f\colon C \to A$ *и* $g\colon C \to B$ *стрелка* $\langle f, g\rangle\colon C \to A \times B$.
4. *Для любых объектов* A *и* B *объект* B^A *и стрелка* $ev\colon B^A \times A \to B$.
5. *Для любой стрелки* $f\colon C \times A \to B$ *стрелка* $\Lambda(f)\colon C \to B^A$.

При этом должны выполняться равенства, показанные на рисунке 13.1.

1	$\dfrac{f\colon A \to 1}{f = !_A}$
2	$\dfrac{f\colon C \to A \quad g\colon C \to B}{pr_1 \circ \langle f, g\rangle = f}$
3	$\dfrac{f\colon C \to A \quad g\colon C \to B}{pr_2 \circ \langle f, g\rangle = g}$
4	$\dfrac{h\colon C \to A \times B}{h = \langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h\rangle}$
5	$\dfrac{f\colon C \times A \to B}{f = ev \circ (\Lambda(f) \times id_A)}$
6	$\dfrac{g\colon C \to B^A}{g = \Lambda(ev \circ (g \times id_A))}$

Рис. 13.1: Аксиомы декартово замкнутых категорий

Доказательство. Предположим, что в категории выполняются равенства с рисунка 13.1 и покажем, что такая категория декартово замкнута. Ясно, что объект 1 будет терминальным

$$A \xrightarrow{!_A} 1$$

(единственность стрелки следует из равенства 1).

Докажем, что $A \times B$ с проекциями $pr_1\colon A \times B \to A$ и $pr_2\colon A \times B \to B$

будет произведением A и B, что выражается диаграммой

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, dotted, "\langle f, g \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

Из равенств 2 и 3 следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, "\langle f, g \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

Чтобы доказать единственность стрелки $\langle f, g \rangle$, предположим, что некоторая стрелка $h\colon C \to A \times B$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, "h"] &
\end{tikzcd}$$

и докажем, что $h = \langle f, g \rangle$. Из диаграммы видно, что

$$pr_1 \circ h = f$$

$$pr_2 \circ h = g$$

В силу равенства 4

$$h = \langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h \rangle \quad \text{и поэтому } h = \langle f, g \rangle$$

Докажем, что B^A со стрелкой $ev\colon B^A \times A \to B$ является экспонентой A и B, что выражается диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\Lambda(f) \times id_A"] & C \arrow[d, dotted, "\Lambda(f)"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev"] & B^A
\end{tikzcd}
$$

Из равенства 5 следует коммутативность диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\Lambda(f) \times id_A"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev"]
\end{tikzcd}
$$

Чтобы доказать единственность стрелки $\Lambda(f)$, предположим, что некоторая стрелка $g\colon C \to B^A$ делает коммутативной диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g \times id_A"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev"]
\end{tikzcd}
$$

и докажем, что $g = \Lambda(f)$. Из диаграммы видно, что

$$ev \circ (g \times id_A) = f$$

В силу равенства 6

$$g = \Lambda(ev \circ (g \times id_A)) \ \text{ и поэтому } g = \Lambda(f)$$

В обратную сторону, покажем, что в декартово замкнутой категории выполнены равенства с рисунка 13.1. Равенства 1,2,3 и 5 следуют из определений терминального объекта, произведения и экспоненты (достаточно взглянуть на определяющие диаграммы). Равенство 4 доказывается сравнением коммутативных диаграмм

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "pr_1 \circ h"] \arrow[ur, "pr_2 \circ h"'] \arrow[uu, "h"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "pr_1 \circ h"] \arrow[ur, "pr_2 \circ h"'] \arrow[uu, dotted, "\langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h \rangle"] &
\end{tikzcd}
$$

Равенство 6 доказывается сравнением коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "ev \circ (g \times id_A)"'] \arrow[d, "g \times id_A"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "g"] \\
B^A
\end{tikzcd}
$$

с коммутативной диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "f = ev \circ (g \times id_A)"'] \arrow[d, dotted, "\Lambda(f) \times id_A"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dotted, "\Lambda(ev \circ (g \times id_A))"] \\
B^A
\end{tikzcd}
$$

□

Замечание 13.2. Для сопряжённых функторов $(-) \times A$ и $(-)^A$ из упражнения 12.31 соответствующие Γ и Φ действуют так

$$\Gamma(f) = \Lambda(f)$$

$$\Phi(g) = ev \circ (g \times id_A)$$

и равенства 5 и 6 с рисунка 13.1 выражают их взаимную обратность.

Замечание 13.3. Аксиоматика, представленная на рисунке 13.1, не единственно возможная. Равенство 1 можно заменить на пару равенств

$$\frac{f \colon A \to B}{!_B \circ f = !_A}$$

$$!_1 = id_1$$

Равенство 4 можно заменить на пару равенств

$$\frac{h\colon D \to C \quad f\colon C \to A \quad g\colon C \to B}{\langle f, g \rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h \rangle}$$

$$\langle pr_1^{A\times B}, pr_2^{A\times B} \rangle = id_{A\times B}$$

С равенствами 5 и 6 тоже можно мудрить, но оставим это до главы про лямбда-исчисление.

Глава 14

Объекты натуральных чисел

В этой главе мы дадим определение натуральных чисел на теоретико-категорном языке.

Определение 14.1. Пусть K – декартово замкнутая категория. *Объектом натуральных чисел* в категории K называется объект $N \in Ob(\mathsf{K})$ вместе с парой морфизмов $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$ такой, что для любого $A \in Ob(\mathsf{K})$ и любой пары морфизмов $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$ коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dotted, "h"] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "a"'] & & \\
 & A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

то есть существует единственная стрелка h такая, что

$$h \circ 0 = a$$

$$h \circ S = f \circ h$$

Пример 14.2. В Set объект натуральных чисел – это множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ вместе с элементом $0 \in \mathbb{N}$, который задаёт стрелку $\{*\} \xrightarrow{0} \mathbb{N}$, а также функцией прибавления единицы $S(n) = n + 1$, которая задаёт стрелку $\mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N}$, итого получаем $\{*\} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N}$. Если заданы произвольное множество A, элемент $a \in A$ и функция $A \xrightarrow{f} A$, мы можем определить функцию $h\colon \mathbb{N} \to A$, удовлетворяющую следующим равенствам

$$h(0) = a$$

$$h(n+1) = f(h(n)) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Таким образом, $h(n) = f(f(\ldots f(a)\ldots))$, где f применяется n раз. Существование и единственность такой функции h, полученной итерацией, следуют из принципа математической индукции. Второе равенство можно переписать так

$$h(S(n)) = f(h(n)) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

или ещё лучше

$$h \circ S = f \circ h$$

Теорема 14.3. *Объект натуральных чисел, если он существует, определён однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную категорию K_1, объектами которой являются пары стрелок (или диаграммы) вида $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$. Морфизмом между диаграммами $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$ и $1 \xrightarrow{b} B \xrightarrow{g} B$ по определению будет любая стрелка h, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"'] & & \\
 & B \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Объект натуральных чисел является начальным объектом в K_1.
□

Пример 14.4. В топосах вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ объекты натуральных чисел устроены просто – это функторы $N\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, тождественно равные $\mathbb{N}$

$$N(A) = \mathbb{N}$$

$$N(f) = id_{\mathbb{N}}$$

для всех $A \in Ob(\mathsf{K}), f \in Mor(\mathsf{K})$.
Естественное преобразование $0\colon 1 \to N$ имеет компоненты

$$0(A) = 0\colon \{*\} \to \mathbb{N}$$

его естественность выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} B & \{*\} \arrow[r, "0"] & \mathbb{N} \\ A \arrow[u, "f"] & \{*\} \arrow[u, "id_{\{*\}}"] \arrow[r, "0"] & \mathbb{N} \arrow[u, "id_{\mathbb{N}}"'] \end{tikzcd}$$

Естественное преобразование $S\colon N \to N$ имеет компоненты

$$S(A) = S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

его естественность выражается коммутативной диаграммой

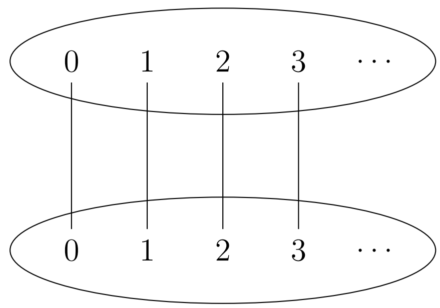
$$\begin{tikzcd} B & \mathbb{N} \arrow[r, "S"] & \mathbb{N} \\ A \arrow[u, "f"] & \mathbb{N} \arrow[u, "id_{\{*\}}"] \arrow[r, "S"] & \mathbb{N} \arrow[u, "id_{\mathbb{N}}"'] \end{tikzcd}$$

все естественные преобразования $h\colon N \to A$, полученные итерацией, тоже строятся покомпонентно.

Пример 14.5. В категории $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K – изображённая ниже категория частичного порядка

$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop left, "id_B"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"] \end{tikzcd}$$

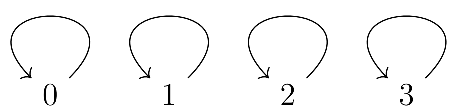
объектом натуральных чисел будет следующее „множество, меняющееся со временем“ (точнее, не меняющееся)



Элементом $0\colon 1 \to N$ будет пара $(0,0)$ („мировая линия нуля“). Стрелкой $S\colon N \to N$ будет отображение, сдвигающее всю картинку на одну позицию вправо.

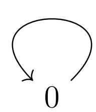
Пример 14.6. Если K – малая категория с одним объектом (задающая полугруппу с единицей), объектом натуральных чисел в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ будет множество $\mathbb{N}$ с тривиальным действием полугруппы (все элементы полугруппы переходят в $id_{\mathbb{N}}$, все натуральные числа являются неподвижными точками).

Пример 14.7. В категории графов Grph объектом натуральных чисел будет граф N из бесконечного числа вершин, перенумерованных натуральными числами, к каждой из которых приделана петля



и так далее

Элементом $0\colon 1 \to N$ будет точка графа



Стрелкой $S\colon N \to N$ будет отображение графа N в себя, сдвигающее всю картинку на одну позицию вправо.

Определение 14.8. *Стрелкой предшествования* называется стрелка $p\colon N \to N$, делающая коммутативными следующие диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dd, "p"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & \\
 & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "id_N"'] & N \arrow[d, "p"] \\
 & N
\end{tikzcd}
$$

Таким образом

$$p \circ 0 = 0$$

$$p \circ S = id_N$$

В Set это функция, вычитающая единицу из любого числа, кроме нуля

$$p(0) = 0$$

$$p(S(n)) = n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Теорема 14.9. *В каждой категории с объектом натуральных чисел существует единственная стрелка предшествования.*

Доказательство. Сначала построим такую стрелку в Set, используя рекурсию. Будем определять пару функций $h_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $h_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ одновременной рекурсией

$$h_1(0) = 0$$

$$h_2(0) = 0$$

$$h_1(n+1) = h_1(n) + 1$$

$$h_2(n+1) = h_1(n) \quad \text{для любого } \ n \in \mathbb{N}$$

Перепишем эти равенства, используя S

$$h_1(0) = 0$$

$$h_2(0) = 0$$

$$h_1(S(n)) = S(h_1(n))$$

$$h_2(S(n)) = h_1(n) \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbb{N}$$

Посмотрев на первое и третье равенства, легко доказать по индукции, что

$$h_1(n) = n \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbb{N}$$

Но тогда функция h_2 и есть p (надо посмотреть на второе и четвёртое равенства).

Переходим к общему случаю. Определим стрелку $h\colon N \to N \times N$ следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dotted, "h"] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "\langle 0,0\rangle"'] & & \\
 & N \times N \arrow[r, "\langle S \circ pr_1, pr_1\rangle"] & N \times N
\end{tikzcd}$$

Содержательно говоря

$$h = \langle h_1, h_2 \rangle$$

$$h_1 = pr_1 \circ h$$

$$h_2 = pr_2 \circ h$$

Функция $\langle S \circ pr_1, pr_1 \rangle$ в Set переводит пару (n, m) в пару $(S(n), n)$. Пара $h(n)$ есть результат применения этой функции n раз к паре $(0, 0)$.

$$h(0) = (0, 0)$$

$$h(1) = (1, 0)$$

$$h(2) = (2, 1)$$

и так далее. Возвращаемся от Set к общему случаю. Докажем, что

$$pr_1 \circ h = id_N$$

Из коммутативности диаграммы следует, что

1. $h \circ 0 = \langle 0, 0 \rangle$ (коммутативность треугольника)

2. $h \circ S = \langle S \circ pr_1, pr_1 \rangle \circ h$ (коммутативность прямоугольника)

Из этого легко получить

$$pr_1 \circ h \circ 0 = 0$$

$$pr_1 \circ h \circ S = S \circ pr_1 \circ h$$

Но стрелка id_N удовлетворяет тем же условиям, что и $pr_1 \circ h$, поэтому $pr_1 \circ h = id_N$. Тут надо поглядеть на диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[dd, dotted, "pr_1 \circ h"] & N \arrow[dd, dotted, "pr_1 \circ h"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \\
 & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[dd, dotted, "id_N"] & N \arrow[dd, dotted, "id_N"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \\
 & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

Из равенств 1 и 2 легко выводится

$$pr_2 \circ h \circ 0 = 0$$

$$pr_2 \circ h \circ S = pr_1 \circ h = id_N$$

и стрелка $pr_2 \circ h$ удовлетворяет тем условиям, которых мы требуем от стрелки предшествования. Мы доказали существование стрелки предшествования, надо ещё доказать единственность. Это легко. Допустим, у нас есть стрелка $p\colon N \to N$, для которой верно

$$p \circ 0 = 0$$

$$p \circ S = id_N$$

Тогда стрелка $\langle id_N, p\rangle$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[rr, "S"] \arrow[d, dotted, "\langle id_N, p\rangle"] & & N \arrow[d, dotted, "\langle id_N, p\rangle"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "\langle 0,0\rangle"'] & N\times N \arrow[rr, "\langle S\circ pr_1, pr_1\rangle"] & & N\times N \end{tikzcd}$$

Такая стрелка единственна и p по ней однозначно находится (как вторая проекция пары).
□

Соглашение 14.10. Будем обозначать $0_A\colon A\to N$ композицию $0\circ !_A$

$$A \xrightarrow{!_A} 1 \xrightarrow{0} N$$

В Set это функция из A в $\mathbb{N}$, тождественно равная нулю. Тут автор приносит извинения, потому что обозначал этим же символом единственную стрелку из нулевого объекта (эту стрелку я переименую, её всё равно, как называть, потому что она редко нужна).

Упражнение 14.11.

$$0_B\circ f = 0_A \quad \text{для } f\colon A\to B$$

$$0 = 0_1$$

До сих пор мы не использовали декартову замкнутость в полную силу, нам были нужны только терминальный объект и произведение. Экспонента нужна, чтобы доказать теорему 14.12. Прежде, чем её сформулировать, посмотрим, как мы определяем функцию сложения $+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Один из возможных способов такой (рекурсия по первому аргументу)

$$0+n=n$$

$$S(n)+m = S(n+m) \quad \text{для любых } n,m\in\mathbb{N}$$

Определяющая её диаграмма в Set выглядит так

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "S\times id_{\mathbb{N}}"] \arrow[d, dotted, "+"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, dotted, "+"] \\
\mathbb{N} \arrow[ur, "\langle 0_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}}\rangle"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{N}}"'] & & \\
 & \mathbb{N} \arrow[r, "S"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

Функция $\langle 0_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}}\rangle$ отображает $n \in \mathbb{N}$ в пару $(0, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
Функция $S \times id_{\mathbb{N}}$ отображает пару $(n, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ в пару $(S(n), m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Рассмотрим более общий случай. Пусть даны множества A и B, а также функции $g\colon A \to B$ и $f\colon B \to B$. Мы можем определить функцию $j\colon \mathbb{N}\times A \to B$ следующими равенствами

$$j(0, a) = g(a)$$

$$j(S(n), a) = f(j(n, a)) \quad \text{для любых } n \in \mathbb{N}\,, a \in A$$

Таким образом, $j(n, a) = f(f(\ldots f(g(a))\ldots))$, где f применяется n раз.

Теорема 14.12. *В декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел коммутативны следующие диаграммы (для любых A, B, g, f)*

$$
\begin{tikzcd}
 & N\times A \arrow[r, "S\times id_A"] \arrow[d, dotted, "j"] & N\times A \arrow[d, dotted, "j"] \\
A \arrow[ur, "\langle 0_A, id_A\rangle"] \arrow[dr, "g"'] & & \\
 & B \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

Доказательство. Напомню, что с объектом A связаны два сопряжённых функтора $F \dashv G$, определяемые так

$$F(C) = C \times A$$

$$F(f) = f \times id_A$$

$$G(B) = B^A$$

$$G(f) = \Lambda(f \circ ev)$$

Преобразования Γ и Φ, связанные с этим сопряжением, действуют так

$$\Gamma(f) = \Lambda(f) \qquad \text{для любого } f\colon C \times A \to B$$

$$\Phi(g) = ev \circ (g \times id_A) \quad \text{для любого } g\colon C \to B^A$$

и для них выполнены равенства (для любых подходящих f, g, h)

$$\Lambda(\Phi(g)) = g$$

$$\Phi(\Lambda(f)) = f$$

$$\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$$

$$\Lambda(h \circ f) = G(h) \circ \Lambda(f)$$

$$\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$$

$$\Lambda(f \circ F(h)) = \Lambda(f) \circ h$$

Переходим собственно к доказательству. Возьмём следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dotted, "k"] & N \arrow[d, dotted, "k"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "\ulcorner g \urcorner"'] & B^A \arrow[r, "f^A"] & B^A
\end{tikzcd}$$

на которой использованы (стандартные) сокращения

$$\ulcorner g \urcorner = \Lambda(g \circ pr_2) \quad (\text{потому что } \ 1 \times A \xrightarrow{pr_2} A \xrightarrow{g} B\,)$$

$$f^A = G(f) = \Lambda(f \circ ev) \quad (\text{потому что } \ B^A \times A \xrightarrow{ev} B \xrightarrow{f} B\,)$$

Коммутативность треугольника и квадрата означает следующее

$$k \circ 0 = \Lambda(g \circ pr_2)$$

$$k \circ S = G(f) \circ k$$

Положим $j = \Phi(k)$ и докажем коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & N \times A \arrow[r, "S \times id_A"] \arrow[d, dotted, "\Phi(k)"] & N \times A \arrow[d, dotted, "\Phi(k)"] \\
A \arrow[ur, "\langle 0_A, id_A \rangle"] \arrow[dr, "g"'] & & \\
 & B \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Доказательство не содержит глубоких идей и состоит в трудолюбивых вычислениях, поэтому я докажу только коммутативность левого треугольника. Начнём с равенства

$$k \circ 0 = \Lambda(g \circ pr_2)$$

Применим к обеим частям Φ

$$\Phi(k \circ 0) = \Phi(\Lambda(g \circ pr_2))$$

$$\Phi(k) \circ F(0) = g \circ pr_2$$

$$\Phi(k) \circ (0 \times id_A) = g \circ pr_2$$

Умножим обе части справа на $\langle\, !_A, id_A \rangle$ (это изоморфизм A и $1 \times A$)

$$\Phi(k) \circ (0 \times id_A) \circ \langle\, !_A, id_A \rangle = g \circ pr_2 \circ \langle\, !_A, id_A \rangle$$

и вычислим

$$\Phi(k) \circ \langle 0 \circ !_A, id_A \rangle = g$$

Получили коммутативность треугольника. Осталось доказать ещё три равенства (коммутативность прямоугольника и два равенства, из которых следует единственность).
□

Упражнение 14.13. В Set стрелка вида f^A – это отображение $f\circ$ (умножение слева на f).

Следствие 14.14. *В декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел коммутативны также следующие диаграммы (для любых A, B, g, f)*

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id_A \times S"] \arrow[dd, dotted, "j"] & A \times N \arrow[dd, dotted, "j"] \\
A \arrow[ur, "\langle id_A, 0_A \rangle"] \arrow[dr, "g"'] & & \\
 & B \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Это легко вывести из предыдущей теоремы, поскольку $A \times N \cong N \times A$.

Замечание 14.15. Коммутативность таких диаграмм удобно брать за определение объекта натуральных чисел, если в категории нет экспонент (а только терминальный объект и произведения пар объектов). Например, это позволяет нам определять сложение привычным способом (рекурсия по второму аргументу)

$$n + 0 = n$$

$$n + S(m) = S(n + m) \quad \text{для любых } n, m \in \mathbb{N}$$

Определяющая диаграмма в Set выглядит так

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times S"] \arrow[dd, dotted, "+"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[dd, dotted, "+"] \\
\mathbb{N} \arrow[ur, "\langle id_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}} \rangle"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{N}}"'] & & \\
 & \mathbb{N} \arrow[r, "S"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Мы можем точно так же определить сложение в любой категории с объектом натуральных чисел.

Определение 14.16. *Сложением* называется стрелка $+\colon N \times N \to N$, определяемая следующей коммутативной диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[r, "id_N \times S"] \arrow[dd, dotted, "+"] & N \times N \arrow[dd, dotted, "+"] \\
N \arrow[ur, "\langle id_N, 0_N \rangle"] \arrow[dr, "id_N"'] & & \\
 & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}
$$

Таким образом, сложение – единственная стрелка, удовлетворяющая следующим равенствам

$$+ \circ \langle id_N, 0_N \rangle = id_N$$

$$+ \circ (id_N \times S) = S \circ +$$

Упражнение 14.17.

$$+ \circ \langle f, 0_A \rangle = f \quad \text{для любого} \;\; f\colon A \to N$$

$$+ \circ \langle f, 0 \rangle = f \quad \text{для любого} \;\; f\colon 1 \to N$$

$$+ \circ \langle f, S \circ g \rangle = S \circ + \circ \langle f, g \rangle \quad \text{для любых } f\colon A \to N,\, g\colon B \to N$$

Сложение обладает обычными свойствами, некоторые из них мы сейчас докажем.

Теорема 14.18. *В любой категории с объектом натуральных чисел коммутативна следующая диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[dr, "+"] & \\
 & N \\
N \arrow[uu, "\langle 0_N, id_N \rangle"] \arrow[ur, "id_N"'] &
\end{tikzcd}
$$

В Set *она выражает равенство*

$$0 + n = n \quad \textit{для всех} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. В Set мы доказываем это по индукции. Сначала выпишем равенства

1. $0 + 0 = 0$

2. $0 + S(n) = S(0 + n)$

оба равенства по определению сложения. Первое равенство даёт базис индукции. Второе равенство показывает, что $0 + S(n) = S(n)$, если $0 + n = n$, это шаг индукции.

В общем случае мы действуем так. По определению объекта натуральных чисел

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dotted, "h"] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[r, "S"] & A \end{tikzcd}$$

Таким образом, существует единственная стрелка h, удовлетворяющая равенствам

$$h \circ 0 = 0$$

$$h \circ S = S \circ h$$

Дальше надо показать, что стрелки $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle$ и id_N обе удовлетворяют этим равенствам и поэтому совпадают. Для id_N это очевидно, а для стрелки $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle$ проверяется вычислением, повторяющим 1 и 2 выше

1. $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle \circ 0 = + \circ \langle 0_N \circ 0, id_N \circ 0 \rangle = + \circ \langle 0, 0 \rangle = 0$

2. $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle \circ S = + \circ \langle 0_N \circ S, id_N \circ S \rangle = + \circ \langle 0_N, S \rangle = S \circ \langle 0_N, id_N \rangle$

□

Теорема 14.19. *(Ассоциативность сложения). В любой категории с объектом натуральных чисел коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
N \times N \times N \arrow[r, "{\langle pr_1, + \circ \langle pr_2, pr_3 \rangle \rangle}"] \arrow[d, "{\langle + \circ \langle pr_1, pr_2 \rangle, pr_3 \rangle}"'] & N \times N \arrow[d, "+"] \\
N \times N \arrow[r, "+"] & N
\end{tikzcd}$$

Доказательство. В Set эта диаграмма выражает равенство

$$(n+m)+l = n+(m+l) \quad \text{для любых } n, m, l \in \mathbb{N}$$

В Set мы это доказываем индукцией по l.

1. $(n+m)+0 = n+m$
2. $n+(m+0) = n+m$
3. $(n+m)+S(l) = S((n+m)+l)$
4. $n+(m+S(l)) = n+S(m+l) = S(n+(m+l))$

Первые две строчки доказывают, что $(n+m)+0 = n+(m+0)$, это базис индукции.
Последние две строчки доказывают, что $(n+m)+S(l) = n+(m+S(l))$, если $(n+m)+l = n+(m+l)$, это шаг индукции.

В общем случае мы действуем так. По следствию 14.14 существует стрелка j, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & (N \times N) \times N \arrow[r, "id_{N\times N} \times S"] \arrow[d, dotted, "j"] & (N \times N) \times N \arrow[d, dotted, "j"] \\
N \times N \arrow[ur, "{\langle id_{N\times N}, 0_{N\times N} \rangle}"] \arrow[r, "+"'] & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

Поскольку $(N \times N) \times N \cong N \times N \times N$, перепишем эту диаграмму так

$$
\begin{tikzcd}
& N \times N \times N \arrow[r, "\langle pr_1, pr_2, S \circ pr_3 \rangle"] \arrow[dd, dotted, "j"] & N \times N \times N \arrow[dd, dotted, "j"] \\
N \times N \arrow[ur, "\langle pr_1, pr_2, 0_{N \times N} \rangle"] \arrow[dr, "+"'] & & \\
& N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}
$$

Таким образом, существует единственная стрелка j, удовлетворяющая равенствам

$$j \circ \langle pr_1, pr_2, 0_{N \times N} \rangle = +$$

$$j \circ \langle pr_1, pr_2, S \circ pr_3 \rangle = S \circ j$$

Дальше надо показать, что стрелки

$$+ \circ \langle + \circ \langle pr_1, pr_2 \rangle, pr_3 \rangle \colon N \times N \times N \to N$$

$$+ \circ \langle pr_1, + \circ \langle pr_2, pr_3 \rangle \rangle \colon N \times N \times N \to N$$

обе удовлетворяют этим равенствам (и поэтому совпадают). Доказательство заключается в трудолюбивом вычислении, повторяющем доказательства равенств 1,2,3,4 выше.
□

Замечание 14.20. Мы видим, что язык теории категорий очень хорош, чтобы давать определения, но неудобен для сложных доказательств. Главная причина этого – отсутствие связанных переменных. То, что в обычной математической записи выглядит так

$$\forall x (f(g(x)) = h(x))$$

на языке теории категорий выглядит так

$$f \circ g = h$$

Для людей, знакомых с комбинаторами: язык теории категорий – это некоторое исчисление комбинаторов.

Упражнение 14.21. Докажите коммутативность сложения (хотя бы в Set)

$$\begin{tikzcd} N \times N \arrow[dr, "+"] & \\ & N \\ N \times N \arrow[uu, "\langle pr_2, pr_1 \rangle"] \arrow[ur, "+"'] & \end{tikzcd}$$

Определение 14.22. Рассмотрим некоторый весьма общий способ определения функций, который называется *примитивной рекурсией*. Если заданы множества A, B и функции $g\colon A \to B$ и $f\colon A \times \mathbb{N} \times B \to B$, мы можем определить функцию $h\colon A \times \mathbb{N} \to B$ следующими равенствами

$$h(a, 0) = g(a)$$

$$h(a, S(n)) = f(a, n, h(a, n)) \quad \text{для любых } a \in A, n \in \mathbb{N}$$

Пример 14.23. Операция умножения натуральных чисел определяется в Set, например, следующими равенствами

$$n \times 0 = 0$$

$$n \times S(m) = n + n \times m \quad \text{для всех } n, m \in \mathbb{N}$$

Это пример определения по примитивной рекурсии. Функции $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ здесь такие

$$g(n) = 0$$

$$f(n, m, l) = n + l \quad \text{для всех } n, m, l \in \mathbb{N}$$

Заметим, что в этом примере функция f от m явно не зависит, эта переменная, как говорят, фиктивная.

Теорема 14.24. *(Теорема о примитивной рекурсии). В категории с объектом натуральных чисел для любых объектов A, B и стрелок $g\colon A \to B$ и $f\colon A \times N \times B \to B$ существует единственная стрелка $h\colon A \times N \to B$, для которой коммутативны следующие диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[ur, "\langle id_A, 0_A \rangle"] \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \times N \arrow[r, "id_A \times S"] \arrow[d, "\langle pr_1, pr_2, h \rangle"'] & A \times N \arrow[d, "h"] \\
A \times N \times B \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Доказательство. По следствию 14.14 существует стрелка j, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[d, dotted, "j"] & A \times N \arrow[d, dotted, "j"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[r, "\langle id_A, 0_A, g \rangle"'] & A \times N \times B \arrow[r, "\langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle"] & A \times N \times B
\end{tikzcd}$$

Сначала покажем, что это значит в Set. В Set стрелка $\langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle$ переводит тройку (a, n, b) в тройку $(a, S(n), f(a, n, b))$. Далее

$$j(a, 0) = (a, 0, g(a)) \quad \text{(коммутативность треугольника)}$$

и если обозначить $j(a, n) = (j_1(a, n), j_2(a, n), j_3(a, n)) \in A \times \mathbb{N} \times B$, то

$$j_1(a, 0) = a$$

$$j_2(a, 0) = 0$$

$$j_3(a, 0) = g(a)$$

а из коммутативности прямоугольника следует

$$j_1(a, S(n)) = j_1(a, n) \quad \text{и по индукции } j_1(a, n) = a$$

$$j_2(a, S(n)) = S(j_2(a, n)) \quad \text{и по индукции } j_2(a, n) = n$$

$$j_3(a, S(n)) = f(j_1(a, n), j_2(a, n), j_3(a, n)) = f(a, n, j_3(a, n))$$

и j_3 есть нужная нам стрелка h.

Теперь общий случай. На категорном языке выписанные выше равенства выглядят так

$$j \circ \langle id, 0_A \rangle = \langle id_A, 0_A, g \rangle \qquad \text{(коммутативность треугольника)}$$

$$j \circ (id \times S) = \langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle \circ j \quad \text{(коммутативность прямоугольника)}$$

и поэтому

$$pr_1 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = id_A$$

$$pr_2 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = 0_A$$

$$pr_3 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = g$$

$$pr_1 \circ j \circ (id \times S) = pr_1 \circ j \quad \text{и по индукции } pr_1 \circ j = pr_1^{A \times N}$$

$$pr_2 \circ j \circ (id \times S) = S \circ pr_2 \circ j \quad \text{и по индукции } pr_2 \circ j = pr_2^{A \times N}$$

$$pr_3 \circ j \circ (id \times S) = f \circ \langle pr_1 \circ j, pr_2 \circ j, pr_3 \circ j \rangle = f \circ \langle pr_1^{A \times N}, pr_2^{A \times N}, pr_3 \circ j \rangle$$

Требуемая стрелка h есть композиция $pr_3 \circ j$, индукция же заключается в сравнении между собой сначала этих двух диаграмм

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[dd, dotted, "pr_1 \circ j"] & A \times N \arrow[dd, dotted, "pr_1 \circ j"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[dr, "id"'] & & \\
 & A \arrow[r, "id"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[dd, dotted, "pr_1^{A \times N}"] & A \times N \arrow[dd, dotted, "pr_1^{A \times N}"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[dr, "id"'] & & \\
 & A \arrow[r, "id"] & A
\end{tikzcd}$$

а потом вот этих двух

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[dd, dotted, "pr_2 \circ j"] & A \times N \arrow[dd, dotted, "pr_2 \circ j"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[dr, "0_A"'] & & \\
 & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[d, dotted, "pr_2^{A\times N}"] & A \times N \arrow[d, dotted, "pr_2^{A\times N}"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[r, "0_A"'] & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

Принцип автора – не скрывать никакой правды, даже неприятной:)
□

Определение 14.25. *Умножением* называется единственная стрелка $\times\colon N \times N \to N$, делающая коммутативными следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[d, "\times"] \\
N \arrow[ur, "\langle id_N, 0_N \rangle"] \arrow[r, "0_N"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "id_N \times S"] \arrow[d, "\langle pr_1, \times \rangle"'] & N \times N \arrow[d, "\times"] \\
N \times N \arrow[r, "+"] & N
\end{tikzcd}$$

Такая стрелка существует в любой категории с объектом натуральных чисел, что выводится из теоремы о примитивной рекурсии с помощью следующего трюка („добавления фиктивной переменной“): надо требовать коммутативности таких диаграмм (изменения только во второй диаграмме)

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[d, "\times"] \\
N \arrow[ur, "\langle id_N, 0_N \rangle"] \arrow[r, "0_N"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "id_N \times S"] \arrow[d, "\langle pr_1, pr_2, \times \rangle"'] & N \times N \arrow[d, "\times"] \\
N \times N \times N \arrow[r, "+ \circ \langle pr_1, pr_3 \rangle"] & N
\end{tikzcd}$$

Упражнение 14.26. Попытайтесь доказать существование стрелки умножения, не используя теорему о примитивной рекурсии.

Упражнение 14.27. Докажите (хотя бы в Set), что умножение ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно относительно сложения.