Оглавление

Вступление

Это уже почти весь задуманный учебник по теории категорий. Автор поставил целью написать учебник, доступный мат.логикам и функциональным программистам, в котором не будет ни слова про гомотопии и гомологии. Почти все русскоязычные книги по теории категорий написаны алгебраистами для алгебраистов, в нагрузку к теории категорий в них предлагают изучать гомологическую алгебру. Исключение составляет книга Голдблатта „Топосы“, но она, по мнению автора, как учебник не очень годится (хотя сама по себе интересная). Для чтения книги нужно шапочное знакомство с понятиями „группа“, „свободная группа“ и „гомоморфизм групп“. Если читатель их не знает, советую сначала прочитать популярную книжку Александрова „Введение в теорию групп“.

Символ $\Leftrightarrow$ означает „тогда и только тогда“.

Символ $\wedge$ означает „и“, автор иногда вставляет его между формулами.

Символ $\square$ отмечает конец доказательства.

Глава 1

Категории, изоморфизмы

Категории – это некоторые математические структуры, частными случаями которых являются частично упорядоченные множества, а также полугруппы с единицей (в том числе группы). Во многих случаях категорию удобно представлять как „обобщённое частично упорядоченное множество“, в других случаях как „обобщённую полугруппу с единицей“. Чуть позже мы дадим точные определения этих понятий.

Определение 1.1. *Категория* K задаётся следующим набором данных:

1. Совокупностью *объектов*, которые мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C \ldots$
2. Совокупностью *морфизмов*, или *стрелок*, которые мы будем обозначать строчными латинскими буквами $f, g, h \ldots$
3. Операциями dom и cod, которые сопоставляют каждой стрелке f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются *началом* и *концом* f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, наглядно изображается так
$$f\colon A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B$$
В этом случае говорят, что f – стрелка (или морфизм) из A в B.
4. Операцией *композиции*, которая по каждой паре стрелок f и g, расположенных так
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

(то есть, $cod(f) = dom(g)$), выдаёт некоторую стрелку

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

(она называется *композицией* f и g).

5. Операцией id, которая по каждому объекту A выдаёт некоторую стрелку

$$A \xrightarrow{id_A} A$$

(она называется *тождественной* или *единичной стрелкой* объекта A, а также *тождественным* или *единичным морфизмом* объекта A, можно называть эту стрелку и просто *тождеством* объекта A).

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции.
Для любой тройки стрелок f, g, h, расположенных так

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества.
Для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено равенство $f \circ id_A = f$.
Для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено равенство $id_B \circ f = f$.

Замечание 1.2. Часто вместо id_A пишут 1_A.

Пример 1.3. Категория множеств Set. Её объектами являются произвольные множества $A, B, C \ldots$, а морфизмами – упорядоченные тройки вида $(A, \mathfrak{f}, B)$, где $\mathfrak{f}$ – функция из A в B (определённая на всех элементах A). Операции dom и cod задаются равенствами:

$$dom(A, \mathfrak{f}, B) = A$$

$$cod(A, \mathfrak{f}, B) = B$$

Тождественный морфизм id_A есть по определению $(A, \mathfrak{id}_A, A)$, где $\mathfrak{id}_A$ есть тождественная функция из A в A.
Композицией морфизмов $(A, \mathfrak{f}, B)$ и $(B, \mathfrak{g}, C)$ будет морфизм $(A, \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}, C)$.

В принципе, можно было бы определить морфизмы как пары $(\mathfrak{f}, B)$, потому что начало однозначно находится по $\mathfrak{f}$ (это область определения $\mathfrak{f}$). Но конец надо указывать явно, так как по функции $\mathfrak{f}$ он однозначно не находится (множество значений $\mathfrak{f}$ может быть строго меньше B). Например, функцию, определённую на всех действительных числах и тождественно равную нулю, можно считать действующей во множество натуральных чисел, рациональных чисел, или действительных чисел, по желанию.

Соглашение 1.4. Совокупность всех объектов категории K будем обозначать $Ob(\mathsf{K})$. Совокупность всех стрелок категории K будем обозначать $Mor(\mathsf{K})$. Совокупность всех стрелок из A в B в категории K будем обозначать $\mathsf{K}(A, B)$.

Замечание 1.5. Часто вместо $\mathsf{K}(A, B)$ пишут $Hom_{\mathsf{K}}(A, B)$.

С теоретико-множественной точки зрения совокупность объектов Set (то есть, совокупность всех множеств) не является множеством, она слишком велика. То же относится и к совокупности морфизмов Set.

Определение 1.6. Категория K называется *локально малой*, если $\mathsf{K}(A, B)$ является множеством для любых A и B.

Определение 1.7. Категория K называется *малой*, если $Mor(\mathsf{K})$ (то есть, объединение всех $\mathsf{K}(A, B)$) является множеством.

Всякая малая категория является локально малой. Обратное неверно. Set является локально малой, но не является малой.

Совокупность объектов $Ob(\mathsf{K})$ малой категории тоже является множеством, потому что объектов „не больше“, чем морфизмов. В самом деле, каждому объекту A соответствует его единичный морфизм id_A, причём разным объектам соответствуют разные единичные морфизмы (из $id_A = id_B$ следует $dom(id_A) = dom(id_B)$, поэтому $A = B$).

Замечание 1.8. Категории приходится делить на „большие“и „малые“ по техническим причинам, чтобы избежать парадоксов, близких к парадоксу Кантора из теории множеств.

Определение 1.9. *Полугруппа с единицей* – это множество M (будем обозначать его элементы $f, g, h \dots$), на котором задана двухместная операция умножения $g \circ f$ и выделен элемент e (двусторонняя единица), причём для любых элементов f, g, h выполнены равенства:

1. Ассоциативность умножения.
   $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

2. Свойства двусторонней единицы.
   $f \circ e = f$
   $e \circ f = f$

Пример 1.10. Примеры полугрупп с единицей:

1. Любая группа.

2. Множество натуральных чисел с операцией умножения.

3. Множество натуральных чисел с операцией сложения (двусторонней единицей будет 0).

4. Множество слов в некотором алфавите с операцией приписывания (двусторонней единицей будет пустое слово).

Любая малая категория K с единственным объектом (обозначим его A) задаёт некоторую полугруппу с единицей. Элементами этой полугруппы будут стрелки категории (то есть, множество M – это $Mor(\mathsf{K})$). Любая стрелка $f \in \mathsf{K}(A, A)$, поэтому существует композиция любых двух стрелок, операция композиции ассоциативна и существует двусторонняя единица id_A. Обратно, любую полугруппу с единицей можно превратить в малую категорию с единственным объектом (надо выбрать произвольный объект A и положить $dom(f) = cod(f) = A$ для всех элементов полугруппы).

Определение 1.11. Множество M называется *предупорядоченным* (или просто *предпорядком*), если на нём задано рефлексивное транзитивное отношение $\lesssim$ (*отношение предпорядка*). Это значит, что для любых элементов множества (будем их обозначать $A, B, C \dots$) выполнены следующие условия

1. Рефлексивность.
   $A \lesssim A$

2. Транзитивность.
   $A \lesssim B$ и $B \lesssim C$ влечёт $A \lesssim C$

Если выполнено также свойство антисимметричности

$$A \lesssim B \text{ и } B \lesssim A \text{ влечёт } A = B$$

то множество называется *частично упорядоченным* (или просто *частичным порядком*).

Определение 1.12. Категория K называется *категорией предпорядка*, если $\mathsf{K}(A, B)$ содержит не больше одной стрелки для любых A и B. Иными словами, если у двух стрелок одинаковое начало и одинаковый конец, то эти стрелки равны.

Любая малая категория предпорядка задаёт некоторое предупорядоченное множество. Его элементами будут объекты категории (то есть, множество M – это $Ob(\mathsf{K})$), а отношение предпорядка задаётся условием

$$A \lesssim B \text{ если и только если существует стрелка из } A \text{ в } B$$

Рефлексивность следует из наличия тождественных стрелок id_A, а транзитивность – из наличия композиции стрелок. Обратно, любое предупорядоченное множество можно превратить в малую категорию предпорядка. Её объектами будут элементы этого множества, надо лишь для любых объектов со свойством $A \lesssim B$ произвольным образом выбрать единственную стрелку из A в B. Например, можно считать стрелкой саму упорядоченную пару (A, B). В этом случае будет

$$id_A = (A, A)$$

$$(B, C) \circ (A, B) = (A, C)$$

Независимо от конкретного выбора стрелок, верны ассоциативность композиции и свойства тождества, потому что любые две стрелки с одинаковым началом и одинаковым концом равны. Например, если $f\colon A \to B$, то $f \circ id_A\colon A \to B$, поэтому $f \circ id_A = f$.

Определение 1.13. Стрелка $f\colon A \to B$ называется *изоморфизмом*, если существует стрелка $g\colon B \to A$ со свойствами

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

Такая стрелка g называется *обратной* к f.

Обратная стрелка может быть только одна. Предположив, что к f есть две обратные стрелки g_1 и g_2, мы получим

$$g_1 \circ f \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$$

$$g_1 \circ f \circ g_2 = g_1 \circ id_B = g_1$$

поэтому $g_1 = g_2$. Обратную стрелку к f, если она существует, будем обозначать f^{-1}.

Определение 1.14. Объекты A и B называются *изоморфными*, если между ними есть изоморфизм. Это обозначается $A \cong B$.

Упражнение 1.15. Композиция двух изоморфизмов является изоморфизмом. Тождественные стрелки являются изоморфизмами. Стрелка, обратная к изоморфизму, является изоморфизмом. Для любых A и B

1. $A \cong A$
2. $A \cong B$ влечёт $B \cong A$
3. $A \cong B$ и $B \cong C$ влечёт $A \cong C$

Пример 1.16. В Set два множества A и B изоморфны $\Leftrightarrow$ они равномощны.

Пример 1.17. Малая категория с одним объектом задаёт группу $\Leftrightarrow$ все её стрелки являются изоморфизмами (то есть, обратимы).

Пример 1.18. Малая категория предпорядка задаёт частичный порядок $\Leftrightarrow$ изоморфные объекты равны. Действительно, объекты A и B в категории предпорядка изоморфны $\Leftrightarrow$ существуют стрелки $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$, то есть $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$ (равенства $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$ выполняются автоматически, поскольку любые две стрелки с одинаковым началом и одинаковым концом равны).

Глава 2

Другое определение категории

Определение 1.1 является стандартным, но реально мы пользуемся немного другим.

Определение 2.1. На практике категория обычно задаётся следующим набором данных:

1. Совокупностью *объектов*, которые мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C \ldots$
2. Совокупностью *протоморфизмов*, или *протострелок*, которые мы будем обозначать готическими буквами $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \ldots$
3. Трёхместным отношением $\mathfrak{f}\colon A \to B$ (или $A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B$), которое означает „$\mathfrak{f}$ можно считать стрелкой из A в B“. По протоморфизму его начало и конец не обязаны определяться однозначно, в этом разница.
4. Операцией *композиции*, которая по каждой паре протострелок $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$, расположенных так
$$A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B \xrightarrow{\mathfrak{g}} C$$
выдаёт некоторую протострелку $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ (она называется *композицией* $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$), причём верно $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}\colon A \to C$.
5. Операцией $\mathfrak{id}$, которая по каждому объекту A выдаёт некоторую протострелку $\mathfrak{id}_A$, причём верно $\mathfrak{id}_A\colon A \to A$.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции.
   Для любой тройки протострелок $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, расположенных так
   $$A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B \xrightarrow{\mathfrak{g}} C \xrightarrow{\mathfrak{h}} D$$
   выполнено равенство $(\mathfrak{h} \circ \mathfrak{g}) \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{h} \circ (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f})$.

2. Свойства тождества.
   Для любой протострелки $\mathfrak{f}\colon A \to B$ выполнено равенство $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{id}_A = \mathfrak{f}$.
   Для любой протострелки $\mathfrak{f}\colon A \to B$ выполнено равенство $\mathfrak{id}_B \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$.

Подчёркиваю, единственное отличие от определения 1.1 в том, что по протоморфизму его начало и конец не обязаны определяться однозначно.

Имея такой набор данных, мы можем построить категорию в смысле определения 1.1. В качестве морфизмов из A в B берутся упорядоченные тройки $(A, \mathfrak{f}, B)$, для которых верно $\mathfrak{f}\colon A \to B$. При этом:

$$dom(A, \mathfrak{f}, B) = A$$

$$cod(A, \mathfrak{f}, B) = B$$

$$id_A = (A, \mathfrak{id}_A, A)$$

$$(B, \mathfrak{g}, C) \circ (A, \mathfrak{f}, B) = (A, \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}, C)$$

Именно так мы строили категорию Set, протоморфизмами в этом случае были теоретико-множественные функции. В примере 1.11 мы строили категорию по предупорядоченному множеству, в этом случае достаточно взять единственный протоморфизм $*\colon A \to B$ для всех A и B со свойством $A \lesssim B$.

Замечание 2.2. Слово „протоморфизм“ и определение 14.12 взяты из книги Freyd, Scedrov „Categories, Allegories“.

Глава 3

Функторы

Функторы – это правильные отображения категорий друг в друга. Частными случаями функторов являются монотонные отображения упорядоченных множеств, а также гомоморфизмы полугрупп с единицей (в том числе гомоморфизмы групп).

Определение 3.1. *Функтор* F из категории K_1 в категорию K_2 – это пара отображений (обозначаемых одной буквой)

$$F\colon Ob(\mathsf{K}_1) \to Ob(\mathsf{K}_2)$$

$$F\colon Mor(\mathsf{K}_1) \to Mor(\mathsf{K}_2)$$

первое из которых отображает объекты K_1 в объекты K_2, а второе – морфизмы K_1 в морфизмы K_2, причём сохраняются dom, cod, id и композиция. Это значит, что для любых f, g, A, B, C из категории K_1 выполнено:

1. $f\colon A \to B$ влечёт $F(f)\colon F(A) \to F(B)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ влечёт $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Соглашение 3.2. Функторы будем обозначать буквами F, G, H.
Если функтор F действует из категории K_1 в категорию K_2, будем это записывать как $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ или $\mathsf{K}_1 \xrightarrow{F} \mathsf{K}_2$.

Пример 3.3. Если K_1 и K_2 – малые категории с одним объектом каждая, то функторы между ними взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам соответствующих полугрупп с единицей. Функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ переводит единственный объект K_1 в единственный объект K_2, сохраняет композицию стрелок и двустороннюю единицу. Таким образом, отображение $F\colon Mor(\mathsf{K}_1) \to Mor(\mathsf{K}_2)$ является гомоморфизмом полугрупп с единицей.

Пример 3.4. Если K_1 и K_2 – малые категории предпорядка, то функторы между ними взаимно однозначно соответствуют монотонным отображениям соответствующих предпорядков. Если $A \lesssim B$, то $F(A) \lesssim F(B)$, поскольку единственная стрелка из A в B переходит в единственную стрелку из $F(A)$ в $F(B)$. Обратно, любое монотонное отображение $Ob(\mathsf{K}_1)$ в $Ob(\mathsf{K}_2)$ превращается в функтор единственно возможным способом (проверьте детали).

Упражнение 3.5. Проверьте, что функторы переводят изоморфизмы в изоморфизмы и обратные стрелки в обратные.

Определение 3.6. Каждой категории K сопоставляется *тождественный функтор* $Id_{\mathsf{K}}\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$, действующий так:

$$Id_{\mathsf{K}}(A) = A$$

$$Id_{\mathsf{K}}(f) = f$$

для любых A и f категории K.

Определение 3.7. Каждой паре функторов F и G, расположенных так

$$\mathsf{K}_1 \xrightarrow{F} \mathsf{K}_2 \xrightarrow{G} \mathsf{K}_3$$

сопоставляется их *композиция* $G \circ F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_3$, которая определяется равенствами:

$$(G \circ F)(A) = G(F(A))$$

$$(G \circ F)(f) = G(F(f))$$

для любых A и f категории K_1.

Определение 3.8. Категория Cat имеет в качестве объектов все малые категории, а в качестве протоморфизмов – функторы.

Замечание 3.9. Морфизмами будут упорядоченные тройки вида $(\mathsf{K}_1, F, \mathsf{K}_2)$, где $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$. Здесь ситуация примерно такая, как при построении категории Set (только хуже) – по функтору (то есть, паре отображений) категории K_1 и K_2 восстановить в общем случае нельзя, поэтому их надо указывать явно.

Упражнение 3.10. Проверьте, что категория Cat локально малая.

Замечание 3.11. Попытка образовать категорию всех категорий (не только малых) приводит к парадоксу, близкому к парадоксу Кантора.

Определение 3.12. Функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ называется *изоморфизмом категорий*, если к нему существует (однозначно определённый) обратный функтор $F^{-1}\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$ такой, что:

$$F \circ F^{-1} = Id_{\mathsf{K}_2}$$

$$F^{-1} \circ F = Id_{\mathsf{K}_1}$$

В этом случае категории K_1 и K_2 называются *изоморфными* (пишется $\mathsf{K}_1 \cong \mathsf{K}_2$).

Для малых категорий это определение даёт в точности изоморфизм в категории Cat.

Глава 4

Конкретные категории

Часто встречаются „категории множеств с некоторой дополнительной структурой". Например, объектами категории Grp являются произвольные группы, а протоморфизмами – гомоморфизмы групп. Точно так же можно рассматривать категорию линейных пространств и линейных отображений, категорию топологических пространств и непрерывных отображений и т.д. Не обязательно брать такие большие категории. Можно взять несколько (каких угодно) топологических пространств и их непрерывные отображения друг в друга, это будет категория. Не обязательно брать и все отображения. Если взять только сюръективные или только инъективные отображения, всё равно получится категория, потому что композиция сюръективных (инъективных) отображений тоже сюръективна (инъективна) и все тождественные отображения сюръективны (инъективны). Общим для всех таких категорий является наличие „хорошего" функтора в категорию множеств Set. Этот функтор по любому объекту (группе, линейному пространству, топологическому пространству и т.д.) выдаёт его множество-носитель.

Определение 4.1. Функтор $G\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ называется *строгим* (по-английски пишут faithful), если для любых A, B, f, g из категории K_1 верно следующее утверждение

$$f\colon A \to B \wedge g\colon A \to B \wedge G(f) = G(g) \text{ влечёт } f = g$$

Иными словами, G отображает $\mathsf{K}_1(A, B)$ в $\mathsf{K}_2(G(A), G(B))$ инъективно для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$.

Содержательно, строгость означает, что стрелка f определена однозначно, если мы знаем $dom(f), cod(f)$ и $G(f)$.

Определение 4.2. *Конкретная категория* задаётся следующим набором данных:

1. Категория K.

2. Строгий функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, этот функтор называется *стирающим* или *забывающим* функтором.

Заметим, что при нашем определении конкретная категория – это не категория, а пара „категория и функтор“.

Все перечисленные выше категории „множеств с дополнительной структурой“ являются конкретными, если в качестве стирающих функторов брать функторы „множества-носителя“. Рассмотрим подробнее категорию Grp. Каждой группе Gr соответствует её множество-носитель $G(Gr)$. Гомоморфизмы групп задаются как отображения множеств-носителей, сохраняющие дополнительную структуру (умножение и двустороннюю единицу). Гомоморфизм полностью определён, если известно соответствующее отображение множеств-носителей, из этого следует строгость G. Композиция гомоморфизмов определяется как композиция соответствующих отображений множеств-носителей, поэтому G является функтором.

Теорема 4.3. *Для любой малой категории* K *существует строгий функтор* $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$.

Доказательство. Определим функтор G следующими равенствами:

$$G(A) = \{f \in Mor(\mathsf{K})\colon cod(f) = A\}$$

$$G(g)(f) = g \circ f$$

Таким образом, каждому объекту A сопоставляется множество $G(A)$ всех стрелок с концом A. Каждой стрелке $g\colon A \to B$ сопоставляется функция $G(g)\colon G(A) \to G(B)$, которая по любому элементу $f \in G(A)$ выдаёт $g \circ f \in G(B)$. Стрелка g однозначно определяется по A и $G(g)$, поскольку $g = G(g)(id_A)$, из этого следует строгость G.

□

В частном случае, когда категория K задаёт группу (то есть, в K один объект и все стрелки являются изоморфизмами), мы получаем известную *теорему Кэли*: любая группа может быть представлена как группа перестановок некоторого множества (а именно, множества её элементов).

Замечание 4.4. Уже локально малую категорию не всегда можно сделать конкретной (выбрав подходящий функтор в Set). Но простейший естественный контрпример, приходящий автору на ум, содержит слово „гомотопия“.

Глава 5

Диаграммы

Различные утверждения о категориях удобно представлять с помощью картинок определённого вида, называемых *диаграммами*.

Определение 5.1. *Диаграмма* в категории K – это ориентированный граф, вершинам которого сопоставлены некоторые объекты K, а рёбрам – некоторые морфизмы K.

Определение 5.2. *Путём* в диаграмме называется последовательность стрелок, расположенных так

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n$$

где $n \geqslant 1$. Каждому пути сопоставим композицию всех входящих в него стрелок $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$.
Диаграмма называется *коммутативной*, если для любых вершин A и B в диаграмме любые два пути из A в B дают равные композиции стрелок.

Пример 5.3. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

означает, что $g \circ f = h$.

Пример 5.4. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "l"] & D \end{tikzcd}$$

означает, что $g \circ f = l \circ h$.

Пример 5.5. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "f"] \end{tikzcd}$$

означает, что $f = f \circ f = f \circ f \circ f = \dots$

Упражнение 5.6. Проверьте, что в категориях предпорядка все диаграммы коммутативны.

Пример 5.7. Свойства тождества выражаются следующими коммутативными диаграммами:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ A \arrow[u, "id_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[d, "id_B"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Соглашение 5.8. Если какая-то стрелка в диаграмме нарисована пунктиром, это означает „эта стрелка – единственная, которая делает диаграмму коммутативной, находясь в указанном положении“.

Пример 5.9. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dotted] & A \end{tikzcd}$$

означает „существует ровно одна стрелка из объекта B в объект A“.

Пример 5.10. Диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "h"] &
\end{tikzcd}
$$

означает „существует единственная стрелка h со свойством $f_1 \circ h = g_1 \wedge f_2 \circ h = g_2$“.

Замечание 5.11. В главе 16 мы немного ослабим определение коммутативности диаграммы.

Глава 6

Естественные преобразования

В этой главе будет мало примеров, но в следующей мы всё наверстаем. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ и $G\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$.

Определение 6.1. *Естественным преобразованием* τ функтора F в функтор G называется отображение

$$\tau\colon Ob(\mathsf{K}_1) \to Mor(\mathsf{K}_2)$$

выдающее по каждому объекту $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ стрелку $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$, причём для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $f\colon A \to B$ должна быть коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

В этом случае пишут $\tau\colon F \to G$ или $F \xrightarrow{\tau} G$.

Определение 6.2. Каждому функтору $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ сопоставляется *тождественное преобразование* $id_F\colon F \to F$, которое по каждому объекту $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ выдаёт стрелку $id_{F(A)}\colon F(A) \to F(A)$.

Упражнение 6.3. Проверьте, что id_F является естественным преобразованием, доказав коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "id_{F(A)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "id_{F(B)}"] & F(B) \end{tikzcd}$$

Определение 6.4. Каждой паре естественных преобразований $\tau\colon F \to G$ и $\sigma\colon G \to H$ (где F, G, H – функторы из K_1 в K_2) сопоставляется их *композиция* $\sigma \circ \tau\colon F \to H$, которая по каждому объекту $A \in Ob(K_1)$ выдаёт стрелку $\sigma_A \circ \tau_A$.

Упражнение 6.5. Проверьте, что $\sigma \circ \tau$ является естественным преобразованием, доказав коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \arrow[r, "\sigma_B"] & H(B) \end{tikzcd}$$

(оба квадрата коммутативны, надо доказать коммутативность внешнего прямоугольника).

Определение 6.6. Пусть K_1 и K_2 – малые категории. *Категорией функторов* $\mathsf{K}_2^{\mathsf{K}_1}$ называется категория, объектами которой являются функторы $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$, а протоморфизмами – естественные преобразования
$\tau\colon F \to G$.

Пример 6.7. Пусть K_1 и K_2 – малые категории предпорядка. Соответствующие отношения предпорядка на $Ob(\mathsf{K}_1)$ и $Ob(\mathsf{K}_2)$ обозначим $\lesssim_1$ и $\lesssim_2$. В этом случае $\mathsf{K}_2^{\mathsf{K}_1}$ тоже является малой категорией предпорядка. С точностью до изоморфизма категорий, её можно описать так: объектами являются монотонные отображения $Ob(\mathsf{K}_1)$ в $Ob(\mathsf{K}_2)$ (обозначим их $F, G, H \ldots$), при этом порядок $F \lesssim G$ на множестве отображений задаётся условием

$$F \lesssim G \Leftrightarrow \text{для всякого } A \in Ob(\mathsf{K}_1) \text{ верно } F(A) \lesssim_2 G(A)$$

Действительно, монотонные отображения взаимно однозначно соответствуют функторам. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ должно сопоставлять каждому $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ стрелку $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$. Такие стрелки существуют (и однозначно определены) $\Leftrightarrow$ для всякого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ верно $F(A) \lesssim_2 G(A)$. Таким образом, между любыми двумя функторами в данном случае может быть не больше одного естественного преобразования.

Упражнение 6.8. Проверьте, что для малых K_1 и K_2 категория $\mathsf{K}_2^{\mathsf{K}_1}$ тоже малая.

Определение 6.9. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ называется *естественным изоморфизмом*, если существует (однозначно определённое) обратное преобразование $\tau^{-1}\colon G \to F$, для которого выполнены условия:

$$\tau \circ \tau^{-1} = id_G$$

$$\tau^{-1} \circ \tau = id_F$$

В этом случае функторы F и G называются *естественно изоморфными* или просто *изоморфными* (пишется $F \cong G$).

Упражнение 6.10. Проверьте, что $\tau\colon F \to G$ является естественным изоморфизмом $\Leftrightarrow$ для любого A стрелка $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$ является изоморфизмом.

Глава 7

Топосы вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$

Для „больших“ категорий существование категории функторов очевидно не всегда. Существует ли категория $\mathsf{Set}^{\mathsf{Set}}$? Если да, то она должна быть очень „большой“. Один важный частный случай мы рассмотрим отдельно.

Соглашение 7.1. Мы будем считать, что для любой малой категории K существует категория $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$. Категорию K в этой ситуации будем называть *шкалой*.

Упражнение 7.2. Проверьте, что все такие категории $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ локально малы.

Категории вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K малая, являются важными примерами так называемых *топосов*. Неформально, топосы – это категории, сильно похожие на Set. Объекты любого топоса можно воспринимать как некие „обобщённые“ или „нестандартные“ множества.

Пример 7.3. Возьмём в качестве шкалы K следующую малую категорию предпорядка (на диаграмме показаны все её объекты и все стрелки)

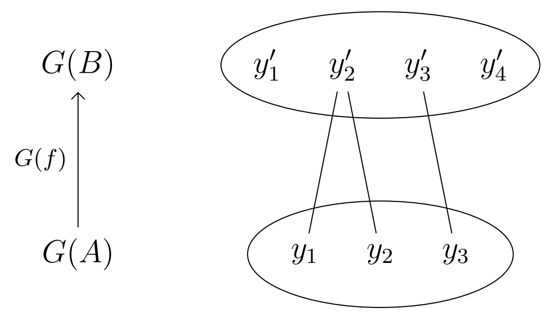
$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop left, "id_B"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"] \end{tikzcd}$$

Шкалу K будем воспринимать как „время“. Есть два момента времени A и B, причём A предшествует B (поскольку $A \lesssim B$). Функтор

$G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ определяется парой множеств $G(A)$ и $G(B)$, а также функцией между ними $G(f)$.

$$\begin{tikzcd} G(B) \\ G(A) \arrow[u, "G(f)"] \end{tikzcd}$$

Например, пусть множество $G(A)$ состоит из трёх элементов $\{y_1, y_2, y_3\}$, множество $G(B)$ состоит их четырёх элементов $\{y'_1, y'_2, y'_3, y'_4\}$, а функция $G(f)$ отображает $G(A)$ в $G(B)$ как показано на картинке:



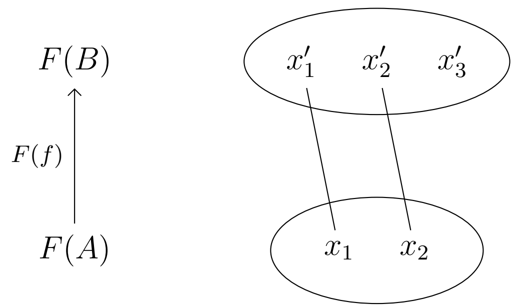
Это значит, что

$$G(f)(y_1) = y'_2$$

$$G(f)(y_2) = y'_2$$

$$G(f)(y_3) = y'_3$$

Содержательно, функтор G – это „множество, меняющееся со временем“. В момент времени A мы видим элементы y_1, y_2, y_3. В момент времени B выясняется, что y_1 равен y_2 (о чём в момент времени A мы ещё не знали) и эти элементы „слипаются“ в один элемент y'_2. Элемент y_3 остаётся обособленным и переходит в элемент y'_3. Вдобавок, появляются два новых элемента y'_1 и y'_4, о существовании которых в момент времени A мы не знали. Рассмотрим другой функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, выглядящий так:



Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ определяется парой функций

$$\tau_A\colon F(A) \to G(A)$$

$$\tau_B\colon F(B) \to G(B)$$

для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \\
F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Например, пусть

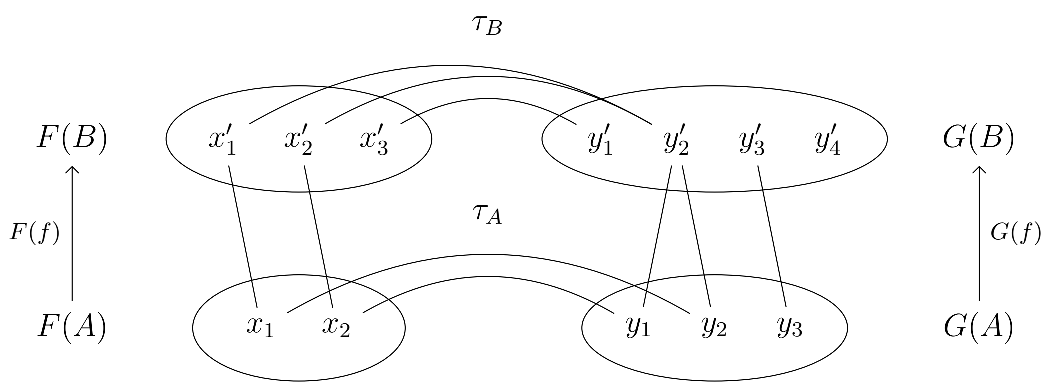
$$\tau_B(x'_1) = y'_2$$

$$\tau_B(x'_2) = y'_2$$

$$\tau_B(x'_3) = y'_1$$

$$\tau_A(x_1) = y_2$$

$$\tau_A(x_2) = y_1$$



Коммутативность диаграммы означает равенство следующих функций

$$\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$$

Это значит, что для любого $x \in F(A)$ выполнено равенство

$$\tau_B(F(f)(x)) = G(f)(\tau_A(x))$$

Иными словами

$$F(f)(x) = x' \wedge \tau_B(x') = y' \wedge \tau_A(x) = y \text{ влечёт } G(f)(y) = y'$$

для любых $x \in F(A)$, $x' \in F(B)$, $y \in G(A)$ и $y' \in G(B)$.

Определение 7.4. Пусть M – полугруппа с единицей. M*-множеством* называется множество-носитель X вместе с заданным на нём *действием* полугруппы M. Это значит, что для любых $f \in M$ и $x \in X$ определён некоторый элемент $f(x) \in X$, причём выполнены следующие условия:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$e(x) = x$$

для любых $f, g \in M$ и $x \in X$.

Содержательно, каждому элементу f полугруппы M сопоставляется функция из X в X. Эта функция переводит x в $f(x)$. Условия означают, что произведение $g \circ f$ переходит в композицию соответствующих функций, а двусторонняя единица e – в тождественную функцию id_X.

Определение 7.5. Пусть даны два M-множества с носителями X и Y. *Гомоморфизмом M-множеств* называется функция $t\colon X \to Y$, сохраняющая действие. Это значит, что

$$t(f(x)) = f(t(x))$$

для любых $f \in M$ и $x \in X$.

Пример 7.6. Возьмём в качестве шкалы K малую категорию с одним объектом A, обозначим буквой M соответствующую полугруппу с единицей. Таким образом, M – это $Mor(\mathsf{K})$ с композицией в качестве умножения и двусторонней единицей id_A. Категорию $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ с точностью до изоморфизма категорий можно описать следующим образом: её объектами являются M-множества, а протострелками – их гомоморфизмы. Действительно, каждый функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ определяется множеством $F(A)$ и отображением $F\colon Mor(\mathsf{K}) \to Mor(\mathsf{Set})$, переводящим каждую стрелку $f\colon A \to A$ в стрелку $F(f)\colon F(A) \to F(A)$. Это отображение задаёт действие M на носителе $F(A)$ по правилу

$$f(x) = F(f)(x)$$

для любых $f \in M$ и $x \in F(A)$. Функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ задаёт действие M на носителе $G(A)$ по правилу

$$f(y) = G(f)(y)$$

для любых $f \in M$ и $y \in G(A)$. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ определяется функцией $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$, которая является гомоморфизмом M-множеств.

Упражнение 7.7. Проверьте детали, посмотрев на следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \\ F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

Пример 7.8. Возьмём в качестве шкалы K следующую категорию (на диаграмме показаны все её объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

Функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ задаётся парой множеств $F(A)$ и $F(B)$ и парой функций между ними

$$F(A) \underset{F(g)}{\overset{F(f)}{\rightrightarrows}} F(B)$$

Как множества, так и функции совершенно произвольны. Оказывается, есть взаимно однозначное соответствие между такими функторами и ориентированными графами. Рассмотрим для примера следующий граф

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "e"] & Y \arrow[d, "b"] \\ Z \arrow[r, "d"] & V \end{tikzcd}$$

Сопоставим ему функтор следующим образом. В качестве $F(A)$ возьмём множество рёбер $\{a, b, c, d, e\}$. В качестве $F(B)$ возьмём множество вершин $\{X, Y, Z, V\}$. В качестве $F(f)$ и $F(g)$ возьмём функции, сопоставляющие каждому ребру его начало и конец, соответственно. Естественным преобразованиям функторов соответствуют некие „гомоморфизмы графов“, отображающие вершины одного графа в вершины другого, а рёбра в рёбра с сохранением начал и концов. Категорию графов и их гомоморфизмов в дальнейшем будем обозначать Grph.

Глава 8

Терминальные объекты, элементы

Определение 8.1. Объект $A \in Ob(\mathsf{K})$ называется *терминальным* в категории K, если для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$ существует ровно одна стрелка из B в A.

$$B \dashrightarrow A$$

Пример 8.2. В Set терминальными объектами являются одноэлементные множества и только они. Единственная функция из множества B в одноэлементное множество A переводит все элементы B в единственный элемент A.

Теорема 8.3. *Все терминальные объекты изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – терминальные объекты в некоторой категории. Есть единственная стрелка $f\colon A_1 \to A_2$ и единственная стрелка $g\colon A_2 \to A_1$.

$$A_1 \overset{f}{\dashrightarrow} A_2 \qquad\qquad A_2 \overset{g}{\dashrightarrow} A_1$$

Композиция $g \circ f\colon A_1 \to A_1$ должна быть единственной стрелкой из A_1 в A_1, а композиция $f \circ g\colon A_2 \to A_2$ должна быть единственной стрелкой из A_2 в A_2. Но есть стрелки $id_{A_1}\colon A_1 \to A_1$ и $id_{A_2}\colon A_2 \to A_2$, поэтому

$$g \circ f = id_{A_1}$$

$$f \circ g = id_{A_2}$$

□

Пример 8.4. В Cat терминальными объектами являются категории с единственным объектом и единственной (тождественной) стрелкой

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "id_X"] \end{tikzcd}$$

Единственный функтор из категории K в терминальную категорию переводит все объекты K в единственный объект терминальной категории, а все стрелки K в единственную стрелку.

Пример 8.5. В категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ терминальные объекты – это функторы F, для которых множества $F(A)$ одноэлементные при любых $A \in Ob(K)$, а стрелки $F(f)$ единственно возможные между одноэлементными множествами.

Пример 8.6. Пусть K – категория предпорядка. Объект A является терминальным $\Leftrightarrow$ A является наибольшим элементом относительно $\lesssim$. В самом деле, наличие (необходимо единственной в категории предпорядка) стрелки из любого B в A означает, что $B \lesssim A$ для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$.

Замечание 8.7. Если предпорядок не является частичным порядком, наибольших элементов может быть несколько. Например, отношение $A \lesssim B$, тождественно истинное для любых A и B, является предпорядком, в котором все элементы наибольшие.

Соглашение 8.8. Если предполагается, что в категории выбран какой-то терминальный объект (из всех возможных), будем обозначать его символом 1. Единственную стрелку из объекта B в 1 будем обозначать $!_B$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dotted, "!_B"] & 1 \end{tikzcd}$$

Упражнение 8.9. Проверьте, что $!_1 = id_1$.

Упражнение 8.10. Проверьте, что для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено $!_B \circ f = !_A$.

Теорема 8.11. *Пусть стрелка $f\colon A \to 1$ является изоморфизмом. Тогда объект A тоже терминальный и единственная стрелка из B в A выглядит так $f^{-1} \circ !_B$.*

Доказательство. Легко проверить, что $f^{-1} \circ !_B\colon B \to A$. Докажем единственность. Пусть есть некоторая стрелка $h\colon B \to A$. Тогда $f \circ h\colon B \to 1$, поэтому

$$f \circ h = !_B$$

следовательно

$$h = f^{-1} \circ !_B$$

□

Следствие 8.12. *Любой объект, изоморфный терминальному, сам является терминальным.*

Соглашение 8.13. Будем считать, что в Set выбрано в качестве 1 некоторое одноэлементное множество $\{*\}$ с единственным элементом $*$ (конкретный выбор совершенно не важен).

Определение 8.14. *Элементами*, или *точками* объекта B называются стрелки вида $f\colon 1 \to B$.

Замечание 8.15. Стрелка $f\colon A \to B$ переводит элементы A в элементы B следующим образом: каждый элемент $g\colon 1 \to A$ переходит в элемент $f \circ g\colon 1 \to B$.

Пример 8.16. В Set точки множества B взаимно однозначно соответствуют элементам B в обычном теоретико-множественном смысле. Действительно, функция из $\{*\}$ в B однозначно определяется элементом B, в который переходит $*$.

Пример 8.17. Пусть даны два множества A и B, точка $g\colon \{*\} \to A$, переводящая $*$ в некоторое $a \in A$ и функция $f\colon A \to B$. В этом случае $f \circ g\colon \{*\} \to B$ переводит $*$ в $f(a) \in B$. Это показывает, как теоретико-множественное применение функции к аргументу изображается с помощью композиции.

Пример 8.18. В категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ в качестве 1 выберем функтор $1\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, для которого $1(A) = \{*\}$ для всех $A \in Ob(\mathsf{K})$. Пусть дан функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Элементы функтора G – это естественные преобразования $\tau\colon 1 \to G$. Каждая стрелка (в Set) $\tau_A\colon \{*\} \to G(A)$ выделяет элемент множества $G(A)$. Условия естественности

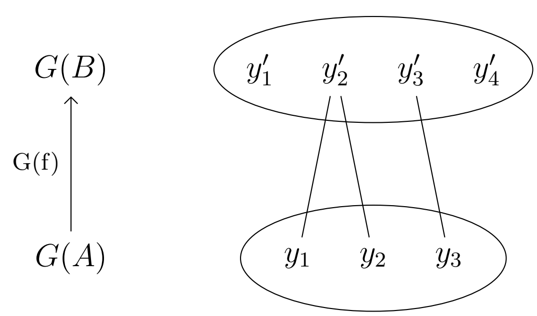
$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \\
\{*\} \arrow[u, dotted, "!_{\{*\}}"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

означают, что для каждой стрелки $f\colon A \to B$ соответствующая функция $G(f)\colon G(A) \to G(B)$ переводит выделенный элемент множества $G(A)$ в выделенный элемент множества $G(B)$.

Пример 8.19. Рассмотрим категорию $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ со шкалой K

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[loop left, "id_B"] \\
A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}$$

и функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, имеющий вид



Элементы функтора G – это пары элементов $y \in G(A), y' \in G(B)$ со свойством $G(f)(y) = y'$. В данном случае элементов три, они задаются парами $(y_1, y'_2), (y_2, y'_2)$ и (y_3, y'_3). Содержательно, точка в данном случае – это „мировая линия точки во времени“.

Замечание 8.20. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ переводит элементы функтора F в элементы функтора G. Элемент $\sigma\colon 1 \to F$ переходит в элемент $\tau \circ \sigma\colon 1 \to G$. Тут полезно ещё раз посмотреть на картинку на стр. 28.

Пример 8.21. Пусть K – малая категория с одним объектом A, задающая полугруппу с единицей M. Функтор $1\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ определяет M-множество с носителем $\{*\}$ и действием

$$f(*) = *$$

для всякого $f \in M$. Пусть дан функтор $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Он задаёт
M-множество с носителем $G(A)$ и действием

$$f(y) = G(f)(y)$$

для любых $f \in M$ и $y \in G(A)$. В этом случае элементы G соответствуют неподвижным элементам $G(A)$, то есть таким $y \in G(A)$, что $G(f)(y) = y$ для всех $f \in M$.

Упражнение 8.22. Проверьте детали, посмотрев на коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \\
\{*\} \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[u, dotted, "!_{\{*\}}"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Пример 8.23. В категории графов $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ над шкалой K (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

терминальный объект 1 имеет вид

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[loop above, "*"]
\end{tikzcd}$$

(это граф с одной вершиной и одним ребром, которое необходимо должно быть петлёй). Точка графа – это пара (V, r), где V – вершина графа, а r – петля, то есть ребро из V в V.

Пример 8.24. В категории групп Grp терминальным объектом 1 будет группа из одного единичного элемента $\{e\}$. Тут мы видим неприятную ситуацию – в каждой группе Gr с категорной точки зрения есть только один элемент. Действительно, есть ровно один гомоморфизм из $\{e\}$ в Gr (переводящий e в единичный элемент группы Gr). Таким образом, элементы множества-носителя группы Gr не соответствуют её категорным элементам. Тем не менее, определение 8.14 удобно и мы будем им пользоваться.

Глава 9

Двойственные категории

Для каждой категории K мы определим двойственную категорию K^{op}, в которой те же объекты, а стрелки формально обращены в противоположную сторону. Это значит, что стрелка из A в B в K считается стрелкой из B в A в K^{op}.

Определение 9.1. Для данной категории K *двойственная категория* K^{op} задаётся следующим набором данных:

1. Объекты $A, B, C \ldots$ в K^{op} те же, что в K.

2. Стрелки $f, g, h \ldots$ в K^{op} те же, что в K.

3. $f\colon B \to A$ в K^{op} в том и только том случае, если $f\colon A \to B$ в K.

4. Композиция $f \circ g$ в K^{op} по определению равна композиции $g \circ f$ в K (обратите внимание на разный порядок множителей).

5. Тождественные стрелки id_A в K^{op} те же, что в K.

Пример 9.2. Слева некоторая категория K, справа K^{op} (показаны все стрелки)

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[loop left, "id_C"] \\
B \arrow[u, "g"] \arrow[loop left, "id_B"] \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[uu, bend right, "g \circ f"'] \arrow[loop left, "id_A"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f \circ g"'] \arrow[loop right, "id_C"] \\
B \arrow[d, "f"] \arrow[loop right, "id_B"] \\
A \arrow[loop right, "id_A"]
\end{tikzcd}$$

Замечание 9.3. Операции *dom* и *cod* в K^{op} соответствуют *cod* и *dom* в категории K.

Упражнение 9.4. Проверьте, что $(\mathsf{K}^{op})^{op} = \mathsf{K}$ (это не просто изоморфизм категорий, а точное совпадение).

Упражнение 9.5. Проверьте, что изоморфизмы в K остаются изоморфизмами в K^{op}.

Каждому понятию теории категорий соответствует некоторое двойственное понятие, которое получается, если „сделать то же самое в двойственной категории“. Например, двойственным к понятию „терминальный объект“ является понятие „начальный объект“.

Определение 9.6. Объект $A \in Ob(\mathsf{K})$ называется *начальным объектом* в категории K, если для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$ существует ровно одна стрелка из A в B.

$$A \dashrightarrow B$$

Упражнение 9.7. Проверьте, что объект A является начальным в K $\Leftrightarrow$ объект A является терминальным в K^{op}.

Пример 9.8. В Set есть единственный начальный объект, это пустое множество $\emptyset$. Из $\emptyset$ в любое множество B есть ровно одна функция – с пустым графиком.

Пример 9.9. В любой категории вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ есть единственный начальный объект – это функтор F, для которого множество $F(A)$ пустое при любом $A \in Ob(K)$, а стрелки $F(f)$ единственно возможные между пустыми множествами.

Упражнение 9.10. Проверьте, что в категории предпорядка объект A является начальным $\Leftrightarrow$ A является наименьшим элементом относительно предпорядка $\lesssim$.

Упражнение 9.11. Проверьте, что в Set^{op} много начальных объектов и только один терминальный.

Упражнение 9.12. В категории групп начальный объект совпадает с терминальным (это группа из одного единичного элемента $\{e\}$).

Соглашение 9.13. Если предполагается, что в категории выбран какой-то начальный объект (из всех возможных), будем обозначать его символом 0. Единственную стрелку из объекта 0 в B будем обозначать $\Box_B \colon 0 \to B$.

$$0 \xrightarrow{\Box_B} B$$

Теорема 9.14. *Все начальные объекты изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – начальные объекты в некоторой категории. Есть единственная стрелка $f \colon A_1 \to A_2$ и единственная стрелка $g \colon A_2 \to A_1$.

$$A_1 \xrightarrow{f} A_2 \qquad A_2 \xrightarrow{g} A_1$$

Композиция $g \circ f \colon A_1 \to A_1$ должна быть единственной стрелкой из A_1 в A_1, а композиция $f \circ g \colon A_2 \to A_2$ должна быть единственной стрелкой из A_2 в A_2. Но есть стрелки $id_{A_1} \colon A_1 \to A_1$ и $id_{A_2} \colon A_2 \to A_2$, поэтому

$$g \circ f = id_{A_1}$$

$$f \circ g = id_{A_2}$$

□

Другое доказательство. Начальные объекты в K – это терминальные объекты в K^{op}. Мы знаем, что все терминальные объекты изоморфны. Изоморфизмы в K те же, что в K^{op}. Следовательно, все начальные объекты изоморфны.

□

Второе доказательство является примером применения так называемого *принципа двойственности.* Для каждого утверждения в языке теории категорий можно формально написать двойственное утверждение, заменив *dom* на *cod*, *cod* на *dom* и все композиции $g \circ f$ на $f \circ g$. Например, двойственным к утверждению „все терминальные объекты изоморфны“ будет утверждение „все начальные объекты изоморфны“.

Теорема 9.15. *(Принцип двойственности). Если некоторое утверждение, записанное в теоретико-категорном языке, верно для всех категорий, то и двойственное к нему утверждение верно для всех категорий.*

Доказательство. Если утверждение верно для некоторой категории K, то двойственное утверждение верно для категории K^{op}. Если утверждение верно для всех категорий K, то двойственное утверждение верно для всех категорий вида K^{op} (то есть, двойственных к чему-нибудь). Но любая категория двойственна к чему-нибудь в силу равенства
$\mathsf{K} = (\mathsf{K}^{op})^{op}$.
$\square$

Конечно, это не строгая формулировка и не строгое доказательство, не будем пытаться его формализовать (хотя это не особенно трудно). Подробное изложение можно найти в книге Маклейна „Категории для работающего математика“.

Упражнение 9.16. Пусть стрелка $f\colon A \to 0$ является изоморфизмом. Докажите, что объект A начальный и единственная стрелка из A в B выглядит так $\square_B \circ f$.

Следствие 9.17. *Объект, изоморфный начальному, сам является начальным.*

Следующее определение обобщает такое наблюдение: монотонное отображение упорядоченных множеств остаётся монотонным, если оба множества „перевернуть вверх ногами“.

Определение 9.18. Каждому функтору $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ сопоставим функтор $F^{op}\colon \mathsf{K}_1^{op} \to \mathsf{K}_2^{op}$, который действует на объектах и на стрелках точно так же, как F. Иными словами, F и F^{op} совпадают как протоморфизмы категорий, но у них разные начала и концы.

Упражнение 9.19. Проверьте, что F^{op} является функтором (то есть, сохраняет композицию, тождественные стрелки, *dom* и *cod*).

В старых книгах по теории категорий то, что мы называем функтором, называли *ковариантным функтором.* Использовали также понятие *контравариантный функтор.*

Определение 9.20. *Контравариантный функтор* F из категории K_1 в категорию K_2 – это пара отображений (обозначаемых одной буквой)

$$F\colon Ob(\mathsf{K}_1) \to Ob(\mathsf{K}_2)$$

$$F\colon Mor(\mathsf{K}_1) \to Mor(\mathsf{K}_2)$$

первое из которых отображает объекты K_1 в объекты K_2, а второе – морфизмы K_1 в морфизмы K_2, причём для любых f, g, A, B, C из категории K_1 выполнено:

1. $f\colon A \to B$ влечёт $F(f)\colon F(B) \to F(A)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ влечёт $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

Упражнение 9.21. Проверьте, что контравариантные функторы из K_1 в K_2 взаимно однозначно соответствуют обычным (ковариантным) функторам из K_1 в K_2^{op}.

Упражнение 9.22. Проверьте, что контравариантные функторы из K_1 в K_2 взаимно однозначно соответствуют обычным (ковариантным) функторам из K_1^{op} в K_2.

Глава 10

Произведения

Определение 10.1. *Произведение* двух объектов A и B в категории K задаётся следующим набором данных:

1. Объектом $C \in Ob(\mathsf{K})$.

2. Упорядоченной парой стрелок $f_1 \colon C \to A$ и $f_2 \colon C \to B$, эти стрелки называются *первой проекцией* и *второй проекцией*.

При этом требуется, чтобы для любого объекта $D \in Ob(\mathsf{K})$ и любой упорядоченной пары стрелок $g_1 \colon D \to A$ и $g_2 \colon D \to B$ существовала единственная стрелка из D в C, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Читатель, возможно, уже почувствовал, что все определения в теории категорий даются „с точностью до изоморфизма“. Это некоторый общий принцип, который можно строго доказать (формализовав язык теории категорий), но мы не будем. В частности, у пары объектов A и B может быть много произведений, но все они изоморфны между собой (мы это докажем).

Соглашение 10.2. Если предполагается, что для двух объектов A и B выбрано некоторое произведение (из всех возможных), объект произведения будем обозначать $A \times B$, а проекции $pr_1^{A\times B}$ и $pr_2^{A\times B}$. Если A и B ясны из контекста, будем обозначать проекции просто pr_1 и pr_2. Будем обозначать $\langle g_1, g_2 \rangle$ единственную стрелку, делающую коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle"] &
\end{tikzcd}$$

Мы видим, что

$$pr_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_1$$

$$pr_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_2$$

$$pr_1 \circ f = g_1 \wedge pr_2 \circ f = g_2 \text{ влечёт } f = \langle g_1, g_2 \rangle$$
для любой стрелки $f \colon D \to A \times B$

Пример 10.3. Произведением множеств A и B в Set является декартово произведение $A \times B$, то есть множество упорядоченных пар вида (a, b), где $a \in A, b \in B$. Здесь круглые скобки обозначают обычную теоретико-множественную упорядоченную пару (например, по Куратовскому). Проекции определяются так

$$pr_1(a, b) = a$$

$$pr_2(a, b) = b$$

Функция $\langle g_1, g_2 \rangle \colon D \to A \times B$ определяется равенством

$$\langle g_1, g_2 \rangle(x) = (g_1(x), g_2(x))$$

для любого $x \in D$. Разберёмся, что будет, если в качестве множества D взять $\{*\}$.

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[ld, "pr_1"'] \arrow[rd, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& \{*\} \arrow[lu, "g_1"] \arrow[ru, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

Стрелка $g_1 \colon \{*\} \to A$ задаёт некоторый элемент A. Стрелка $g_2 \colon \{*\} \to B$ задаёт некоторый элемент B. Диаграмма утверждает, что существует единственный элемент $A \times B$ (это $\langle g_1, g_2 \rangle$), первая проекция которого равна g_1, а вторая проекция равна g_2.

$$pr_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_1$$

$$pr_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_2$$

Тут следует ещё раз посмотреть пример 8.17. Если g_1 переводит $*$ в некоторое $a \in A$, а g_2 переводит $*$ в некоторое $b \in B$, то $\langle g_1, g_2 \rangle$ переводит $*$ в упорядоченную пару (a, b). Таким образом, точки $A \times B$ взаимно однозначно соответствуют парам „точка A и точка B“.

Замечание 10.4. Стрелки вида $f \colon A \times B \to C$ в Set соответствуют функциям от двух аргументов $f(a, b)$, где $a \in A, b \in B$.

Упражнение 10.5. Произведением двух групп Gr_1 и Gr_2 в Grp будет множество пар вида (x, y), где x – элемент носителя Gr_1, y – элемент носителя Gr_2; с двусторонней единицей (e, e) и умножением

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)$$

Проекциями будут гомоморфизмы $pr_1 \colon Gr_1 \times Gr_2 \to Gr_1$ и $pr_2 \colon Gr_1 \times Gr_2 \to Gr_2$, действующие так

$$pr_1(x, y) = x$$

$$pr_2(x, y) = y$$

Определение 10.6. *Произведением категорий* K_1 и K_2 называется категория $\mathsf{K}_1 \times \mathsf{K}_2$, заданная следующим образом:

1. Объектами $\mathsf{K}_1 \times \mathsf{K}_2$ являются пары (A, B), где
   $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$
   $B \in Ob(\mathsf{K}_2)$

2. Морфизмами из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) являются пары (f, g), где
   $f \in \mathsf{K}_1(A_1, A_2)$
   $g \in \mathsf{K}_2(B_1, B_2)$

3. Композицией морфизмов
   $(f_1, g_1)\colon (A_1, B_1) \to (A_2, B_2)$ и
   $(f_2, g_2)\colon (A_2, B_2) \to (A_3, B_3)$
   является морфизм
   $(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)\colon (A_1, B_1) \to (A_3, B_3)$
   Иными словами,
   $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$

4. Тождественной стрелкой объекта (A, B) является стрелка (id_A, id_B)

Проекциями будут функторы $pr_1\colon \mathsf{K}_1 \times \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$ и $pr_2\colon \mathsf{K}_1 \times \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_2$, действующие так

$$pr_1(A, B) = A$$

$$pr_1(f, g) = f$$

$$pr_2(A, B) = B$$

$$pr_2(f, g) = g$$

Упражнение 10.7. Проверьте, что это определение даёт произведение в Cat.

Упражнение 10.8. Проверьте, что категория $\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$ изоморфна категории $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где шкала K имеет следующий вид (два объекта, стрелки только тождественные)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "id_A"] & B \arrow[loop right, "id_B"] \end{tikzcd}$$

Замечание 10.9. Категории, в которых все стрелки тождественные, называются *дискретными*.

Упражнение 10.10. В категории предпорядка произведение $A \times B$ – это пересечение $A \sqcap B$, то есть наибольший (относительно $\lesssim$) объект C со свойством $C \lesssim A \wedge C \lesssim B$.

Замечание 10.11. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& 1 \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle"] &
\end{tikzcd}$$

(внизу терминальный объект) однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет произведение в категории Set. В произвольных категориях это не так. Например, в категории групп Grp для любой группы A есть ровно одна стрелка из 1 в A (см. пример 8.24), поэтому такая „упрощённая“ диаграмма вообще не налагает ограничений на $A \times B$.

Докажем несколько свойств произведений.

Теорема 10.12. $\langle g_1, g_2 \rangle \circ f = \langle g_1 \circ f, g_2 \circ f \rangle$
если обе части равенства определены.

Доказательство. Начнём с коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle"] & B \\
& C \arrow[ul, "g_1 \circ f"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g_2 \circ f"'] &
\end{tikzcd}$$

Удалив объект D и стрелки g_1, g_2, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "g_1 \circ f"] \arrow[ur, "g_2 \circ f"'] \arrow[uu, "\langle g_1, g_1 \rangle \circ f" description] &
\end{tikzcd}$$

По определению произведения, коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "g_1 \circ f"] \arrow[ur, "g_2 \circ f"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_1 \rangle \circ f" description] &
\end{tikzcd}$$

(стрелка единственная по определению произведения). Но следующая диаграмма тоже коммутативна

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "g_1\circ f"] \arrow[ur, "g_2\circ f"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1\circ f, g_2\circ f\rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

поэтому $\langle g_1, g_2\rangle \circ f = \langle g_1 \circ f, g_2 \circ f\rangle$
$\square$

Теорема 10.13. $\langle pr_1^{A\times B}, pr_2^{A\times B}\rangle = id_{A\times B}$

Доказательство. Сравниваем диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& A\times B \arrow[ul, "pr_1"] \arrow[ur, "pr_2"'] \arrow[uu, dotted, "\langle pr_1, pr_2\rangle" description] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& A\times B \arrow[ul, "pr_1"] \arrow[ur, "pr_2"'] \arrow[uu, "id_{A\times B}" description] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Упражнение 10.14. $\langle pr_1 \circ f, pr_2 \circ f\rangle = f$
если левая часть равенства определена.

Определение 10.15. Для двух стрелок $f\colon A \to C$ и $g\colon B \to D$ их *произведение* $f\times g\colon A\times B \to C\times D$ определяется следующим равенством

$$f \times g = \langle f \circ pr_1, g \circ pr_2\rangle$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & C \\
A \times B \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dotted, "f \times g"] & C \times D \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
B \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}
$$

Пример 10.16. В Set произведением $f \times g$ будет функция, действующая так

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$$

для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Теорема 10.17. $id_A \times id_B = id_{A \times B}$

Доказательство.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] & A \\
A \times B \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dotted, "id_{A \times B}"] & A \times B \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
B \arrow[r, "id_B"] & B
\end{tikzcd}
$$

Можно также сделать подсчёт

$$id_A \times id_B = \langle id_A \circ pr_1, id_B \circ pr_2 \rangle = \langle pr_1, pr_2 \rangle = id_{A \times B}$$

$\square$

Теорема 10.18. $(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)$
если обе части равенства определены.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & C_1 \\
A_1 \times A_2 \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dotted, "f_1 \times f_2"] & B_1 \times B_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dotted, "g_1 \times g_2"] & C_1 \times C_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2
\end{tikzcd}$$

Заметим, что правая часть равенства может быть определена, а левая нет (если $B_1 \times B_2$ не существует).
□

Упражнение 10.19. Если $A_1 \cong A_2$ и $B_1 \cong B_2$, то $A_1 \times B_1 \cong A_2 \times B_2$.

Теорема 10.20. $(g_1 \times g_2) \circ \langle f_1, f_2 \rangle = \langle g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2 \rangle$
если обе части равенства определены.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[r, "g_1"] & C_1 \\
A \arrow[ur, bend left, "f_1"] \arrow[dr, bend right, "f_2"'] \arrow[r, dotted, "\langle f_1, f_2 \rangle"] & B_1 \times B_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \arrow[r, dotted, "g_1 \times g_2"] & C_1 \times C_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
 & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2
\end{tikzcd}$$

Заметим, что правая часть равенства может быть определена, а левая нет (если $B_1 \times B_2$ не существует).
□

Упражнение 10.21. В топосах вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ произведением функторов F и G является функтор $F \times G$, определённый следующими равенствами:

$$(F \times G)(A) = F(A) \times G(A)$$

$$(F \times G)(f) = F(f) \times G(f)$$

Проекциями $pr_1 \colon F \times G \to F$ и $pr_2 \colon F \times G \to G$ будут естественные преобразования с компонентами:

$$pr_1 \colon F(A) \times G(A) \to F(A)$$

$$pr_2 \colon F(A) \times G(A) \to G(A)$$

Для естественных преобразований $\tau \colon H \to F$ и $\sigma \colon H \to G$ стрелкой $\langle \tau, \sigma \rangle$ будет естественное преобразование с компонентами

$$\langle \tau_A, \sigma_A \rangle \colon H(A) \to F(A) \times G(A)$$

Упражнение 10.22. Если коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h_1"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] & \\
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "h_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] & \\
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "h_2"'] & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h_1"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Теорема 10.23. *Если есть два произведения A и B*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

то $C \cong D$.

Доказательство. Пусть у объектов A и B есть два произведения

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

По определению произведения, должны существовать стрелки
$h_1\colon D \to C$ и $h_2\colon C \to D$, делающие коммутативными следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_1"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_2"] &
\end{tikzcd}$$

Перерисуем эти диаграммы так

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, dotted, "h_1"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, dotted, "h_2"] & B
\end{tikzcd}$$

и ещё вот так

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[u, dotted, "h_1"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, dotted, "h_2"] &
\end{tikzcd}$$

Из них можно составить коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & & & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, "h_1"'] & B & & A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "h_2"'] & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, "h_2"'] & & & & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[u, "h_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Уберём лишнее и получим коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & & & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B & & A & & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, "h_1 \circ h_2" description] & & & & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "h_2 \circ h_1" description] &
\end{tikzcd}
$$

По определению произведения, коммутативны следующие диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & & & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B & & A & & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_1 \circ h_2" description] & & & & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_2 \circ h_1" description] &
\end{tikzcd}
$$

(стрелки единственные по определению произведения). Из этого следует, что

$$h_1 \circ h_2 = id_C$$

$$h_2 \circ h_1 = id_D$$

поскольку следующие диаграммы тоже коммутативны.

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, "id_C"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "id_D"] &
\end{tikzcd}$$

□

Другое доказательство. Для данных объектов A и B категории K определим новую категорию K_1, объектами которой являются „вилки“ следующего вида

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Морфизмом между „вилками“

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

по определению будет любая стрелка $h\colon D \to C$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Композицией морфизмов $h_2 \circ h_1$ в K_1 по определению будет их композиция $h_2 \circ h_1$ в категории K. Тут надо посмотреть упражнение 10.22 и понять, почему композиция морфизмов в K_1 является морфизмом в K_1. Тождественным морфизмом для вилки

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

по определению будет id_D.

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "id_D"'] &
\end{tikzcd}$$

Поскольку композиция и единичные стрелки в K_1 такие же, как в K, любой изоморфизм в K_1 будет изоморфизмом в K. Произведение A и B является терминальным объектом в K_1 (именно это утверждает определение произведения). Но все терминальные объекты изоморфны и изоморфизмы между ними единственно возможные (теорема 8.3). Поэтому существует изоморфизм $h\colon D \to C$, для которого коммутативны следующие диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "h"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, dotted, "h^{-1}"] &
\end{tikzcd}
$$

□

Теорема 10.24. *Если стрелка* $f\colon C \to A \times B$ *является изоморфизмом, то* C *является произведением* A *и* B *с проекциями* $pr_1^{A\times B} \circ f$ *и* $pr_2^{A\times B} \circ f$.

Доказательство. Рассмотрим категорию вилок K_1, как при доказательстве предыдущей теоремы. Рассмотрим две вилки

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

Они изоморфны в K_1, поскольку следующие диаграммы коммутативны

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & C \arrow[l, "pr_1 \circ f"'] \arrow[r, "pr_2 \circ f"] \arrow[u, "f"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[u, "f^{-1}"] & B
\end{tikzcd}
$$

(это значит, что f и f^{-1} являются морфизмами в K_1). Дальше вспоминаем, что произведение является терминальным объектом в K_1 и объект, изоморфный терминальному, сам является терминальным (теорема 8.11).

□

Другое доказательство (прямое).

Будем доказывать коммутативность следующей диаграммы (на ней видно, как устроены проекции и новая пара)

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "f^{-1} \circ \langle g_1, g_2 \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

Коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[u, "f^{-1}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Добавим кое-что снизу и получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[u, "f^{-1}"'] & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[u, dotted, "\langle g_1, g_2 \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

Уберём лишнее и получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "f^{-1} \circ \langle g_1, g_2 \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

Осталось доказать единственность. Предположим, что для некоторой стрелки $h\colon D \to C$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "pr_1 \circ f"'] \arrow[dr, "pr_2 \circ f"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Перерисуем её так

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "pr_1 \circ f"'] \arrow[r, "pr_2 \circ f"] & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Надстроим сверху и получим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & C \arrow[l, "pr_1 \circ f"'] \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "pr_2 \circ f"] & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Уберём лишнее

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[uu, "f \circ h"'] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Из коммутативности этой диаграммы следует, что

$$f \circ h = \langle g_1, g_2 \rangle$$

поэтому

$$h = f^{-1} \circ \langle g_1, g_2 \rangle$$

□

Замечание 10.25. Произведение в Set тоже определено только с точностью до изоморфизма (с теоретико-категорной точки зрения). Произведением конечных множеств с мощностями m и n будет любое множество мощностью $m \times n$ с подходящими проекциями. Какими именно проекциями – смотрите предыдущую теорему.

Теорема 10.26. *Произведение A и 1 существует всегда, причём $A \times 1 \cong A$.*

Доказательство. В качестве произведения A и 1 работает следующая вилка

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "!_A"] & \\
A & & 1
\end{tikzcd}$$

потому что

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "!_A"] & \\
A & & 1 \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2 = !_D"'] \arrow[uu, dotted, "g_1"] &
\end{tikzcd}$$

□

Замечание 10.27. При любом выборе произведения A и 1 изоморфизм $A \times 1 \cong A$ выглядит так:

$$pr_1 \colon A \times 1 \to A$$

$$\langle id_A, !_A \rangle \colon A \to A \times 1$$

Действительно, $!_A \circ pr_1^{A \times 1} = pr_2^{A \times 1}$ (обе эти стрелки из $A \times 1$ в 1), поэтому

$$\langle id_A, !_A \rangle \circ pr_1 = \langle id_A \circ pr_1, !_A \circ pr_1 \rangle = \langle pr_1, pr_2 \rangle = id_{A \times 1}$$

$$pr_1 \circ \langle id_A, !_A \rangle = id_A$$

Упражнение 10.28. Пусть в категории K есть терминальный объект и выбрано некоторое произведение A и 1 для любого $A \in Ob(\mathsf{K})$. Рассмотрим следующий функтор $F \colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$$F(A) = A \times 1$$

$$F(f) = f \times id_1$$

Проверьте, что изоморфизмы из замечания 10.27 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F \to Id_{\mathsf{K}}$$

$$\tau^{-1}\colon Id_{\mathsf{K}} \to F$$

посмотрев на следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \times 1 \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "f \times id_1"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \times 1 \arrow[r, "pr_1"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\langle id_A, !_A \rangle"] \arrow[d, "f"'] & A \times 1 \arrow[d, "f \times id_1"] \\
B \arrow[r, "\langle id_B, !_B \rangle"] & B \times 1
\end{tikzcd}$$

Замечание 10.29. В таких случаях обычно говорят „изоморфизмы 10.27 естественны по A“. Это нестрогое выражение подразумевает „некоторые два функтора естественно изоморфны“, причём функторы предлагается угадать.

Замечание 10.30. Изоморфизм $A \times 0 \cong 0$, верный в Set и во всех топосах, в общем случае неверен. Контрпример – категория групп Grp, в которой начальный объект совпадает с терминальным (это группа из одного единичного элемента $\{e\}$), поэтому $A \times 0 \cong A \times 1 \cong A$.

Теорема 10.31. *Если существует произведение A и B, то существует и произведение B и A, причём $A \times B \cong B \times A$.*

Доказательство. В качестве произведения B и A работает следующая вилка

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_2^{A\times B}"'] \arrow[dr, "pr_1^{A\times B}"] & \\
B & & A
\end{tikzcd}$$

потому что

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_2^{A\times B}"'] \arrow[dr, "pr_1^{A\times B}"] & \\
B & \langle g_2, g_1 \rangle & A \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Замечание 10.32. Изоморфизм $A \times B \cong B \times A$ выглядит так:

$$\langle pr_2, pr_1 \rangle \colon A \times B \to B \times A$$

$$\langle pr_2, pr_1 \rangle \colon B \times A \to A \times B$$

Упражнение 10.33. Проверьте, что эти стрелки обратны друг к другу.

Определение 10.34. Категория называется *категорией с произведениями пар объектов*, если в ней есть произведение любой пары объектов.

Замечание 10.35. На практике обычно предполагается, что для любой пары объектов выбрано некоторое произведение из всех возможных. Строго говоря, в этом случае надо говорить о *категории с выбранными произведениями пар объектов*. При наличии аксиомы выбора разница, конечно, невелика, но иногда приходится работать без аксиомы выбора по чисто техническим причинам.

Упражнение 10.36. Пусть K – категория с выбранными произведениями пар объектов. Рассмотрим следующие функторы $F \colon \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ и $G \colon \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$$F(A, B) = A \times B$$

$$F(f, g) = f \times g$$

$$G(A, B) = B \times A$$

$$G(f, g) = g \times f$$

Проверьте, что изоморфизмы из замечания 10.32 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau \colon F \to G$$

$$\tau^{-1} \colon G \to F$$

посмотрев на следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\langle pr_2, pr_1\rangle"] \arrow[d, "f \times g"'] & B \times A \arrow[d, "g \times f"] \\ C \times D \arrow[r, "\langle pr_2, pr_1\rangle"] & D \times C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \times A \arrow[r, "\langle pr_2, pr_1\rangle"] \arrow[d, "g \times f"'] & A \times B \arrow[d, "f \times g"] \\ D \times C \arrow[r, "\langle pr_2, pr_1\rangle"] & C \times D \end{tikzcd}$$

Замечание 10.37. В таких случаях обычно нестрого говорят „изоморфизмы 10.32 естественны по A и B“.

Определение 10.38. Пусть дано некоторое множество I и некоторое семейство объектов $\{A_i \mid i \in I\}$, где $A_i \in Ob(\mathsf{K})$. *Конусом* будем называть любой объект $C \in Ob(\mathsf{K})$ вместе с произвольным набором стрелок $f_i\colon C \to A_i$, индексированных элементами I. *Морфизмом между конусами* (D, g) и (C, f) будем называть любую стрелку $h\colon D \to C$, делающую коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "f_i"] & \\ & A_i \\ D \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Определение 10.39. *Произведением семейства объектов* $\{A_i \mid i \in I\}$ называется терминальный объект в категории конусов.

Соглашение 10.40. Произведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\prod_{i\in I} A_i$ с проекциями $pr_i\colon \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ и единственной стрелкой $\langle g_i\rangle_{i\in I}$ для любого семейства стрелок $\{g_i\colon D \to A_i \mid i \in I\}$, делающей коммутативными все диаграммы следующего вида

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} A_i \arrow[dr, "pr_i"] & \\
& A_i \\
D \arrow[uu, "\langle g_i \rangle_{i\in I}"] \arrow[ur, "g_i"'] &
\end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Соглашение 10.41. Если множество I конечно (возьмём для ясности $I = \{1, 2, \ldots, n\}$), произведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ с проекциями $pr_i \colon A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_i$ и стрелками $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$, делающими коммутативными соответствующие диаграммы.

Пример 10.42. Произведение трёх объектов определяется следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
& & A \times B \times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dl, "pr_2"] \arrow[dr, "pr_3"] & \\
A & B & & C \\
& & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[ur, "g_3"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2, g_3\rangle"] &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 10.43. В Set, Cat, Grp и категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K – малая, существуют произведения любых множеств объектов (как конечных, так и бесконечных).

Пример 10.44. Произведение пустого семейства объектов – это терминальный объект.

$$\begin{tikzcd}
1 \\
D \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

Пример 10.45. Произведение семейства, состоящего из одного объекта A – это, например, объект A с единственной проекцией $id_A \colon A \to A$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "id_A"'] \\
A & \\
 & D \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, dotted, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Теперь мы докажем, что произведение конечного числа объектов можно строить с помощью произведения пар следующим способом $((\ldots(A_1 \times A_2) \times \ldots) \times A_n)$.

Теорема 10.46. *Если в категории* K *есть терминальный объект и произведение любой пары объектов, то в* K *есть произведение любого конечного семейства объектов.*

Доказательство (по индукции). Пусть уже построено произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Определим $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$ как $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}$ с набором проекций

$$pr_1 = pr_1^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$pr_2 = pr_2^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$\ldots$$

$$pr_n = pr_n^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$pr_{n+1} = pr_2^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

Стрелка $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1} \rangle$ задаётся следующим равенством

$$\langle g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1} \rangle = \langle \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle, g_{n+1} \rangle$$

$\square$

Пример 10.47.

$$
\begin{tikzcd}
 & & A\times B\times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dl, "pr_2"] \arrow[dr, "pr_3"] & \\
A & B & & C \\
 & & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[ur, "g_3"'] \arrow[uu, dotted, "\langle g_1, g_2, g_3\rangle"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & & (A\times B)\times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dd, "pr_2"] \\
 & A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & & \\
A & & B & C \\
 & & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[u, "g_2"] \arrow[ur, "g_3"'] \arrow[uul, dotted, bend left, "\langle g_1, g_2\rangle"] \arrow[uuur, dotted, "\langle\langle g_1, g_2\rangle, g_3\rangle"] &
\end{tikzcd}
$$

$$pr_1^{A\times B\times C} = pr_1^{A\times B} \circ pr_1^{(A\times B)\times C}$$

$$pr_2^{A\times B\times C} = pr_2^{A\times B} \circ pr_1^{(A\times B)\times C}$$

$$pr_3^{A\times B\times C} = pr_2^{(A\times B)\times C}$$

$$\langle g_1, g_2, g_3\rangle = \langle\langle g_1, g_2\rangle, g_3\rangle$$

Упражнение 10.48. Проверьте, что эта конструкция действительно даёт произведение трёх объектов A, B, C.

Можно строить произведение конечного числа объектов и таким способом $(A_1 \times (\ldots \times (A_{n-1} \times A_n)\ldots))$. Порядок расстановки скобок неважен в силу следующей теоремы.

Теорема 10.49. *Если существуют оба произведения $(A\times B)\times C$ и $A\times(B\times C)$, то $(A\times B)\times C \cong A\times(B\times C)$*

Доказательство. Изоморфизмы выглядят так

$$\langle pr_1 \circ pr_1, \langle pr_2 \circ pr_1, pr_2\rangle\rangle \colon (A\times B)\times C \to A\times(B\times C)$$

$$\langle\langle pr_1, pr_1 \circ pr_2\rangle, pr_2 \circ pr_2\rangle \colon A\times(B\times C) \to (A\times B)\times C$$

□

Упражнение 10.50. Можете показать, что эти стрелки обратны друг к другу.

Замечание 10.51. Проще показать, что $A \times (B \times C)$ с подходящими проекциями тоже является произведением трёх объектов A, B, C, а все произведения изоморфны, как терминальные объекты в соответствующей категории конусов.

Упражнение 10.52. (Для трудолюбивых людей). Пусть K – категория с выбранными произведениями пар объектов. Рассмотрим следующие функторы $F\colon \mathsf{K} \times \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ и $G\colon \mathsf{K} \times \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$$F(A, B, C) = (A \times B) \times C$$

$$F(f, g, h) = (f \times g) \times h$$

$$G(A, B, C) = A \times (B \times C)$$

$$G(f, g, h) = f \times (g \times h)$$

Проверьте, что изоморфизмы из доказательства теоремы 10.49 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F \to G$$

$$\tau^{-1}\colon G \to F$$

Определение 10.53. Категория называется *категорией с конечными произведениями*, если в ней есть терминальный объект и произведение любой пары объектов. Равносильное условие: в категории есть произведение любого конечного семейства объектов.

Замечание 10.54. На практике обычно предполагается, что для любого конечного семейства объектов выбрано некоторое произведение из всех возможных. Строго говоря, в этом случае надо говорить о *категории с выбранными конечными произведениями*.

Пример 10.55. Пусть K – локально малая категория, в которой есть произведение некоторой пары объектов A и B. Верны следующие изоморфизмы

$$\mathsf{K}(D, A \times B) \cong \mathsf{K}(D, A) \times \mathsf{K}(D, B) \quad \text{для любого } D \in Ob(\mathsf{K})$$

(это изоморфизмы в Set). Каждой стрелке $h\colon D \to A \times B$ соответствует пара стрелок $pr_1 \circ h\colon D \to A$ и $pr_2 \circ h\colon D \to B$, а каждой паре стрелок $g_1\colon D \to A$ и $g_2\colon D \to B$ соответствует стрелка $\langle g_1, g_2 \rangle\colon D \to A \times B$.

Замечание 10.56. О терминологии. По-английски стрелку вида $f \times g$ называют “product map”, а стрелку вида $\langle f, g \rangle$ называют как попало или никак. По-русски в некоторых книгах стрелку $\langle f, g \rangle$ явно неудачно называют „произведением“, для стрелки $f \times g$ в этом случае приходится придумывать странные названия. В принципе, в силу примера 17.8 стрелку вида $\langle f, g \rangle$ можно называть просто „упорядоченной парой“, хотя она и отличается в Set от упорядоченной пары по Куратовскому.

Глава 11

Копроизведения

Копроизведение – это произведение в двойственной категории.

Определение 11.1. *Копроизведение* двух объектов A и B в категории K задаётся следующим набором данных:

1. Объектом $C \in Ob(\mathsf{K})$.

2. Упорядоченной парой стрелок $f_1 \colon A \to C$ и $f_2 \colon B \to C$, эти стрелки называются *первой копроекцией* и *второй копроекцией*.

При этом требуется, чтобы для любого объекта $D \in Ob(\mathsf{K})$ и любой упорядоченной пары стрелок $g_1 \colon A \to D$ и $g_2 \colon B \to D$ существовала единственная стрелка из C в D, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dd, dotted] & \\
A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.2. Копроизведения определены с точностью до изоморфизма.

Соглашение 11.3. Если предполагается, что для двух объектов A и B выбрано некоторое копроизведение (из всех возможных), объект копроизведения будем обозначать $A+B$, а копроекции k_1^{A+B} и k_2^{A+B}. Если

A и B ясны из контекста, будем обозначать копроекции просто k_1 и k_2. Будем обозначать $[g_1, g_2]$ единственную стрелку, делающую коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A+B \arrow[dd, dotted, "{[g_1,g_2]}"] & \\
A \arrow[ur, "k_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & B \arrow[ul, "k_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Мы видим, что

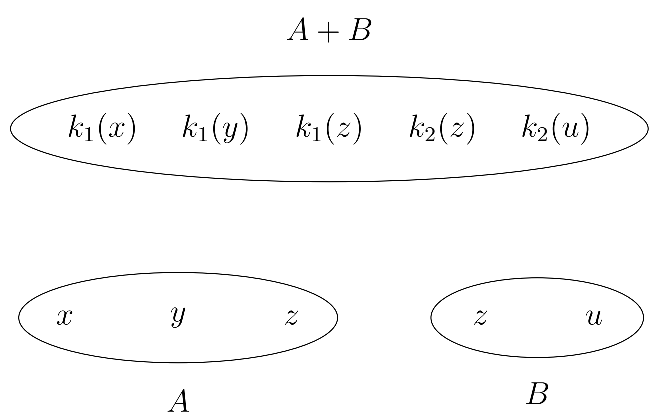
$$[g_1, g_2] \circ k_1 = g_1$$

$$[g_1, g_2] \circ k_2 = g_2$$

$f \circ k_1 = g_1 \wedge f \circ k_2 = g_2$ влечёт $f = [g_1, g_2]$
для любой стрелки $f \colon A + B \to D$.

Пример 11.4. В Set копроизведение множеств A и B – это их дизъюнктное объединение $A + B$, то есть объединение непересекающихся изоморфных копий A и B (если A и B не пересекаются, можно взять просто объединение). Стрелки $k_1 \colon A \to A + B$ и $k_2 \colon B \to A + B$ – это вложения A в $A + B$ и B в $A + B$ соответственно.

Пример 11.5.



Упражнение 11.6. Разберитесь, как устроена стрелка $[g_1, g_2]$ в Set. Она определяется некоторым „разбором случаев“.

Пример 11.7. В категории предпорядка копроизведение $A + B$ – это объединение $A \sqcup B$, то есть наименьший (относительно $\lesssim$) объект C со свойством $A \lesssim C \wedge B \lesssim C$.

Упражнение 11.8. В категории Cat копроизведение $\mathsf{K}_1 + \mathsf{K}_2$ – это дизъюнктное объединение изоморфных копий категорий K_1 и K_2 со множеством объектов $Ob(\mathsf{K}_1) + Ob(\mathsf{K}_2)$ и множеством морфизмов $Mor(\mathsf{K}_1) + Mor(\mathsf{K}_2)$. Если картинку 9.2 воспринимать как единую категорию, то это будет $\mathsf{K} + \mathsf{K}^{op}$, надо только переименовать объекты и стрелки, чтобы они не повторялись два раза.

Замечание 11.9. В категории групп копроизведение существует, но устроено сложнее, чем можно подумать (и я не хочу его описывать). Если взять просто дизъюнктное объединение, как умножать элементы из разных частей?

Упражнение 11.10. $f \circ [g_1, g_2] = [f \circ g_1, f \circ g_2]$
если обе части равенства определены.

Упражнение 11.11. $[k_1^{A+B}, k_2^{A+B}] = id_{A+B}$

Упражнение 11.12. $[f \circ k_1, f \circ k_2] = f$
если левая часть равенства определена.

Определение 11.13. Для двух стрелок $f\colon C \to A$ и $g\colon D \to B$ их *копроизведение* $f + g\colon C + D \to A + B$ определяется следующим равенством

$$f + g = [k_1 \circ f, k_2 \circ g]$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "k_1"'] & C \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A + B & C + D \arrow[l, dotted, "f+g"'] \\
B \arrow[u, "k_2"] & D \arrow[l, "g"] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.14. $id_A + id_B = id_{A+B}$

$$
\begin{tikzcd}
A & A \arrow[l, "id_A"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A+B \arrow[from=u, "k_1"'] & A+B \arrow[l, dotted, "id_{A+B}"'] \\
B \arrow[u, "k_2"] & B \arrow[l, "id_B"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 11.15. $(f_1 + f_2) \circ (g_1 + g_2) = (f_1 \circ g_1) + (f_2 \circ g_2)$
если обе части равенства определены.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "k_1"'] & B_1 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "k_1"'] & C_1 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \arrow[l, dotted, "f_1 + f_2"'] & C_1 + C_2 \arrow[l, dotted, "g_1 + g_2"'] \\
A_2 \arrow[u, "k_2"] & B_2 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[u, "k_2"] & C_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 11.16. $[f_1, f_2] \circ (g_1 + g_2) = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$
если обе части равенства определены.

$$
\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[dl, bend right, "f_1"'] \arrow[d, "k_1"] & C_1 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A & B_1 + B_2 \arrow[l, dotted, "{[f_1, f_2]}"'] & C_1 + C_2 \arrow[l, dotted, "g_1 + g_2"'] \\
 & B_2 \arrow[ul, bend left, "f_2"] \arrow[u, "k_1"'] & C_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}
$$

Пример 11.17. В топосах вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ копроизведением функторов F и G является функтор $F + G$, определённый следующими равенствами:

$$(F + G)(A) = F(A) + G(A)$$

$$(F + G)(f) = F(f) + G(f)$$

Копроекциями $k_1\colon F \to F + G$ и $k_2\colon G \to F + G$ будут естественные преобразования с компонентами:

$$k_1\colon F(A) \to F(A) + G(A)$$

$$k_2\colon G(A) \to F(A) + G(A)$$

Для естественных преобразований $\tau\colon F \to H$ и $\sigma\colon G \to H$ стрелкой $[\tau, \sigma]$ будет естественное преобразование с компонентами

$$[\tau_A, \sigma_A]\colon F(A) + G(A) \to H(A)$$

Упражнение 11.18. Проверьте детали.

Упражнение 11.19. Копроизведение A и 0 существует всегда, причём $A + 0 \cong A$.

Упражнение 11.20. Если существует копроизведение A и B, то существует и копроизведение B и A, причём $A + B \cong B + A$.

Определение 11.21. Пусть дано некоторое множество I и некоторое семейство объектов $\{A_i \mid i \in I\}$, где $A_i \in Ob(\mathsf{K})$. *Коконусом* будем называть любой объект $C \in Ob(\mathsf{K})$ вместе с произвольным набором стрелок $f_i\colon A_i \to C$, индексированных элементами I. *Морфизмом между коконусами* (C, f) и (D, g) будем называть любую стрелку $h\colon C \to D$, делающую коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dd, "h"'] & \\
& A_i \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[dl, "g_i"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Определение 11.22. *Копроизведением семейства объектов* $\{A_i \mid i \in I\}$ называется начальный объект в категории коконусов.

Соглашение 11.23. Копроизведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\sum_{i\in I} A_i$ с копроекциями $k_i \colon A_i \to \sum_{i\in I}$ и единственной стрелкой $[g_i]_{i\in I}$ для любого семейства стрелок $\{g_i \colon A_i \to D \mid i \in I\}$, делающей коммутативными все диаграммы следующего вида

$$
\begin{tikzcd}
\sum_i A_i \arrow[dd, "{[g_i]_{i\in I}}"'] & \\
& A_i \arrow[ul, "k_i"'] \arrow[dl, "g_i"] \\
D &
\end{tikzcd}
$$

для всех $i \in I$.

Соглашение 11.24. Если множество I конечно (возьмём для ясности $I = \{1, 2, \ldots, n\}$), копроизведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ с копроекциями $k_i \colon A_i \to A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ и стрелками $[g_1, g_2, \ldots, g_n]$, делающими коммутативными соответствующие диаграммы.

Пример 11.25. Копроизведение трёх объектов определяется следующей коммутативной диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
& & A+B+C \arrow[dd, dotted, "{[g_1, g_2, g_3]}"] & \\
A \arrow[urr, "k_1"] \arrow[drr, "g_1"'] & B \arrow[ur, "k_2"'] \arrow[dr, "g_2"] & & C \arrow[ul, "k_3"'] \arrow[dl, "g_3"] \\
& & D &
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 11.26. В Set, Cat и категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K – малая, существуют копроизведения любых множеств объектов (как конечных, так и бесконечных).

Пример 11.27. Копроизведение пустого семейства объектов – это начальный объект.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, dotted] \\ D \end{tikzcd}$$

Пример 11.28. Копроизведение семейства, состоящего из одного объекта A – это, например, объект A с единственной копроекцией $id_A \colon A \to A$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, dotted, "g"] \\ A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & D \end{tikzcd}$$

Упражнение 11.29. Если в категории K есть начальный объект и копроизведение любой пары объектов, то в K есть копроизведение любого конечного семейства объектов.

Упражнение 11.30. Если существуют оба копроизведения $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$, то $(A+B)+C \cong A+(B+C)$

Замечание 11.31. Изоморфизм $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$, верный в Set и во всех топосах, в общем случае неверен. Контрпример – категория Set^{op}, поскольку в Set неверен двойственный изоморфизм $A + (B \times C) \cong (A + B) \times (A + C)$. Можно найти гораздо „меньший“ контрпример среди упорядоченных множеств (любая не дистрибутивная решётка).

Пример 11.32. Пусть K – локально малая категория, в которой есть копроизведение некоторой пары объектов A и B. Тогда

$$\mathsf{K}(A+B, D) \cong \mathsf{K}(A, D) \times \mathsf{K}(B, D) \quad \text{для любого } D \in Ob(\mathsf{K}).$$

(это изоморфизмы в Set). Каждой стрелке $h\colon A+B \to D$ соответствует пара стрелок $h \circ k_1\colon A \to D$ и $h \circ k_2\colon B \to D$, а каждой паре стрелок $g_1\colon A \to D$ и $g_2\colon B \to D$ соответствует стрелка $[g_1, g_2]\colon A+B \to D$.

Глава 12

Сопряжённые функторы

12.1 Основное определение и примеры

Если воспринимать категории как „обобщённые упорядоченные множества“, а функторы как „обобщённые монотонные отображения“, то сопряжённость – это „обобщённое соответствие Галуа“. Это пояснение для тех, кто знает, что такое соответствие Галуа, а кто не знает, может о нём не беспокоиться.

Определение 12.1. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\mathsf{K}_1 \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_2$$

Чтобы удобнее различать, будем обозначать объекты категории K_1 буквами A, B, C, а объекты категории K_2 буквами X, Y, Z. Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ есть взаимно однозначное соответствие между стрелками вида $g\colon A \to G(X)$ и стрелками вида $f\colon F(A) \to X$, в некотором смысле „естественное“ по A и X.
Говоря строже, для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ есть отображения

$$\Phi_{A,X}\colon \mathsf{K}_1(A, G(X)) \to \mathsf{K}_2(F(A), X)$$

$$\Gamma_{A,X}\colon \mathsf{K}_2(F(A), X) \to \mathsf{K}_1(A, G(X))$$

(обычно мы будем писать просто Φ и Γ, без индексов), взаимно обратные и естественные в смысле следующих равенств

- $\Gamma(\Phi(g)) = g$
- $\Phi(\Gamma(f)) = f$
- $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$
- $\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$

Функтор F в этом случае называется *левым сопряжённым*, а функтор G *правым сопряжённым*. Говорят также, что F *сопряжён слева* к G, а G *сопряжён справа* к F.

Замечание 12.2. Можно попытаться проиллюстрировать условия естественности следующими неформальными картинками. Если стрелки g и f соответствуют друг другу при сопряжении

$$\begin{array}{ccc} & A \xrightarrow{g} G(X) & \\ \Phi_{A,X} \downarrow & & \uparrow \Gamma_{A,X} \\ & F(A) \xrightarrow{f} X & \end{array}$$

то соответствуют друг другу также стрелки $g \circ h$ и $f \circ F(h)$

$$\begin{array}{ccc} & B \xrightarrow{h} A \xrightarrow{g} G(X) & \\ \Phi_{B,X} \downarrow & & \uparrow \Gamma_{B,X} \\ & F(B) \xrightarrow{F(h)} F(A) \xrightarrow{f} X & \end{array}$$

и стрелки $G(h) \circ g$ и $h \circ f$

$$\begin{array}{ccc} & A \xrightarrow{g} G(X) \xrightarrow{G(h)} G(Y) & \\ \Phi_{A,Y} \Big\downarrow & & \Big\uparrow \Gamma_{A,Y} \\ & F(A) \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h} Y & \end{array}$$

Теорема 12.3. *Для сопряжённых функторов верны следующие равенства*

- $\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$
- $\Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$

Доказательство. Чтобы доказать равенство

$$\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$$

применим к обеим частям Γ и получим равносильное равенство (поскольку Γ взаимно однозначно)

$$G(h) \circ g = \Gamma(h \circ \Phi(g))$$

которое действительно верно, потому что

$$\Gamma(h \circ \Phi(g)) = G(h) \circ \Gamma(\Phi(g)) = G(h) \circ g$$

Чтобы доказать равенство

$$\Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$$

применим к обеим частям Φ и получим равносильное равенство (поскольку Φ взаимно однозначно)

$$f \circ F(h) = \Phi(\Gamma(f) \circ h)$$

которое действительно верно, потому что

$$\Phi(\Gamma(f) \circ h) = \Phi(\Gamma(f)) \circ F(h) = f \circ F(h)$$

□

Пример 12.4. Пусть функторы F и G взаимно обратные, то есть

$$G \circ F = Id_{\mathsf{K}_1}$$

$$F \circ G = Id_{\mathsf{K}_2}$$

В этом случае $F \dashv G$. Стрелке $f\colon F(A) \to X$ соответствует стрелка $G(f)\colon A \to G(X)$, а стрелке g соответствует стрелка $F(g)$. В этом случае также $G \dashv F$, поскольку взаимная обратность – отношение симметричное.

Пример 12.5. Пусть K_1 и K_2 – частично упорядоченные множества, а F и G – монотонные отображения. В этом случае сопряжённость $F \dashv G$ означает выполнение следующего условия

$$F(A) \leqslant X \Leftrightarrow A \leqslant G(X)$$

Это один из вариантов определения соответствия Галуа.

Пример 12.6. Пусть M и N – некоторые множества, а $f\colon M \to N$ некоторая функция. Пусть $\mathcal{P}(M)$ и $\mathcal{P}(N)$ – множества подмножеств M и N, упорядоченные по включению. Рассмотрим две монотонные функции

$$\mathcal{P}(M) \underset{f^*}{\overset{\exists_f}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(N)$$

$\exists_f$ переводит любое подмножество M в его образ при отображении f, а f^* переводит любое подмножество N в его прообраз относительно f. Если $A \subseteq M$ и $X \subseteq N$, то

$$\exists_f(A) \subseteq X \Leftrightarrow A \subseteq f^*(X)$$

(образ A является подмножеством X $\Leftrightarrow$ A является подмножеством прообраза X), поэтому $\exists_f \dashv f^*$

Замечание 12.7. Обозначения $\exists_f$ и f^*могут показаться странными, но это некоторый стандарт в категорной логике.

Пример 12.8. Рассмотрим категорию Cat и категорию графов Grph. Каждой малой категории можно сопоставить граф, вершинами которого будут объекты категории, а рёбрами – морфизмы. Тем самым задан

„стирающий“ функтор $G\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{Grph}$. Этот функтор строгий (говорят, что Cat является *конкретной над* Grph). Он как бы забывает, как делать композицию и какие стрелки являются единичными, оставляя только *dom* и *cod*. К функтору G есть левый сопряжённый $F\colon \mathsf{Grph} \to \mathsf{Cat}$, который по графу A выдаёт категорию $F(A)$, свободно порождённую этим графом. Объектами категории будут вершины графа, а морфизмами из вершины V в вершину V' – конечные последовательности рёбер вида $(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1)$, где $n \geqslant 1$ и рёбра расположены цепочкой $V \xrightarrow{r_1} V_1 \xrightarrow{r_2} \ldots \xrightarrow{r_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{r_n} V'$ (допускается, чтобы некоторые из вершин цепочки совпадали, цепочка может „петлять“). Каждую такую последовательность можно воспринимать как „формальную композицию“ $r_n \circ r_{n-1} \circ \ldots \circ r_1$. Кроме того, для каждой вершины V формально добавляется новая стрелка id_V. Удобно использовать в качестве всех id_V последовательность длины ноль (и работать с ней как с протоморфизмом), в этом случае композиция в категории $F(A)$ будет просто приписыванием последовательностей друг к другу. Если A – граф и X – малая категория, то каждый морфизм графов $g \in \mathsf{Grph}(A, G(X))$ взаимно однозначно определяет функтор $f \in \mathsf{Cat}(F(A), X)$, действующий на объектах и стрелках категории $F(A)$ так

$$f(V) = g(V)$$

$$f(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1) = g(r_n) \circ g(r_{n-1}) \circ \ldots \circ g(r_1)$$

$$f(id_V) = id_{g(V)}$$

Упражнение 12.9. Пусть дан набор категорий и функторов, расположенных так

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F_1"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G_1"] \arrow[r, shift left, "F_2"] & \mathsf{K}_3 \arrow[l, shift left, "G_2"] \end{tikzcd}$$

Пусть $F_1 \dashv G_1$ и $F_2 \dashv G_2$. Проверьте, что $F_2 \circ F_1 \dashv G_1 \circ G_2$

Упражнение 12.10. Если $F \dashv G$, то $G^{op} \dashv F^{op}$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

$$\mathsf{K}_2^{op} \underset{F^{op}}{\overset{G^{op}}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_1^{op}$$

Это упражнение позволяет нам применять к сопряжённости принцип двойственности. Любому верному утверждению о левых сопряжённых функторах соответствует двойственное верное утверждение о правых сопряжённых функторах, и наоборот. Мы уже видели пример такой двойственности при доказательстве теоремы 12.3 (где второе равенство двойственно первому).

12.2 Единица и коединица сопряжения

Определение 12.11. Положим по определению

- $\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$
- $\varepsilon_X = \Phi(id_{G(X)})$

Заметим, что

$$\eta_A \colon A \to G(F(A))$$

$$\varepsilon_X \colon F(G(X)) \to X$$

Упражнение 12.12. Для сопряжённых функторов

$$\mathsf{Grph} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathsf{Cat}$$

из примера 12.8 стрелка $\eta_A \colon A \to G(F(A))$ является вложением графа A в граф $G(F(A))$.

Теорема 12.13. *Верны следующие равенства*

- $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$
- $\Phi(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$

для любых $f \colon F(A) \to X$ *и* $g \colon A \to G(X)$

Доказательство.

$$\Gamma(f) = \Gamma(f \circ id_{F(A)}) = G(f) \circ \Gamma(id_{F(A)}) = G(f) \circ \eta_A$$

$$\Phi(g) = \Phi(id_{G(X)} \circ g) = \Phi(id_{G(X)}) \circ F(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$$

□

Теорема 12.14. *Стрелки* $\eta_A \colon A \to G(F(A))$ *и* $\varepsilon_X \colon F(G(X)) \to X$ *являются компонентами естественных преобразований.*

Доказательство. Разберём случай η. Надо доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(h))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) \end{tikzcd}$$

для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $h\colon A \to B$. Равенство

$$\eta_B \circ h = G(F(h)) \circ \eta_A$$

в силу предыдущей теоремы равносильно

$$\eta_B \circ h = \Gamma(F(h))$$

И это действительно правда, потому что

$$\eta_B \circ h = \Gamma(id_{F(B)}) \circ h = \Gamma(id_{F(B)} \circ F(h)) = \Gamma(F(h))$$

(второе равенство по теореме 12.3).
□
В случае ε надо доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(G(X)) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "F(G(h))"'] & X \arrow[d, "h"] \\ F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

для любых $X, Y \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $h\colon X \to Y$. Доказательство совершенно симметрично предыдущему (принцип двойственности).
□

Определение 12.15. *Единицей сопряжения* будем называть естественное преобразование $\eta\colon Id_{\mathsf{K}_1} \to G \circ F$ с компонентами $\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$. *Коединицей сопряжения* будем называть естественное преобразование $\varepsilon\colon F \circ G \to Id_{\mathsf{K}_2}$ с компонентами $\varepsilon_X = \Phi(id_{G(X)})$.

Теорема 12.16. *Пусть $F \dashv G$. Тогда коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $g\colon A \to G(X)$. Это значит, для любой стрелки $g\colon A \to G(X)$ есть ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to X$ такая, что $g = G(f) \circ \eta_A$.

Доказательство. Должно быть

$$f = \Phi(g)$$

потому что

$$g = G(f) \circ \eta_A = \Gamma(f)$$

(второе равенство по теореме 12.13).
□

По принципу двойственности немедленно получаем такой результат.

Теорема 12.17. *Пусть $F \dashv G$. Тогда коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "F(g)"] & A \arrow[d, dotted, "g"] \\ X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & G(X) \end{tikzcd}$$

для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $f\colon F(A) \to X$. Это значит, для любой стрелки $f\colon F(A) \to X$ есть ровно одна стрелка $g\colon A \to G(X)$ такая, что $f = \varepsilon_X \circ F(g)$.

Есть несколько определений сопряжённости (равносильных исходному), которые используют η или ε в качестве основных понятий.

Определение 12.18. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть естественное преобразование $\eta\colon Id_{\mathsf{K}_1} \to G \circ F$ такое, что для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $g\colon A \to G(X)$ существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to X$ со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

Замечание 12.19. Если единственную стрелку f обозначать $\Phi(g)$, диаграмма примет вид

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(\Phi(g))"] & F(A) \arrow[d, dotted, "\Phi(g)"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

Теорема 12.20. *Определение 12.18 равносильно исходному определению сопряжённости (определению 12.1).*

Доказательство. Из определения 12.1 следует определение 12.18 в силу теорем 12.14 и 12.16. В обратную сторону, пусть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(\Phi(g))"] & F(A) \arrow[d, dotted, "\Phi(g)"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

Положим по определению $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$ и докажем равенства

- $\Gamma(\Phi(g)) = g$

- $\Phi(\Gamma(f)) = f$
- $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$
- $\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$

Первое равенство непосредственно видно по диаграмме, поскольку

$$\Gamma(\Phi(g)) = G(\Phi(g)) \circ \eta_A = g$$

Четвёртое равенство доказывается так

$$\Gamma(h \circ f) = G(h \circ f) \circ \eta_A = G(h) \circ G(f) \circ \eta_A = G(h) \circ \Gamma(f)$$

Третье равенство доказывается сравнением диаграммы

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "g \circ h"'] & G(F(B)) \arrow[d, dotted, "G(\Phi(g \circ h))"] & F(B) \arrow[d, dotted, "\Phi(g \circ h)"] \\
 & G(X) & X
\end{tikzcd}$$

с диаграммой

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "h"'] & G(F(B)) \arrow[d, "G(F(h))"] & F(B) \arrow[d, "F(h)"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(\Phi(g))"] & F(A) \arrow[d, "\Phi(g)"] \\
 & G(X) & X
\end{tikzcd}$$

Наконец, чтобы доказать второе равенство, для заданной стрелки f возьмём в качестве g стрелку $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$ и сравним коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "G(f) \circ \eta_A"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, "f"] \\
 & G(X) & X
\end{tikzcd}$$

с диаграммой

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "G(f)\circ\eta_A"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(\Phi(G(f)\circ\eta_A))"] & F(A) \arrow[d, dotted, "\Phi(G(f)\circ\eta_A)"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

□

Упражнение 12.21. Пусть Grp – категория групп. Рассмотрим стирающий функтор $G\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$, выдающий по каждой группе её множество-носитель, а также функтор $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Grp}$, выдающий по множеству A свободную группу со множеством образующих A.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{Grp} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Покажите, что $F \dashv G$, если в качестве стрелки $\eta_A\colon A \to G(F(A))$ брать вложение множества образующих A во множество всех элементов свободной группы $F(A)$.

Чтобы задать сопряжённость, не обязательно предполагать заранее, что F является функтором, достаточно знать его действие на объектах.

Теорема 12.22. *Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также функтор $G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$ и отображение $F\colon Ob(\mathsf{K}_1) \to Ob(\mathsf{K}_2)$. Пусть для каждого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ задана стрелка $\eta_A\colon A \to G(F(A))$ такая, что что для любого $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $g\colon A \to G(X)$ существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to X$ со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

Тогда есть ровно один способ определить действие F на стрелках, при котором F становится функтором, а набор стрелок η_A – естественным преобразованием.

Доказательство. Чтобы η было естественным преобразованием, должна быть коммутативна следующая диаграмма для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $h\colon A \to B$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(h))"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B))
\end{tikzcd}$$

Но существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to F(B)$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) & F(B)
\end{tikzcd}$$

Чтобы это было яснее, перерисуем её так

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta_B \circ h"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\
& G(F(B)) & F(B)
\end{tikzcd}$$

Эту единственную стрелку f и возьмём в качестве $F(h)$. Свойства функтора

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

$$F(h_2 \circ h_1) = F(h_2) \circ F(h_1)$$

следуют из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "id_A"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(id_{F(A)})"] & F(A) \arrow[d, dotted, "id_{F(A)}"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"] & G(F(A)) & F(A)
\end{tikzcd}$$

и диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h_1"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f_1)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f_1"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "h_2"'] & G(F(B)) \arrow[d, dotted, "G(f_2)"] & F(B) \arrow[d, dotted, "f_2"] \\
C \arrow[r, "\eta_C"] & G(F(C)) & F(C)
\end{tikzcd}$$

□

Ещё одно определение сопряжённости использует ε в качестве основного понятия.

Определение 12.23. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть естественное преобразование $\varepsilon\colon F \circ G \to Id_{\mathsf{K}_2}$ такое, что для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ и любой стрелки $f\colon F(A) \to X$ существует ровно одна стрелка $g\colon A \to G(X)$ со свойством $f = \varepsilon_X \circ F(g)$

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "F(g)"] & A \arrow[d, dotted, "g"] \\
X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

Замечание 12.24. Если единственную стрелку g обозначать $\Gamma(f)$, диаграмма примет вид

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "F(\Gamma(f))"] & A \arrow[d, dotted, "\Gamma(f)"] \\
X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

Упражнение 12.25. Проверьте, что определение 12.23 равносильно определению 12.1 (примените принцип двойственности).

Чтобы задать сопряжённость, не обязательно предполагать заранее, что G является функтором, достаточно знать его действие на объектах.

Теорема 12.26. *Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ и отображение $G\colon Ob(\mathsf{K}_2) \to Ob(\mathsf{K}_1)$. Пусть для каждого $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ задана стрелка $\varepsilon_X\colon F(G(X)) \to X$ такая, что для любого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $f\colon F(A) \to X$ существует ровно одна стрелка $g\colon A \to G(X)$ со свойством $f = \varepsilon_X \circ F(g)$*

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "F(g)"] & & A \arrow[d, dotted, "g"] \\ X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & & G(X) \end{tikzcd}$$

Тогда есть ровно один способ определить действие G на стрелках, при котором G становится функтором, а набор стрелок ε_X – естественным преобразованием.

Доказательство. Применяем принцип двойственности к теореме 12.22.
□

12.3 Экспонента. Сохранение произведений и копроизведений

Определение 12.27. Пусть K – категория с произведениями пар объектов. *Экспонентой* объектов A и B называется объект B^A (определённый с точностью до изоморфизма) вместе со стрелкой $ev_{A,B}\colon B^A \times A \to B$ такой, что для любых $C \in Ob(\mathsf{K})$ и $f\colon C \times A \to B$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "g \times id_A"] & C \arrow[d, dotted, "g"] \\ B & B^A \times A \arrow[l, "ev_{A,B}"] & B^A \end{tikzcd}$$

Это значит, что есть единственная стрелка $g\colon C \to B^A$ такая, что $f = ev_{A,B} \circ (g \times id_A)$. Стрелку $ev_{A,B}$ часто называют *отображением вычисления*, нижние индексы при ней не пишут, если они ясны из контекста.

Замечание 12.28. Единственную стрелку g в этом случае традиционно обозначают $\Lambda(f)$

$$\begin{tikzcd} & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\Lambda(f) \times id_A"] & C \arrow[d, dotted, "\Lambda(f)"] \\ B & B^A \times A \arrow[l, "ev_{A,B}"] & B^A \end{tikzcd}$$

Пример 12.29. В Set объект B^A – это множество всех функций из A в B, а ev и $\Lambda(f)$ определяются следующими равенствами

$$ev(h, a) = h(a)$$

$$\Lambda(f)(c)(a) = f(c, a)$$

где h – элемент B^A (то есть, функция из A в B), f – функция из $C \times A$ в B, $a \in A$, $c \in C$.

Определение 12.30. Категория называется *декартово замкнутой*, если в ней есть терминальный объект и для любой пары объектов существуют произведение и экспонента. В дальнейшем, говоря о какой-либо декартово замкнутой категории, мы всегда будем предполагать, что в ней выбраны некоторое произведение и некоторая экспонента (из всех возможных) для любой пары объектов.

Упражнение 12.31. Пусть дана декартово замкнутая категория K и некоторый объект $A \in Ob(\mathsf{K})$. Определим два функтора $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ и $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$$F(C) = C \times A$$

$$F(h) = h \times id_A$$

$$G(B) = B^A$$

$$G(h) = \Lambda(h \circ ev)$$

Покажите, что $F \dashv G$.

Замечание 12.32. Для краткости можно обозначать эти функторы $(-) \times A$ и $(-)^A$.

Упражнение 12.33. Покажите, что элементы экспоненты (то есть, стрелки вида $g\colon 1 \to B^A$) взаимно однозначно соответствуют стрелкам из A в B.

Упражнение 12.34. Cat является декартово замкнутой категорией (мы уже строили экспоненты в Cat под названием „категории функторов“).

Упражнение 12.35. Категория всех частично упорядоченных множеств и их монотонных отображений является декартово замкнутой.

Замечание 12.36. Все категории вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K малая, являются декартово замкнутыми, но построить в них экспоненту мы в данный момент не сможем, построим позже.

Теорема 12.37. *Правые сопряжённые функторы сохраняют терминальные объекты. Точнее, если $F \dashv G$, то $G(1)$ является терминальным объектом.*

Доказательство. Надо доказать, что для любого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ существует единственная стрелка из A в $G(1)$. Это стрелка

$$A \xrightarrow{\Gamma(!_{F(A)})} G(1)$$

соответствующая при сопряжении единственной стрелке

$$F(A) \xrightarrow{!_{F(A)}} 1$$

□

Теорема 12.38. *Правые сопряжённые функторы сохраняют произведения пар. Точнее, если $F \dashv G$ и существует произведение $X \times Y$ с проекциями pr_1 и pr_2, то $G(X \times Y)$ с проекциями $G(pr_1)$ и $G(pr_2)$ является произведением $G(X)$ и $G(Y)$.*

Доказательство. Необходимо доказать коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & G(X \times Y) \arrow[dl, "G(pr_1)"'] \arrow[dr, "G(pr_2)"] & \\
G(X) & & G(Y) \\
 & A \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

В качестве единственной стрелки возьмём $\Gamma(\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle)$

$$\begin{tikzcd}
 & G(X \times Y) \arrow[dl, "G(pr_1)"'] \arrow[dr, "G(pr_2)"] & \\
G(X) & & G(Y) \\
 & A \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dotted, "\Gamma(\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle)" description] &
\end{tikzcd}$$

соответствующую при сопряжении стрелке $\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle$

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
X & \langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle & Y \\
& F(A) \arrow[ul, "\Phi(g_1)"] \arrow[ur, "\Phi(g_2)"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

□

Упражнение 12.39. Проверьте детали.

Теорема 12.40. *Правые сопряжённые функторы сохраняют произведения любых множеств объектов (не только конечных, но и бесконечных). Точнее, если $F \dashv G$ и существует произведение $\prod_{i \in I} X_i$ с проекциями pr_i, то $G(\prod_{i \in I} X_i)$ с проекциями $G(pr_i)$ является произведением семейства объектов $\{G(X_i) \mid i \in I\}$.*

Упражнение 12.41. Докажите.

Упражнение 12.42. Множество-носитель произведения любого семейства групп является произведением их множеств-носителей.

В силу принципа двойственности немедленно получаем следующие теоремы.

Теорема 12.43. *Левые сопряжённые функторы сохраняют начальные объекты. Точнее, если $F \dashv G$, то $F(0)$ является начальным объектом.*

Теорема 12.44. *Левые сопряжённые функторы сохраняют копроизведения пар. Точнее, если $F \dashv G$ и существует копроизведение $A + B$ с копроекциями k_1 и k_2, то $F(A + B)$ с копроекциями $F(k_1)$ и $F(k_2)$ является копроизведением $F(A)$ и $F(B)$.*

Теорема 12.45. *Левые сопряжённые функторы сохраняют копроизведения любых множеств объектов (не только конечных, но и бесконечных). Точнее, если $F \dashv G$ и существует копроизведение $\sum_{i \in I} A_i$ с копроекциями k_i, то $F(\sum_{i \in I} A_i)$ с копроекциями $F(k_i)$ является копроизведением семейства объектов $\{F(A_i) \mid i \in I\}$.*

Пример 12.46. Глядя на пример 12.6, мы видим, что образ объединения любого семейства множеств равен объединению их образов. А также, прообраз пересечения любого семейства множеств равен пересечению их прообразов. На самом деле, при взятии прообраза сохраняются не только пересечения, но и объединения. Это связано с тем, что функтор f^* имеет также и правый сопряжённый $f^* \dashv \forall_f$ и полная картина выглядит так

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(M) \arrow[r, shift left, "\exists_f"] & \mathcal{P}(N) \arrow[l, shift left, "f^*"] \arrow[r, shift left, "f^*"] & \mathcal{P}(M) \arrow[l, shift left, "\forall_f"] \end{tikzcd}$$

$\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$. Монотонное отображение $\forall_f$ переводит всякое подмножество $A \subseteq M$ в подмножество N, заданное так

$$\forall_f(A) = \{y \in N \mid f^*(\{y\}) \subseteq A\}$$

Если использовать кванторы и логические связки, можно выписать такие определения

$$\exists_f(A) = \{y \in N \mid \exists x \in M(x \in A \wedge f(x) = y)\}$$

$$\forall_f(A) = \{y \in N \mid \forall x \in M(f(x) = y \Rightarrow x \in A)\}$$

Упражнение 12.47. В декартово замкнутых категориях верны следующие изоморфизмы

$$A \times 0 \cong 0$$

$$A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C$$

$$A \times (\textstyle\sum_{i\in I} B_i) \cong \textstyle\sum_{i\in I} A \times B_i$$

$$1^A \cong 1$$

$$(B \times C)^A \cong B^A \times C^A$$

$$(\textstyle\prod_{i\in I} B_i)^A \cong \textstyle\prod_{i\in I} B_i^A$$

Упражнение 12.48. Пусть K – декартово замкнутая категория, $A \in Ob(\mathsf{K})$. Определим функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}^{op}$

$$F(B) = A^B$$

$$F(h) = \Lambda(ev \circ (id_{A^C} \times h))$$

где $h\colon B \to C$. Проверьте, что $F \dashv F^{op}$, посмотрев на следующие изоморфизмы

$$\mathsf{K}^{op}(A^B, C) \cong \mathsf{K}(C, A^B) \cong \mathsf{K}(C \times B, A) \cong \mathsf{K}(B \times C, A) \cong \mathsf{K}(B, A^C)$$

Упражнение 12.49. В декартово замкнутых категориях верны следующие изоморфизмы

$$A^0 \cong 1$$

$$A^{B+C} \cong A^B \times A^C$$

$$A^{\sum_{i\in I} B_i} \cong \prod_{i\in I} A^{B_i}$$

Упражнение 12.50. Попытайтесь доказать следующие изоморфизмы

$$A^1 \cong A$$

$$A^{B\times C} \cong (A^C)^B$$

Упражнение 12.51. Если в декартово замкнутой категории с начальным объектом верно $0 \cong 1$, то эта категория вырожденная, то есть все её объекты изоморфны терминальному. Указание: рассмотрите объекты A^0 и A^1.

Упражнение 12.52. Категория групп не является декартово замкнутой.

12.4 Единственность сопряжённого функтора

Теорема 12.53. *Если $F_1 \dashv G$ и $F_2 \dashv G$, то $F_1 \cong F_2$. Иными словами, левый сопряжённый функтор к заданному функтору G, если он существует, определён однозначно с точностью до естественного изоморфизма.*

Доказательство. Возьмём некоторый объект $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$. Рассмотрим категорию K_A, объектами которой являются стрелки вида $g\colon A \to G(X)$, а морфизмом между объектами $g_1\colon A \to G(Z)$ и $g_2\colon A \to G(X)$ будет любая стрелка $h\colon Z \to X$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & G(Z) \arrow[d, "G(h)"] & Z \arrow[d, "h"] \\ & G(X) & X \end{tikzcd}$$

Пусть $F_1 \dashv G$ и $F_2 \dashv G$. Единицу первого сопряжения обозначим η, где $\eta_A\colon A \to G(F_1(A))$, а единицу второго сопряжения обозначим η', где $\eta'_A\colon A \to G(F_2(A))$. Стрелки η_A и η'_A обе являются начальными объектами категории K_A, все начальные объекты изоморфны, поэтому существует изоморфизм $i_A\colon F_1(A) \to F_2(A)$, делающий коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta'_A"'] & G(F_1(A)) \arrow[d, "G(i_A)"] & F_1(A) \arrow[d, "i_A"] \\ & G(F_2(A)) & F_2(A) \end{tikzcd}$$

и обратный к нему $i_A^{-1}\colon F_2(A) \to F_1(A)$, делающий коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[dr, "\eta_A"'] & G(F_2(A)) \arrow[d, "G(i_A^{-1})"] & F_2(A) \arrow[d, "i_A^{-1}"] \\ & G(F_1(A)) & F_1(A) \end{tikzcd}$$

Остаётся проверить, что стрелки i_A и i_A^{-1} являются компонентами естественных изоморфизмов

$$i\colon F_1 \to F_2$$

$$i^{-1}\colon F_2 \to F_1$$

Естественность i означает коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "F_1(h)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(h)"] \\
F_1(B) \arrow[r, "i_B"] & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и любой стрелки $h\colon A \to B$. Коммутативность этой диаграммы означает равенство

$$F_2(h) \circ i_A = i_B \circ F_1(h)$$

Это равенство доказывается сравнением коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & G(F_1(A)) \arrow[d, "G(i_A)"] & F_1(A) \arrow[d, "i_A"] \\
A \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[r, "\eta'_A"'] \arrow[d, "h"'] & G(F_2(A)) \arrow[d, "G(F_2(h))"] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(h)"] \\
B \arrow[r, "\eta'_B"] & G(F_2(B)) & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

с диаграммой

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F_1(A)) \arrow[d, "G(F_1(h))"] & F_1(A) \arrow[d, "F_1(h)"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "\eta'_B"'] & G(F_1(B)) \arrow[d, "G(i_B)"] & F_1(B) \arrow[d, "i_B"] \\
 & G(F_2(B)) & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

Стрелки в правых частях диаграмм должны совпадать, поскольку

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta'_B \circ h"'] & G(F_1(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F_1(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\
& G(F_2(B)) & F_2(B)
\end{tikzcd}
$$

Естественность i^{-1} доказывается аналогично (но лучше сослаться на упражнение 6.10).
□

Упражнение 12.54. Покажите, что правый сопряжённый функтор к заданному функтору F, если он существует, определён однозначно с точностью до естественного изоморфизма.

12.5 Ещё одно определение сопряжённости

Приведём ещё одно определение сопряжённости, которое встречается в некоторых книгах.

Определение 12.55. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть два естественных преобразования $\eta\colon Id_{\mathsf{K}_1} \to G \circ F$ и $\varepsilon\colon F \circ G \to Id_{\mathsf{K}_2}$, для которых коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "id_{F(A)}"'] & F(G(F(A))) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "\eta_{G(X)}"] \arrow[dr, "id_{G(X)}"'] & G(F(G(X))) \arrow[d, "G(\varepsilon_X)"] \\ & G(X) \end{tikzcd}$$

для любых $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$.

Замечание 12.56. Если обозначить через $F\eta$ естественное преобразование с компонентами $F(\eta_A)$, через εF естественное преобразование с компонентами $\varepsilon_{F(A)}$, через ηG естественное преобразование с компонентами $\eta_{G(X)}$ и через $G\varepsilon$ естественное преобразование с компонентами $G(\varepsilon_X)$, диаграммы становится легче запомнить

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "id_F"'] & F \circ G \circ F \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "id_G"'] & G \circ F \circ G \arrow[d, "G\varepsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Теорема 12.57. *Определение 12.55 эквивалентно определению 12.1.*

Доказательство. Пусть $F \dashv G$ в смысле определения 12.1. Тогда

$$\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \Phi(\eta_A) = \Phi(\Gamma(id_{F(A)})) = id_{F(A)}$$

$$G(\varepsilon_X) \circ \eta_{G(X)} = \Gamma(\varepsilon_X) = \Gamma(\Phi(id_{G(X)})) = id_{G(X)}$$

поэтому $F \dashv G$ в смысле определения 12.55. Полезно также посмотреть на следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[dl, "id_{F_A}"'] \arrow[d, dotted, "F(\eta_A)"] & A \arrow[d, dotted, "\eta_A"] \\
F(A) & F(G(F(A))) \arrow[l, "\varepsilon_{F(A)}"] & G(F(A))
\end{tikzcd}$$

и ещё вот эту

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r, "\eta_{G(X)}"] \arrow[dr, "id_{G(X)}"'] & G(F(G(X))) \arrow[d, dotted, "G(\varepsilon_X)"] & F(G(X)) \arrow[d, dotted, "\varepsilon_X"] \\
& G(X) & X
\end{tikzcd}$$

В обратную сторону, если $F \dashv G$ в смысле определения 12.55, полагаем по определению

$$\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$$

$$\Phi(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$$

и доказываем равенства из определения 12.1 в качестве упражнения.
$\square$

Глава 13

Эквациональная аксиоматика декартово замкнутых категорий

„Эквациональная“ значит „заданная равенствами“. На рисунке 13.1 выписан некоторый набор равенств, выполненных в любой декартово замкнутой категории. Стараясь сделать нагляднее, я их записал в виде „правил вывода“. Например, второе правило читается так: если $f\colon C \to A$ и $g\colon C \to B$, то $pr_1 \circ \langle f, g\rangle = f$. Как обычно, мы не пишем буквенные индексы при pr_1, pr_2, ev и Λ, если они ясны из контекста.

Теорема 13.1. *Категория является декартово замкнутой в том и только том случае, если в ней выполнены равенства, показанные на рисунке 13.1. Иными словами, декартово замкнутая категория задаётся следующим набором данных (помимо перечисленных в определении 1.1):*

1. *Объект* 1 *и для любого объекта* A *стрелка* $!_A\colon A \to 1$.
2. *Для любых объектов* A *и* B *некоторый объект* $A \times B$ *и стрелки* $pr_1\colon A \times B \to A$ *и* $pr_2\colon A \times B \to B$.
3. *Для любых стрелок* $f\colon C \to A$ *и* $g\colon C \to B$ *стрелка* $\langle f, g\rangle\colon C \to A \times B$.
4. *Для любых объектов* A *и* B *объект* B^A *и стрелка* $ev\colon B^A \times A \to B$.
5. *Для любой стрелки* $f\colon C \times A \to B$ *стрелка* $\Lambda(f)\colon C \to B^A$.

При этом должны выполняться равенства, показанные на рисунке 13.1.

1	$$\frac{f\colon A \to 1}{f = !_A}$$
2	$$\frac{f\colon C \to A \quad g\colon C \to B}{pr_1 \circ \langle f, g\rangle = f}$$
3	$$\frac{f\colon C \to A \quad g\colon C \to B}{pr_2 \circ \langle f, g\rangle = g}$$
4	$$\frac{h\colon C \to A \times B}{h = \langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h\rangle}$$
5	$$\frac{f\colon C \times A \to B}{f = ev \circ (\Lambda(f) \times id_A)}$$
6	$$\frac{g\colon C \to B^A}{g = \Lambda(ev \circ (g \times id_A))}$$

Рис. 13.1: Аксиоматика декартово замкнутых категорий

Доказательство. Предположим, что в категории выполняются равенства с рисунка 13.1 и покажем, что такая категория декартово замкнута. Ясно, что объект 1 будет терминальным

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted, "!_A"] & 1 \end{tikzcd}$$

(единственность стрелки следует из равенства 1).

Докажем, что $A \times B$ с проекциями $pr_1\colon A \times B \to A$ и $pr_2\colon A \times B \to B$

будет произведением A и B, что выражается диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, dotted, "\langle f, g\rangle" description] &
\end{tikzcd}
$$

Из равенств 2 и 3 следует коммутативность диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, "\langle f, g\rangle" description] &
\end{tikzcd}
$$

Чтобы доказать единственность стрелки $\langle f, g\rangle$, предположим, что некоторая стрелка $h\colon C \to A \times B$ делает коммутативной диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, "h"] &
\end{tikzcd}
$$

и докажем, что $h = \langle f, g\rangle$. Из диаграммы видно, что

$$pr_1 \circ h = f$$

$$pr_2 \circ h = g$$

В силу равенства 4

$$h = \langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h\rangle \quad \text{и поэтому } h = \langle f, g\rangle$$

Докажем, что B^A со стрелкой $ev\colon B^A \times A \to B$ является экспонентой A и B, что выражается диаграммой

$$\begin{tikzcd} & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\Lambda(f) \times id_A"] & C \arrow[d, dotted, "\Lambda(f)"] \\ B & B^A \times A \arrow[l, "ev"] & B^A \end{tikzcd}$$

Из равенства 5 следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\Lambda(f) \times id_A"] \\ B & B^A \times A \arrow[l, "ev"] \end{tikzcd}$$

Чтобы доказать единственность стрелки $\Lambda(f)$, предположим, что некоторая стрелка $g\colon C \to B^A$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g \times id_A"] \\ B & B^A \times A \arrow[l, "ev"] \end{tikzcd}$$

и докажем, что $g = \Lambda(f)$. Из диаграммы видно, что

$$ev \circ (g \times id_A) = f$$

В силу равенства 6

$$g = \Lambda(ev \circ (g \times id_A)) \text{ и поэтому } g = \Lambda(f)$$

В обратную сторону, покажем, что в декартово замкнутой категории выполнены равенства с рисунка 13.1. Равенства 1,2,3 и 5 следуют из определений терминального объекта, произведения и экспоненты (достаточно взглянуть на определяющие диаграммы). Равенство 4 доказывается сравнением коммутативных диаграмм

$$
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "pr_1 \circ h"] \arrow[ur, "pr_2 \circ h"'] \arrow[uu, "h"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "pr_1 \circ h"] \arrow[ur, "pr_2 \circ h"'] \arrow[uu, dotted, "\langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h \rangle"] &
\end{tikzcd}
$$

Равенство 6 доказывается сравнением коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
& C \times A \arrow[dl, "ev \circ (g \times id_A)"'] \arrow[d, "g \times id_A"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "g"] \\
B^A
\end{tikzcd}
$$

с коммутативной диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
& C \times A \arrow[dl, "f = ev \circ (g \times id_A)"'] \arrow[d, dotted, "\Lambda(f) \times id_A"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dotted, "\Lambda(ev \circ (g \times id_A))"] \\
B^A
\end{tikzcd}
$$

□

Замечание 13.2. Для сопряжённых функторов $(-) \times A$ и $(-)^A$ из упражнения 12.31 соответствующие Γ и Φ действуют так

$$\Gamma(f) = \Lambda(f)$$

$$\Phi(g) = ev \circ (g \times id_A)$$

и равенства 5 и 6 с рисунка 13.1 выражают их взаимную обратность.

Замечание 13.3. Аксиоматика, представленная на рисунке 13.1, не единственно возможная. Равенство 1 можно заменить на пару равенств

$$\frac{f \colon A \to B}{!_B \circ f = !_A}$$

$$!_1 = id_1$$

Равенство 4 можно заменить на пару равенств

$$\frac{h\colon D \to C \quad f\colon C \to A \quad g\colon C \to B}{\langle f, g\rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h\rangle}$$

$$\langle pr_1^{A\times B}, pr_2^{A\times B}\rangle = id_{A\times B}$$

С равенствами 5 и 6 тоже можно мудрить, но оставим это до главы про лямбда-исчисление.

Глава 14

Объекты натуральных чисел

В этой главе мы дадим определение натуральных чисел на теоретико-категорном языке.

Определение 14.1. Пусть K – декартово замкнутая категория. *Объектом натуральных чисел* в категории K называется объект $N \in Ob(\mathsf{K})$ вместе с парой морфизмов $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$ такой, что для любого $A \in Ob(\mathsf{K})$ и любой пары морфизмов $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$ коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dotted, "h"] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "a"'] & & \\
 & A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

то есть существует единственная стрелка h такая, что

$$h \circ 0 = a$$

$$h \circ S = f \circ h$$

Пример 14.2. В Set объект натуральных чисел – это множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ вместе с элементом $0 \in \mathbb{N}$, который задаёт стрелку $\{*\} \xrightarrow{0} \mathbb{N}$, а также функцией прибавления единицы $S(n) = n + 1$, которая задаёт стрелку $\mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N}$, итого получаем $\{*\} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N}$. Если заданы произвольное множество A, элемент $a \in A$ и функция $A \xrightarrow{f} A$, мы можем определить функцию $h\colon \mathbb{N} \to A$, удовлетворяющую следующим равенствам

$$h(0) = a$$

$$h(n+1) = f(h(n)) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Таким образом, $h(n) = f(f(\ldots f(a)\ldots))$, где f применяется n раз. Существование и единственность такой функции h, полученной итерацией (многократным применением), следуют из принципа математической индукции. Второе равенство можно переписать так

$$h(S(n)) = f(h(n)) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

или ещё лучше

$$h \circ S = f \circ h$$

Теорема 14.3. *Объект натуральных чисел, если он существует, определён однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную категорию K_1, объектами которой являются пары стрелок (или диаграммы) вида $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$. Морфизмом между диаграммами $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$ и $1 \xrightarrow{b} B \xrightarrow{g} B$ по определению будет любая стрелка h, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"'] & B \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Объект натуральных чисел является начальным объектом в K_1.
□

Пример 14.4. В топосах вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ объекты натуральных чисел устроены просто – это функторы $N\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, тождественно равные $\mathbb{N}$

$$N(A) = \mathbb{N}$$

$$N(f) = id_{\mathbb{N}}$$

для всех $A \in Ob(\mathsf{K}), f \in Mor(\mathsf{K})$.
Естественное преобразование $0\colon 1 \to N$ имеет компоненты

$$0(A) = 0\colon \{*\} \to \mathbb{N}$$

его естественность выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} B & \{*\} \arrow[r, "0"] & \mathbb{N} \\ A \arrow[u, "f"] & \{*\} \arrow[u, "id_{\{*\}}"] \arrow[r, "0"] & \mathbb{N} \arrow[u, "id_{\mathbb{N}}"'] \end{tikzcd}$$

Естественное преобразование $S\colon N \to N$ имеет компоненты

$$S(A) = S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

его естественность выражается коммутативной диаграммой

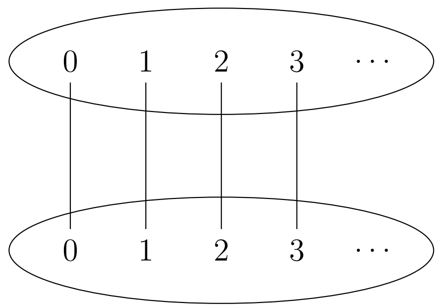
$$\begin{tikzcd} B & \mathbb{N} \arrow[r, "S"] & \mathbb{N} \\ A \arrow[u, "f"] & \mathbb{N} \arrow[u, "id_{\mathbb{N}}"] \arrow[r, "S"] & \mathbb{N} \arrow[u, "id_{\mathbb{N}}"'] \end{tikzcd}$$

все естественные преобразования $h\colon N \to A$, полученные итерацией, тоже строятся покомпонентно.

Пример 14.5. В категории $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K – изображённая ниже категория частичного порядка

$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop left, "id_B"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"] \end{tikzcd}$$

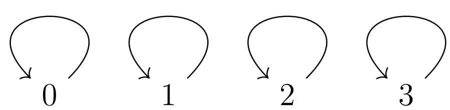
объектом натуральных чисел будет следующее „множество, меняющееся со временем“ (точнее, не меняющееся)



Элементом $0\colon 1 \to N$ будет пара $(0, 0)$ („мировая линия нуля“). Стрелкой $S\colon N \to N$ будет отображение, сдвигающее всю картинку на одну позицию вправо.

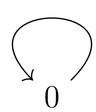
Пример 14.6. Если K – малая категория с одним объектом (задающая полугруппу с единицей), объектом натуральных чисел в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ будет множество $\mathbb{N}$ с тривиальным действием полугруппы (все элементы полугруппы переходят в $id_{\mathbb{N}}$, все натуральные числа являются неподвижными точками).

Пример 14.7. В категории графов Grph объектом натуральных чисел будет граф N из бесконечного числа вершин, перенумерованных натуральными числами, к каждой из которых приделана петля



и так далее

Элементом $0\colon 1 \to N$ будет точка графа



Стрелкой $S\colon N \to N$ будет отображение графа N в себя, сдвигающее всю картинку на одну позицию вправо.

Определение 14.8. *Стрелкой предшествования* называется стрелка $p\colon N \to N$, делающая коммутативными следующие диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
& N \arrow[d, "p"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & \\
& N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "id_N"'] & N \arrow[d, "p"] \\
& N
\end{tikzcd}
$$

Таким образом

$$p \circ 0 = 0$$

$$p \circ S = id_N$$

В Set это функция, вычитающая единицу из любого числа, кроме нуля

$$p(0) = 0$$

$$p(S(n)) = n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Теорема 14.9. *В каждой категории с объектом натуральных чисел существует единственная стрелка предшествования.*

Доказательство. Сначала построим такую стрелку в Set, используя некоторую итерацию. Будем определять пару функций $h_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $h_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ одновременной рекурсией

$$h_1(0) = 0$$

$$h_2(0) = 0$$

$$h_1(n+1) = h_1(n) + 1$$

$$h_2(n+1) = h_1(n) \quad \text{для любого } \ n \in \mathbb{N}$$

Перепишем эти равенства, используя S

$$h_1(0) = 0$$

$$h_2(0) = 0$$

$$h_1(S(n)) = S(h_1(n))$$

$$h_2(S(n)) = h_1(n) \quad \text{для любого} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Посмотрев на первое и третье равенства, легко доказать по индукции, что

$$h_1(n) = n \quad \text{для любого} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Но тогда функция h_2 и есть p (надо посмотреть на второе и четвёртое равенства).

Переходим к общему случаю. Определим стрелку $h\colon N \to N \times N$ следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dotted, "h"] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "{\langle 0,0\rangle}"'] & N \times N \arrow[r, "{\langle S \circ pr_1, pr_1\rangle}"] & N \times N
\end{tikzcd}$$

Содержательно говоря

$$h = \langle h_1, h_2\rangle$$

$$h_1 = pr_1 \circ h$$

$$h_2 = pr_2 \circ h$$

Функция $\langle S \circ pr_1, pr_1\rangle$ в Set переводит пару (n, m) в пару $(S(n), n)$. Пара $h(n)$ есть результат применения этой функции n раз к паре $(0, 0)$.

$$h(0) = (0, 0)$$

$$h(1) = (1, 0)$$

$$h(2) = (2, 1)$$

и так далее. Возвращаемся от Set к общему случаю. Докажем, что

$$pr_1 \circ h = id_N$$

Из коммутативности диаграммы следует, что

1. $h \circ 0 = \langle 0, 0\rangle$ (коммутативность треугольника)

2. $h \circ S = \langle S \circ pr_1, pr_1 \rangle \circ h$ (коммутативность прямоугольника)

Из этого легко получить

$$pr_1 \circ h \circ 0 = 0$$

$$pr_1 \circ h \circ S = S \circ pr_1 \circ h$$

Но стрелка id_N удовлетворяет тем же условиям, что и $pr_1 \circ h$, поэтому $pr_1 \circ h = id_N$. Тут надо поглядеть на диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[dd, dotted, "pr_1 \circ h"] & N \arrow[dd, dotted, "pr_1 \circ h"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \\
 & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[dd, dotted, "id_N"] & N \arrow[dd, dotted, "id_N"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \\
 & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

Из равенств 1 и 2 легко выводится

$$pr_2 \circ h \circ 0 = 0$$

$$pr_2 \circ h \circ S = pr_1 \circ h = id_N$$

и стрелка $pr_2 \circ h$ удовлетворяет тем условиям, которых мы требуем от стрелки предшествования. Мы доказали существование стрелки предшествования, надо ещё доказать единственность. Это легко. Допустим, у нас есть стрелка $p\colon N \to N$, для которой верно

$$p \circ 0 = 0$$

$$p \circ S = id_N$$

Тогда стрелка $\langle id_N, p\rangle$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[dd, dotted, "\langle id_N, p\rangle"] & N \arrow[dd, dotted, "\langle id_N, p\rangle"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "\langle 0, 0\rangle"'] & & \\
 & N \times N \arrow[r, "\langle S \circ pr_1, pr_1\rangle"] & N \times N
\end{tikzcd}$$

Такая стрелка единственна и p по ней однозначно находится (как вторая проекция пары).
□

Соглашение 14.10. Будем обозначать $0_A \colon A \to N$ композицию $0 \circ !_A$

$$A \xrightarrow{!_A} 1 \xrightarrow{0} N$$

В Set это функция из A в $\mathbb{N}$, тождественно равная нулю. Тут автор приносит извинения, потому что обозначал этим же символом единственную стрелку из нулевого объекта (эту стрелку я переименую, её всё равно, как называть, потому что она редко нужна).

Упражнение 14.11.

$$0_B \circ f = 0_A \quad \text{для } f \colon A \to B$$

$$0 = 0_1$$

До сих пор мы не использовали декартову замкнутость в полную силу, нам были нужны только терминальный объект и произведение. Экспонента нужна, чтобы доказать теорему 14.12. Прежде, чем её сформулировать, посмотрим, как мы определяем функцию сложения
$+ \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Один из возможных способов такой (рекурсия по первому аргументу)

$$0 + n = n$$

$$S(n) + m = S(n + m) \quad \text{для любых } n, m \in \mathbb{N}$$

Определяющая её диаграмма в Set выглядит так

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "S\times id_{\mathbb{N}}"] \arrow[d, dotted, "+"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, dotted, "+"] \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "\langle 0_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}}\rangle"] \arrow[r, "id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "S"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

Функция $\langle 0_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}}\rangle$ отображает $n \in \mathbb{N}$ в пару $(0, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
Функция $S \times id_{\mathbb{N}}$ отображает пару $(n, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ в пару $(S(n), m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Рассмотрим более общий случай. Пусть даны множества A и B, а также функции $g\colon A \to B$ и $f\colon B \to B$. Мы можем определить функцию $j\colon \mathbb{N}\times A \to B$ следующими равенствами

$$j(0, a) = g(a)$$

$$j(S(n), a) = f(j(n, a)) \quad \text{для любых } n \in \mathbb{N}\,, a \in A$$

Таким образом, $j(n, a) = f(f(\ldots f(g(a))\ldots))$, где f применяется n раз.

Теорема 14.12. *В декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел коммутативны следующие диаграммы (для любых A, B, g, f)*

$$\begin{tikzcd} & N\times A \arrow[r, "S\times id_A"] \arrow[d, dotted, "j"] & N\times A \arrow[d, dotted, "j"] \\ A \arrow[ur, "\langle 0_A, id_A\rangle"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Доказательство. Напомню, что с объектом A связаны два сопряжённых функтора $F \dashv G$, определяемые так

$$F(C) = C \times A$$

$$F(f) = f \times id_A$$

$$G(B) = B^A$$

$$G(f) = \Lambda(f \circ ev)$$

Преобразования Γ и Φ, связанные с этим сопряжением, действуют так

$$\Gamma(f) = \Lambda(f) \qquad \text{для любого } f \colon C \times A \to B$$

$$\Phi(g) = ev \circ (g \times id_A) \quad \text{для любого } g \colon C \to B^A$$

и для них выполнены равенства (для любых подходящих f, g, h)

$$\Lambda(\Phi(g)) = g$$

$$\Phi(\Lambda(f)) = f$$

$$\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$$

$$\Lambda(h \circ f) = G(h) \circ \Lambda(f)$$

$$\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$$

$$\Lambda(f \circ F(h)) = \Lambda(f) \circ h$$

Переходим собственно к доказательству. Возьмём следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dotted, "k"] & N \arrow[d, dotted, "k"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "\ulcorner g \urcorner"'] & & \\
 & B^A \arrow[r, "f^A"] & B^A
\end{tikzcd}$$

на которой использованы (стандартные) сокращения

$$\ulcorner g \urcorner = \Lambda(g \circ pr_2) \quad (\text{потому что } \ 1 \times A \xrightarrow{pr_2} A \xrightarrow{g} B\,)$$

$$f^A = G(f) = \Lambda(f \circ ev) \quad (\text{потому что } \ B^A \times A \xrightarrow{ev} B \xrightarrow{f} B\,)$$

Коммутативность треугольника и квадрата означает следующее

$$k \circ 0 = \Lambda(g \circ pr_2)$$

$$k \circ S = G(f) \circ k$$

Положим $j = \Phi(k)$ и докажем коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & N \times A \arrow[r, "S \times id_A"] \arrow[d, dotted, "\Phi(k)"] & N \times A \arrow[d, dotted, "\Phi(k)"] \\
A \arrow[ur, "\langle 0_A, id_A \rangle"] \arrow[dr, "g"'] & & \\
 & B \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Доказательство не содержит глубоких идей и состоит в трудолюбивых вычислениях, поэтому я докажу только коммутативность левого треугольника. Начнём с равенства

$$k \circ 0 = \Lambda(g \circ pr_2)$$

Применим к обеим частям Φ

$$\Phi(k \circ 0) = \Phi(\Lambda(g \circ pr_2))$$

$$\Phi(k) \circ F(0) = g \circ pr_2$$

$$\Phi(k) \circ (0 \times id_A) = g \circ pr_2$$

Умножим обе части справа на $\langle\, !_A, id_A \rangle$ (это изоморфизм A и $1 \times A$)

$$\Phi(k) \circ (0 \times id_A) \circ \langle\, !_A, id_A \rangle = g \circ pr_2 \circ \langle\, !_A, id_A \rangle$$

и вычислим

$$\Phi(k) \circ \langle 0 \circ !_A, id_A \rangle = g$$

Получили коммутативность треугольника. Осталось доказать ещё три равенства (коммутативность прямоугольника и два равенства, из которых следует единственность).
□

Упражнение 14.13. В Set стрелка вида f^A – это отображение $f \circ$ (умножение слева на f).

Следствие 14.14. *В декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел коммутативны также следующие диаграммы (для любых A, B, g, f)*

$$\begin{tikzcd} & A \times N \arrow[r, "id_A \times S"] \arrow[d, dotted, "j"] & A \times N \arrow[d, dotted, "j"] \\ A \arrow[ur, "\langle id_A, 0_A \rangle"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Это легко вывести из предыдущей теоремы, поскольку $A \times N \cong N \times A$.

Замечание 14.15. Коммутативность таких диаграмм удобно брать за определение объекта натуральных чисел, если в категории нет экспонент (а только терминальный объект и произведения пар объектов). Например, это позволяет нам определять сложение привычным способом (рекурсия по второму аргументу)

$$n + 0 = n$$

$$n + S(m) = S(n + m) \quad \text{для любых } n, m \in \mathbb{N}$$

Определяющая диаграмма в Set выглядит так

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times S"] \arrow[d, dotted, "+"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, dotted, "+"] \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "\langle id_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}} \rangle"] \arrow[r, "id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "S"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

Мы можем точно так же определить сложение в любой категории с объектом натуральных чисел.

Определение 14.16. *Сложением* называется стрелка $+\colon N \times N \to N$, определяемая следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[r, "id_N \times S"] \arrow[d, dotted, "+"] & N \times N \arrow[d, dotted, "+"] \\
N \arrow[ur, "\langle id_N, 0_N \rangle"] \arrow[r, "id_N"'] & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

Таким образом, сложение – единственная стрелка, удовлетворяющая следующим равенствам

$$+ \circ \langle id_N, 0_N \rangle = id_N$$

$$+ \circ (id_N \times S) = S \circ +$$

Упражнение 14.17.

$$+ \circ \langle f, 0_A \rangle = f \quad \text{для любого} \quad f\colon A \to N$$

$$+ \circ \langle f, 0 \rangle = f \quad \text{для любого} \quad f\colon 1 \to N$$

$$+ \circ \langle f, S \circ g \rangle = S \circ + \circ \langle f, g \rangle \quad \text{для любых } f\colon A \to N,\ g\colon A \to N$$

Сложение обладает обычными свойствами, некоторые из них мы сейчас докажем.

Теорема 14.18. *В любой категории с объектом натуральных чисел коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[dr, "+"] & \\
 & N \\
N \arrow[uu, "\langle 0_N, id_N \rangle"] \arrow[ur, "id_N"'] &
\end{tikzcd}$$

В Set *она выражает равенство*

$$0 + n = n \quad \textit{для всех} \quad n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. В Set мы доказываем это по индукции. Сначала выпишем равенства

1. $0 + 0 = 0$

2. $0 + S(n) = S(0 + n)$

оба равенства по определению сложения. Первое равенство даёт базис индукции. Второе равенство показывает, что $0 + S(n) = S(n)$, если $0 + n = n$, это шаг индукции.

В общем случае мы действуем так. По определению объекта натуральных чисел

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dotted, "h"] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \\ & A \arrow[r, "S"] & A \end{tikzcd}$$

Таким образом, существует единственная стрелка h, удовлетворяющая равенствам

$$h \circ 0 = 0$$

$$h \circ S = S \circ h$$

Дальше надо показать, что стрелки $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle$ и id_N обе удовлетворяют этим равенствам и поэтому совпадают. Для id_N это очевидно, а для стрелки $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle$ проверяется вычислением, повторяющим 1 и 2 выше

1. $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle \circ 0 = + \circ \langle 0_N \circ 0, id_N \circ 0 \rangle = + \circ \langle 0, 0 \rangle = 0$

2. $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle \circ S = + \circ \langle 0_N \circ S, id_N \circ S \rangle = + \circ \langle 0_N, S \rangle = S \circ \langle 0_N, id_N \rangle$

□

Теорема 14.19. *(Ассоциативность сложения). В любой категории с объектом натуральных чисел коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
N \times N \times N \arrow[r, "\langle pr_1, + \circ \langle pr_2, pr_3 \rangle \rangle"] \arrow[d, "\langle + \circ \langle pr_1, pr_2 \rangle, pr_3 \rangle"'] & N \times N \arrow[d, "+"] \\
N \times N \arrow[r, "+"] & N
\end{tikzcd}$$

Доказательство. В Set эта диаграмма выражает равенство

$$(n+m)+l = n+(m+l) \quad \text{для любых } n, m, l \in \mathbb{N}$$

В Set мы это доказываем индукцией по l.

1. $(n+m)+0 = n+m$
2. $n+(m+0) = n+m$
3. $(n+m)+S(l) = S((n+m)+l)$
4. $n+(m+S(l)) = n+S(m+l) = S(n+(m+l))$

Первые две строчки доказывают, что $(n+m)+0 = n+(m+0)$, это базис индукции.
Последние две строчки доказывают, что $(n+m)+S(l) = n+(m+S(l))$, если $(n+m)+l = n+(m+l)$, это шаг индукции.

В общем случае мы действуем так. По следствию 14.14 существует стрелка j, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & (N \times N) \times N \arrow[r, "id_{N \times N} \times S"] \arrow[d, dotted, "j"] & (N \times N) \times N \arrow[d, dotted, "j"] \\
N \times N \arrow[ur, "\langle id_{N \times N}, 0_{N \times N} \rangle"] \arrow[r, "+"'] & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

Поскольку $(N \times N) \times N \cong N \times N \times N$, перепишем эту диаграмму так

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \times N \arrow[r, "\langle pr_1, pr_2, S \circ pr_3 \rangle"] \arrow[d, dotted, "j"] & N \times N \times N \arrow[d, dotted, "j"] \\
N \times N \arrow[ur, "\langle pr_1, pr_2, 0_{N \times N} \rangle"] \arrow[r, "+"'] & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

Таким образом, существует единственная стрелка j, удовлетворяющая равенствам

$$j \circ \langle pr_1, pr_2, 0_{N\times N} \rangle = +$$

$$j \circ \langle pr_1, pr_2, S \circ pr_3 \rangle = S \circ j$$

Дальше надо показать, что стрелки

$$+ \circ \langle + \circ \langle pr_1, pr_2 \rangle, pr_3 \rangle \colon N \times N \times N \to N$$

$$+ \circ \langle pr_1, + \circ \langle pr_2, pr_3 \rangle \rangle \colon N \times N \times N \to N$$

обе удовлетворяют этим равенствам (и поэтому совпадают). Доказательство заключается в трудолюбивом вычислении, повторяющем доказательства равенств 1,2,3,4 выше.
□

Замечание 14.20. Мы видим, что язык теории категорий очень хорош, чтобы давать определения, но неудобен для сложных доказательств. Главная причина этого – отсутствие связанных переменных. То, что в обычной математической записи выглядит так

$$\forall x (f(g(x)) = h(x))$$

на языке теории категорий выглядит так

$$f \circ g = h$$

Для людей, знакомых с комбинаторами: язык теории категорий – это некоторое исчисление комбинаторов.

Упражнение 14.21. Докажите коммутативность сложения (хотя бы в Set)

$$\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[dr, "+"] & \\
& N \\
N \times N \arrow[uu, "\langle pr_2, pr_1 \rangle"] \arrow[ur, "+"'] &
\end{tikzcd}$$

Определение 14.22. Рассмотрим некоторый весьма общий способ определения функций, который называется *примитивной рекурсией*. Если заданы множества A, B и функции $g\colon A \to B$ и $f\colon A \times \mathbb{N} \times B \to B$, мы можем определить функцию $h\colon A \times \mathbb{N} \to B$ следующими равенствами

$$h(a, 0) = g(a)$$

$$h(a, S(n)) = f(a, n, h(a, n)) \quad \text{для любых } a \in A, n \in \mathbb{N}$$

Пример 14.23. Операция умножения натуральных чисел определяется в Set, например, следующими равенствами

$$n \times 0 = 0$$

$$n \times S(m) = n + n \times m \quad \text{для всех } n, m \in \mathbb{N}$$

Это пример определения по примитивной рекурсии. Функции $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ здесь такие

$$g(n) = 0$$

$$f(n, m, l) = n + l \quad \text{для всех } n, m, l \in \mathbb{N}$$

Заметим, что в этом примере функция f от m явно не зависит, эта переменная, как говорят, фиктивная.

Теорема 14.24. *(Теорема о примитивной рекурсии). В категории с объектом натуральных чисел для любых объектов A, B и стрелок $g\colon A \to B$ и $f\colon A \times N \times B \to B$ существует единственная стрелка $h\colon A \times N \to B$, для которой коммутативны следующие диаграммы*

$$\begin{tikzcd} & A \times N \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[ur, "\langle id_A, 0_A \rangle"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times N \arrow[r, "id_A \times S"] \arrow[d, "\langle pr_1, pr_2, h \rangle"'] & A \times N \arrow[d, "h"] \\ A \times N \times B \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Доказательство. По следствию 14.14 существует стрелка j, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[d, dotted, "j"] & A \times N \arrow[d, dotted, "j"] \\ A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[r, "\langle id_A, 0_A, g \rangle"'] & A \times N \times B \arrow[r, "\langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle"] & A \times N \times B \end{tikzcd}$$

Сначала покажем, что это значит в Set. В Set стрелка $\langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle$ переводит тройку (a, n, b) в тройку $(a, S(n), f(a, n, b))$. Далее

$$j(a, 0) = (a, 0, g(a)) \quad \text{(коммутативность треугольника)}$$

и если обозначить $j(a, n) = (j_1(a, n), j_2(a, n), j_3(a, n)) \in A \times \mathbb{N} \times B$, то

$$j_1(a, 0) = a$$

$$j_2(a, 0) = 0$$

$$j_3(a, 0) = g(a)$$

а из коммутативности прямоугольника следует

$$j_1(a, S(n)) = j_1(a, n) \quad \text{и по индукции } j_1(a, n) = a$$

$$j_2(a, S(n)) = S(j_2(a, n)) \quad \text{и по индукции } j_2(a, n) = n$$

$$j_3(a, S(n)) = f(j_1(a, n), j_2(a, n), j_3(a, n)) = f(a, n, j_3(a, n))$$

и j_3 есть нужная нам стрелка h.

Теперь общий случай. На категорном языке выписанные выше равенства выглядят так

$$j \circ \langle id, 0_A \rangle = \langle id_A, 0_A, g \rangle \qquad \text{(коммутативность треугольника)}$$

$$j \circ (id \times S) = \langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle \circ j \quad \text{(коммутативность прямоугольника)}$$

и поэтому

$$pr_1 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = id_A$$

$$pr_2 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = 0_A$$

$$pr_3 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = g$$

$$pr_1 \circ j \circ (id \times S) = pr_1 \circ j \quad \text{и по индукции } \ pr_1 \circ j = pr_1^{A \times N}$$

$$pr_2 \circ j \circ (id \times S) = S \circ pr_2 \circ j \quad \text{и по индукции } \ pr_2 \circ j = pr_2^{A \times N}$$

$$pr_3 \circ j \circ (id \times S) = f \circ \langle pr_1 \circ j, pr_2 \circ j, pr_3 \circ j \rangle = f \circ \langle pr_1^{A \times N}, pr_2^{A \times N}, pr_3 \circ j \rangle$$

Требуемая стрелка h есть композиция $pr_3 \circ j$, индукция же заключается в сравнении между собой сначала этих двух диаграмм

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[d, dotted, "pr_1 \circ j"] & A \times N \arrow[d, dotted, "pr_1 \circ j"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[r, "id"'] & A \arrow[r, "id"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[d, dotted, "pr_1^{A \times N}"] & A \times N \arrow[d, dotted, "pr_1^{A \times N}"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[r, "id"'] & A \arrow[r, "id"] & A
\end{tikzcd}$$

а потом вот этих двух

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[d, dotted, "pr_2 \circ j"] & A \times N \arrow[d, dotted, "pr_2 \circ j"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[r, "0_A"'] & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[d, dotted, "pr_2^{A \times N}"] & A \times N \arrow[d, dotted, "pr_2^{A \times N}"] \\
A \arrow[ur, "\langle id, 0_A \rangle"] \arrow[dr, "0_A"'] & & \\
 & N \arrow[r, "S"] & N
\end{tikzcd}$$

Принцип автора – не скрывать никакой правды, даже неприятной:)
□

Определение 14.25. *Умножением* называется единственная стрелка $\times \colon N \times N \to N$, делающая коммутативными следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[dd, "\times"] \\
N \arrow[ur, "\langle id_N, 0_N \rangle"] \arrow[dr, "0_N"'] & \\
 & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "id_N \times S"] \arrow[d, "\langle pr_1, \times \rangle"'] & N \times N \arrow[d, "\times"] \\
N \times N \arrow[r, "+"] & N
\end{tikzcd}$$

Такая стрелка существует в любой категории с объектом натуральных чисел, что выводится из теоремы о примитивной рекурсии с помощью следующего трюка („добавления фиктивной переменной“): надо требовать коммутативности таких диаграмм (изменения только во второй диаграмме)

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[dd, "\times"] \\
N \arrow[ur, "\langle id_N, 0_N \rangle"] \arrow[dr, "0_N"'] & \\
 & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "id_N \times S"] \arrow[d, "\langle pr_1, pr_2, \times \rangle"'] & N \times N \arrow[d, "\times"] \\
N \times N \times N \arrow[r, "+ \circ \langle pr_1, pr_3 \rangle"] & N
\end{tikzcd}$$

Упражнение 14.26. Попытайтесь доказать существование стрелки умножения, не используя теорему о примитивной рекурсии.

Упражнение 14.27. Докажите (хотя бы в Set), что умножение ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно относительно сложения.

Замечание 14.28. Способ определять функцию предшествования с помощью итерации придумал Клини, сидя под наркозом у зубного врача. Наркоз тогда делали закисью азота (веселящим газом). Когда он показал решение Чёрчу (своему учителю), тот сказал „Но тогда мы можем определить любую вычислимую функцию!“ (имелось в виду, определить в лямбда-исчислении). В этот момент родился тезис Чёрча. История взята из статьи Барендрегта к юбилею Чёрча, потом дам ссылку.

Глава 15

Исчисление высказываний

Предупреждение. Мне кажется, что я в этой главе ничего не придумывал, а скомпилировал из прочитанного. Но где я всё это читал, могу и не вспомнить. Где вспомню, буду давать ссылки. Дальнейший текст книги от этой главы, видимо, мало зависит.

15.1 Интуиционистское исчисление высказываний

Определение 15.1. Пусть у нас есть некий набор исходных, или *атомарных высказываний* P, Q, $R\ldots$ (наподобие $2 \times 2 = 4$, $1 < 0$ и т. п., они не обязаны все быть верными).
Высказывания, или *формулы* строятся из атомарных P, Q, $R\ldots$, а также символов $\top$ (*истина*) и $\bot$ (*ложь*) с помощью *логических связок* $\wedge$ (*конъюнкция*), $\vee$ (*дизъюнкция*), $\Rightarrow$ (*импликация*), $\neg$ (*отрицание*), $\Leftrightarrow$ (*логическая равносильность, или логическая эквивалентность*). Произвольные формулы будем обозначать буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ Таким образом

- P, Q, $R\ldots$ являются формулами;
- $\top$, $\bot$ являются формулами;
- $(\neg\alpha)$ („неверно α“) является формулой, если α является формулой;

- $(\alpha \wedge \beta)$ („α и β“), $(\alpha \Rightarrow \beta)$ („если α, то β“), $(\alpha \vee \beta)$ („α или β“), $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ („α равносильно β“) являются формулами, если α и β являются формулами;

- других формул нет.

Замечание: предполагается, что символы $\top, \bot$ не содержатся среди $P, Q, R \ldots$

Пример 15.2. Пример формулы

$$((((\neg Q) \Leftrightarrow \bot) \wedge P) \Rightarrow R)$$

Соглашение 15.3. Чтобы уменьшить число скобок, введём следующие соглашения

- Внешние скобки никогда не пишутся;

- Скобки вокруг $\neg\alpha$ никогда не пишутся;

- Связки $\wedge, \vee$ связывают сильнее, чем $\Rightarrow, \Leftrightarrow$. Это значит, например, что формулу вида $((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\gamma \vee \delta))$ будем записывать как $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma \vee \delta$

Формула из примера 15.2 теперь выглядит так

$$(\neg Q \Leftrightarrow \bot) \wedge P \Rightarrow R$$

Сначала мы рассмотрим исчисление *натурального вывода*, в котором почти нет аксиом, но много правил вывода. Для каждой логической связки есть, грубо говоря, два правила вывода — одно позволяет вводить эту логическую связку, а второе от неё избавляться. Для связки $\wedge$ соответствующие правила называются $\wedge$I (от слова introduction) и $\wedge$E (elimination).

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,(\wedge\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\,(\wedge\mathrm{E}_1) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\,(\wedge\mathrm{E}_2)$$

Мы видим, что их три, но считается, что правило $\wedge$E присутствует в двух вариантах. На самом деле, это скорее ещё не правила, а некие схемы правил, поскольку сами символы α, β не являются формулами, вместо них надо подставлять произвольные формулы и получать правила. Если вместо α подставить $P \Rightarrow Q$, а вместо β подставить R, мы получим один из примеров правила $\wedge$I

$$\frac{P \Rightarrow Q \quad R}{(P \Rightarrow Q) \wedge R}$$

Пример 15.4.

$$\dfrac{\dfrac{P \wedge Q^{(1)}}{Q}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{P \wedge Q^{(1)}}{P}\,\wedge\mathrm{E}_1}{Q \wedge P}\,\wedge\mathrm{I}$$

Это пример натурального вывода. Из посылки (гипотезы, допущения) $P \wedge Q$ мы вывели формулу $Q \wedge P$. По техническим причинам (которые скоро станут ясны) посылка помечена верхним индексом $^{(1)}$. Справа от каждой черты указано название применённого правила вывода. Практически удобнее записывать натуральные выводы не в виде деревьев, а в виде таблиц Фитча

1	$P \wedge Q$	
2	Q	$\wedge\mathrm{E}_2, 1$
3	P	$\wedge\mathrm{E}_1, 1$
4	$Q \wedge P$	$\wedge$I, 2,3

В первой строке записана посылка. Каждая следующая строка получена из предыдущих с помощью одного из правил вывода, справа указано название правила и номера строк, к которым оно применялось.

Правила вывода для импликации выглядят сложнее

$$\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta}\,(\Rightarrow \mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}\,(\Rightarrow \mathrm{E}, \mathrm{MP})$$

В посылке правила $\Rightarrow$I стоит не формула, а некоторый вывод формулы β из гипотезы α. Правило утверждает следующее: если мы можем вывести β из α, мы можем считать доказанной импликацию $\alpha \Rightarrow \beta$. Гипотеза α при этом, как говорят, *закрывается* и полученный вывод

формулы $\alpha \Rightarrow \beta$ от этой гипотезы уже не зависит, что изображается заключением α в квадратные скобки.
Правило $\Rightarrow$E, оно же Modus ponens (MP), утверждает следующее: если мы доказали $\alpha \Rightarrow \beta$ и доказали α, мы можем считать доказанной β.

Пример 15.5. Вывод формулы $P \wedge Q \Rightarrow P$

$$\dfrac{\dfrac{P \wedge Q^{(1)}}{P}\,\wedge\mathrm{E}_1}{P \wedge Q \Rightarrow P}\Rightarrow \mathrm{I}, (1)$$

Нижняя строка получена применением правила $\Rightarrow$I

$$\dfrac{\begin{array}{c}[P \wedge Q]\\ \vdots \\ P\end{array}}{P \wedge Q \Rightarrow P}\Rightarrow \mathrm{I}$$

При этом посылка $P \wedge Q$ закрывается и окончательный вывод от этой посылки уже не зависит, что мы будем отмечать указанием её номера в том месте, где она закрылась (а квадратных скобок ставить не будем)

$$\dfrac{\begin{array}{c}P \wedge Q^{(1)}\\ \vdots \\ P\end{array}}{P \wedge Q \Rightarrow P}\Rightarrow \mathrm{I}, (1)$$

В виде таблицы Фитча соответствующий вывод удобно записывать так

1	$\quad P \wedge Q$	
2	$\quad P$	$\wedge\mathrm{E}_1, 1$
3	$P \wedge Q \Rightarrow P$	$\Rightarrow$I, 1–2

справа от $\Rightarrow$I стоит указание на подвывод, занимающий строки 1–2.

Пример 15.6. Вывод формулы $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$

$$\begin{array}{lll}
1 & \mid\ \underline{P} & \\
2 & \mid\ \mid\ \underline{Q} & \\
3 & \mid\ \mid\ P \wedge Q & \wedge\mathrm{I},\ 1{,}2 \\
4 & \mid\ Q \Rightarrow (P \wedge Q) & \Rightarrow\mathrm{I},\ 2\text{–}3 \\
5 & P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q) & \Rightarrow\mathrm{I},\ 1\text{–}4
\end{array}$$

и в виде дерева

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P^{(1)} \quad Q^{(2)}}{P \wedge Q}\,\wedge\mathrm{I}}{Q \Rightarrow P \wedge Q}\,\Rightarrow\mathrm{I},(2)}{P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)}\,\Rightarrow\mathrm{I},(1)$$

Две посылки закрываются по очереди.

Пример 15.7. Вывод формулы $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

$$\begin{array}{lll}
1 & \mid\ \underline{(P \Rightarrow Q) \wedge P} & \\
2 & \mid\ P \Rightarrow Q & \wedge\mathrm{E}_1, 1 \\
3 & \mid\ P & \wedge\mathrm{E}_2, 1 \\
4 & \mid\ Q & \mathrm{MP},\ 2{,}3 \\
5 & (P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q & \Rightarrow\mathrm{I},\ 1\text{–}4
\end{array}$$

и в виде дерева

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(P \Rightarrow Q) \wedge P^{(1)}}{P \Rightarrow Q}\,\wedge\mathrm{E}_1 \qquad \dfrac{(P \Rightarrow Q) \wedge P^{(1)}}{P}\,\wedge\mathrm{E}_2}{Q}\,\mathrm{MP}}{(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q}\,\Rightarrow\mathrm{I},(1)$$

Пример 15.8. Вывод формулы $P \Rightarrow P$

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & P & \\
\cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{2} & P \Rightarrow P & \Rightarrow \mathrm{I},\ 1\text{–}1
\end{array}
$$

Здесь под номером 1 стоит вывод из одной строки, посылка которого является его же заключением. В виде дерева то же самое выглядит так

$$
\dfrac{P^{(1)}}{P \Rightarrow P} \Rightarrow \mathrm{I}, (1)
$$

Пример 15.9. Вывод формулы $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

$$
\begin{array}{r|l|l l}
1 & \multicolumn{2}{l}{P} & \\
\cline{2-2}
2 & & Q & \\
\cline{3-3}
3 & & P & \mathrm{R},\ 1 \\
4 & \multicolumn{2}{l}{Q \Rightarrow P} & \Rightarrow \mathrm{I},\ 2\text{–}3 \\
\multicolumn{1}{r}{5} & \multicolumn{2}{l}{P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)} & \Rightarrow \mathrm{I},\ 1\text{–}4
\end{array}
$$

Здесь в строке 3 посылка P просто переписана, что отмечается буквой R (reiteration или repeat). В виде дерева выглядит корявее, посылка Q вообще не видна

$$
\dfrac{\dfrac{P^{(1)}}{Q \Rightarrow P} \Rightarrow \mathrm{I}}{P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)} \Rightarrow \mathrm{I}, (1)
$$

Пример 15.10. Вывод $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

1	$\mid\ \underline{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)}$	
2	$\mid\ \mid\ \underline{P \Rightarrow Q}$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \underline{P}$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ Q \Rightarrow R$	MP, 1,3
5	$\mid\ \mid\ \mid\ Q$	MP, 2,3
6	$\mid\ \mid\ \mid\ R$	MP, 4,5
7	$\mid\ \mid\ P \Rightarrow R$	$\Rightarrow$I, 3–6
8	$\mid\ (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	$\Rightarrow$I, 2–7
9	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	$\Rightarrow$I, 1–8

Пример 15.11. Неверный вывод произвольной формулы P

1	$\mid\ \underline{P}$	
2	P	R, 1

Для вывода строки 2 нельзя использовать строку 1, поскольку она находится во вложенном подвыводе и зависит от введённых в нём посылок.

Замечание 15.12. Данное изложение ставит целью научить практической работе. Строгое определение натурального вывода в форме деревьев можно найти во многих учебниках математической логики. Надо понимать следующие вещи: натуральный вывод строится, начиная с гипотез, с помощью правил вывода. Некоторые гипотезы по ходу дела могут закрываться. Доказать формулу – значит дать её вывод, в котором все гипотезы закрыты. Строгое определение таблиц Фитча можно найти, например, в статье Geuvers, Nederpelt “Rewriting for Fitch style natural deductions”. Там же есть некоторые результаты, интересные логикам (устранение сечения на языке таблиц Фитча). Нетрудно найти и книгу самого Фитча (хотя в отвратительном качестве) Fitch “Elements of Combinatory Logic”.

$$\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,(\wedge \mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\,(\wedge \mathrm{E}_1) \quad \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\,(\wedge \mathrm{E}_2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\,(\Rightarrow \mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}\,(\Rightarrow \mathrm{E}, \mathrm{MP})$$

$$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\,(\vee \mathrm{I}_1) \quad \dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}\,(\vee \mathrm{I}_2) \qquad\qquad \dfrac{\alpha \vee \beta \qquad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\beta]\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,(\vee \mathrm{E})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\alpha}\,(\neg \mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\neg\alpha \quad \alpha}{\bot}\,(\neg \mathrm{E})$$

$$\top\,(\top \mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\bot}{\alpha}\,(\bot \mathrm{E})$$

$$\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\alpha \Leftrightarrow \beta}\,(\Leftrightarrow \mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}\,(\Leftrightarrow \mathrm{E}_1) \quad \dfrac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha}\,(\Leftrightarrow \mathrm{E}_2)$$

Рис. 15.1: Интуиционистское исчисление высказываний, натуральный вывод.

Определение 15.13. *Интуиционистское исчисление высказываний* в форме натурального вывода задаётся правилами, приведёнными на Рисунке 15.1.

- Правило ¬I утверждает „Если из α выводится ложь, можно считать доказанным, что α неверно (то есть, верно $\neg\alpha$)“. Посылка α при этом закрывается, полученный вывод формулы $\neg\alpha$ от неё уже не зависит.
- Правило ¬E утверждает „Если мы доказали противоречие (какую-то формулу вместе с её отрицанием), мы фактически доказали ложь“.
- Правило ⊤I является аксиомой, то есть правилом с нулевым числом посылок. Оно утверждает, что формулу $\top$ можно считать доказанной всегда.
- Правило ⊥E утверждает „Если мы доказали ложь, можно считать доказанным что угодно (уже как бы всё равно)“.
- Правил ⊤E и ⊥I нет.
- Правило ∨E можно назвать *правилом разбора случаев*. Оно утверждает, что если доказано $\alpha \vee \beta$, причём из α можно вывести γ и из β можно вывести γ, то γ можно считать доказанным. Посылки α и β после применения этого правила закрываются.

Пример 15.14. Вывод формулы $P \vee Q \Rightarrow Q \vee P$

$$
\begin{array}{lll}
1 & \quad\mid\ \underline{P \vee Q} & \\
2 & \quad\mid\ \quad\mid\ \underline{P} & \\
3 & \quad\mid\ \quad\mid\ Q \vee P & \vee\mathrm{I}_2, 2 \\
4 & \quad\mid\ \quad\mid\ \underline{Q} & \\
5 & \quad\mid\ \quad\mid\ Q \vee P & \vee\mathrm{I}_1, 4 \\
6 & \quad\mid\ Q \vee P & \vee\mathrm{E},\ 1,\ 2\text{–}3,\ 4\text{–}5 \\
7 & P \vee Q \Rightarrow Q \vee P & \Rightarrow\mathrm{I},\ 1\text{–}6
\end{array}
$$

и в виде дерева

$$\dfrac{\dfrac{P \vee Q^{(1)} \qquad \dfrac{P^{(2)}}{Q \vee P}\vee\mathrm{I}_2 \qquad \dfrac{Q^{(3)}}{Q \vee P}\vee\mathrm{I}_1}{Q \vee P}\vee\mathrm{E}, (2), (3)}{P \vee Q \Rightarrow Q \vee P}\Rightarrow\mathrm{I}, (1)$$

Пример 15.15. Вывод формулы $P \Rightarrow \top$

$$\begin{array}{lll}
1 & \mid\ \underline{P} & \\
2 & \mid\ \top & \top\mathrm{I} \\
3 & P \Rightarrow \top & \Rightarrow\mathrm{I},\ 1\text{–}2
\end{array}$$

и в виде дерева (посылку не видно, вывод начинается с аксиомы)

$$\dfrac{\top\,(\top\mathrm{I})}{P \Rightarrow \top}\Rightarrow\mathrm{I}$$

Пример 15.16. Вывод формулы $\neg\neg(P \vee \neg P)$

$$\begin{array}{lll}
1 & \mid\ \underline{\neg(P \vee \neg P)} & \\
2 & \mid\ \mid\ \underline{P} & \\
3 & \mid\ \mid\ P \vee \neg P & \vee\mathrm{I}_1, 2 \\
4 & \mid\ \mid\ \bot & \neg\mathrm{E},\ 1{,}3 \\
5 & \mid\ \neg P & \neg\mathrm{I},\ 2\text{–}4 \\
6 & \mid\ P \vee \neg P & \vee\mathrm{I}_2, 5 \\
7 & \mid\ \bot & \neg\mathrm{E},\ 1{,}6 \\
8 & \neg\neg(P \vee \neg P) & \neg\mathrm{I},\ 1\text{–}6
\end{array}$$

Упражнение 15.17. Докажите следующие формулы.

1. $P \Rightarrow P$

2. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
3. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
4. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
5. $P \Leftrightarrow P \wedge P$
6. $P \Leftrightarrow P \vee P$
7. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
8. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
9. $(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$ (ассоциативность конъюнкции)
10. $(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$ (ассоциативность дизъюнкции)
11. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
12. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
13. $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
14. $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
15. $P \wedge \neg P \Leftrightarrow \bot$
16. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
17. $\neg P \Leftrightarrow (P \Rightarrow \bot)$
18. $\top \Leftrightarrow (\bot \Rightarrow \bot)$
19. $\neg\top \Leftrightarrow \bot$
20. $\neg\bot \Leftrightarrow \top$
21. $P \Rightarrow \top$
22. $\bot \Rightarrow P$
23. $\top \wedge P \Leftrightarrow P$
24. $(P \wedge Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$

25. $(P \Rightarrow Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
26. $(P \vee Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
27. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
28. $\neg P \vee \neg Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$
29. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
30. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q)$
31. $\neg\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q)$
32. $\neg\neg(P \vee \neg P)$
33. $\neg\neg(\neg\neg P \Rightarrow P)$
34. $P \Rightarrow \neg\neg P$
35. $\neg\neg\neg P \Leftrightarrow \neg P$
36. $P \wedge \neg P \Rightarrow Q$
37. $P \vee \neg P \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow P)$

Замечание 15.18. Кто читал мой черновик, я там неправильно выписал формулы 11 и 12 из предыдущего упражнения. Утешает, что никто из знакомых логиков ошибки не заметил:)

Замечание 15.19. Наш набор логических связок является избыточным. Можно ограничиться $\Rightarrow, \wedge, \vee, \perp$, а остальные связки вводить как сокращения

- $\alpha \Leftrightarrow \beta \leftrightharpoons (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$
- $\neg\alpha \leftrightharpoons (\alpha \Rightarrow \perp)$
- $\top \leftrightharpoons (\perp \Rightarrow \perp)$

где знак $\leftrightharpoons$ означает „является сокращением для“. При таком подходе правила для этих связок становятся *выводимыми правилами*, поясним это на примере. Правила $\neg$I и $\neg$E переходят в

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\alpha \Rightarrow \bot} \qquad\qquad \dfrac{\alpha \Rightarrow \bot \quad \alpha}{\bot}$$

заключения этих правил действительно выводимы из их посылок.

Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции позволяет нам писать формулы следующего вида

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$$

$$\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$$

экономя скобки. Можно ввести следующие удобные правила вывода

$$\dfrac{\alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n}{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n}\,(\wedge\mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n}{\alpha_j}\,(\wedge\mathrm{E}_i)$$

$$\dfrac{\alpha_j}{\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n}\,(\vee\mathrm{I}_i) \qquad \dfrac{\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \qquad \begin{array}{c}[\alpha_1]\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \qquad \ldots \qquad \begin{array}{c}[\alpha_n]\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,(\vee\mathrm{E})$$

где $n \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Например, правила для $\wedge$ при $n = 3$ выглядят так

$$\dfrac{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}\,(\wedge\mathrm{I}) \qquad \dfrac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}{\alpha_1} \quad \dfrac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}{\alpha_2} \quad \dfrac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}{\alpha_3}\,(\wedge\mathrm{E})$$

Эти правила тоже выводимы, если понимать многократные конъюнкции и дизъюнкции как сокращения

- $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \leftrightharpoons (\ldots((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \ldots) \wedge \alpha_n)$
- $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \leftrightharpoons (\ldots((\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \ldots) \vee \alpha_n)$

15.2 Классическое исчисление высказываний

Определение 15.20. *Классическое исчисление высказываний* получается из интуиционистского одним из трёх равносильных способов

- Добавлением бесконечного набора аксиом $\alpha \vee \neg\alpha$ (*закон исключённого третьего*, для каждой формулы α своя аксиома)

- Добавлением бесконечного набора аксиом $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ (*закон двойного отрицания*)

- Добавлением нового правила вывода

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\,(\neg\neg\mathrm{E})$$

Замечание 15.21. Бесконечный набор аксиом, построенных по общей схеме (вроде $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$) логики так и называют *схемой аксиом*. Набор правил вывода, построенных по общей схеме (вроде $\neg\neg$E) обычно называют просто правилом вывода. Ну, что делать.

Пример 15.22. Допустим, мы добавили схему аксиом $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$. Выведем закон исключённого третьего (точнее, некоторый его пример)

1	$\neg(P \vee \neg P)$	
2	$\quad P$	
3	$\quad P \vee \neg P$	$\vee\mathrm{I}_2, 2$
4	$\quad \bot$	$\neg$E, 1,3
5	$\neg P$	$\neg$I, 2–4
6	$P \vee \neg P$	$\vee\mathrm{I}_1, 5$
7	$\bot$	$\neg$E, 1,6
8	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\neg$I, 1–6
9	$\neg\neg(P \vee \neg P) \Rightarrow P \vee \neg P$	аксиома
10	$P \vee \neg P$	MP, 9,8

Упражнение 15.23. Докажите следующие формулы, используя правило $\neg\neg$E

1. $P \vee \neg P$
2. $\neg\neg P \Rightarrow P$
3. $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$
4. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
5. $(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

Замечание 15.24. Доказательства, использующие правило $\neg\neg$E, называют *доказательствами от противного*.

Интуиционистское исчисление для нас главное. Везде, где мы будем говорить о выводах и выводимости, будет иметься в виду выводимость в интуиционистских, а не классических исчислениях, если специально не оговорено обратное.

$$\Gamma, \alpha \vdash \alpha \ (\text{ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma, \beta \vdash \alpha} \ (\text{weak})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta} \ (\wedge\text{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \ (\wedge\text{E}_1) \ \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta} \ (\wedge\text{E}_2)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta} \ (\Rightarrow \text{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta} \ (\Rightarrow \text{E, MP})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \ (\vee\text{I}_1) \ \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \ (\vee\text{I}_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} \ (\vee\text{E})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\alpha} \ (\neg\text{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\alpha \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \bot} \ (\neg\text{E})$$

$$\Gamma \vdash \top \ (\top\text{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha} \ (\bot\text{E})$$

Рис. 15.2: Интуиционистское исчисление высказываний, исчисление секвенций.

15.3 Исчисление секвенций

Натуральные выводы удобны для практического выписывания доказательств, но их довольно трудно изучать. Поэтому вводятся различные *исчисления секвенций*. В этих исчислениях выводы устроены проще (но длиннее).

Определение 15.25. *Секвенцией* называется выражение вида

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$$

где формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются *посылками секвенции (гипотезами, допущениями)*, а формула β *заключением секвенции*. Допускаются также секвенции с нулевым числом посылок, они выглядят так

$$\vdash \beta$$

Содержательно, секвенция $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ означает „из гипотез $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ можно вывести β“, а секвенция $\vdash \beta$ означает „можно доказать β без всяких допущений“. Мы часто будем обозначать секвенцию так

$$\Gamma \vdash \beta$$

где Γ – конечный (возможно, пустой) список формул, такие списки будем называть *контекстами*. Предупреждение: одна и та же формула может входить в контекст несколько раз. Например, список формул $P, P, Q \vee \neg Q$ является контекстом.

Определение 15.26. *Интуиционистское исчисление высказываний* в форме исчисления секвенций показано на рисунке 15.2. В этом исчислении выводятся секвенции. Есть новая схема аксиом (ax), новое правило вывода (weak, *правило ослабления*) и знакомые нам правила введения и удаления логических связок, записанные в секвенциальной форме (я только не стал выписывать правила для $\Leftrightarrow$).

Пример 15.27. Вывод формулы $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P \ \text{ax}}{P, Q \vdash P}\,\text{weak} \qquad P, Q \vdash Q \ \text{ax}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\,\wedge\text{I}}{P \vdash Q \Rightarrow P \wedge Q}\,\Rightarrow\text{I}}{\vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)}\,\Rightarrow\text{I}$$

Вывод начинается с аксиом $P \vdash P$ и $P, Q \vdash Q$. Если сравнить с таблицей Фитча

1	$\quad P$	
2	$\quad\quad Q$	
3	$\quad\quad P \wedge Q$	$\wedge$I, 1,2
4	$\quad Q \Rightarrow (P \wedge Q)$	$\Rightarrow$I, 2–3
5	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$	$\Rightarrow$I, 1–4

можно понять принцип построения секвенциального вывода. К каждой строке таблицы Фитча припишем слева список (контекст) из всех гипотез, не закрытых к этому моменту

1	$P \vdash P$
2	$P, Q \vdash Q$
3	$P, Q \vdash P \wedge Q$
4	$P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$
5	$\vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$

и расположим строки в виде дерева. Аксиомы, с которых начинается секвенциальный вывод, соответствуют введению гипотез в натуральном выводе, правило $\Rightarrow$I удаляет (закрывает) одну гипотезу из контекста. Таким образом, в секвенциальном исчислении вывод строится, начинается с аксиом, с помощью правил вывода. Никаких номеров закрываемых посылок указывать не надо (все посылки, незакрытые к данному моменту, явно указаны в контексте). В принципе, можно и секвенциальные выводы записывать в виде таблиц, хотя обычно так не делают (я встречал исключения)

1	$P \vdash P$	ax
2	$P, Q \vdash P$	weak, 1
3	$P, Q \vdash Q$	ax
4	$P, Q \vdash P \wedge Q$	$\wedge$I, 2,3
5	$P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$	$\Rightarrow$I, 4
6	$\vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$	$\Rightarrow$I, 5

Замечание 15.28. Часто (в силу традиции) контексты определяют как списки формул без повторений или даже конечные множества формул (неупорядоченные). Это очень неестественно с категорной точки зрения, как мы скоро увидим. К тому же просто усложняет выводы. Например, мы можем вывести формулу $P \Rightarrow (P \Rightarrow P)$ простым способом

$$\cfrac{\cfrac{P, P \vdash P}{P \vdash P \Rightarrow P} \Rightarrow \mathrm{I}}{\vdash P \Rightarrow (P \Rightarrow P)} \Rightarrow \mathrm{I}$$

если же разрешены только контексты без повторений, придётся лишний раз использовать правило ослабления

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P \vdash P}{\vdash P \Rightarrow P} \Rightarrow \mathrm{I}}{P \vdash P \Rightarrow P} \,\mathrm{weak}}{\vdash P \Rightarrow (P \Rightarrow P)} \Rightarrow \mathrm{I}$$

Замечание 15.29. На этом месте В.Н.Крупский просит объяснить по возможности просто, почему то исчисление, что я выписал, равносильно традиционным, с неупорядоченными контекстами. Совсем простого объяснения я не придумал, а формального доказательства выписывать не хочу, поскольку логики при желании могут проверить сами (или я расскажу), а не логикам вряд ли будет интересно. Сравнительно просто вывести это из теорем следующего раздела. Теперь вопрос, где я всё это взял? Мне кажется, я такую или близкую формализацию логики видел в литературе по теории типов Мартин-Лёфа (вряд ли я сам её придумал).

$$\alpha \vdash \alpha \ (\mathrm{id}) \qquad \frac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}\ (\mathrm{cut})$$

$$\frac{\gamma \vdash \alpha \quad \gamma \vdash \beta}{\gamma \vdash \alpha \wedge \beta}\ (\wedge \mathrm{I}) \qquad \begin{array}{l} \alpha \wedge \beta \vdash \alpha \ \ (\wedge \mathrm{E}_1) \\ \alpha \wedge \beta \vdash \beta \ \ (\wedge \mathrm{E}_2) \end{array}$$

$$\frac{\gamma \wedge \alpha \vdash \beta}{\gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta}\ (\Rightarrow \mathrm{I}) \qquad (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha \vdash \beta \ \ (\Rightarrow \mathrm{E})$$

$$\begin{array}{l} \alpha \vdash \alpha \vee \beta \ \ (\vee \mathrm{I}_1) \\ \beta \vdash \alpha \vee \beta \ \ (\vee \mathrm{I}_2) \end{array} \qquad \frac{\alpha \vdash \gamma \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vee \beta \vdash \gamma}\ (\vee \mathrm{E})$$

$$\alpha \vdash \top \ (\top \mathrm{I}) \qquad \bot \vdash \alpha \ (\bot \mathrm{E})$$

Рис. 15.3: Интуиционистское исчисление высказываний, специальная форма.

15.4 Специальная форма исчисления высказываний

Мы формализуем интуиционистское исчисление высказываний в некоторой специальной форме, которая позволит нам установить тесную связь логики и теории категорий.

Определение 15.30. Ещё одна формализация интуиционистского исчисления высказываний приведена на Рисунке 15.3 (будем, пожалуй, называть её *специальной формой исчисления высказываний*). В этом исчислении выводятся только секвенции простейшего вида

$$\alpha \vdash \beta$$

(посылка ровно одна). Схема аксиом id и правило cut выражают рефлексивность и транзитивность выводимости. Есть две схемы аксиом

$\wedge$E и две схемы аксиом $\vee$I, правило $\Rightarrow$ E тоже становится схемой аксиом.

Связь этого исчисления с обычным исчислением секвенций выражают следующие две теоремы.

Теорема 15.31. *Если в специальном исчислении с Рисунка 15.3 выводится секвенция $\alpha \vdash \beta$, то она выводится и в обычном исчислении секвенций (Рисунок 15.2).*

Доказательство. Достаточно доказать, что все аксиомы и правила с Рисунка 15.3 выводимы в исчислении секвенций. Рассмотрим для примера правило cut

$$\frac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}\ (\mathrm{cut})$$

Покажем, что его заключение выводится из его посылок в исчислении секвенций. Из $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \gamma$ мы можем вывести $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ и $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\vdash \alpha \Rightarrow \beta} \Rightarrow \mathrm{I} \qquad \frac{\beta \vdash \gamma}{\vdash \beta \Rightarrow \gamma} \Rightarrow \mathrm{I}$$

Затем найдём натуральный вывод формулы γ из посылки α, считая $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \gamma$ уже доказанными

$$\begin{array}{lll}
1 & \alpha \Rightarrow \beta & \\
2 & \beta \Rightarrow \gamma & \\
3 & \quad \alpha & \\
4 & \quad \beta & \text{MP, 1,3} \\
5 & \quad \gamma & \text{MP, 2,4}
\end{array}$$

и в виде дерева

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\beta]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix}}{\beta\Rightarrow\gamma}\Rightarrow\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{matrix}}{\alpha\Rightarrow\beta}\Rightarrow\mathrm{I}\qquad \alpha^{(1)}}{\beta}\ \mathrm{MP}}{\gamma}\ \mathrm{MP}$$

Приписываем слева к каждой строке посылки, не закрытые к данному моменту, причём первые две строки считаем не гипотезами, а доказанными теоремами (и приписываем к ним пустой контекст)

1	$\vdash \alpha \Rightarrow \beta$
2	$\vdash \beta \Rightarrow \gamma$
3	$\alpha \vdash \alpha$
4	$\alpha \vdash \beta$
5	$\alpha \vdash \gamma$

и получаем секвенциальный вывод

1	$\alpha \vdash \beta$	
2	$\beta \vdash \gamma$	
3	$\alpha \vdash \alpha$	ax
4	$\vdash \alpha \Rightarrow \beta$	$\Rightarrow$I, 1
5	$\vdash \beta \Rightarrow \gamma$	$\Rightarrow$I, 2
6	$\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \beta$	weak, 4
7	$\alpha \vdash \beta \Rightarrow \gamma$	weak, 5
8	$\alpha \vdash \beta$	MP, 6,3
9	$\alpha \vdash \gamma$	MP, 7,8

и в виде дерева

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta\vdash\gamma}{\vdash\beta\Rightarrow\gamma}\Rightarrow\mathrm{I}}{\alpha\vdash\beta\Rightarrow\gamma}\,\mathrm{weak} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\beta}{\vdash\alpha\Rightarrow\beta}\Rightarrow\mathrm{I}}{\alpha\vdash\alpha\Rightarrow\beta}\,\mathrm{weak}\qquad \alpha\vdash\alpha\ \mathrm{ax}}{\alpha\vdash\beta}\,\mathrm{MP}}{}}{\alpha\vdash\gamma}\,\mathrm{MP}$$

И так же проверяются все остальные правила (некоторые проще).
□

Теорема 15.32. *Если в исчислении секвенций (Рисунок 15.2) выводится секвенция $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$, то в исчислении с Рисунка 15.3 выводится секвенция $\top \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vdash \beta$.*
Замечание: если контекст непустой, выводимость $\top\wedge\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n \vdash \beta$ равносильна выводимости $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vdash \beta$, но первый вариант технически удобнее, поскольку применим и к пустым контекстам (из $\vdash \beta$ получается $\top \vdash \beta$).

Доказательство. Достаточно доказать, что все аксиомы и правила исчисления секвенций становятся выводимыми в исчислении с Рисунка 15.3, если заменить все секвенции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ на $\top\wedge\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n \vdash \beta$.
Замечание: правила $\neg$I и $\neg$E проверять не надо, $\neg\alpha$ понимается как сокращение для $\alpha \Rightarrow \bot$.
Рассмотрим правило ослабления

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma, \beta \vdash \alpha}\,(\mathrm{weak})$$

Если $\Gamma = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то это правило переходит в следующее

$$\frac{\top \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vdash \alpha}{\top \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta \vdash \alpha}$$

Обозначим для краткости $\top \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ через γ, тогда правило будет выглядеть так

$$\frac{\gamma \vdash \alpha}{\gamma \wedge \beta \vdash \alpha}$$

и его заключение действительно выводится из посылки следующим образом

$$\frac{\gamma \wedge \beta \vdash \gamma \ (\wedge \mathrm{E}_1) \quad \gamma \vdash \alpha}{\gamma \wedge \beta \vdash \alpha} \ \mathrm{cut}$$

Выводимость остальных правил тоже проверяется легко, за единственным (зато действительно трудным) исключением правила $\vee$E

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \delta \quad \Gamma, \beta \vdash \delta}{\Gamma \vdash \delta} \ (\vee \mathrm{E})$$

Сопоставим контексту Γ формулу γ так же, как мы делали выше. Правило примет вид

$$\frac{\gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \gamma \wedge \alpha \vdash \delta \quad \gamma \wedge \beta \vdash \delta}{\gamma \vdash \delta}$$

Вывод заключения этого правила из его посылок занимает всю следующую страницу. Между прочим, он примерно соответствует построению изоморфизма $(A + B) \times C \cong C \times A + C \times B$ в декартово замкнутых категориях, но это (возможно) станет ясным только после прочтения следующего раздела этой главы.
Замечание (для тех, кто будет разбираться): подвыводы 5-10 и 11-16 полностью симметричны друг другу.
$\square$

Замечание 15.33. „Специальное исчисление“ взято из книги Lambek, Scott “Introduction to Higher Order Categorical Logic”.

1	$\gamma \vdash \alpha \vee \beta$	
2	$\gamma \wedge \alpha \vdash \delta$	
3	$\gamma \wedge \beta \vdash \delta$	
4	$(\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta) \vdash \delta$	$\vee$E, 2,3
5	$\alpha \wedge \gamma \vdash \gamma$	$\wedge\mathrm{E}_2$
6	$\alpha \wedge \gamma \vdash \alpha$	$\wedge\mathrm{E}_1$
7	$\alpha \wedge \gamma \vdash \gamma \wedge \alpha$	$\wedge$I, 5,6
8	$\gamma \wedge \alpha \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\vee\mathrm{I}_1$
9	$\alpha \wedge \gamma \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	cut, 7,8
10	$\alpha \vdash \gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\Rightarrow$I, 9
11	$\beta \wedge \gamma \vdash \gamma$	$\wedge\mathrm{E}_2$
12	$\beta \wedge \gamma \vdash \beta$	$\wedge\mathrm{E}_1$
13	$\beta \wedge \gamma \vdash \gamma \wedge \beta$	$\wedge$I, 11,12
14	$\gamma \wedge \beta \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\vee\mathrm{I}_2$
15	$\beta \wedge \gamma \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	cut, 13,14
16	$\beta \vdash \gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\Rightarrow$I, 15
17	$\alpha \vee \beta \vdash \gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\vee$E, 10,16
18	$\gamma \vdash \gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	cut, 1,17
19	$\gamma \vdash \gamma$	id
20	$\gamma \vdash (\gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)) \wedge \gamma$	$\wedge$I, 18,19
21	$(\gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)) \wedge \gamma \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\Rightarrow$E
22	$\gamma \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	cut, 20,21
23	$\gamma \vdash \delta$	cut, 22,4

1	$$\frac{f\colon A \to 1}{f = !_A}$$
2	$$\frac{f\colon C \to A \quad g\colon C \to B}{pr_1 \circ \langle f, g\rangle = f}$$
3	$$\frac{f\colon C \to A \quad g\colon C \to B}{pr_2 \circ \langle f, g\rangle = g}$$
4	$$\frac{h\colon C \to A \times B}{h = \langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h\rangle}$$
5	$$\frac{f\colon C \times A \to B}{f = ev \circ (\Lambda(f) \times id_A)}$$
6	$$\frac{g\colon C \to B^A}{g = \Lambda(ev \circ (g \times id_A))}$$
7	$$\frac{f\colon 0 \to A}{f = \Box_A}$$
8	$$\frac{f\colon A \to C \quad g\colon B \to C}{[f, g] \circ k_1 = f}$$
9	$$\frac{f\colon A \to C \quad g\colon B \to C}{[f, g] \circ k_2 = g}$$
10	$$\frac{h\colon A + B \to C}{h = [h \circ k_1, h \circ k_2]}$$

Рис. 15.4: Аксиоматика бидекартово замкнутых категорий

15.5 Бидекартово замкнутые категории

Определение 15.34. Будем называть категорию *бидекартово замкнутой* (bicartesian closed), если она декартово замкнута и имеет конечные копроизведения. Иными словами, категория бидекартово замкнута, если в ней есть терминальный объект, произведения пар объектов, начальный объект, копроизведения пар объектов и экспоненты. В дальнейшем, говоря о таких категориях, мы всегда будем предполагать, что для любой пары объектов выбраны некоторые произведение, копроизведение и экспонента, а также выбраны некоторые начальный и терминальный объект (из всех возможных).

Теорема 15.35. *Категория является бидекартово замкнутой в том и только том случае, если в ней выполнены равенства, показанные на рисунке 15.4. Иными словами, бидекартово замкнутая категория задаётся следующим набором данных (помимо перечисленных в определении 1.1):*

1. *Объект* 1 *и для любого объекта* A *стрелка* $!_A\colon A \to 1$.
2. *Для любых объектов* A *и* B *некоторый объект* $A \times B$ *и стрелки* $pr_1^{A\times B}\colon A \times B \to A$ *и* $pr_2^{A\times B}\colon A \times B \to B$.
3. *Для любых стрелок* $f\colon C \to A$ *и* $g\colon C \to B$ *стрелка* $\langle f, g\rangle\colon C \to A \times B$.
4. *Для любых объектов* A *и* B *объект* B^A *и стрелка* $ev_{A,B}\colon B^A \times A \to B$.
5. *Для любой стрелки* $f\colon C \times A \to B$ *стрелка* $\Lambda(f)\colon C \to B^A$.
6. *Объект* 0 *и для любого объекта* A *стрелка* $\Box_A\colon 0 \to A$.
7. *Для любых объектов* A *и* B *некоторый объект* $A + B$ *и стрелки* $k_1^{A+B}\colon A \to A + B$ *и* $k_2^{A+B}\colon B \to A + B$.
8. *Для любых стрелок* $f\colon A \to C$ *и* $g\colon B \to C$ *стрелка* $[f, g]\colon A + B \to C$.

При этом должны выполняться равенства, показанные на рисунке 15.4.

Доказательство. Основная часть уже доказана (Теорема 13.1), а остаток предлагаю доказать желающим в качестве упражнения.
□

Определение 15.36. Категория BiCCC имеет в качестве объектов малые бидекартово замкнутые категории, а протоморфизмы – это функторы, сохраняющие структуру. Точнее, функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ является протоморфизмом, если

- $F(1) = 1$
- $F(0) = 0$
- $F(A \times B) = F(A) \times F(B)$
- $F(pr_1^{A\times B}) = pr_1^{F(A)\times F(B)}$
- $F(pr_2^{A\times B}) = pr_2^{F(A)\times F(B)}$
- $F(A + B) = F(A) + F(B)$
- $F(k_1^{A+B}) = k_1^{F(A)+F(B)}$
- $F(k_2^{A+B}) = k_2^{F(A)+F(B)}$
- $F(B^A) = F(B)^{F(A)}$
- $F(ev_{A,B}) = ev_{F(A),F(B)}$

для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$.

Упражнение 15.37. Проверьте, что такие функторы сохраняют также операции $\langle f, g\rangle$, $[f, g]$, $\Lambda(f)$ и стрелки $!_A$, $\Box_A$.

Теорема 15.38. *Возьмём функтор* $Ob\colon \mathsf{BiCCC} \to \mathsf{Set}$, *который по каждой* K *выдаёт множество её объектов* $Ob(\mathsf{K})$. *У этого функтора есть левый сопряжённый* $Free \dashv Ob$

$$\mathsf{Set} \underset{Ob}{\overset{Free}{\rightleftarrows}} \mathsf{BiCCC}$$

Доказательство. Пусть дано некоторое множество $M = \{P, Q, R \ldots\}$. В качестве $Free(M)$ возьмём *свободную бидекартово замкнутую категорию со множеством образующих* M, которую сейчас и определим. Объектами $Free(M)$ будут формулы, построенные из атомарных высказываний $P, Q, R \ldots$ согласно определению 15.1. Содержательно, в этой категории $\alpha \wedge \beta$ будет произведением $\alpha \times \beta$, $\alpha \vee \beta$ будет копроизведением $\alpha + \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$ будет экспонентой β^α, $\top$ будет 1, $\bot$ будет 0.
Определим множество *термов* следующим образом

- $id_\alpha, !_\alpha, \Box_\alpha, pr_1^{\alpha\wedge\beta}, pr_2^{\alpha\wedge\beta}, k_1^{\alpha\vee\beta}, k_2^{\alpha\vee\beta}, ev_{\alpha,\beta}$ являются термами (для любых α, β);
- $f \circ g$ является термом, если f и g являются термами;
- $\langle f, g\rangle$ является термом, если f и g являются термами;
- $[f, g]$ является термом, если f и g являются термами;
- $\Lambda(f)$ является термом, если f является термом;
- других термов нет.

Термы – это как бы названия стрелок. Далеко не все термы правильно построены. Например, терм $\Box_\beta \circ !_\alpha$ не обозначает никакой стрелки, поскольку по смыслу должно быть $!_\alpha \colon \alpha \to \top$ и $\Box_\beta \colon \bot \to \beta$, поэтому композицию брать нельзя (конец первой стрелки не совпадает с началом второй).
Множество *правильно построенных термов* задаётся правилами, выписанными на Рисунке 15.5. С помощью этих правил выводятся выражения вида $f \colon \alpha \to \beta$, которые можно читать „$f$ является правильно построенным термом, обозначающим стрелку из α в β“.
Пример: терм $\langle pr_2^{P\wedge Q}, pr_1^{P\wedge Q}\rangle$ правильно построен, потому что

$$\frac{pr_2^{P\wedge Q} \colon P \wedge Q \to Q \quad pr_1^{P\wedge Q} \colon P \wedge Q \to P}{\langle pr_2^{P\wedge Q}, pr_1^{P\wedge Q}\rangle \colon P \wedge Q \to Q \wedge P}$$

Заметим, что правила с Рисунка 15.5 точно соответствуют правилам специального исчисления секвенций (Рисунок 15.3). Это значит, что правильно построенные термы взаимно однозначно соответствуют выводам в специальном исчислении секвенций. Терм $\langle pr_2^{P\wedge Q}, pr_1^{P\wedge Q}\rangle$ соответствует выводу

$$id_\alpha\colon \alpha \to \alpha \qquad \frac{f\colon \alpha \to \beta \quad g\colon \beta \to \gamma}{g \circ f\colon \alpha \to \gamma}$$

$$\frac{f\colon \gamma \to \alpha \quad g\colon \gamma \to \beta}{\langle f, g\rangle\colon \gamma \to \alpha \wedge \beta} \qquad \begin{array}{c} pr_1^{\alpha\wedge\beta}\colon \alpha \wedge \beta \to \alpha \\ pr_2^{\alpha\wedge\beta}\colon \alpha \wedge \beta \to \beta \end{array}$$

$$\frac{f\colon \gamma \wedge \alpha \to \beta}{\Lambda(f)\colon \gamma \to \alpha \Rightarrow \beta} \qquad ev_{\alpha,\beta}\colon (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha \to \beta$$

$$\begin{array}{c} k_1^{\alpha\vee\beta}\colon \alpha \to \alpha \vee \beta \\ k_2^{\alpha\vee\beta}\colon \beta \to \alpha \vee \beta \end{array} \qquad \frac{f\colon \alpha \to \gamma \quad g\colon \beta \to \gamma}{[f, g]\colon \alpha \vee \beta \to \gamma}$$

$$!_\alpha\colon \alpha \to \top \qquad \Box_\alpha\colon \bot \to \alpha$$

Рис. 15.5: Правильно построенные термы.

$$\frac{P \wedge Q \vdash Q\,(\wedge\mathrm{E}_2) \quad P \wedge Q \vdash P\,(\wedge\mathrm{E}_1)}{P \wedge Q \vdash Q \wedge P}\wedge\mathrm{I}$$

Содержательно, мы сейчас само исчисление высказываний превращаем в категорию. Формулы становятся объектами, а стрелки из α в β – это выводы секвенции $\alpha \vdash \beta$.

На множестве правильно построенных термов определим отношение эквивалентности $f \equiv g$ как наименьшее отношение, которое

- рефлексивно;
- симметрично;
- транзитивно;
- если $f_1 \equiv f_2$ и $g_1 \equiv g_2$, то $f_1 \circ g_1 \equiv f_2 \circ g_2$ (если композиции правильно построены);

- если $f_1 \equiv f_2$ и $g_1 \equiv g_2$, то $\langle f_1, g_1\rangle \equiv \langle f_2, g_2\rangle$ (если пары правильно построены);
- если $f_1 \equiv f_2$ и $g_1 \equiv g_2$, то $[f_1, g_1] \equiv [f_2, g_2]$ (если пары правильно построены);
- если $f \equiv g$, то $\Lambda(f) \equiv \Lambda(g)$ (если эти термы правильно построены);
- содержит все равенства вида $f \circ id_\alpha = f$, где $f\colon \alpha \to \beta$ (это значит, что $f \circ id_\alpha \equiv f$, если $f\colon \alpha \to \beta$);
- содержит все равенства вида $id_\beta \circ f = f$, где $f\colon \alpha \to \beta$;
- содержит все равенства вида $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, где $h\colon \alpha \to \beta, g\colon \beta \to \gamma, f\colon \gamma \to \delta$;
- содержит все равенства с Рисунка 15.4.

Морфизмами категории $Free(M)$ будут правильно построенные термы с точностью до отношения эквивалентности $\equiv$ (или классы эквивалентности правильно построенных термов, если так понятнее).
Каждому множеству M сопоставим функцию

$$\eta_M\colon M \to Ob(Free(M))$$

которая вкладывает множество $M = \{P, Q, R \ldots\}$ во множество формул, построенных из $P, Q, R \ldots$ (поскольку $M \subset Ob(Free(M))$)
Пусть дана некоторая малая бидекартово замкнутая категория K и некоторая функция $\mathrm{g}\colon M \to Ob(\mathsf{K})$. Докажем, что существует единственный функтор $F\colon Free(M) \to \mathsf{K}$, сохраняющий структуру в смысле Определения 15.36 и делающий коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[dr, "\mathrm{g}"'] & Ob(Free(M)) \arrow[d, dotted, "Ob(F)"] & & Free(M) \arrow[d, dotted, "F"] \\
 & Ob(\mathsf{K}) & & \mathsf{K}
\end{tikzcd}$$

Здесь $Ob(F)$ – это просто „объектная половина“ функтора F (функтор – это пара отображений, обозначаемых одной буквой), поэтому напишем вместо $Ob(F)$ просто F

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[dr, "\mathrm{g}"'] & Ob(Free(M)) \arrow[d, dotted, "F"] & Free(M) \arrow[d, dotted, "F"] \\ & Ob(\mathsf{K}) & \mathsf{K} \end{tikzcd}$$

Действительно, зная значения функтора F на объектах $P, Q, R\dots$ (они равны $\mathrm{g}(P), \mathrm{g}(Q), \mathrm{g}(R)\dots$), мы однозначно восстанавливаем его значения на всех объектах $Free(M)$, поскольку все они построены из $P, Q, R\dots$ и $\top, \bot$ с помощью операций $\wedge, \vee, \Rightarrow$. Например,

- $F(P \wedge Q) = F(P) \times F(Q)$
- $F(P \vee Q) = F(P) + F(Q)$
- $F(P \Rightarrow \bot) = F(\bot)^{F(P)} = 0^{F(P)}$

Точно так же однозначно определены значения F на всех стрелках категории $Free(M)$, достаточно посмотреть на определение терма. Эквивалентность термов в точности отражает равенства, которые должны быть выполнены в любой бидекартово замкнутой категории, поэтому функтор $F\colon Free(M) \to \mathsf{K}$ переводит эквивалентные термы $f \equiv g$ в одну и ту же стрелку категории K.
□

Замечание 15.39. В доказательстве никак не используется малость K, поэтому фактически мы доказали следующий более сильный результат. Пусть даны множество M и бидекартово замкнутая категория K (не обязательно малая). Есть взаимно однозначное соответствие между отображениями $\mathrm{g}\colon M \to Ob(\mathsf{K})$ и функторами $F\colon Free(M) \to \mathsf{K}$, сохраняющими структуру бидекартово замкнутой категории, это соответствие выражается диаграммой

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[dr, "\mathrm{g}"'] & Ob(Free(M)) \arrow[d, dotted, "F"] & Free(M) \arrow[d, dotted, "F"] \\ & Ob(\mathsf{K}) & \mathsf{K} \end{tikzcd}$$

При определении BiCCC мы брали только малые категории, чтобы избежать парадоксов (иначе возникают вопросы вроде „является ли BiCCC объектом самой себя?") К сожалению, хорошего способа бороться с парадоксами не придумано, поэтому приходится вводить такие ограничения.

Определение 15.40. Пусть фиксированы множество атомарных высказываний M и бидекартово замкнутая категория K. *Интерпретациями интуиционистского исчисления высказываний* будем называть функторы $F\colon Free(M) \to \mathsf{K}$, сохраняющие структуру в смысле Определения 15.36. Формулу α будем называть *истинной при интерпретации* F, если у объекта $F(\alpha)$ есть хотя бы один элемент.

Пример 15.41. Возьмём некоторое множество M и бидекартово замкнутую категорию Set. Пусть дано некоторое отображение
$\mathrm{g}\colon M \to Ob(\mathsf{Set})$, которое сопоставляет всем $P, Q, R \ldots \in M$ некоторые множества $\mathrm{g}(P), \mathrm{g}(Q), \mathrm{g}(R) \ldots$ Продолжим его до функтора
$F\colon Free(M) \to \mathsf{Set}$

- $F(P) = \mathrm{g}(P)$; $F(Q) = \mathrm{g}(Q)$; $F(R) = \mathrm{g}(R) \ldots$
- $F(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \times F(\beta)$
- $F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$
- $F(\alpha \Rightarrow \beta) = F(B)^{F(A)}$
- $F(\top) = \{*\}$
- $F(\bot) = \emptyset$

и на термах соответственно. Будем воспринимать элементы множества $F(\alpha)$ как некие „конструкции, подтверждающие истинность α". Формула α истинна при интерпретации F, если есть подтверждающая её конструкция (то есть $F(\alpha)$ непусто).
Конструкция, подтверждающая формулу $\alpha \wedge \beta$ – это пара конструкций (a, b), где a подтверждает α, b подтверждает β, поэтому должно быть $F(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \times F(\beta)$.
Конструкция, подтверждающие формулу $\alpha \vee \beta$ – это или конструкция, подтверждающая α, или конструкция, подтверждающая β, причём мы хотим распознавать по конструкции, что именно она подтверждает, поэтому берём дизъюнктное объединение $F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$.

Конструкция, подтверждающая формулу $\alpha \Rightarrow \beta$ – это функция, которая по любой конструкции, подтверждающей α, выдаёт конструкцию, подтверждающую β, поэтому $F(\alpha \Rightarrow \beta) = F(\beta)^{F(\alpha)}$.
Конструкций, подтверждающих $\bot$, нет, поэтому $F(\bot) = \emptyset$.

Теорема 15.42. *Все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении высказываний, истинны при любой интерпретации*
$F\colon Free(M) \to \mathsf{K}$.

Доказательство. Каждому выводу секвенции вида $\alpha \vdash \beta$ соответствует правильно построенный терм $f\colon \alpha \to \beta$, он переходит в стрелку $F(f)\colon F(\alpha) \to F(\beta)$. Если выводима формула α (то есть, секвенция $\top \vdash \alpha$), то выводу соответствует терм $f\colon \top \to \alpha$, который переходит в стрелку $F(f)\colon 1 \to F(\alpha)$, то есть в элемент $F(\alpha)$.
□

Содержательно, вывод формулы α – это „конструкция, подтверждающая α“ в самом чистом виде, при интерпретации он переходит в некоторую „конкретную конструкцию“.

Замечание 15.43. При интерпретациях в Set оказывается верным также и закон исключённого третьего:
$F(\alpha \vee \neg\alpha) = F(\alpha \vee (\alpha \Rightarrow \bot)) = F(\alpha) + \emptyset^{F(\alpha)}$
Множество $F(\alpha) + \emptyset^{F(\alpha)}$ всегда непусто. Действительно, если непусто $F(\alpha)$, то непусто и $F(\alpha) + \emptyset^{F(\alpha)}$. Если же $F(\alpha) = \emptyset$, то $F(\alpha) + \emptyset^{F(\alpha)} = \emptyset + \emptyset^{\emptyset} \cong \emptyset + 1$

Замечание 15.44. Бидекартово замкнутые категории излагаю в основном по книге Lambek, Scott “Introduction to higher order categorical logic”. Название „бидекартово замкнутая категория“ буквально перевёл с английского “bicartesian closed category”. Где я взял такое определение интерпретации, не помню, но вряд ли сам придумал. Под это определение подходит как рекурсивная реализуемость Клини, так и модели Крипке (о которых в следующем разделе). В.Н.Крупский просит объяснить, почему у термов именно такие индексы. Например, у $ev_{A,B}$ индексы A, B, а у $pr_1^{A\times B}$ почему-то $A \times B$? На самом деле, можно с тем же успехом писать $pr_1^{A,B}$, а также и $pr^1_{A,B}$, если хочется. Оформление – дело вкуса. Главное, индексов должно быть достаточно, чтобы делать грамматический разбор. Например, по терму $\langle pr_2^{P\times Q}, pr_1^{P\times Q}\rangle$ однозначно восстанавливаются его начало и конец, а также начала и концы всех его подтермов

$$\frac{pr_2^{P\times Q}\colon P\times Q\to Q \quad pr_1^{P\times Q}\colon P\times Q\to P}{\langle pr_2^{P\times Q}, pr_1^{P\times Q}\rangle\colon P\times Q\to Q\times P}$$

Тут можно доказать некоторую „теорему об однозначном грамматическом разборе“, но не хочется.

15.6 Алгебры Гейтинга

Алгебра Гейтинга – это частично упорядоченное множество, которое является бидекартово замкнутым, если его рассматривать как категорию.

Определение 15.45. Частично упорядоченное множество $(\mathcal{H}, \leqslant)$ называется *алгеброй Гейтинга*, если в нём

- есть наибольший элемент $\top$
- есть наименьший элемент $\bot$
- есть пересечение $x \wedge y$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$
- есть объединение $x \vee y$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$
- есть элемент $x \Rightarrow y$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$, для которого
  $z \wedge x \leqslant y$ если и только если $z \leqslant (x \Rightarrow y)$
  (для любого $z \in \mathcal{H}$)

Элемент $x \Rightarrow y$ называется *относительным псевдодополнением* x и y, но мы постараемся обойтись без этого названия.

Замечание 15.46. Если $\mathcal{H}$ воспринимать как категорию, в которой есть не больше одной стрелки между любыми x и y, то $x \wedge y$ становится произведением $x \times y$, а $x \Rightarrow y$ экспонентой y^x. Определение $x \Rightarrow y$ утверждает „есть стрелка (единственная) из $z \times x$ в y если и только если есть стрелка (единственная) из z в $x \Rightarrow y$“.

Пример 15.47. Пусть даны множество атомарных высказываний M и алгебра Гейтинга $\mathcal{H}$. Интерпретация исчисления высказываний в $\mathcal{H}$ однозначно задаётся функцией (произвольной) $\mathrm{g}\colon M \to \mathcal{H}$, которая сопоставляет всем атомарным высказываниям элементы алгебры Гейтинга (будем называть эту функцию *оценкой*). На произвольные формулы интерпретация распространяется ожидаемым образом

- $F(P) = \mathrm{g}(P)$ для всех $P \in M$
- $F(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \wedge F(\beta)$

- $F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) \vee F(\beta)$
- $F(\alpha \Rightarrow \beta) = F(A) \Rightarrow F(B)$
- $F(\top) = \top$
- $F(\bot) = \bot$

Получаем функтор $F\colon Free(M) \to \mathcal{H}$. Все выводы секвенции $\alpha \vdash \beta$ переходят в одну и ту же единственную стрелку $F(\alpha) \leqslant F(\beta)$. Формула α истинна при интерпретации F если и только если $\top \leqslant F(\alpha)$, что равносильно $F(\alpha) = \top$.

Следующая теорема даёт способ получать много алгебр Гейтинга.

Определение 15.48. Пусть K – малая категория, будем называть её *шкалой.* На множестве $Ob(\mathsf{K})$ определим предпорядок

$$A \lesssim B \text{ если и только если есть стрелка } f\colon A \to B$$

где $A, B \in Ob(\mathsf{K})$. Множество объектов $X \subseteq Ob(\mathsf{K})$ будем называть *коидеалом*, если

$$A \in X \wedge A \lesssim B \Rightarrow B \in X \text{ для любых } A, B \in Ob(\mathsf{K})$$

Пример 15.49. Пусть K – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd} B \\ A \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

У неё три коидеала: $\emptyset$, $\{B\}$, $\{A, B\}$. Коидеал в данном простом случае (категория предпорядка) – это множество объектов, содержащее вместе с каждым объектом все объекты, лежащие выше него.

Теорема 15.50. *Для любой малой категории* K *множество* $(\mathcal{H}, \subseteq)$ *всех коидеалов, упорядоченное по включению, является алгеброй Гейтинга.*

Доказательство. Наибольшим элементом алгебры $\mathcal{H}$ будет коидеал $Ob(\mathsf{K})$, наименьшим – коидеал $\emptyset$. Пересечение и объединение двух (и даже любого числа) коидеалов являются коидеалами. Если X, Y – коидеалы, их экспонента определяется так

$$(X \Rightarrow Y) = \cup\{Z \in \mathcal{H} \mid Z \cap X \subseteq Y\}$$

(объединение всех коидеалов Z таких, что $Z \cap X \subseteq Y$). Действительно, из $Z \cap X \subseteq Y$ следует $Z \subseteq (X \Rightarrow Y)$ по определению. В обратную сторону, пусть $Z \subseteq (X \Rightarrow Y)$. Тогда

$$\begin{aligned}&Z \cap X \subseteq (X \Rightarrow Y) \cap X = (\cup\{Z \in \mathcal{H} \mid Z \cap X \subseteq Y\}) \cap X = \\ &= \cup\{Z \cap X \mid Z \in \mathcal{H} \wedge (Z \cap X \subseteq Y)\} \subseteq Y\end{aligned}$$

(второе равенство по дистрибутивности). Итого получаем

$$Z \cap X \subseteq Y \text{ если и только если } Z \subseteq (X \Rightarrow Y)$$

□

Пример 15.51. Пусть K – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd} B \\ A \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

У неё три коидеала: $\emptyset$, $\{B\}$, $\{A, B\}$. Возьмём исчисление высказываний $Free(\{P\})$, построенное на множестве атомарных высказываний $\{P\}$ (атомарное высказывание только одно, все формулы строятся из $P, \top, \bot$ с помощью $\wedge, \vee, \Rightarrow$). Сопоставим высказыванию P коидеал $\{B\}$, это однозначно определяет интерпретацию
$F\colon Free(\{P\}) \to \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{B\}, \{A, B\}\}$

- $F(P) = \{B\}$
- $F(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \cap F(\beta)$
- $F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) \cup F(\beta)$
- $F(\alpha \Rightarrow \beta) = F(A) \Rightarrow F(B)$
- $F(\top) = \{A, B\}$

- $F(\bot) = \emptyset$
- $F(\neg\alpha) = F(\alpha \Rightarrow \bot) = F(\alpha) \Rightarrow \emptyset$

Формула α истинна при этой интерпретации, если $F(\alpha) = \top = \{A, B\}$. Легко проверить, что $(\{B\} \Rightarrow \emptyset) = \emptyset$, поэтому

$$F(P \vee \neg P) = F(P) \cup F(\neg P) = \{B\} \cup (\{B\} \Rightarrow \emptyset) = \{B\} \neq \{A, B\}$$

поэтому формула $P \vee \neg P$ не является истинной при этой интерпретации. Мы получили интерпретацию интуиционистского исчисления высказываний, в которой неверен закон исключённого третьего.

Если дана шкала K и соответствующая ей алгебра коидеалов $\mathcal{H}$, оценку $\mathrm{g}\colon M \to \mathcal{H}$ удобно задавать в виде отношения между объектами шкалы и атомарными высказываниями.

Определение 15.52. Пусть даны множество M и малая категория K, соответствующую алгебру коидеалов будем обозначать $\mathcal{H}$. Отношение $A \Vdash P$ между объектами K и элементами M будем называть *отношением вынуждения* (и говорить *объект A вынуждает формулу P*), если

$$A \Vdash P \wedge A \lesssim B \Rightarrow B \Vdash P \text{ для всех } A, B \in Ob(\mathsf{K}), P \in M$$

Для любого $P \in M$ множество $\{A \in Ob(\mathsf{K}) \mid A \Vdash P\}$ является коидеалом. Таким образом, отношение вынуждения задаёт оценку $\mathrm{g}\colon M \to \mathcal{H}$

$$\mathrm{g}(P) = \{A \in Ob(\mathsf{K}) \mid A \Vdash P\}$$

В обратную сторону, по заданной оценке g мы можем построить отношение вынуждения

$$A \Vdash P \text{ если и только если } A \in \mathrm{g}(P)$$

Пример 15.53. Оценка из Примера 15.51 задаётся отношением вынуждения

$$B \Vdash P$$

$$A \nVdash P$$

Содержательно, формула P не является истинной в момент времени A, но становится истинной в момент времени B. Определение вынуждения гарантирует, что истинность формул со временем не пропадает (формула, истинная в данный момент времени, остаётся истинной и в будущем).

Продолжение оценки $\mathrm{g}\colon M \to \mathcal{H}$ до интерпретации $F\colon Free(M) \to \mathcal{H}$ тоже можно описать с помощью отношения вынуждения.

Теорема 15.54. *Пусть даны множество M и малая категория K, соответствующую алгебру коидеалов будем обозначать $\mathcal{H}$. Пусть задано отношение вынуждение $\Vdash$, соответствующую оценку обозначим $\mathrm{g}\colon M \to \mathcal{H}$. Продолжим отношение вынуждение на все формулы (и будем писать $A \Vdash \alpha$) следующим способом*

- *$A \Vdash P$ уже определено для всех $P \in M$*
- *$A \Vdash \alpha \wedge \beta$ если и только если $A \Vdash \alpha$ и $A \Vdash \beta$*
- *$A \Vdash \alpha \vee \beta$ если и только если $A \Vdash \alpha$ или $A \Vdash \beta$*
- *$A \Vdash \top$ верно при любом A*
- *$A \Vdash \bot$ неверно при любом A*
- *$A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$ если и только если для всякого B такого, что $A \lesssim B$ и $B \Vdash \alpha$, верно $B \Vdash \beta$*
- *$A \Vdash \neg\alpha$ если и только если для всякого B такого, что $A \lesssim B$, неверно $B \Vdash \alpha$*

Здесь $A, B \in Ob(\mathsf{K})$. Тогда интерпретация $F\colon Free(M) \to \mathcal{H}$, продолжающая оценку g на все формулы, задаётся так

$$F(\alpha) = \{A \in Ob(\mathsf{K}) \mid A \Vdash \alpha\}$$

Доказательство. Определение $A \Vdash \neg\alpha$ приведено для удобства, оно следует из определения для $A \Vdash \alpha \Rightarrow \bot$. Реально надо доказать следующие равенства

- $\{A \mid A \Vdash \alpha \wedge \beta\} = \{A \mid A \Vdash \alpha\} \cap \{A \mid A \Vdash \beta\}$
- $\{A \mid A \Vdash \alpha \vee \beta\} = \{A \mid A \Vdash \alpha\} \cup \{A \mid A \Vdash \beta\}$
- $\{A \mid A \Vdash \top\} = Ob(\mathsf{K})$
- $\{A \mid A \Vdash \bot\} = \emptyset$

- $\{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\} = \{A \mid A \Vdash \alpha\} \Rightarrow \{A \mid A \Vdash \beta\}$

Все равенства, кроме последнего, непосредственно видны из определения вынуждения. Чтобы доказать последнее равенство, проверим, что для любого коидеала Z

$$Z \cap \{A \mid A \Vdash \alpha\} \subseteq \{A \mid A \Vdash \beta\} \quad \text{равносильно} \quad Z \subseteq \{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\}$$

Слева направо. Предположим, что $Z \cap \{A \mid A \Vdash \alpha\} \subseteq \{A \mid A \Vdash \beta\}$.
Это значит, что для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$, если $B \in Z$ и $B \Vdash \alpha$, то $B \Vdash \beta$. Докажем, что $Z \subseteq \{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\}$. Пусть $A \in Z$. Надо доказать $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Это означает, что для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$, если $A \lesssim B$ и $B \Vdash \alpha$, то $B \Vdash \beta$. Действительно, если $A \in Z$ и $A \lesssim B$, то $B \in Z$ (поскольку Z – коидеал), а из $B \in Z$ и $B \Vdash \alpha$ следует $B \Vdash \beta$ в силу исходного предположения.
Справа налево. Предположим, что $Z \subseteq \{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\}$. Это значит, что для любого $A \in Ob(\mathsf{K})$, если $A \in Z$, то $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Докажем, что $Z \cap \{A \mid A \Vdash \alpha\} \subseteq \{A \mid A \Vdash \beta\}$. Пусть $A \in Z$ и $A \Vdash \alpha$. Надо доказать $A \Vdash \beta$. Из $A \in Z$ в силу исходного предположения следует $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Это означает, что для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$, если $A \lesssim B$ и $B \Vdash \alpha$, то $B \Vdash \beta$. Поскольку $A \lesssim A$ и $A \Vdash \alpha$, получаем $A \Vdash \beta$.
Наконец, надо ещё проверить, что $\{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\}$ является коидеалом. Мне кажется, это видно из определения (или становится ясно после минутного раздумья). Собственно, определение $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$ выбрано таким, потому что при простом определении коидеал не получится.
□

Замечание 15.55. Заметим, что из $A \Vdash \alpha$ и $A \lesssim B$ следует $B \Vdash \alpha$ для любой формулы α и любых $A, B \in Ob(\mathsf{K})$.

Пример 15.56. Вернёмся опять к Примеру 15.51. Оценка задаётся отношением вынуждения

$$B \Vdash P$$

$$A \nVdash P$$

Легко проверить, что

$$B \nVdash \neg P$$

$$A \nVdash \neg P$$

и поэтому

$$B \Vdash P \vee \neg P$$

$$A \nVdash P \vee \neg P$$

Формула истинна, если она вынуждается всеми объектами, поэтому формула $P \vee \neg P$ не является истинной при этой интерпретации. Но она и не совсем ложна, поскольку алгебра Гейтинга данной шкалы трёхзначная, кроме истины $\{A, B\}$ и лжи $\emptyset$ в ней есть промежуточное значение истинности $\{B\}$, это значение и принимает формула $P \vee \neg P$.

Замечание 15.57. Если шкала K – частично упорядоченное множество (как в предыдущем примере), такие интерпретации исчисления высказываний называются *моделями Крипке*.

Замечание 15.58. В этом разделе точно не выдумал ничего, все определения и результаты хорошо известны.

Глава 16

Мономорфизмы, эпиморфизмы

16.1 Мономорфизмы, подобъекты

Определение 16.1. Стрелка $f\colon A \to B$ называется *мономорфизмом*, или *мономорфной стрелкой*, если для любого объекта C и любых двух стрелок $g_1, g_2\colon C \to A$ из равенства $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует равенство $g_1 = g_2$.

Соглашение 16.2. Тот факт, что стрелка $f\colon A \to B$ является мономорфизмом, будем изображать так $f\colon A \rightarrowtail B$

Замечание 16.3. Равенство $f \circ g_1 = f \circ g_2$ хотелось бы выразить такой коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Но по нашему определению коммутативности, коммутативность такой диаграммы означает также, что $g_1 = g_2$ (два пути с одинаковым началом и концом дают одинаковые стрелки). В данном случае нетрудно исправить дело, нарисовав такую диаграмму

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

но в дальнейшем нам встретятся более сложные случаи и мы сейчас введём более удобное определение коммутативности.

Определение 16.4. Диаграмма называется *коммутативной*, если для любых вершин A и B в диаграмме любые два пути из A в B дают равные композиции стрелок, *если хотя бы один из путей содержит не меньше двух стрелок.* При таком (более слабом) определении коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

означает $f \circ g_1 = f \circ g_2$ и не требует равенства $g_1 = g_2$.

Таким образом, для мономорфизма f из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & A \arrow[r, tail, "f"] & B \end{tikzcd}$$

следует равенство $g_1 = g_2$.

Пример 16.5. В Set стрелка $f\colon A \to B$ является мономорфизмом если и только если она инъективна, то есть

$\forall x, y \in A\,(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

Действительно, пусть f – мономорфизм. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & A \arrow[r, tail, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Из равенства $f \circ x = f \circ y$ следует $x = y$, это как раз и значит

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ на теоретико-множественном языке.

В обратную сторону, пусть функция f инъективна. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Её коммутативность означает

$$\forall x \in C\,(f(g_1(x)) = f(g_2(x)))$$

В силу инъективности f из этого следует

$$\forall x \in C\,(g_1(x) = g_2(x))$$

поэтому $g_1 = g_2$. Таким образом, f является мономорфизмом.

Упражнение 16.6. Тождественные стрелки являются мономорфизмами.
Композиция двух мономорфизмов является мономорфизмом.

Упражнение 16.7. В категориях предпорядка все стрелки являются мономорфизмами.

Упражнение 16.8. Любая стрелка из терминального объекта $f\colon 1 \to A$ является мономорфизмом.

Определение 16.9. Стрелка $f\colon A \to B$ называется *обратимой слева*, если существует стрелка $g\colon B \to A$ такая, что $g \circ f = id_A$.

Упражнение 16.10. Любая стрелка, обратимая слева (в частности, любой изоморфизм), является мономорфизмом. Обратное неверно: в категориях частичного порядка все стрелки мономорфны, но только тождественные обратимы слева.

Упражнение 16.11. Стрелка $S\colon N \to N$ является мономорфизмом.

Упражнение 16.12. Если композиция $f \circ h$ является мономорфизмом, то h является мономорфизмом.

Упражнение 16.13. Если стрелка f мономорфна, то мономорфны и все стрелки вида $\langle f, g\rangle$, а также $\langle g, f\rangle$.

Упражнение 16.14. Если стрелки f и g мономорфны, то и стрелка $f \times g$ мономорфна.

Пример 16.15. Пусть K – конкретная категория со стирающим функтором $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Стрелка $f\colon A \to B$ мономорфна, если мономорфна функция $G(f)\colon G(A) \to G(B)$ между множествами-носителями. Часто это выражают словами „строгие функторы отражают мономорфизмы“. Действительно, из $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует

$$G(f) \circ G(g_1) = G(f) \circ G(g_2)$$

далее $G(g_1) = G(g_2)$ вследствие мономорфности $G(f)$ и $g_1 = g_2$ вследствие строгости функтора G.
Обратное верно не всегда! Бывают случаи, когда стрелка f мономорфна, а $G(f)$ нет, хотя контрпример придумать трудно. Приведу редкий контрпример, взятый из книги Freyd, Scedrov "Categories, Allegories". Возьмём категорию линейно упорядоченных полей, включая вырожденное поле из одного элемента, в котором $0 = 1$. Морфизмами этой категории будут отображения, сохраняющие порядок, ноль, единицу, сложение и умножение. Стрелка из поля действительных чисел $\mathbb{R}$ в одноэлементное поле будет мономорфизмом, хотя отображение множеств-носителей не инъективно. Мономорфизмом она будет потому, что для любого упорядоченного поля C есть не больше одного морфизма в $\mathbb{R}$ (есть такой алгебраический результат), поэтому любые две стрелки $g_1, g_2 \colon C \to \mathbb{R}$ равны безо всяких дополнительных условий.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Тем не менее, обычно в конкретных категориях мономорфны в точности те стрелки, для которых мономорфны соответствующие отображения множеств-носителей. Это связано со следующей теоремой.

Теорема 16.16. *Правые сопряжённые функторы сохраняют мономорфизмы. Точнее, если $F \dashv G$ и $h \colon A \rightarrowtail B$, то $G(h) \colon G(A) \rightarrowtail G(B)$.*

Доказательство. Пусть h – мономорфизм. Предположим, что $G(h) \circ g_1 = G(h) \circ g_2$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & G(A) \arrow[r, "G(h)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Тогда $h \circ \Phi(g_1) = h \circ \Phi(g_2)$

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, shift left, "\Phi(g_1)"] \arrow[r, shift right, "\Phi(g_2)"'] & A \arrow[r, tail, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Сокращая на h, получаем $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$ и поэтому $g_1 = g_2$.
□

Пример 16.17. Если $f\colon A \rightarrowtail B$, то $f^C\colon A^C \rightarrowtail B^C$
(где $f^C = \Lambda(f \circ ev)$, потому что $A^C \times C \overset{ev}{\to} A \overset{f}{\to} B$)
В Set стрелка f^C – это умножение слева на f

$$f\circ\colon \mathsf{Set}(C, A) \to \mathsf{Set}(C, B)$$

Если f – мономорфизм, то и отображение $f\circ$ является мономорфизмом, поскольку переводит две разные стрелки $g_1, g_2\colon C \to A$ в две разные стрелки $f \circ g_1$ и $f \circ g_2\colon C \to B$.

Пример 16.18. В категориях групп, колец, упорядоченных множеств (с монотонными отображениями в качестве морфизмов), топологических пространств стрелка является мономорфизмом если и только если мономорфно соответствующее отображение множеств-носителей. Во всех этих случаях стирающий функтор G сохраняет мономорфизмы, поскольку к нему есть левый сопряжённый F, который выдаёт по множеству A

1. Свободную группу со множеством образующих A;
2. Свободное кольцо со множеством образующих A;
3. Множество A с дискретным порядком (все элементы попарно несравнимы);
4. Множество A с дискретной топологией.

По той же причине стирающие функторы во всех этих случаях сохраняют произведения.

С понятием „мономорфизм“ тесно связано понятие „разделяющий объект“.

Определение 16.19. Пусть дана категория K. Объект $C \in Ob(\mathsf{K})$ называется *разделяющим*, если для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K})$ и любых двух стрелок $g_1, g_2\colon A \to B$ таких, что $g_1 \neq g_2$ существует стрелка $h\colon C \to A$, для которой $g_1 \circ h \neq g_2 \circ h$.
Иными словами, если для любой стрелки $h\colon C \to A$ выполнено равенство $g_1 \circ h = g_2 \circ h$

$$C \xrightarrow{h} A \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} B$$

то выполнено равенство $g_1 = g_2$.

Замечание 16.20. Коммутативность диаграммы

$$C \xrightarrow{h} A \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} B$$

означает, что $g_1 \circ h = g_2 \circ h$. При этом g_1 и g_2 не обязаны быть равны между собой (хотя могут быть и равны, это не запрещено).

Пример 16.21. В Set терминальный объект $\{*\}$ является разделяющим. Если две функции g_1 и g_2 совпадают на любом аргументе x

$$\{*\} \xrightarrow{x} A \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} B$$

то $g_1 = g_2$. Иными словами, если $g_1 \neq g_2$, то найдётся элемент x, на котором они отличаются $g_1 \circ x \neq g_2 \circ x$. Иногда это выражают словами „в Set достаточно элементов“ или „в Set достаточно точек“.

Замечание 16.22. Разделяющие объекты не обязаны все быть изоморфны между собой! В Set любое непустое множество является разделяющим объектом (проверьте). Объект, изоморфный разделяющему, конечно, сам является разделяющим.

Пример 16.23. В категории групп Grp терминальный объект $\{e\}$ не является разделяющим, поскольку стрелок из терминального объекта очень мало (для каждой группы X ровно один морфизм из $\{e\}$ в X). Зато любая свободная группа с непустым множеством образующих будет разделяющим объектом. Рассмотрим сопряжение $F \dashv G$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{Grp} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

где G – стирающий функтор, а F – функтор, выдающий свободную группу по множеству образующих. Рассмотрим для примера группу $F(1)$. Это свободная группа с одной образующей, обозначим её z.

$F(1) = \{\dots z^{-3}, z^{-2}, z^{-1}, e\,, z\,, z^2\,, z^3 \dots\}$

где умножение задано правилом $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$ $(n, m \in \mathbb{Z})$
На самом деле эта группа изоморфна группе целых чисел по сложению, но нам это не важно. В силу сопряжённости, для любой группы X стрелки вида $f\colon F(1) \to X$ взаимно однозначно соответствуют стрелкам вида $g\colon 1 \to G(X)$, то есть элементам носителя X. Действительно, гомоморфизм $f\colon F(1) \to X$ однозначно определяется элементом $G(X)$, в который переходит z. Используя тот факт, что 1 является разделяющим объектом в Set, легко показать, что $F(1)$ является разделяющим объектом в Grp.

Упражнение 16.24. Если $F \dashv G$ и функтор G строгий, то F переводит разделяющие объекты в разделяющие.

Упражнение 16.25. Пусть C – разделяющий объект. Стрелка $f\colon A \to B$ будет мономорфизмом если и только если для любых двух стрелок $g_1, g_2\colon C \to A$ из равенства $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует равенство $g_1 = g_2$.

Пример 16.26. В Cat разделяющим объектом является следующая категория K

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

Заметим, что функторы вида $H\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}_1$ соответствуют стрелкам K_1. Пусть даны два функтора $G_1, G_2\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$, причём $G_1 \neq G_2$. Это значит что $G_1(A) \neq G_2(A)$ для какого-то $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ или $G_1(f) \neq G_2(f)$ для какого-то $f \in Mor(\mathsf{K}_1)$. Первый случай сводится ко второму. Это связано с тем, что если G_1 и G_2 различаются на объекте A, то они различаются и на стрелке id_A. Действительно, из

$$G_1(id_A) = G_2(id_A)$$

следует

$$id_{G_1(A)} = id_{G_2(A)}$$

поэтому

$$G_1(A) = G_2(A)$$

Пусть $G_1(f) \neq G_2(f)$. Определим функтор $H\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}_1$

$$H(A) = dom(f)$$
$$H(B) = cod(f)$$
$$H(f) = f$$

Легко видеть, что $G_1 \circ H \neq G_2 \circ H$, поэтому изображённая выше категория K является разделяющим объектом в Cat.

Иногда разделяющего объекта нет, но некоторое множество объектов является „коллективным разделяющим“.

Определение 16.27. *Разделяющим множеством* объектов некоторой категории K называется такое множество $I \subseteq Ob(\mathsf{K})$, что для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K})$ и любых двух стрелок $g_1, g_2 \colon A \to B$ таких, что $g_1 \neq g_2$ существует объект $C \in I$ и стрелка $h \colon C \to A$, для которой $g_1 \circ h \neq g_2 \circ h$. Иными словами, если для любого объекта $C \in I$ и любой стрелки $h \colon C \to A$ выполнено равенство $g_1 \circ h = g_2 \circ h$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & B \end{tikzcd}$$

то выполнено равенство $g_1 = g_2$.

Пример 16.28. В категории графов Grph есть разделяющее множество, состоящее из двух графов

$$A$$

(граф с одной вершиной и без рёбер) и

$$A \xrightarrow{f} B$$

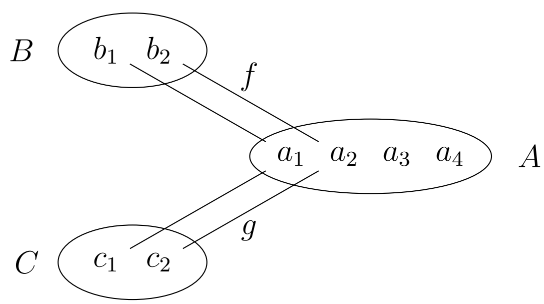
(граф с двумя вершинами и одним ребром). Морфизмы из первого графа в некоторый граф F соответствуют вершинам F, а морфизмы из второго графа в F соответствуют рёбрам F. Если даны два графа F и G, а также два морфизма графов $\tau, \sigma \colon F \to G$, причём $\tau \neq \sigma$, эти морфизмы различаются на какой-то вершине графа F или на каком-то ребре.

Упражнение 16.29. Вспомните определение категории графов и проверьте детали.

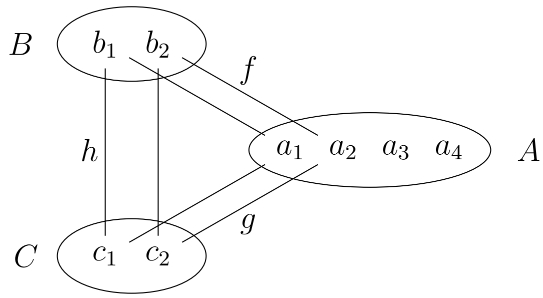
Упражнение 16.30. Пусть I – разделяющее множество. Стрелка $f\colon A \to B$ будет мономорфизмом если и только если для любого объекта $C \in I$ и для любых двух стрелок $g_1, g_2\colon C \to A$ из равенства $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует равенство $g_1 = g_2$.

Замечание 16.31. Я перевёл выражения “separator” и “separating set” как „разделяющий объект“ и „разделяющее множество“, посоветовавшись с коллективным разумом в сообществе category-theory.livejournal.com, идея принадлежит юзеру nivanych. По-русски иногда говорят „образующий объект“, но это выражение имеет и другое значение, причём только это другое значение находит google. По-английски также пишут “generator” и “generating family”.

Пример 16.32. В Set каждый мономорфизм $f\colon B \rightarrowtail A$ задаёт подмножество A (множество значений функции f). Разные мономорфизмы могут задавать одно и то же подмножество, как показывает следующий пример



Здесь функции $f\colon B \rightarrowtail A$ и $g\colon C \rightarrowtail A$ задают одно и то же подмножество A (а именно, $\{a_1, a_2\}$). В этом случае существует изоморфизм $h\colon C \to B$ такой, что $f \circ h = g$



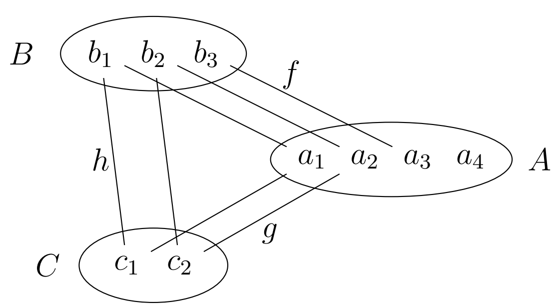
Определение 16.33. В произвольной категории K на множестве всех мономорфизмов с концом A определим предпорядок следующим способом: для стрелок $f\colon B \rightarrowtail A$ и $g\colon C \rightarrowtail A$ положим $g \lesssim f$ если и только если найдётся стрелка $h\colon C \to B$ такая, что $f \circ h = g$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, tail, "f"] & \\ & A \\ C \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, tail, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Такая стрелка h может быть только одна (поскольку f – мономорфизм), поэтому получается предпорядок. Заметим также, что стрелка h сама является мономорфизмом по упражнению 16.12.

Если $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$, будем писать $f \simeq g$

Пример 16.34. На картинке изображены три множества A, B, C и три мономорфизма $f\colon B \rightarrowtail A$, $g\colon C \rightarrowtail A$, $h\colon C \rightarrowtail A$.



Мы видим, что f отображает B на подмножество $\{a_1, a_2, a_3\}$, а g отображает C на подмножество $\{a_1, a_2\}$, предпорядок на мономорфизмах соответствует порядку по включению между подмножествами.

Теорема 16.35. *Пусть $f\colon B \rightarrowtail A$, $g\colon C \rightarrowtail A$. Тогда $f \simeq g$ если и только если существует (единственный) изоморфизм $h\colon C \to B$ такой, что $f \circ h = g$.*

Доказательство. Если $g \lesssim f$, то для некоторой (единственной) стрелки h будет $f \circ h = g$. Если к тому же $f \lesssim g$, то для некоторой стрелки h' будет $g \circ h' = f$. Получаем

$$f \circ h \circ h' = g \circ h' = f = f \circ id$$

$$g \circ h' \circ h = f \circ h = g = g \circ id$$

и сокращаем слева на мономорфизмы f и g

$$h \circ h' = id$$

$$h' \circ h = id$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, tail, "f"] & \\
C \arrow[u, "h"] \arrow[r, tail, "g"] & A \\
B \arrow[u, "h'"] \arrow[ur, tail, "f"'] \arrow[uu, bend left=60, dotted, "id_B"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, tail, "g"] & \\
B \arrow[u, "h'"] \arrow[r, tail, "f"] & A \\
C \arrow[u, "h"] \arrow[ur, tail, "g"'] \arrow[uu, bend left=60, dotted, "id_C"] &
\end{tikzcd}$$

□

Определение 16.36. *Подобъектами* объекта A будем называть мономорфизмы с концом A с точностью до отношения $\simeq$ (или классы эквивалентности мономорфизмов, если так понятнее). Каждый мономорфизм f задаёт некоторый подобъект, который будем обозначать $[f]$. Совокупность всех подобъектов объекта A будем обозначать $\mathrm{Sub}(A)$. Предпорядок $\lesssim$ между мономорфизмами превращается в порядок между подобъектами, этот порядок будем обозначать $[f] \subseteq [g]$.

Упражнение 16.37. У каждого объекта A есть наибольший подобъект, задаваемый мономорфизмом $id_A\colon A \to A$

Замечание 16.38. Определение подобъектов как классов эквивалентности мономорфизмов создаёт теоретико-множественные проблемы. Например, в Set почти все такие классы эквивалентности очень „большие“ и не являются множествами. В Set и во многих других категориях есть другой выход: можно естественным способом выбрать из каждого класса эквивалентности некоторый *канонический подобъект*. Если в Set задано некоторое подмножество $B \subseteq A$, мы можем определить функцию вложения $f\colon B \rightarrowtail A$ как $f = \{(b, b) \mid b \in B\}$ и этот мономорфизм будет каноническим представителем для данного подмножества.

Соглашение 16.39. Мы будем говорить „B является подобъектом A“, если мономорфизм $f\colon B \rightarrowtail A$ ясен из контекста.

Соглашение 16.40. Пусть даны две стрелки с концом A

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, tail, "f"] & \\ & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

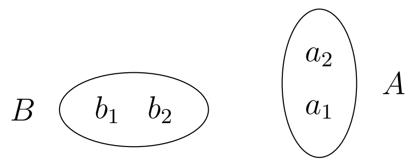
причём f является мономорфизмом (а g не обязательно). Будем говорить, что g *пропускается через* f, если существует (единственная) стрелка $h\colon C \to B$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, tail, "f"] & \\ & A \\ C \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

В Set это означает, что функция $g\colon C \to A$ принимает все свои значения в подмножестве $B \subseteq A$. Функция h – это функция g, если воспринимать её как функцию из C в B.

Пример 16.41. В категории групп Grp подобъекты соответствуют подгруппам. Подгруппа группы X – это подмножество носителя X, содержащее групповую единицу e и замкнутое относительно умножения и взятия обратного элемента. Такое подмножество задаёт некоторый мономорфизм $f\colon Y \rightarrowtail X$ (вложение). Верно и обратное, образ любого мономорфизма будет подгруппой.

Пример 16.42. Рассмотрим категорию частично упорядоченных множеств Poset. Объектами Poset являются частично упорядоченные множества, а морфизмами – монотонные отображения. Рассмотрим два частично упорядоченных множества: дискретное двоеточие B (два элемента b_1, b_2, несравнимых между собой) и связное двоеточие A (два элемента a_1, a_2, причём $a_1 < a_2$)



Отображение $f\colon B \to A$, определённое равенствами

$$f(b_1) = a_1$$

$$f(b_2) = a_2$$

является монотонным мономорфизмом. С категорной точки зрения дискретное двоеточие является подобъектом связного. Но нам это не нравится, мы хотим, чтобы подобъектами были подмножества с унаследованным порядком, а в данном случае это не так. Такая же проблема и в категории топологических пространств. В книге Adamek, Herrlich, Strecker "The Joy of Cats" на странице 134 дано определение „хороших“ подобъектов в конкретных категориях, оно существенно использует стирающий функтор.

Определение 16.43. Функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ называется *вложением*, или *вложением категорий*, если он строгий и инъективен на $Ob(\mathsf{K}_1)$ (переводит разные объекты в разные). Равносильное определение: функтор F является вложением, если он инъективен на $Mor(\mathsf{K}_1)$.

Упражнение 16.44. Проверьте равносильность.

Чуть позже мы докажем, что мономорфизмы в Cat – это в точности вложения, сейчас же определим канонические подобъекты.

Определение 16.45. Категория K_1 называется *подкатегорией* категории K_2, если выполнены следующие условия

1. $Ob(\mathsf{K}_1) \subseteq Ob(\mathsf{K}_2)$
2. $\mathsf{K}_1(A,B) \subseteq \mathsf{K}_2(A,B)$ для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$
3. $f \circ g$ в K_1 совпадает с $f \circ g$ в K_2 для любых $f, g \in Mor(\mathsf{K}_1)$
4. id_A в K_1 совпадает с id_A в K_2 для любого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$

С каждой подкатегорией связан её функтор вложения $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$, действующий так

$$F(A) = A \quad \text{для любого } A \in Ob(\mathsf{K}_1)$$
$$F(f) = f \quad \text{для любого } f \in Mor(\mathsf{K}_1)$$

Пример 16.46. Следующая категория K

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

имеет пять подкатегорий.

Первая

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \end{tikzcd}$$

Вторая

$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

Третья

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

А также вся категория K и ещё пустая подкатегория без объектов и без стрелок.

Теорема 16.47. *Мономорфизмы в* Cat *– это в точности вложения.*

Доказательство. Пусть категории K_1 и K_2 малые, а функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ является вложением. По определению вложения инъективны обе функции

$$F\colon Ob(\mathsf{K}_1) \rightarrowtail Ob(\mathsf{K}_2)$$

$F\colon Mor(\mathsf{K}_1) \rightarrowtail Mor(\mathsf{K}_2)$

Равенство $F \circ G_1 = F \circ G_2$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}_3 \arrow[r, shift left, "G_1"] \arrow[r, shift right, "G_2"'] & \mathsf{K}_1 \arrow[r, "F"] & \mathsf{K}_2 \end{tikzcd}$$

означает пару равенств

$F \circ G_1 = F \circ G_2$ (отображения из $Ob(\mathsf{K}_3)$ в $Ob(\mathsf{K}_2)$)

$F \circ G_2 = F \circ G_2$ (отображения из $Mor(\mathsf{K}_3)$ в $Mor(\mathsf{K}_2)$)

Сокращая оба равенства на F, получаем $G_1 = G_2$, поэтому F является мономорфизмом в Cat.

В обратную сторону, пусть функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \rightarrowtail \mathsf{K}_2$ является мономорфизмом в Cat. Докажем, что он инъективен на $Mor(\mathsf{K}_1)$ и поэтому является вложением. Предположим, что это не так. Тогда существуют две стрелки $f_1, f_2 \in Mor(\mathsf{K}_1)$ такие, что $f_1 \neq f_2$, но $F(f_1) = F(f_2)$. Возьмём категорию K, которая является разделяющим объектом в Cat

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

и определим два функтора $G_1, G_2\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}_1$

$G_1(A) = dom(f_1)$

$G_1(B) = cod(f_1)$

$G_1(f) = f_1$

$G_2(A) = dom(f_2)$

$G_2(B) = cod(f_2)$

$G_2(f) = f_2$

Легко проверить, что $F \circ G_1 = F \circ G_2$, но $G_1 \neq G_2$, что противоречит мономорфности F.

$\square$

Определение 16.48. Функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ называется *полным*, если для всякой стрелки вида $f\colon F(A) \to F(B)$ найдётся стрелка

$g\colon A \to B$ такая, что $f = F(g)$. Иными словами, F отображает $\mathsf{K}_1(A, B)$ на $\mathsf{K}_2(F(A), F(B))$ сюръективно для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$.

Замечание 16.49. Если функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ строгий и полный, то F отображает $\mathsf{K}_1(A, B)$ на $K_2(F(A), F(B))$ взаимно однозначно для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$.

Определение 16.50. Категория K_1 называется *полной подкатегорией* категории K_2, если она является подкатегорией и функтор вложения полный. Иными словами, $\mathsf{K}_1(A, B) = \mathsf{K}_2(A, B)$ для любых $A, B \in Ob(\mathsf{K}_1)$.

Пример 16.51. Следующая категория K

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

имеет четыре полные подкатегории.

Первая

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \end{tikzcd}$$

Вторая

$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

А также вся категория K и ещё пустая подкатегория без объектов и без стрелок. Следующая подкатегория полной не является

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

Определение 16.52. Говорят, что функтор F *отражает изоморфизмы*, если он их „сохраняет в сторону прообраза“. Это значит, что для любой стрелки f, если $F(f)$ является изоморфизмом, то и f является изоморфизмом.

Теорема 16.53. *Любой строгий и полный функтор отражает изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ строгий и полный. Возьмём произвольную стрелку $f\colon A \to B$ в категории K_1. Предположим, что $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ является изоморфизмом. Возьмём обратную стрелку $F(f)^{-1}\colon F(B) \to F(A)$. Она является образом некоторой стрелки $g\colon B \to A$ в силу полноты функтора F.

$$F(f)^{-1} = F(g)$$

Докажем, что $g = f^{-1}$, то есть

$$g \circ f = id_A$$
$$f \circ g = id_B$$

Действительно

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = F(f)^{-1} \circ F(f) = id_{F(A)} = F(id_A)$$
$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(f)^{-1} = id_{F(B)} = F(id_B)$$

и в силу строгости F должно быть

$$g \circ f = id_A$$
$$f \circ g = id_B$$

□

Следствие 16.54. *Если объекты A и B изоморфны в категории K, то они изоморфны и в любой полной подкатегории, которой они оба принадлежат (функтор вложения строгий и полный, поэтому отражает изоморфизмы).*

16.2 Эпиморфизмы

Эпиморфизмы – это мономорфизмы в двойственной категории.

Соглашение 16.55. Выберем в Set некоторое множество Ω из двух элементов $\Omega = \{\top, \bot\}$ (конкретный выбор совершенно не важен), его элементы будем называть *истиной* и *ложью*, а само множество – *множеством значений истинности*. Стрелки вида $g\colon B \to \Omega$ взаимно однозначно соответствуют подмножествам B. Каждой такой стрелке соответствует подмножество $\{y \in B \mid g(y) = \top\}$. И наоборот, подмножеству $B' \subseteq B$ соответствует стрелка, принимающая значение $\top$ на всех элементах подмножества B' и значение $\bot$ на остальных, эта стрелка называется *характеристической стрелкой* подмножества B'.

Определение 16.56. Стрелка $f\colon A \to B$ называется *эпиморфизмом*, или *эпиморфной стрелкой*, если для любого объекта C и любых двух стрелок $g_1, g_2\colon B \to C$ из равенства $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует равенство $g_1 = g_2$.

Соглашение 16.57. Тот факт, что стрелка $f\colon A \to B$ является эпиморфизмом, будем выражать так $f\colon A \twoheadrightarrow B$

Таким образом, для эпиморфизма f из $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & C \end{tikzcd}$$

следует равенство $g_1 = g_2$.

Пример 16.58. В Set стрелка $f\colon A \to B$ является эпиморфизмом если и только если она сюръективна, то есть

$$\forall y \in B\, \exists x \in A\, (f(x) = y)$$

Действительно, пусть функция f сюръективна. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & C \end{tikzcd}$$

Её коммутативность означает, что

$$\forall x \in A\,(g_1(f(x)) = g_2(f(x)))$$

Но всякий элемент $y \in B$ имеет вид $f(x)$ для некоторого $x \in A$, поэтому

$$\forall y \in B\,(g_1(y) = g_2(y))$$

и поэтому $g_1 = g_2$. Таким образом, f является эпиморфизмом.
В обратную сторону, пусть f не является сюръекцией. Это значит, существует элемент $y \in B$ такой, что

$$\forall x \in A\,(f(x) \neq y)$$

Докажем, что f – не эпиморфизм. Возьмём два подмножества B

$$B' = \{y\}$$

$$B'' = \emptyset$$

и соответствующие им характеристические функции $g_1, g_2 \colon B \to \{\top, \bot\}$ (функция g_2 тождественно равна $\bot$ на всех элементах B, а функция g_1 принимает значение $\top$ только на y). Мы видим, что $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$A \xrightarrow{f} B \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} \{\top, \bot\}$$

Но $g_1 \neq g_2$, поэтому f не является эпиморфизмом. Таким образом, всякий эпиморфизм является сюръекцией.

Упражнение 16.59. Тождественные стрелки являются эпиморфизмами.
Композиция двух эпиморфизмов является эпиморфизмом.

Упражнение 16.60. В категориях предпорядка все стрелки являются эпиморфизмами.

Упражнение 16.61. Любая стрелка в начальный объект $f \colon A \to 0$ является эпиморфизмом.

Определение 16.62. Стрелка $f \colon A \to B$ называется *обратимой справа*, или *ретракцией*, если существует стрелка $g \colon B \to A$ такая, что $f \circ g = id_B$.

Упражнение 16.63. Любая стрелка, обратимая справа (в частности, любой изоморфизм), является эпиморфизмом. Обратное неверно: в категориях частичного порядка все стрелки эпиморфны, но только тождественные обратимы справа.

Упражнение 16.64. Стрелка $p\colon N \to N$ является эпиморфизмом.

Замечание 16.65. В Set все эпиморфизмы обратимы справа, но чтобы это доказать, нужна аксиома выбора. Если есть сюръекция $f\colon A \twoheadrightarrow B$, можно построить $g\colon B \to A$ такую, что $f \circ g = id_B$, то есть

$$f(g(y)) = y \text{ для всех } y \in B$$

Функция g по каждому $y \in B$ будет выдавать некоторое $x \in A$ со свойством $f(x) = y$, такое x существует, потому что f – сюръекция.

Упражнение 16.66. Если композиция $h \circ f$ является эпиморфизмом, то и h является эпиморфизмом.

Упражнение 16.67. Если стрелка f эпиморфна, то эпиморфны и все стрелки вида $[f, g]$, а также $[g, f]$.

Упражнение 16.68. Если стрелки f и g эпиморфны, то и стрелка $f+g$ эпиморфна.

Пример 16.69. Пусть K – конкретная категория со стирающим функтором $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Стрелка $f\colon A \to B$ эпиморфна, если эпиморфна функция $G(f)\colon G(A) \to G(B)$ между множествами-носителями. Часто это выражают словами „строгие функторы отражают эпиморфизмы“. Действительно, из $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует

$$G(g_1) \circ G(f) = G(g_2) \circ G(f)$$

далее $G(g_1) = G(g_2)$ вследствие эпиморфности $G(f)$ и $g_1 = g_2$ вследствие строгости функтора G.
Обратное верно не всегда! Бывают случаи, когда стрелка f эпиморфна, а $G(f)$ нет. Контрпримеры можно найти в любом учебнике по теории категорий и я не хочу их переписывать. Чтобы что-то понять, надо прочитать минимум два учебника.

Упражнение 16.70. Левые сопряжённые функторы сохраняют эпиморфизмы. Точнее, если $F \dashv G$ и $h\colon A \twoheadrightarrow B$, то $F(h)\colon F(A) \twoheadrightarrow F(B)$.

Пример 16.71. В декартово замкнутой категории, если $h\colon A \twoheadrightarrow B$, то $h \times id_C\colon A \times C \twoheadrightarrow B \times C$.
Потому что функтор $(-) \times C$ является левым сопряжённым (к экспоненте).

Замечание 16.72. В Set, если стрелка является мономорфизмом и эпиморфизмом одновременно, она является изоморфизмом. В произвольных категориях это не так. В категориях частичного порядка все стрелки мономорфны и эпиморфны, но только тождественные являются изоморфизмами.

Упражнение 16.73. Мономорфизм, обратимый справа (это более сильное свойство, чем эпиморфность), является изоморфизмом.
Эпиморфизм, обратимый слева (это более сильное свойство, чем мономорфность), является изоморфизмом.

Замечание 16.74. Во многих категориях эпиморфизмы с началом A (то есть, стрелки вида $f\colon A \twoheadrightarrow B$) соответствуют тому, что алгебраисты называют *факторобъектами* A. На множестве таких эпиморфизмов определим отношение эквивалентности следующим способом: для стрелок $f\colon A \twoheadrightarrow B$ и $g\colon A \twoheadrightarrow C$ положим $f \simeq g$ если и только если найдётся изоморфизм $h\colon B \to C$ такой, что $h \circ f = g$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "h"'] & \\
C & A \arrow[ul, two heads, "f"'] \arrow[l, two heads, "g"]
\end{tikzcd}$$

В категории групп Grp отображение группы A на любую факторгруппу B будет эпиморфизмом и факторгруппы однозначно соответствуют эпиморфизмам (с точностью до эквивалентности $\simeq$). Тем не менее, во многих категориях определять факторобъекты как эпиморфизмы нельзя и вопрос непростой. В качестве контрпримера годится Пример 16.42, определённое там отображение является также и эпиморфизмом в категории Poset, но связное двоеточие неестественно считать факторобъектом дискретного. Опять же, для конкретных категорий удаётся дать хорошее определение фактороoбъекта, которое существенно использует стирающий функтор, его можно найти в книге Adamek, Herrlich, Strecker “The Joy of Cats” на странице 136.

16.3 Две теоремы о сопряжённых функторах

Здесь, по замыслу, будет раздел о рефлективных подкатегориях, но пока нет силы воли его написать. Выложу две теоремы, для которых выписал доказательства.

Теорема 16.75. *Пусть $F \dashv G$. Функтор G строгий если и только если коединица ε состоит из эпиморфизмов.*

Доказательство. Пусть функтор G строгий. Докажем, что все стрелки ε_X эпиморфны. Предположим, что коммутативна следующая диаграмма

$$F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_X} X \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} Y$$

Покажем, что $h_1 = h_2$. Применим к диаграмме преобразование Γ и получим коммутативную диаграмму

$$G(X) \xrightarrow{id_{G(X)}} G(X) \underset{G(h_2)}{\overset{G(h_1)}{\rightrightarrows}} G(Y)$$

Её коммутативность означает, что $G(h_1) \circ id = G(h_2) \circ id$, поэтому $G(h_1) = G(h_2)$ и наконец $h_1 = h_2$ в силу строгости G. Таким образом, на ε_X можно сокращать, эта стрелка является эпиморфизмом.

В обратную сторону, пусть все стрелки ε_X эпиморфны. Докажем, что функтор G строгий. Пусть $G(h_1) = G(h_2)$, где $h_1, h_2 \colon X \to Y$. Тогда коммутативна диаграмма

$$G(X) \xrightarrow{id_{G(X)}} G(X) \underset{G(h_2)}{\overset{G(h_1)}{\rightrightarrows}} G(Y)$$

Применим к ней преобразование Φ и получим

$$F(G(X)) \overset{\varepsilon_X}{\twoheadrightarrow} X \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} Y$$

Сокращаем на ε_X и получаем $h_1 = h_2$.
□

Теорема 16.76. *Пусть $F \dashv G$. Функтор G полный если и только если коединица ε состоит из обратимых слева стрелок (это более сильное свойство, чем мономорфность).*

Доказательство. Пусть для любой стрелки $\varepsilon_X \colon F(G(X)) \to X$ есть такая стрелка $\varepsilon'_X \colon X \to F(G(X))$, что

$$\varepsilon'_X \circ \varepsilon_X = id_{F(G(X))}$$

Покажем, что функтор G полный. Надо доказать, что каждая стрелка $g \colon G(X) \to G(Y)$ имеет вид $g = G(h)$ для некоторой $h \colon X \to Y$. Положим $h = \Phi(g) \circ \varepsilon'_X$

$$X \xrightarrow{\varepsilon'_X} F(G(X)) \xrightarrow{\Phi(g)} Y$$

Из свойств сопряжённости легко вывести $G(h) = \Gamma(h \circ \varepsilon_X)$
Действительно

$$\Gamma(h \circ \varepsilon_X) = G(h) \circ \Gamma(\varepsilon_X) = G(h) \circ id = G(h)$$

Поэтому

$$G(h) = \Gamma(h \circ \varepsilon_X) = \Gamma(\Phi(g) \circ \varepsilon'_X \circ \varepsilon_X) = \Gamma(\Phi(g)) = g$$

В обратную сторону, пусть функтор G полный. Покажем, что для каждой стрелки $\varepsilon_X \colon F(G(X)) \to X$ есть такая стрелка $\varepsilon'_X \colon X \to F(G(X))$, что

$$\varepsilon'_X \circ \varepsilon_X = id_{F(G(X))}$$

Рассмотрим стрелку $\eta_{G(X)} \colon G(X) \to G(F(G(X)))$ В силу полноты функтора G должна существовать стрелка $h \colon X \to F(G(X))$ такая, что $\eta_{G(X)} = G(h)$. Положим $\varepsilon'_X = h$, тогда

$$\eta_{G(X)} = G(\varepsilon'_X) = \Gamma(\varepsilon'_X \circ \varepsilon_X)$$

потому что $G(h) = \Gamma(h \circ \varepsilon_X)$ Применив Φ, получаем

$$id_{F(G(X))} = \varepsilon'_X \circ \varepsilon_X$$

□

Следствие 16.77. *Пусть $F \dashv G$. Функтор G строгий и полный если и только если коединица ε состоит из изоморфизмов.*

Замечание 16.78. Не уверен, что эти теоремы нам понадобятся, но это классика. Если придумаю хороший не алгебраический пример, потом здесь вставлю.

16.4 Эквивалентность категорий

Уважаемые люди мне говорили, что понятие эквивалентности категорий является фундаментальным и излагать его надо в начале книги. Но я придерживаюсь принципа „не вводить понятия задолго до того, как они становятся нужны“ и до сих пор понятие эквивалентности категорий не понадобилось ни разу! К тому же, материал технически трудный. Тем не менее, игнорировать его больше нельзя и в данном месте его удобно изложить. Идея в том, что изоморфизм категорий – не совсем то отношение эквивалентности категорий, которое реально нужно, оно слишком жёсткое и мы введём менее ограничительное отношение.

Пример 16.79. Пусть K_1 – категория предупорядоченных множеств и их монотонных отображений друг в друга, K_2 – категория малых категорий предпорядка и функторов между ними. Рассмотрим два функтора

$$G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$$
$$F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$$

которые определим так. Функтор G сопоставляет каждой малой категории предпорядка K множество её объектов $Ob(\mathsf{K})$, на котором задан предпорядок

$$A \lesssim B \Leftrightarrow \text{существует стрелка из } A \text{ в } B$$

Функтор F сопоставляет предупорядоченному множеству $(M, \lesssim)$ категорию, объектами которой являются элементы M, а стрелка между A и B берётся ровно одна, если $A \lesssim B$, для определённости можно считать такой стрелкой саму пару (A, B).
Функторы F и G не являются взаимно обратными и не устанавливают изоморфизм категорий K_1 и K_2. Проблема в том, что разные категории предпорядка могут порождать одно и то же предупорядоченное множество. Рассмотрим две категории

$$
\begin{tikzcd}
id_B \circlearrowleft B & & id_B \circlearrowleft B \\
id_A \circlearrowleft A \arrow[u, "f"] & & id_A \circlearrowleft A \arrow[u, "g"]
\end{tikzcd}
$$

они изоморфны между собой и отличаются только названием единственной стрелки из A в B. Им соответствует одно и то же предупорядоченное множество $\{A, B\}$, в котором $A \lesssim B$. Таким образом, функтор G переводит две разные (хотя изоморфные) категории предпорядка в одно и тоже предупорядоченное множество, поэтому он не может быть обратимым. Категория K_2 получается из K_1 некоторым „раздуванием“, каждый объект категории K_1 присутствует в K_2 во многих изоморфных копиях.

Пример 16.80. Пусть K_1 – категория полугрупп с единицей и их гомоморфизмов друг в друга, K_2 – категория малых категорий с одним объектом и функторов между ними. Рассмотрим два функтора

$$G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$$
$$F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$$

которые определим так. Функтор G сопоставляет каждой малой категории K с одним объектом полугруппу её морфизмов $Mor(\mathsf{K})$. Функтор F сопоставляет каждой полугруппе с единицей $(M, \circ, e)$ категорию с одним объектом (всё равно каким, для определённости обозначим его A), а стрелками из A в A будут элементы M с композицией $\circ$ и тождественной стрелкой $id_A = e$.
Функторы F и G не являются взаимно обратными и не устанавливают изоморфизм категорий K_1 и K_2. Проблема в том, что разные категории с одним объектом могут порождать одну и ту же полугруппу с единицей, если они отличаются только названием единственного объекта (такие категории, конечно, изоморфны между собой). Ситуация здесь такая же, как в предыдущем примере.

Пример 16.81. Пусть K_1 – категория множеств и частичных (не обязательно всюду определённых) функций между ними.
Пусть K_2 – категория множеств с отмеченной точкой. Её объекты – пары (A, a), где A – непустое множество, $a \in A$. Морфизмом (точнее, протоморфизмом) между (A, a) и (B, b) является любая функция $f\colon A \to B$, для которой $f(a) = b$. Таким образом, морфизмы – это функции, переводящие отмеченный элемент в отмеченный. Рассмотрим два функтора

$$F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$$

$G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$

F по множеству A выдаёт дизъюнктное объединение $A + \{*\}$, то есть к множеству A добавляется новый элемент $*$, который будет отмеченным и играет роль „неопределённого“ или “зацикленного“ элемента. По частичной функции $f\colon A \to B$ этот функтор выдаёт функцию $F(f)$, которая принимает значение $*$ там, где f не определена.

$$F(A) = A + \{*\}$$

$$F(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \text{ определена;} \\ *, & \text{если } f(x) \text{ не определена или } x = * \end{cases}$$

где $x \in A + \{*\}$.
G по множеству с отмеченной точкой (A, a) выдаёт $A - \{a\}$ (выбрасывает отмеченную точку). По морфизму f из (A, a) в (B, b) этот функтор выдаёт частичную функцию $G(f)$, которая не определена там, где f принимает значение b.

$$G(A, a) = A - \{a\}$$

$$G(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \neq b; \\ \text{не определено}, & \text{если } f(x) = b \end{cases}$$

где $x \in A - \{a\}$.
Функторы F и G не являются взаимно обратными и не устанавливают изоморфизм категорий K_1 и K_2. Множества $\{0, 1, 2, 5\}$ с отмеченной точкой 5 и $\{0, 1, 2, 6\}$ с отмеченной точкой 6 функтор G отображает в одно и то же множество $\{0, 1, 2\}$. Опять же, в категории множеств с отмеченной точкой эти объекты изоморфны.

Упражнение 16.82. Проверьте, что во всех трёх примерах выполнены естественные изоморфизмы

$$G \circ F \cong Id_{\mathsf{K}_1}$$

$$F \circ G \cong Id_{\mathsf{K}_2}$$

Определение 16.83. Будем говорить, что функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ *имеет представительный образ*, если для любого $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ существует $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ такой, что $F(A) \cong X$. Иными словами, всякий объект категории K_2 изоморфен объекту вида $F(A)$.

Определение 16.84. Функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ называется *функтором эквивалентности*, если он строгий, полный и имеет представительный образ. Категории K_1 и K_2 *эквивалентны*, если существует функтор эквивалентности $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$.

Упражнение 16.85. Проверьте, что во всех приведённых выше примерах функторы F и G являются функторами эквивалентности.

Упражнение 16.86. Любой тождественный функтор Id_{K} является функтором эквивалентности.
Любой функтор-изоморфизм является функтором эквивалентности (поэтому изоморфные категории эквивалентны).
Композиция функторов эквивалентности является функтором эквивалентности.

Замечание 16.87. Из этого следует, что отношение эквивалентности категорий рефлексивно и транзитивно, но симметричность придётся доказывать с использованием аксиомы выбора, что мы и сделаем чуть позже.

Пример 16.88. Пусть в категории K есть полная подкатегория K' такая, что каждый объект K изоморфен некоторому объекту K'. Тогда функтор вложения устанавливает эквивалентность K' и K.

Замечание 16.89. Малая категория может быть эквивалентна „большой“. Рассмотрим категорию всех одноэлементных множеств и функций между ними (между любыми двумя одноэлементными множествами функция ровно одна). Это большая категория, потому что одноэлементных множеств очень много (элемент может быть чем угодно). Но она эквивалентна категории с одним объектом и одной стрелкой

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "id_X"] \end{tikzcd}$$

Теорема 16.90. *Следующие утверждения равносильны:*
1) Существует функтор эквивалентности $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$*;*
2) Существуют функторы

$F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$

$$G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$$

такие, что

$$G \circ F \cong Id_{\mathsf{K}_1}$$

$$F \circ G \cong Id_{\mathsf{K}_2}$$

Доказательство.
Из (2) следует (1):
Пусть даны функторы

$$F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$$

$$G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$$

такие, что

$$G \circ F \cong Id_{\mathsf{K}_1}$$

$$F \circ G \cong Id_{\mathsf{K}_2}$$

Функтор F имеет представительный образ, поскольку

$$X \cong F(G(X)) \text{ для каждого } X \in Ob(\mathsf{K}_2)$$

Докажем строгость F. Естественный изоморфизм между $G \circ F$ и Id_{K_1} обозначим τ

$$\tau\colon G \circ F \to Id_{\mathsf{K}_1}$$

Для любой стрелки $g\colon A \to B$ коммутативен следующий квадрат (ввиду естественности τ)

$$\begin{tikzcd}
G(F(A)) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "G(F(g))"'] & A \arrow[d, "g"] \\
G(F(B)) \arrow[r, "\tau_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Поэтому $g = \tau_B \circ G(F(g)) \circ \tau_A^{-1}$. Таким образом, по стрелке $F(g)$ мы можем однозначно найти g, поэтому функтор F строгий.
Симметричным рассуждением, используя изоморфизм $F \circ G \cong Id_{\mathsf{K}_2}$, можно показать, что G строгий. Докажем, наконец, что F полон. Пусть дана стрелка вида $f\colon F(A) \to F(B)$. Надо найти стрелку
$g\colon A \to B$ такую, что $F(g) = f$. В силу строгости G достаточно найти

$g\colon A \to B$ со свойством $G(F(g)) = G(f)$.
Положим $g = \tau_B \circ G(f) \circ \tau_A^{-1}$

$$\begin{tikzcd} G(F(A)) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "G(f)"'] & A \arrow[d, "g"] \\ G(F(B)) \arrow[r, "\tau_B"] & B \end{tikzcd}$$

Сравнивая с коммутативным квадратом выше, получаем

$$G(F(g)) = G(f) \qquad \text{(обе стрелки равны } \tau_B^{-1} \circ g \circ \tau_A\text{)}$$

Из (1) следует (2):
Пусть дан функтор эквивалентности $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$.
Для каждого $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ существует $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ такой, что $F(A) \cong X$. Выберем для каждого X некоторый A с таким свойством, положим $G(X) = A$, а соответствующий изоморфизм обозначим ε_X

$$\varepsilon_X\colon F(G(X)) \to X$$

Определим действие G на стрелках. Для каждой стрелки $f\colon X \to Y$ есть ровно одна стрелка $g\colon G(X) \to G(Y)$, делающая коммутативной следующую диаграмму, положим $G(f) = g$

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[d, dotted, "g"'] & F(G(X)) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, dotted, "F(g)"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G(Y) & F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Действительно, $F(g)$ по f определяется однозначно

$$F(g) = \varepsilon_Y^{-1} \circ f \circ \varepsilon_X$$

затем используем строгость и полноту F, чтобы найти g.
Изоморфизм $Id_{\mathsf{K}_1} \cong F \circ G$ доказывается так. Для каждого $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ определим изоморфизм $\eta_A\colon A \to F(G(A))$ как единственную стрелку, делающую коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & F(A) \arrow[dl, "id_{F_A}"'] \arrow[d, dotted, "F(\eta_A)"] & A \arrow[d, dotted, "\eta_A"] \\
F(A) & F(G(F(A))) \arrow[l, "\varepsilon_{F(A)}"] & G(F(A))
\end{tikzcd}$$

Действительно, коммутативность треугольника означает, что

$$\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = id$$

поэтому $F(\eta_A)$ определено однозначно

$$F(\eta_A) = \varepsilon_{F(A)}^{-1}$$

и является изоморфизмом. В силу строгости и полноты F по $F(\eta_A)$ однозначно находится η_A и тоже является изоморфизмом (строгий полный функтор отражает изоморфизмы).
Желающие могут проверить, что получилась сопряжённость $F \dashv G$. Таким образом, к каждому функтору эквивалентности есть правый сопряжённый. Левый сопряжённый тоже есть, конструкция двойственная (надо взять $F^{op} \colon \mathsf{K}_1^{op} \to \mathsf{K}_2^{op}$, построить к нему правый сопряжённый и перевернуть), выписана явно в книге Маклейна.
$\square$

Определение 16.91. Будем называть категорию K' *скелетной*, если из $A \cong B$ следует $A = B$ для любых двух объектов $A, B \in Ob(\mathsf{K}')$.

Пример 16.92. Скелетные предпорядки – это частичные порядки.

Определение 16.93. *Скелет* категории K – это её полная скелетная подкатегория K' такая, что каждый объект K изоморфен некоторому объекту K'. Содержательно, объекты K распадаются на классы изоморфных между собой (по отношению $A \cong B$) и скелет – это полная подкатегория, содержащая по одному объекту из каждого класса. Из аксиомы выбора следует, что у всякой категории есть скелет. Скелетов у данной категории может быть много, но все они изоморфны между собой.

Пример 16.94. Скелетом категории одноэлементных множеств будет любая категория следующего вида

$$\begin{tikzcd} \{a\} \arrow[loop above, "id_{\{a\}}"] \end{tikzcd}$$

где $\{a\}$ – произвольное одноэлементное множество.

Упражнение 16.95.

1. Если скелетные категории эквивалентны, то они изоморфны;
2. Категория эквивалентна любому своему скелету;
3. Все скелеты данной категории изоморфны между собой;
4. Категории эквивалентны если и только если их скелеты изоморфны.

Замечание 16.96. В книге Freyd, Scedrov "Categories, Allegories" дано другое (равносильное) определение эквивалентности, которое имеет два преимущества:

1. Отражает суть дела;
2. Хорошо работает без аксиомы выбора.

К сожалению, часть терминологии Фрейда и Щедрова отличается от общепринятой. Определения строгого функтора (faithful functor) и вложения (embedding), которые они дают, не равносильны общепринятым. Я попытался перевести их определение эквивалентности на привычный язык и сейчас его изложу. ВЕСЬ ТЕКСТ ДО КОНЦА РАЗДЕЛА, ВОЗМОЖНО, ЯВЛЯЕТСЯ ГРАФОМАНИЕЙ АВТОРА, ФРЕЙД И ЩЕДРОВ ЗА НЕГО НЕ ОТВЕЧАЮТ.

Определение 16.97. Будем называть категорию K' *раздуванием* (inflation) категории K, если существует функтор $F\colon \mathsf{K}' \to \mathsf{K}$, строгий, полный и сюръективный на объектах (это значит, что отображение $F\colon Ob(\mathsf{K}') \to Ob(\mathsf{K})$ сюръективно).

Замечание 16.98. Содержательно, категория K' получена из категории K размножением некоторых объектов K во многих изоморфных копиях. Если для объектов $A, B \in Ob(\mathsf{K}')$ верно $F(A) = F(B)$, то

$A \cong B$, поскольку строгий полный функтор F отражает изоморфизмы. Категория K' определяется (с точностью до изоморфизма категорий) своим классом объектов $Ob(\mathsf{K}')$ и сюръективным отображением $F\colon Ob(\mathsf{K}') \to Ob(\mathsf{K})$. Действительно, стрелки $\mathsf{K}'(A, B)$ взаимно однозначно соответствуют стрелкам $\mathsf{K}(F(A), F(B))$ в силу строгости и полноты F.

Определение 16.99. Будем называть категории K_1 и K_2 *эквивалентными*, если у них есть общее раздувание.

Замечание 16.100. Из этого определения видно, что отношение эквивалентности рефлексивно и симметрично, но транзитивность не очевидна. Транзитивность доказывать не буду, чтобы у заинтересованных людей был стимул почитать книгу Фрейда и Щедрова.

Теорема 16.101. *Следующие утверждения равносильны:*
1) У категорий K_1 и K_2 есть общее раздувание;
2) Существует функтор эквивалентности $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$.

Доказательство.
Из (1) следует (2):
Пусть K' – общее раздувание K_1 и K_2

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{K}' \arrow[dl, "F_1"'] \arrow[dr, "F_2"] & \\ \mathsf{K}_1 & & \mathsf{K}_2 \end{tikzcd}$$

Построим сначала функтор эквивалентности $G\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}'$, он будет обладать свойством

$$F_1 \circ G = Id_{\mathsf{K}_1}$$

Для каждого $X \in Ob(\mathsf{K}_1)$ существует $A \in Ob(\mathsf{K}')$ такой, что $F_1(A) = X$ (поскольку F_1 сюръективен на объектах). Выберем для каждого X некоторый A с таким свойством и положим $G(X) = A$. Таким образом

$$F_1(G(X)) = X \text{ для каждого } X \in Ob(\mathsf{K}_1)$$

Определим действие G на стрелках. В силу строгости и полноты F_1 для каждой стрелки $f\colon X \to Y$, то есть $f\colon F_1(G(X)) \to F_1(G(Y))$ существует ровно одна стрелка $g\colon G(X) \to G(Y)$ со свойством $F_1(g) = f$. Положим $G(f) = g$. Таким образом

$$F_1(G(f)) = f \text{ для каждого } f \in Mor(\mathsf{K}_1)$$

Докажем, что G строгий и полный. Действительно, для каждой стрелки $g\colon G(X) \to G(Y)$ есть ровно одна стрелка $f\colon X \to Y$ со свойством $G(f) = g$, а именно $f = F_1(g)$. Потому что в силу строгости F_1 следующие равенства равносильны

$$G(f) = g$$
$$F_1(G(f)) = F_1(g)$$
$$f = F_1(g)$$

Докажем, что G имеет представительный образ. Действительно

$$F_1(G(F_1(A))) = F_1(A)$$

и строгий полный функтор F_1 отражает изоморфизмы, поэтому

$$G(F_1(A)) \cong A \text{ для каждого } A \in Ob(\mathsf{K}')$$

Мы построили функтор эквивалентности $G\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}'$. Функтор F_2 тоже является функтором эквивалентности и композиция функторов эквивалентности $F_2 \circ G\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$ является функтором эквивалентности.

Из (2) следует (1):
Пусть дан функтор эквивалентности $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$.
Рассмотрим следующую категорию K'. Объектами K' будут тройки вида (A, h, X), где $A \in Ob(\mathsf{K}_1), X \in Ob(\mathsf{K}_2)$, а стрелка $h\colon F(A) \to X$ является изоморфизмом. Морфизмами (точнее, протоморфизмами) между объектами (A_1, h_1, X_1) и (A_2, h_2, X_2) будут пары стрелок (g, f), где $g\colon A_1 \to A_2$, $f\colon X_1 \to X_2$ и следующий квадрат коммутативен

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "F(g)"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\
F(A_2) \arrow[r, "h_2"] & X_2
\end{tikzcd}$$

Заметим, что в любом морфизме (f, g) стрелки f и g однозначно определяют друг друга

$$f = h_2 \circ F(g) \circ h_1^{-1}$$
$$F(g) = h_2^{-1} \circ f \circ h_1$$

и по $F(g)$ однозначно находится g в силу полноты и строгости F.
Категория K' будет общим раздуванием K_1 и K_2

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{K}' \arrow[dl, "F_1"'] \arrow[dr, "F_2"] & \\ \mathsf{K}_1 & & \mathsf{K}_2 \end{tikzcd}$$

Функтор F_1 отображает объект (A, h, X) в A и стрелку (g, f) в g.
Функтор F_2 отображает объект (A, h, X) в X и стрелку (g, f) в f.
F_1 строгий и полный. Морфизмы $(g, f)\colon (A_1, h_1, X_1) \to (A_2, h_2, X_2)$ взаимно однозначно соответствуют морфизмам $g\colon A_1 \to A_2$, поскольку f однозначно находится по g.
F_2 строгий и полный. Морфизмы $(g, f)\colon (A_1, h_1, X_1) \to (A_2, h_2, X_2)$ взаимно однозначно соответствуют морфизмам $f\colon X_1 \to X_2$, поскольку g однозначно находится по f.
F_1 сюръективен на объектах, поскольку $A = F_1(A, id_{F(A)}, F(A))$.
F_2 сюръективен на объектах, поскольку каждый X изоморфен некоторому $F(A)$, обозначим соответствующий изоморфизм $h\colon F(A) \to X$ и получим $X = F_2(A, h, X)$.
$\square$

Глава 17

Лемма Йонеды

Определение 17.1. Пусть K – локально малая категория. Определим функтор $Hom_{\mathsf{K}} \colon \mathsf{K}^{op} \times \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ следующим образом

$$Hom_{\mathsf{K}}(A', A) = \mathsf{K}(A', A)$$

$$Hom_{\mathsf{K}}(f_1, f_2)(h) = f_2 \circ h \circ f_1$$

для любых $A', A \in Ob(\mathsf{K})$, $f_1 \in \mathsf{K}(B', A')$, $f_2 \in \mathsf{K}(A, B)$, $h \in \mathsf{K}(A', A)$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "h"] & A \arrow[d, "f_2"] \\ B' \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "f_2 \circ h \circ f_1"'] & B \end{tikzcd}$$

Заметим, что $Hom_{\mathsf{K}}(f_1, f_2) \colon \mathsf{K}(A', A) \to \mathsf{K}(B', B)$.

Таким образом, по паре объектов (A', A) функтор Hom_{K} выдаёт множество $\mathsf{K}(A', A)$ всех стрелок из A' в A. По паре стрелок вида

$$f_1 \colon B' \to A'$$

$$f_2 \colon A \to B$$

этот функтор выдаёт функцию из множества $\mathsf{K}(A', A)$ во множество $\mathsf{K}(B', B)$, которая любую стрелку $h \in \mathsf{K}(A', A)$ умножает слева на f_2 и справа на f_1, получается $f_2 \circ h \circ f_1$.

Фиксируя первый или второй аргумент у функтора Hom, можно получить важные функторы от одного аргумента, которые мы и будем изучать в этой главе.

Замечание 17.2. На практике обычно встречаются только локально малые категории. Тем не менее, нетрудно придумать пример категории, которая не будет локально малой. Возьмём совокупность всех множеств с операцией объединения $\cup$. Операция ассоциативна, поэтому получается „очень большая полугруппа с единицей“ (единицей будет $\emptyset$). Если рассматривать её как категорию с одним объектом, она не будет локально малой (объект один, а стрелки из него в него – это все множества, их очень много).

17.1 Контравариантная лемма Йонеды

Определение 17.3. Пусть K – локально малая категория. Для каждого $A \in Ob(\mathsf{K})$ определим следующий функтор $H_A \colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$

$$H_A(D) = \mathsf{K}(D, A)$$

$$H_A(f)(g) = g \circ f \quad \text{(умножение справа на } f)$$

где $D \in Ob(\mathsf{K})$, $f \in \mathsf{K}(C, D)$, $g \in H_A(D)$ (то есть $g \in \mathsf{K}(D, A)$).

$$\begin{tikzcd} D & \mathsf{K}(D,A) \arrow[d, "\circ f"', "= H_A(f)"] \\ C \arrow[u, "f"] & \mathsf{K}(C,A) \end{tikzcd}$$

Пример 17.4. Пусть K – категория частичного порядка, имеющая следующий вид (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Двойственная категория K^{op} имеет вид (тождественные стрелки не показаны)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Функтор вида $F \colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$ задаётся тройкой множеств и парой функций

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[dr, "F(f)"'] & & F(B) \arrow[dl, "F(g)"] \\ & F(C) & \end{tikzcd}$$

Функтор H_A имеет вид

$$\begin{tikzcd} \{id_A\} \arrow[dr, dotted] & & \emptyset \arrow[dl, dotted] \\ & \{f\} & \end{tikzcd}$$

где функции единственно возможные, потому что все множества на диаграмме пустые или одноэлементные.

Функтор H_B имеет вид

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[dr, dotted] & & \{id_B\} \arrow[dl, dotted] \\ & \{g\} & \end{tikzcd}$$

Функтор H_C имеет вид

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[dr, dotted] & & \emptyset \arrow[dl, dotted] \\ & \{id_C\} & \end{tikzcd}$$

Упражнение 17.5. Пусть K – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Функтор $H_A\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$

$$\begin{tikzcd} \{id_A\} & \emptyset \arrow[l, shift right, "H_A(f)"'] \arrow[l, shift left, "H_A(g)"] \end{tikzcd}$$

Функтор $H_B\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$

$$\begin{tikzcd} \{f, g\} & \{id_B\} \arrow[l, shift right, "H_B(f)"'] \arrow[l, shift left, "H_B(g)"] \end{tikzcd}$$

Определение 17.6. Функтор $F\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$ называется *представимым*, если для некоторого $A \in Ob(\mathsf{K})$ выполнен изоморфизм

$$F \cong H_A$$

В этом случае объект A называют *представляющим объектом функтора* F, а сам изоморфизм – *представлением функтора* F. Функторы H_A иногда называют *основными представимыми контравариантными функторами.*

Пример 17.7. Пусть K – некоторая категория. Пусть функтор $F\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$ сопоставляет каждому объекту K одноэлементное множество $\{*\}$. Если в K есть терминальный объект 1, то F представим и представляющим объектом будет 1, поскольку

$$F(D) = \{*\} \cong \mathsf{K}(D, 1) = H_1(D)$$

Естественность этого изоморфизма выражается диаграммой

$$\begin{tikzcd} D & F(D) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "F(f)"'] & H^0(D) \arrow[d, "H^0(f)"] \\ C \arrow[u, "f"] & F(C) \arrow[r, "\cong"] & H^0(C) \end{tikzcd}$$

которая становится понятнее, если нарисовать её так

$$\begin{tikzcd} D & \{*\} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "id_{\{*\}}"'] & \mathsf{K}(D, 1) \arrow[d, "\circ f"] \\ C \arrow[u, "f"] & \{*\} \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{K}(C, 1) \end{tikzcd}$$

Умножение справа на f переводит единственный элемент $\mathsf{K}(D,1)$ в единственный элемент $\mathsf{K}(C,1)$.

$$!_D \circ f = !_C$$

Проверять естественность обратного изоморфизма не надо, она выполнена автоматически в силу Упражнения 6.10.

Пример 17.8. Пусть K – локально малая категория, в которой есть произведение некоторой пары объектов A и B. Верны следующие изоморфизмы

$$\mathsf{K}(D, A\times B) \cong \mathsf{K}(D,A)\times \mathsf{K}(D,B) \quad \text{для любого } D\in Ob(\mathsf{K})$$

(это изоморфизмы в Set). Каждой стрелке $h\colon D\to A\times B$ соответствует пара стрелок $pr_1\circ h\colon D\to A$ и $pr_2\circ h\colon D\to B$, а каждой паре стрелок $g_1\colon D\to A$ и $g_2\colon D\to B$ соответствует стрелка $\langle g_1,g_2\rangle\colon D\to A\times B$.

Упражнение 17.9. Пусть K – локально малая категория, $A,B\in Ob(\mathsf{K})$. Если существует произведение A и B, то представим функтор $H_A\times H_B\colon \mathsf{K}^{op}\to\mathsf{Set}$. Представляющим объектом будет $A\times B$.

$$\begin{aligned}&(H_A\times H_B)(D) = H_A(D)\times H_B(D) = \mathsf{K}(D,A)\times\mathsf{K}(D,B)\cong\\ &\cong \mathsf{K}(D,A\times B) = H_{A\times B}(D)\end{aligned}$$

где изоморфизм описан в предыдущем примере. Естественность этого изоморфизма выражается следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
D & H_{A\times B}(D) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "H_{A\times B}(f)"] & H_A(D)\times H_B(D) \arrow[d, "H_A(f)\times H_B(f)"] \\
C \arrow[u, "f"] & H_{A\times B}(C) \arrow[r, "\cong"] & H_A(C)\times H_B(C)
\end{tikzcd}$$

которая, возможно, станет понятнее, если нарисовать её так

$$\begin{tikzcd}
D & \mathsf{K}(D,A\times B) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\circ f"] & \mathsf{K}(D,A)\times\mathsf{K}(D,B) \arrow[d, "(\circ f)\times(\circ f)"] \\
C \arrow[u, "f"] & \mathsf{K}(C,A\times B) \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{K}(C,A)\times\mathsf{K}(C,B)
\end{tikzcd}$$

Далее мы будем интересоваться естественными преобразованиями вида $\tau\colon H_A \to F$. Оказывается, каждое такое преобразование однозначно определяется своей компонентой $\tau_A\colon H_A(A) \to F(A)$ и, более того, даже единственным элементом $\tau_A(id_A) \in F(A)$.

Пример 17.10. Возьмём в качестве K следующую категорию частичного порядка (по несущественным причинам A сверху, B снизу)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "id_A"] \\ B \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_B"] \end{tikzcd}$$

Естественные преобразования $\tau\colon H_A \to F$ выглядят так

$$\begin{tikzcd} A & \{id_A\} \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, dotted] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ B \arrow[u, "f"] & \{f\} \arrow[r, "\tau_B"] & F(B) \end{tikzcd}$$

Стрелка τ_A – функция из одноэлементного множества $\{id_A\}$ в $F(A)$, она однозначно определяется элементом $\tau_A(id_A) \in F(A)$.
Стрелка τ_B однозначно определяется элементом $\tau_B(f) = F(f)(\tau_A(id_A))$, то есть опять же элементом $\tau_A(id_A)$.

Соглашение 17.11. Совокупность всех естественных преобразований функтора F в функтор G будем обозначать $Nat(F, G)$.

Теорема 17.12. *(Контравариантная лемма Йонеды). Пусть* K *– локально малая категория,* $A \in Ob(\mathsf{K})$, $F\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$. *Существует взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями из* H_A *в* F *и элементами множества* $F(A)$. *Точнее, есть изоморфизм в* Set

$$Nat(H_A, F) \cong F(A)$$

Доказательство.
Каждому естественному преобразованию $\tau\colon H_A \to F$ поставим в соответствие элемент $\tau_A(id_A) \in F(A)$.
Каждому элементу $a \in F(A)$ поставим в соответствие естественное преобразование $\check{a}\colon H_A \to F$, определённое так

$$\check{a}_B(f) = F(f)(a)$$

где $f \in H_A(B)$, то есть $f \in \mathsf{K}(B, A)$.
Докажем взаимную обратность этих отображений. Пусть дано естественное преобразование $\tau \colon H_A \to F$. Из его естественности следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H_A(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "H_A(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] & A \\
H_A(B) \arrow[r, "\tau_B"] & F(B) & B \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

то есть

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(A, A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "H_A(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] & A \\
\mathsf{K}(B, A) \arrow[r, "\tau_B"] & F(B) & B \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$ и любой стрелки $f \colon B \to A$. Это значит, что

$$\tau_B \circ H_A(f) = F(f) \circ \tau_A$$

поэтому для любой стрелки $g \in \mathsf{K}(A, A)$ будет верно

$$\tau_B(H_A(f)(g)) = F(f)(\tau_A(g))$$

$$\tau_B(g \circ f) = F(f)(\tau_A(g))$$

Взяв в качестве g стрелку id_A, получаем

$$\tau_B(f) = F(f)(\tau_A(id_A)) = \check{a}_B(f) \ \text{ для } a = \tau_A(id_A)$$

поэтому

$$\tau = \check{a} \ \text{ для } a = \tau_A(id_A)$$

В обратную сторону, пусть $a \in F(A)$. Тогда

$$\check{a}_A(id_A) = F(id_A)(a) = id_{F(A)}(a) = a$$

Надо ещё доказать, что $\check{a}$ является естественным преобразованием для любого $a \in F(A)$, то есть коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_A(D) \arrow[r, "\check{a}_D"] \arrow[d, "H_A(f)"'] & F(D) \arrow[d, "F(f)"] & D \\ H_A(C) \arrow[r, "\check{a}_C"] & F(C) & C \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

или лучше так

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}(D,A) \arrow[r, "\check{a}_D"] \arrow[d, "H_A(f)"'] & F(D) \arrow[d, "F(f)"] & D \\ \mathsf{K}(C,A) \arrow[r, "\check{a}_C"] & F(C) & C \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

для любых $C, D \in Ob(\mathsf{K})$ и любой стрелки $f\colon C \to D$. Её коммутативность означает, что

$$\check{a}_C \circ H_A(f) = F(f) \circ \check{a}_D$$

Это значит, для каждой стрелки $g \in \mathsf{K}(D, A)$ должно быть верно

$$\check{a}_C(H_A(f)(g)) = F(f)(\check{a}_D(g))$$

то есть

$$\check{a}_C(g \circ f) = F(f)(\check{a}_D(g))$$

И это действительно так, потому что

$$\check{a}_C(g \circ f) = F(g \circ f)(a) = (F(f) \circ F(g))(a) = F(f)(F(g)(a)) = \\ = F(f)(\check{a}_D(g))$$

□

Определение 17.13. Пусть K – локально малая категория, $A, B \in Ob(\mathsf{K})$. Каждой стрелке $f\colon A \to B$ сопоставим естественное преобразование $H_f\colon H_A \to H_B$ с компонентами $H_f(D)\colon H_A(D) \to H_B(D)$

$$H_f(D)(g) = f \circ g \quad \text{(умножение слева на } f\text{)}$$

где $g \in H_A(D)$, то есть $g \in \mathsf{K}(D, A)$.
Естественность H_f выражается следующей диаграммой

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$\begin{tikzcd}
H_A(D) \arrow[r, "H_f(D)"] \arrow[d, "H_A(h)"'] & H_B(D) \arrow[d, "H_B(h)"] & D \\
H_A(C) \arrow[r, "H_f(C)"] & H_B(C) & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

которая, возможно, станет понятнее, если перерисовать её так

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(D, A) \arrow[r, "f\circ"] \arrow[d, "\circ h"'] & \mathsf{K}(D, B) \arrow[d, "\circ h"] & D \\
\mathsf{K}(C, A) \arrow[r, "f\circ"] & \mathsf{K}(C, B) & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

и выражает она ассоциативность композиции „для любого $g \in \mathsf{K}(D, A)$ верно $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$“.

Теорема 17.14. *$H_A \cong H_B$ если и только если $A \cong B$ (первый изоморфизм – естественный изоморфизм функторов, второй в K)*

Доказательство. По лемме Йонеды, есть взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями вида $\tau\colon H_A \to H_B$ и элементами $H_B(A)$, то есть стрелками $f \in \mathsf{K}(A, B)$.

$$Nat(H_A, H_B) \cong H_B(A) = \mathsf{K}(A, B)$$

А именно, стрелке $f \in \mathsf{K}(A, B)$ соответствует естественное преобразование $H_f\colon H_A \to H_B$ (умножение слева на f). Легко проверить, что при этом соответствии композиции стрелок $f_1 \circ f_2$ соответствует композиция естественных преобразований $H_{f_1} \circ H_{f_2}$ (в том же порядке), а

тождественным стрелкам – тождественные преобразования. Из этого следует, что изоморфизмам соответствуют изоморфизмы.
□

Пример 17.15. С помощью теоремы 17.14 можно доказывать некоторые изоморфизмы в локально малых категориях. Например, пусть K – локально малая декартово замкнутая категория. Покажем, что

$$A^1 \cong A$$

Достаточно показать, что

$$H_{A^1} \cong H_A$$

И действительно,

$$H_{A^1}(D) = \mathsf{K}(D, A^1) \cong \mathsf{K}(D \times 1, A) \cong \mathsf{K}(D, A) = H_A(D)$$

Конечно, надо ещё проверить естественность выписанных изоморфизмов, но мы не будем (хотя надо).

Пример 17.16. Пусть K – локально малая декартово замкнутая категория. Покажем, что

$$A^{B \times C} \cong (A^C)^B$$

Достаточно показать, что

$$H_{A^{B\times C}} \cong H_{(A^C)^B}$$

И действительно,

$$\mathsf{K}(D, A^{B\times C}) \cong \mathsf{K}(D \times (B \times C), A) \cong \mathsf{K}((D \times B) \times C, A) \cong$$
$$\cong \mathsf{K}(D \times B, A^C) \cong \mathsf{K}(D, (A^C)^B)$$

Упражнение 17.17. В локально малой категории существует произведение объектов A и B если и только если функтор $H_A \times H_B$ представим. Иными словами, объект C вместе с подходящей парой проекций является произведением A и B если и только если существует изоморфизм

$$\mathsf{K}(D, C) \cong \mathsf{K}(D, A) \times \mathsf{K}(D, B)$$

естественный по D. Чтобы получить пару проекций, надо подставить C вместо D

$$\mathsf{K}(C, C) \cong \mathsf{K}(C, A) \times \mathsf{K}(C, B)$$

и в левой части взять id_C, справа получится пара проекций.

Упражнение 17.18. Пусть даны категория K и функтор
$F\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$. Есть взаимно однозначное соответствие между представлениями функтора F (то есть, естественными изоморфизмами вида $\tau\colon H_A \to F$) и парами $A \in Ob(\mathsf{K}), a \in F(A)$, обладающими следующим свойством универсальности: для любой пары $B \in Ob(\mathsf{K}), b \in F(B)$ есть ровно одна стрелка $f\colon B \to A$ такая, что $F(f)(a) = b$.
Для функтора $H_A \times H_B$ пара, задающая представление, состоит из объекта $A \times B$ и элемента (пары проекций)
$(pr_1, pr_2) \in (H_A \times H_B)(A \times B) = \mathsf{K}(A \times B, A) \times \mathsf{K}(A \times B, B)$

Упражнение 17.19. Пусть K – локально малая категория с произведениями пар объектов. У объектов $A, B \in Ob(\mathsf{K})$ существует экспонента B^A если и только если представим функтор $\mathsf{K}(- \times A, B)$. Иными словами, объект C вместе с подходящей стрелкой ev является экспонентой B^A если и только если существует изоморфизм

$$\mathsf{K}(D, C) \cong \mathsf{K}(D \times A, B)$$

естественный по D. Чтобы получить ev, надо подставить C вместо D

$$\mathsf{K}(C, C) \cong \mathsf{K}(C \times A, B)$$

и в левой части взять id_C, справа получится ev. Следующие два упражнения обобщают этот пример.

Упражнение 17.20. Пусть даны две локально малые категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

причём $F \dashv G$. Для заданного $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$ определим функтор
$H_X \circ F\colon \mathsf{K}_1^{op} \to \mathsf{Set}$ следующими равенствами

$$(H_X \circ F)(D) = H_X(F(D)) = \mathsf{K}_2(F(D), X)$$

$$(H_X \circ F)(h)(f) = f \circ F(h)$$

где $f \in \mathsf{K}_2(F(D), X)$, а $h \in \mathsf{K}_1(C, D)$ (чуть ниже есть картинка).
Функтор $H_X \circ F$ представим, представляющим объектом будет $G(X)$, поскольку

$$(H_X \circ F)(D) = \mathsf{K}_2(F(D), X) \cong \mathsf{K}_1(D, G(X)) = H_{G(X)}(D)$$

Естественность этого изоморфизма следует из свойств естественности Φ и Γ в определении сопряжённости. Проверьте это, посмотрев на диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{K}_2(F(D), X) & \xrightarrow{\Gamma_{D,X}} & \mathsf{K}_1(D, G(X)) & \qquad & D \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \circ F(h)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \circ h} & & \Big\uparrow{\scriptstyle h} \\
\mathsf{K}_2(F(C), X) & \xrightarrow{\Gamma_{C,X}} & \mathsf{K}_2(C, G(X)) & & C
\end{array}$$

и соответствующее ей равенство

$$\Gamma_{C,X}(f \circ F(h)) = \Gamma_{D,X}(f) \circ h$$

Чтобы понять связь с предыдущим упражнением, возьмите в качестве F и G функторы $(-) \times A$ и $(-)^A$.

Упражнение 17.21. Пусть даны локально малые категории K_1 и K_2, а также функтор $F\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}_2$. Функтор F имеет правый сопряжённый если и только если функторы вида $H_X \circ F\colon \mathsf{K}_1^{op} \to \mathsf{Set}$ представимы для всех $X \in Ob(\mathsf{K}_2)$.

Остаток раздела посвящён следующему результату: любую малую категорию K можно вложить в топос (а именно, в топос $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}^{op}}$) в качестве полной подкатегории, при этом вложении сохраняются терминальные объекты, произведения, экспоненты и мономорфизмы.

Определение 17.22. Пусть K – малая категория. *Вложением Йонеды* или *функтором Йонеды* называется функтор $Y_{\mathsf{K}}\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{K}^{op}}$, действующий так

$$Y_{\mathsf{K}}(A) = H_A$$

$$Y_{\mathsf{K}}(f) = H_f$$

для любых $A \in Ob(\mathsf{K})$, $f \in Mor(\mathsf{K})$.
Мы будем писать просто Y, без индекса, если категория K ясна из контекста.

Упражнение 17.23. Докажите, что функтор Йонеды является полным вложением.

Пример 17.24. Пусть K – категория частичного порядка, имеющая следующий вид (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Функторы $H_A, H_C, H_B \colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$ имеют вид (H_C в середине)

$$\begin{tikzcd}
\{id_A\} \arrow[dr, dotted] & & \emptyset \arrow[dl, dotted] \\
& \{f\} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[dr, dotted] & & \emptyset \arrow[dl, dotted] \\
& \{id_C\} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[dr, dotted] & & \{id_B\} \arrow[dl, dotted] \\
& \{g\} &
\end{tikzcd}$$

и легко проверить, что есть единственное естественное преобразование из H_C в H_A, а также единственное естественное преобразование из H_C в H_B, поэтому получаем полную подкатегорию $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}^{op}}$, изоморфную K

$$\begin{tikzcd}
H_A & & H_B \\
& H_C \arrow[ul, "H_f"] \arrow[ur, "H_g"'] &
\end{tikzcd}$$

(тождественные стрелки не показаны).

Теорема 17.25. *Функтор Йонеды сохраняет терминальные объекты.*

Доказательство.

$$Y(1) = H_1$$

$$H_1(D) = \mathsf{K}(D, 1) \cong \{*\} \quad \text{для любого } D \in Ob(\mathsf{K}) = Ob(\mathsf{K}^{op})$$

Мы видим, что $Y(1)$ является терминальным объектом в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}^{op}}$
$\square$

Теорема 17.26. *Функтор Йонеды сохраняет произведения пар объектов.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$Y(A \times B) \cong Y(A) \times Y(B)$$

Действительно

$$Y(A \times B) = H_{A\times B}$$

$$Y(A) = H_A$$

$$Y(B) = H_B$$

Функтор $H_{A\times B}$ естественно изоморфен функтору $H_A \times H_B$ (Упражнение 17.9).
□

Теорема 17.27. *Функтор Йонеды сохраняет произведения любых множеств объектов, как конечных, так и бесконечных.*

Упражнение 17.28. Докажите.

Сохранение экспонент и мономорфизмов функтором Йонеды желающим предлагаю доказать самостоятельно, но только после прочтения следующего раздела, где описано, как устроены мономорфизмы и экспоненты в категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ (попробовать, конечно, можно и сейчас).

17.2 Ковариантная лемма Йонеды

Определение 17.29. Пусть K – локально малая категория. Для каждого $A \in Ob(\mathsf{K})$ определим следующий функтор $H^A\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$

$$H^A(D) = \mathsf{K}(A, D)$$

$$H^A(f)(g) = f \circ g \quad \text{(умножение слева на } f\text{)}$$

где $D \in Ob(\mathsf{K})$, $f \in \mathsf{K}(C, D)$, $g \in H^A(C)$ (то есть $g \in \mathsf{K}(A, C)$).

$$\begin{tikzcd} D & \mathsf{K}(A,D) \\ C \arrow[u, "f"] & \mathsf{K}(A,C) \arrow[u, "f\circ"', "= H^A(f)"] \end{tikzcd}$$

Упражнение 17.30. Пусть K – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Функтор $H^A\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$

$$\begin{tikzcd} \{id_A\} \arrow[r, shift left, "H^A(f)"] \arrow[r, shift right, "H^A(g)"'] & \{f, g\} \end{tikzcd}$$

Функтор $H^B\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$

$$\emptyset \xrightarrow[H^B(g)]{H^B(f)} \{id_B\}$$

Пример 17.31. Пусть K – малая категория с единственным объектом A. Она задаёт полугруппу с единицей $M = Mor(\mathsf{K}) = \mathsf{K}(A, A)$. Тогда функтор H^A есть множество M, на котором действует полугруппа M левым умножением (то есть, элемент $x \in M$ под действием $f \in M$ переходит в $f \circ x \in M$).

Определение 17.32. Пусть K – локально малая категория. Функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ называется *представимым*, если для некоторого $A \in Ob(\mathsf{K})$ выполнен изоморфизм

$$F \cong H^A$$

В этом случае объект A называют *представляющим объектом функтора* F, а сам изоморфизм – *представлением функтора* F. Функторы H^A иногда называют *основными представимыми ковариантными функторами.*

Замечание 17.33. Это определение представимости эквивалентно старому. Если функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ представим в новом смысле, то он же представим в старом смысле, если рассматривать его как функтор $F\colon (\mathsf{K}^{op})^{op} \to \mathsf{Set}$, причём представляющий объект тот же самый (H^A в категории K становится H_A в K^{op}).

Пример 17.34. Пусть K – некоторая категория. Пусть функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ сопоставляет каждому объекту K одноэлементное множество $\{*\}$. Если в K есть начальный объект 0, то F представим и представляющим объектом будет 0, поскольку

$$F(D) = \{*\} \cong \mathsf{K}(0, D) = H^0(D)$$

Естественность этого изоморфизма выражается диаграммой

$$\begin{tikzcd} D & F(D) \arrow[r, "\cong"] & H^0(D) \\ C \arrow[u, "f"] & F(C) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\cong"] & H^0(C) \arrow[u, "H^0(f)"'] \end{tikzcd}$$

которая становится понятнее, если нарисовать её так

$$\begin{tikzcd} D & \{*\} \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{K}(0, D) \\ C \arrow[u, "f"] & \{*\} \arrow[u, "id_{\{*\}}"] \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{K}(0, C) \arrow[u, "f\circ"'] \end{tikzcd}$$

Умножение слева на f переводит единственный элемент $\mathsf{K}(0, C)$ в единственный элемент $\mathsf{K}(0, D)$.

$$f \circ \Box_C = \Box_D$$

Проверять естественность обратного изоморфизма не надо в силу Упражнения 6.10.

Пример 17.35. Пусть K – локально малая категория, в которой есть копроизведение некоторой пары объектов A и B. Тогда

$$\mathsf{K}(A+B,D) \cong \mathsf{K}(A,D) \times \mathsf{K}(B,D) \quad \text{для любого } D \in Ob(\mathsf{K}).$$

(это изоморфизмы в Set). Каждой стрелке $h\colon A+B \to D$ соответствует пара стрелок $h \circ k_1\colon A \to D$ и $h \circ k_2\colon B \to D$, а каждой паре стрелок $g_1\colon A \to D$ и $g_2\colon B \to D$ соответствует стрелка $[g_1, g_2]\colon A+B \to D$.

Упражнение 17.36. Пусть K – локально малая категория, $A, B \in Ob(\mathsf{K})$. Если существует копроизведение A и B, то представим функтор $H^A \times H^B\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Представляющим объектом будет $A+B$.

$$(H^A \times H^B)(D) = H^A(D) \times H^B(D) = \mathsf{K}(A,D) \times \mathsf{K}(B,D) \cong \\ \cong \mathsf{K}(A+B,D) = H^{A+B}(D)$$

где изоморфизм описан в предыдущем примере. Естественность этого изоморфизма выражается следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
D & H^{A+B}(D) \arrow[r, "\cong"] & H^A(D) \times H^B(D) \\
C \arrow[u, "f"] & H^{A+B}(C) \arrow[u, "H^{A+B}(f)"] \arrow[r, "\cong"] & H^A(C) \times H^B(C) \arrow[u, "H^A(f) \times H^B(f)"']
\end{tikzcd}$$

которая, возможно, станет понятнее, если перерисовать её так

$$\begin{tikzcd}
D & \mathsf{K}(A+B,D) \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{K}(A,D) \times \mathsf{K}(B,D) \\
C \arrow[u, "f"] & \mathsf{K}(A+B,C) \arrow[u, "f\circ"] \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{K}(A,C) \times \mathsf{K}(B,C) \arrow[u, "(f\circ) \times (f\circ)"']
\end{tikzcd}$$

Далее мы будем интересоваться естественными преобразованиями вида $\tau\colon H^A \to F$. Оказывается, каждое такое преобразование однозначно определяется своей компонентой $\tau_A\colon H^A(A) \to F(A)$ и, более того, даже единственным элементом $\tau_A(id_A) \in F(A)$.

Пример 17.37. Возьмём в качестве K категорию частичного порядка

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[loop left, "id_B"] \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"]
\end{tikzcd}
$$

Естественные преобразования $\tau\colon H^B \to F$ выглядят так

$$
\begin{tikzcd}
B & \{id_B\} \arrow[r, "\tau_B"] & F(B) \\
A \arrow[u, "f"] & \emptyset \arrow[u, dotted] \arrow[r, dotted] & F(A) \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
$$

каждое такое преобразование задаётся единственной функцией τ_B из одноэлементного множества $\{id_B\}$ в $F(B)$, а она определяется элементом $\tau_B(id_B) \in F(B)$.
Естественные преобразования $\tau\colon H^A \to F$ выглядят так

$$
\begin{tikzcd}
B & \{f\} \arrow[r, "\tau_B"] & F(B) \\
A \arrow[u, "f"] & \{id_A\} \arrow[u, dotted] \arrow[r, "\tau_A"] & F(A) \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
$$

Стрелка τ_A однозначно определяется элементом $\tau_A(id_A) \in F(A)$.
Стрелка τ_B однозначно определяется элементом $\tau_B(f) = F(f)(\tau_A(id_A))$, то есть опять же элементом $\tau_A(id_A)$.

Теорема 17.38. *(Ковариантная лемма Йонеды). Пусть* K *– локально малая категория,* $A \in Ob(\mathsf{K})$, $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$*. Существует взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями из* H^A *в* F *и элементами множества* $F(A)$*. Точнее, есть изоморфизм в* Set

$$Nat(H^A, F) \cong F(A)$$

Доказательство. Применяем принцип двойственности к доказательству контравариантной леммы Йонеды.
□

Определение 17.39. Пусть K – локально малая категория, $A, B \in Ob(\mathsf{K})$. Каждой стрелке $f\colon A \to B$ сопоставим естественное преобразование $H^f\colon H^B \to H^A$ с компонентами $H^f(D)\colon H^B(D) \to H^A(D)$

$$H^f(D)(g) = g \circ f \quad \text{(умножение справа на } f\text{)}$$

где $g \in H^B(D)$. Естественность H^f выражается следующей диаграммой

$$B \xleftarrow{\quad f \quad} A$$

$$\begin{tikzcd}
H^B(D) \arrow[r, "H^f(D)"] & H^A(D) & D \\
H^B(C) \arrow[u, "H^B(h)"] \arrow[r, "H^f(C)"] & H^A(C) \arrow[u, "H^A(h)"'] & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

которая, возможно, станет понятнее, если перерисовать её так

$$B \xleftarrow{\quad f \quad} A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(B,D) \arrow[r, "\circ f"] & \mathsf{K}(A,D) & D \\
\mathsf{K}(B,C) \arrow[u, "h\circ"] \arrow[r, "\circ f"] & \mathsf{K}(A,C) \arrow[u, "h\circ"'] & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

и выражает она ассоциативность композиции „для любого $g \in \mathsf{K}(B, C)$ верно $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$“.

Теорема 17.40. *$H^A \cong H^B$ если и только если $A \cong B$ (первый изоморфизм – естественный изоморфизм функторов, второй в K)*

Доказательство. По лемме Йонеды, есть взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями вида $\tau\colon H^B \to H^A$ и элементами $H^A(B)$, то есть стрелками $f \in \mathsf{K}(A, B)$.

$$Nat(H^B, H^A) \cong H^A(B) = \mathsf{K}(A, B)$$

А именно, стрелке $f \in \mathsf{K}(A, B)$ соответствует естественное преобразование $H^f \colon H^B \to H^A$ (умножение справа на f). Легко проверить, что при этом соответствии композиции стрелок $f_1 \circ f_2$ соответствует композиция естественных преобразований $H^{f_2} \circ H^{f_1}$ (в обратном порядке), а тождественным стрелкам – тождественные преобразования. Из этого следует, что изоморфизмам соответствуют изоморфизмы.
□

Пример 17.41. С помощью теоремы 17.40 можно доказывать некоторые изоморфизмы в локально малых категориях. Например, пусть K – локально малая декартово замкнутая категория с начальным объектом. Докажем, что

$$A \times 0 \cong 0$$

Достаточно доказать, что

$$H^{A\times 0} \cong H^0$$

И действительно,

$$H^{A\times 0}(D) = \mathsf{K}(A \times 0, D) \cong \mathsf{K}(0 \times A, D) \cong \mathsf{K}(0, D^A) \cong 1 \cong \mathsf{K}(0, D) = \\ = H^0(D)$$

Здесь 1 – терминальный объект в Set. Конечно, надо ещё проверить естественность выписанных изоморфизмов, но мы не будем (хотя надо).

Пример 17.42. Пусть K – локально малая декартово замкнутая категория с копроизведениями. Проверим, что

$$(A + B) \times C \cong A \times C + B \times C$$

Достаточно показать, что

$$H^{(A+B)\times C} \cong H^{A\times C+B\times C}$$

И действительно,

$$\mathsf{K}((A + B) \times C, D) \cong \mathsf{K}(A + B, D^C) \cong \mathsf{K}(A, D^C) \times \mathsf{K}(B, D^C) \cong \\ \cong \mathsf{K}(A \times C, D) \times \mathsf{K}(B \times C, D) \cong \mathsf{K}(A \times C + B \times C, D)$$

Упражнение 17.43. В локально малой категории существует копроизведение объектов A и B если и только если функтор $H^A \times H^B$ представим. Иными словами, объект C вместе с подходящей парой копроекций является копроизведением A и B если и только если существует изоморфизм

$$\mathsf{K}(C, D) \cong \mathsf{K}(A, D) \times \mathsf{K}(B, D)$$

естественный по D. Чтобы получить пару копроекций, надо подставить C вместо D

$$\mathsf{K}(C,C) \cong \mathsf{K}(A,C) \times \mathsf{K}(B,C)$$

и в левой части взять id_C, справа получится пара копроекций.

Упражнение 17.44. Пусть даны категория K и функтор $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Есть взаимно однозначное соответствие между представлениями функтора F (то есть, естественными изоморфизмами вида $\tau\colon H^A \to F$) и парами $A \in Ob(\mathsf{K}), a \in F(A)$, обладающими следующим свойством универсальности: для любой пары $B \in Ob(\mathsf{K}), b \in F(B)$ есть ровно одна стрелка $f\colon A \to B$ такая, что $F(f)(a) = b$.
Для функтора $H^A \times H^B$ пара, задающая представление, состоит из объекта $A+B$ и элемента (пары копроекций)
$(k_1, k_2) \in (H^A \times H^B)(A+B) = \mathsf{K}(A, A+B) \times \mathsf{K}(B, A+B)$

Замечание 17.45. Теоретико-категорные определения произведений и копроизведений совершенно симметричны (двойственны) друг другу. Если давать определения на языке представимых функторов, симметрия пропадает

$$\mathsf{K}(D, A \times B) \cong \mathsf{K}(D,A) \times \mathsf{K}(D,B)$$
$$\mathsf{K}(A+B, D) \cong \mathsf{K}(A,D) \times \mathsf{K}(B,D)$$

Можно восстановить её, если переписать второй изоморфизм как изоморфизм не в Set, а в Set^{op}

$$\mathsf{K}(A+B, D) \cong \mathsf{K}(A,D) + \mathsf{K}(B,D)$$

(в правой части копроизведение в Set^{op}, оно же произведение в Set). Но такая запись нам неудобна, поскольку Set для нас гораздо важнее, чем Set^{op}. Категория Set резко асимметрична и на Set^{op} похожа очень мало.

Упражнение 17.46. Пусть даны две локально малые категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

причём $F \dashv G$. Для заданного $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$ определим функтор
$H^A \circ G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{Set}$ следующими равенствами

$$(H^A \circ G)(X) = H^A(G(X)) = \mathsf{K}_1(A, G(X))$$
$$(H^A \circ G)(h)(g) = G(h) \circ g$$

где $g \in \mathsf{K}_1(A, G(X))$, а $h\colon X \to Y$ (чуть ниже есть картинка).
Функтор $H^A \circ G$ представим, представляющим объектом будет $F(A)$, поскольку

$$(H^A \circ G)(X) = \mathsf{K}_1(A, G(X)) \cong \mathsf{K}_2(F(A), X) = H^{F(A)}(X)$$

Естественность этого изоморфизма следует из свойств естественности Φ и Γ в определении сопряжённости. Проверьте это, посмотрев на диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}_1(A, G(Y)) \arrow[r, "\Phi_{A,Y}"] & \mathsf{K}_2(F(A), Y) & Y \\
\mathsf{K}_1(A, G(X)) \arrow[r, "\Phi_{A,X}"] \arrow[u, "G(h)\circ"'] & \mathsf{K}_2(F(A), X) \arrow[u, "h\circ"'] & X \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

и соответствующее ей равенство

$$\Phi_{A,Y}(G(h) \circ g) = h \circ \Phi_{A,X}(g)$$

Упражнение 17.47. Пусть даны локально малые категории K_1 и K_2, а также функтор $G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{K}_1$. Функтор G имеет левый сопряжённый если и только если функторы вида $H^A \circ G\colon \mathsf{K}_2 \to \mathsf{Set}$ представимы для всех $A \in Ob(\mathsf{K}_1)$.

Дальше мы опишем, как устроены мономорфизмы в категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$.

Пример 17.48. В категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K малая, терминальный объект обычно не является разделяющим. Например, для K из примера 17.37 естественных преобразований $\tau\colon H^B \to F$ в общем случае много, но в H^B вообще нет точек, чтобы их различать! Стрелка $\rho\colon 1 \to H^B$ задаётся парой (a, b), где $a \in H^B(A), b \in H^B(B)$. Таких пар нет, поскольку $H^B(A)$ пусто. Тем не менее, можно найти разделяющее множество объектов.

Теорема 17.49. *Пусть K малая. Множество $\{H^A \mid A \in Ob(\mathsf{K})\}$ является разделяющим множеством в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$.*

Доказательство. Пусть даны два функтора $F, G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ и два естественных преобразования $\tau, \sigma\colon F \to G$, причём $\tau \neq \sigma$. Для некоторого объекта $A \in Ob(\mathsf{K})$ должно быть $\tau_A \neq \sigma_A$. Поэтому для некоторого элемента $a \in F(A)$ должно быть $\tau_A(a) \neq \sigma_A(a)$. Возьмём естественное преобразование $\check{a}\colon H^A \to F$ такое, что

$$\check{a}_A(id_A) = a$$

оно существует по лемме Йонеды. Далее

$$(\tau_A \circ \check{a}_A)(id_A) = \tau_A(\check{a}_A(id_A)) = \tau_A(a)$$

$$(\sigma_A \circ \check{a}_A)(id_A) = \sigma_A(\check{a}_A(id_A)) = \sigma_A(a)$$

Мы видим, что $(\tau_A \circ \check{a}_A)(id_A) \neq (\sigma_A \circ \check{a}_A)(id_A)$ и поэтому

$$\tau \circ \check{a} \neq \sigma \circ \check{a}$$

□

Упражнение 17.50. Пусть K – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Мы знаем, что функторы $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ взаимно однозначно соответствуют графам. Проверьте, что функторы H^A и H^B имеют следующий вид, если их изобразить как графы

$$f \xrightarrow{id_A} g$$

$$id_B$$

Эти два графа составляют разделяющее множество в категории графов (Пример 16.28).

Замечание 17.51. Двойственным образом, множество $\{H_A \mid A \in Ob(\mathsf{K})\}$ является разделяющим множеством в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}^{op}}$. Желающие в этом месте могут доказать, что функтор Йонеды сохраняет мономорфизмы (доказательство несложное, но громоздкое).

Теорема 17.52. *Пусть даны малая категория* K*, функторы* $F, G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ *и естественное преобразование* $\tau\colon F \to G$*. Тогда* τ *является мономорфизмом в* $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ *если и только если стрелки* τ_A *являются мономорфизмами в* Set *для каждого* $A \in Ob(\mathsf{K})$*.*

Доказательство. Импликацию справа налево (если все τ_A мономорфны, то τ мономорфно) легко понять самостоятельно. Докажем импликацию слева направо. Пусть $\tau\colon F \rightarrowtail G$ является мономорфизмом. Докажем, что $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$ является мономорфизмом при любом $A \in Ob(\mathsf{K})$. Предположим, что это не так. Тогда существуют два элемента $x, y \in F(A)$ такие, что $x \neq y$, но $\tau_A(x) = \tau_A(y)$. Возьмём два естественных преобразования $\check{x}, \check{y}\colon H^A \to F$ такие, что

$$\check{x}_A(id_A) = x$$

$$\check{y}_A(id_A) = y$$

они существуют по лемме Йонеды. Далее

$$(\tau_A \circ \check{x}_A)(id_A) = \tau_A(\check{x}(id_A)) = \tau_A(x)$$

$$(\tau_A \circ \check{y}_A)(id_A) = \tau_A(\check{y}(id_A)) = \tau_A(y)$$

и поскольку $\tau_A(x) = \tau_A(y)$, мы получаем (опять же по лемме Йонеды)

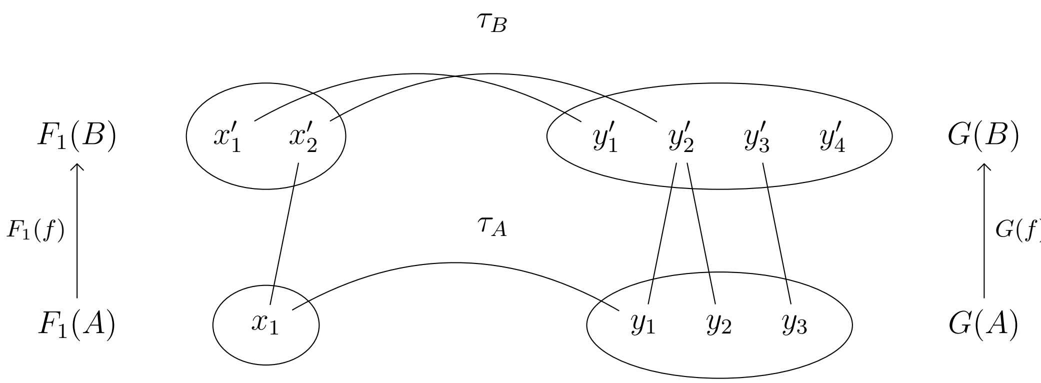
$$\tau \circ \check{x} = \tau \circ \check{y}$$

Но $\check{x} \neq \check{y}$ и мы получили противоречие с тем, что τ является мономорфизмом.
□

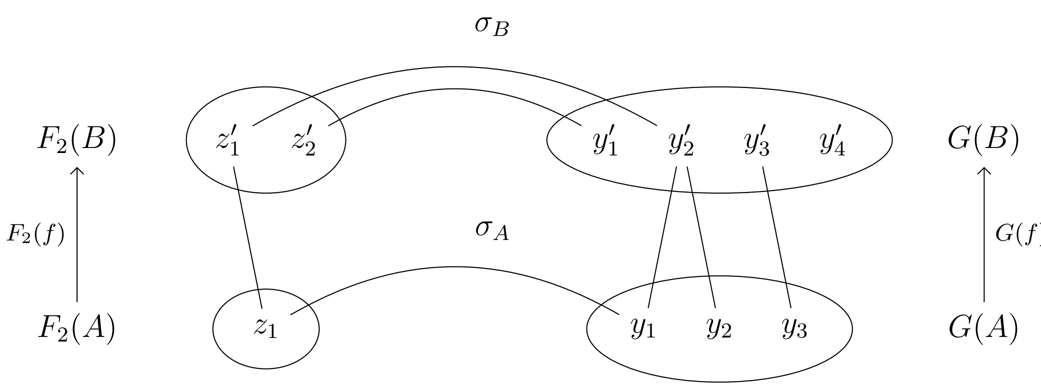
Пример 17.53. Рассмотрим категорию $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ над шкалой K

$$\begin{tikzcd}
id_B \circlearrowright B \\
id_A \circlearrowright A \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}$$

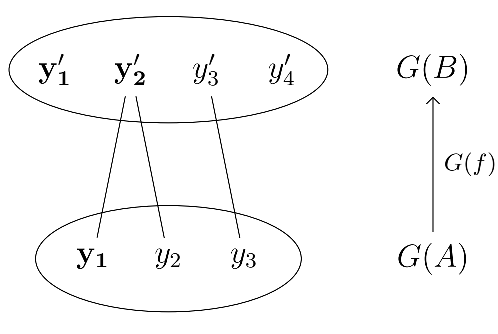
Ниже показан некоторый мономорфизм $\tau\colon F_1 \rightarrowtail G$



и ещё один мономорфизм $\sigma\colon F_2 \rightarrowtail G$



которые задают один и тот же подобъект (выделен жирным)



Поскольку y_1 принадлежит подобъекту в момент времени A, то и y'_2 (в который переходит y_1 под действием $G(f)$) должен принадлежать подобъекту в момент времени B. В правильно построенном подобъекте с течением времени ничего не пропадает (а добавляться может). Терминальный объект в этой категории $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ выглядит так

$$\begin{tikzcd} \{*\} \\ \{*\} \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

У него три подобъекта

$$\begin{tikzcd} \emptyset & \{*\} & \{*\} \\ \emptyset \arrow[u, dotted] & \emptyset \arrow[u, dotted] & \{*\} \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

и они соответствуют трём коидеалам шкалы: $\emptyset, \{B\}, \{A, B\}$.

Упражнение 17.54. Пусть K – малая категория. Коидеалы K взаимно однозначно соответствуют подобъектам 1 в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$.

Замечание 17.55. Смысл этого такой. В достаточно хороших категориях (в категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ и вообще в топосах) подобъекты терминального объекта образуют алгебру Гейтинга. Эта алгебра Гейтинга является как бы „внутренней логикой“ данного топоса. Например, в Set у 1 два подобъекта и логика, соответственно, двузначная. К этой теме мы ещё вернёмся.

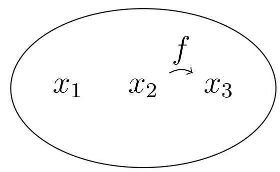
Пример 17.56. Рассмотрим полугруппу с единицей $M = \{e, f\}$, причём $f \circ f = f \neq e$. Рассмотрим M-множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, на котором задано такое действие M

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_3$$

$$f(x_3) = x_3$$

что мы неформально изобразим так



Условие $f \circ f = f$ означает, что $f(f(x)) = x$ для любого $x \in M$. У этого M-множества 6 подобъектов, которые задаются следующими подмножествами: $\emptyset; \{x_1\}; \{x_3\}; \{x_1, x_3\}; \{x_2, x_3\}; \{x_1, x_2, x_3\}$. Подмножества $\{x_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ не задают подобъектов, поскольку элемент x_2 из них „выскакивает“ под действием f. Правильно построенный подобъект вместе с каждым своим элементом должен содержать всё, что из него получается под действием полугруппы.

Замечание 17.57. Конструкция, двойственная к вложению Йонеды, выглядит так. Для малой категории K, если сопоставить каждому объекту $A \in \mathsf{K}$ функтор $H^A\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, а каждой стрелке $f\colon A \to B$ естественное преобразование $H^f\colon H^B \to H^A$, мы получим функтор из K^{op} в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ (из K^{op}, потому что меняется направление стрелок). Этот функтор является полным вложением K^{op} в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$. Содержательно, мы начинаем с функтора Hom

$$Hom_{\mathsf{K}}\colon \mathsf{K}^{op} \times \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$$

и применяем к нему лямбду

$$\Lambda(Hom_{\mathsf{K}})\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$$

Вопрос только, в какой категории мы это делаем (Cat не годится).

Остаток главы занимает описание экспоненты в категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K малая.

Теорема 17.58. *Пусть K – малая категория. Тогда в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ есть экспоненты (поэтому $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ является бидекартово замкнутой категорией).*

Доказательство. Для функторов $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ и $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ их экспоненту $G^F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ определим так

$$G^F(A) = Nat(H^A \times F, G) \quad \text{для любого } A \in Ob(\mathsf{K})$$

Идея этого определения в том, что для экспоненты должны выполняться изоморфизмы

$$G^F(A) \cong Nat(H^A, G^F) \cong Nat(H^A \times F, G)$$

(первый – по лемме Йонеды, второй – по определению экспоненты как сопряжённой справа к декартову произведению). На стрелках функтор G^F по определению будет действовать так

$$G^F(f)(\tau) = \tau \circ (H^f \times id_F)$$

где $f\colon A \to B, \quad \tau \in Nat(H^A \times F, G), \quad G^F(f)(\tau) \in Nat(H^B \times F, G)$

$$G^F(f)\colon G^F(A) \to G^F(B)$$

$$G^F(f)\colon Nat(H^A \times F, G) \to Nat(H^B \times F, G)$$

$$G^F(f)(\tau)\colon H^B \times F \xrightarrow{H^f \times id_F} H^A \times F \xrightarrow{\tau} G$$

Отображением вычисления $ev\colon G^F \times F \to G$ будет естественное преобразование со следующими компонентами $ev(A)\colon G^F(A) \times F(A) \to G(A)$

$$ev(A)(\tau, a) = \tau_A(id_A, a)$$

где $\tau \in Nat(H^A \times F, G),\ a \in F(A)$.

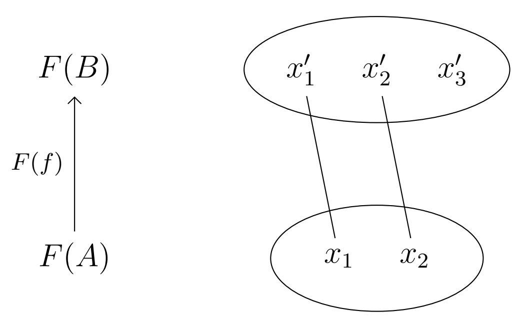
□

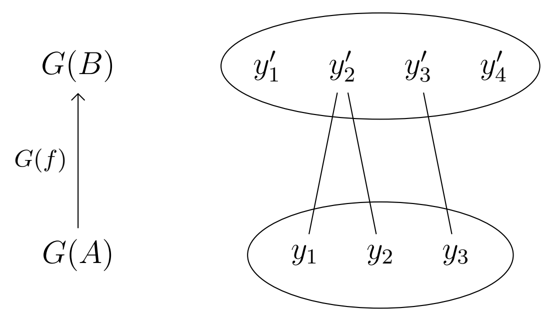
Упражнение 17.59. При сильном желании проверьте детали.

Пример 17.60. Рассмотрим опять категорию $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K имеет вид

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[loop left, "id_B"] \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"]
\end{tikzcd}$$

Возьмём два функтора $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ и $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$, например





Как найти экспоненту G^F? Наивное (и неверное) решение состоит в том, чтобы положить

$$G^F(A) = G(A)^{F(A)}$$
$$G^F(B) = G(B)^{F(B)}$$

Но тогда неясно, как определить функцию $G^F(f)\colon G^F(A) \to G^F(B)$ (попробуйте). Правильное определение выглядит так

$$G^F(A) = Nat(F, G)$$
$$G^F(B) = G(B)^{F(B)}$$
$$G^F(f)(\tau) = \tau_B$$

где $\tau \in Nat(F, G)$. Идея в том, что в каждый момент времени надо учитывать все моменты времени, лежащие выше (людям, знакомым с моделями Крипке, тут следует вспомнить импликацию в моделях Крипке).

Упражнение 17.61. Разберитесь, почему приведённая выше конструкция даёт экспоненту G^F.

В одном частном случае описание экспоненты можно сильно упростить. А именно, если шкала K задаёт группу (то есть в K один объект и все стрелки обратимы).

Пример 17.62. Пусть K – малая категория с одним объектом A, в которой все стрелки обратимы (то есть $Mor(\mathsf{K})$ является группой, обозначим её Gr). Два функтора $F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ и $G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$ можно представить как два множества $X = F(A)$ и $Y = G(A)$, на которых заданы действия группы Gr. Экспоненту G^F можно описать так

$$G^F(A) = Y^X$$
$$G^F(f)(g) = G(f) \circ g \circ F(f^{-1})$$

где $f \in Gr, g \in Y^X$. Иными словами, в качестве носителя берётся множество всех функций из X в Y (не только сохраняющих действие, а вообще всех). Отображение вычисления $ev\colon G^F \times F \to G$ имеет единственную компоненту $ev(A)\colon Y^X \times X \to Y$, представляющую собой отображение вычисления в Set.

Упражнение 17.63. Проверьте, что это определение действительно даёт экспоненту G^F. Проверьте, что элементы экспоненты (то есть, морфизмы из 1 в G^F) взаимно однозначно соответствуют отображениям X в Y, сохраняющим действие группы.

Замечание 17.64. Об обозначениях. Вместо H^A и H_A чаще пишут h^A и h_A, но и большие буквы тоже иногда используют. Мне кажется, для учебника лучше все функторы обозначать большими буквами, чтобы не путать их со стрелками. Обозначения H^f, H_f взяты из книги Freyd, Scedrov "Categories, Allegories". Для функтора Йонеды стандартного обозначения, видимо, нет и я его обозначил как попало. Готов сменить обозначение, если кто-то предложит лучшее.

Глава 18

Уравнители, декартовы квадраты, топосы

18.1 Уравнители

Определение 18.1. Пусть дана пара стрелок f, g с одинаковыми началами и одинаковыми концами

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

Объект C вместе со стрелкой $h\colon C \to A$ называется *уравнителем* этой пары стрелок, если коммутативна следующая диаграмма ($f \circ h = g \circ h$)

$$C \xrightarrow{h} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

и для любой коммутативной диаграммы того же вида, например

$$E \xrightarrow{k} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

существует единственная стрелка $j\colon E \to C$ такая, что $h \circ j = k$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E \arrow[u, dotted, "j"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

Иными словами, уравнитель пары f, g – это терминальный объект в категории коммутативных диаграмм следующего вида

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

с подходящими морфизмами.

Определение 18.2. Категория называется *категорией с уравнителями*, если у любой пары стрелок с одинаковыми началами и одинаковыми концами есть уравнитель.

Пример 18.3. В Set уравнителем пары стрелок $f, g\colon A \to B$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

будет вложение $C \subseteq A$, где $C = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$. Действительно, любая функция $k\colon E \to A$, для которой $f \circ k = g \circ k$ принимает все свои значения в подмножестве C, поэтому

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E \arrow[u, dotted, "j"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

Теорема 18.4. *Любой уравнитель является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть h – уравнитель f и g.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Пусть также $h \circ j_1 = h \circ j_2$ для некоторых j_1, j_2

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "j_1"] \arrow[r, shift right, "j_2"'] & C \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

Докажем, что $j_1 = j_2$ (то есть, на h можно сокращать).
Положим $k = h \circ j_1 (= h \circ j_2)$, тогда $f \circ k = g \circ k$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E \arrow[u, dotted, "j"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

и на роль единственной стрелки j подходят и j_1, и j_2.
□

Упражнение 18.5. Диаграмма следующего вида (стрелки в правой части одинаковые)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

всегда является диаграммой уравнителя.

Упражнение 18.6. Диаграмма следующего вида (стрелки в правой части одинаковые)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

является диаграммой уравнителя если и только если h – изоморфизм.

Замечание 18.7. Мономорфизм, который является уравнителем какой-либо пары стрелок, называется *регулярным*. В Set все мономорфизмы регулярны (попробуйте доказать), но в общем случае это не так. Например, в категориях частичного порядка все стрелки мономорфны, но регулярны только тождественные (потому что уравнивать нечего, кроме одинаковых стрелок).

Упражнение 18.8. Если мономорфизм регулярен и к тому же является эпиморфизмом, то он является изоморфизмом.

Упражнение 18.9. Если мономорфизм обратим слева, то он регулярен (если $f \circ g = id$, то g – уравнитель $g \circ f$ и id).

Упражнение 18.10. Правые сопряжённые функторы сохраняют уравнители. Точнее, если $F \dashv G$ и следующая диаграмма – диаграмма уравнителя

$$C \xrightarrow{h} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

то и следующая диаграмма – тоже диаграмма уравнителя

$$G(C) \xrightarrow{G(h)} G(A) \overset{G(f)}{\underset{G(g)}{\rightrightarrows}} G(B)$$

Замечание 18.11. Правые сопряжённые функторы сохраняют терминальные объекты, произведения любых семейств объектов, уравнители и мономорфизмы. Это следует из некоторого общего результата „правые сопряжённые функторы сохраняют пределы“, который докажем в главе про пределы.

Пример 18.12. В категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K малая, уравнители строятся покомпонентно. Пусть дана пара естественных преобразований

$$F \overset{\tau}{\underset{\sigma}{\rightrightarrows}} G$$

для которых мы хотим построить уравнитель. Здесь $F, G\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Уравнитель будет иметь вид

$$H \xrightarrow{\rho} F \overset{\tau}{\underset{\sigma}{\rightrightarrows}} G$$

Для каждого $A \in Ob(\mathsf{K})$ строим уравнитель в Set

$$
\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[r, "\rho_A"] & F(A) \arrow[r, shift left, "\tau_A"] \arrow[r, shift right, "\sigma_A"'] & G(A)
\end{tikzcd}
$$

Чтобы превратить $H(A)$ в функтор и ρ_A в естественное преобразование, для любой стрелки $f\colon A \to B$ определяем $H(f)$ следующей диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
H(B) \arrow[r, "\rho_B"] & F(B) \arrow[r, shift left, "\tau_B"] \arrow[r, shift right, "\sigma_B"'] & G(B) \\
H(A) \arrow[u, dotted, "H(f)"] \arrow[ur, "F(f) \circ \rho(A)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Проверить коммутативность этой диаграммы оставляю в качестве упражнения.

18.2 Декартовы квадраты

Пусть дана пара стрелок с общим концом

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Иногда можно дополнить их до коммутативного квадрата „наилучшим возможным способом“.

Определение 18.13. Диаграмма следующего вида

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

называется *декартовым квадратом*, если она коммутативна и для любого коммутативного квадрата с той же нижней частью, например

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] & \\ B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

существует единственная стрелка $j\colon E \to D$ такая что

$$l_1 = p_1 \circ j$$
$$l_2 = p_2 \circ j$$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, dotted, "j"] \arrow[ddl, "l_1"'] \arrow[ddr, "l_2"] & \\
 & D \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
B \arrow[dr, "f"] & & C \arrow[dl, "g"'] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Замечание 18.14. Как бы обрадовался Декарт.

Соглашение 18.15. Если следующий квадрат декартов

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

то стрелку p_1 будем называть *подъёмом* стрелки g вдоль f, а стрелку p_2 – *подъёмом* стрелки f вдоль g (по-английски пишут *pullback*).

Пример 18.16. Следующая диаграмма является декартовым квадратом

$$\begin{tikzcd}
 & B \times C \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
B \arrow[dr, "!_B"'] & & C \arrow[dl, "!_C"] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Более того, диаграмма следующего вида

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ B \arrow[dr, "!_B"'] & & C \arrow[dl, "!_C"] \\ & 1 & \end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом $\Leftrightarrow$ D является произведением B и C с проекциями p_1 и p_2.

Определение 18.17. Категория называется *категорией с декартовыми квадратами*, если любые две стрелки с общим концом можно достроить до декартова квадрата. Предыдущий пример показывает, что в категории с терминальным объектом и декартовыми квадратами всегда есть конечные произведения.

Пример 18.18. В Set декартовы квадраты строятся так: пусть даны две стрелки с общим концом

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Достроим их до квадрата следующим способом

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

где $D = \{(b,c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}$, а p_1 и p_2 есть ограничения проекций $pr_1^{B\times C}$ и $pr_2^{B\times C}$ на множество $D \subseteq B \times C$.
Эту конструкцию можно обобщить до следующей теоремы.

Теорема 18.19. *Категория с уравнителями и произведениями пар объектов является категорией с декартовыми квадратами.*

Доказательство. Пусть даны две стрелки с общим концом

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Построим следующий уравнитель

$$D \xrightarrow{h} B \times C \underset{g \circ pr_2}{\overset{f \circ pr_1}{\rightrightarrows}} A$$

и докажем декартовость внешнего квадрата

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "pr_1 \circ h"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "pr_2 \circ h"] & \\ B \arrow[dr, "f"'] & B \times C \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Действительно, пусть коммутативен следующий квадрат

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] & \\ B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Тогда коммутативна следующая диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\langle l_1, l_2\rangle"] & B \times C \arrow[r, shift left, "f \circ pr_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ pr_2"'] & A
\end{tikzcd}
$$

и по свойствам уравнителя получаем

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "h"] & B \times C \arrow[r, shift left, "f \circ pr_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ pr_2"'] & A \\
E \arrow[u, dotted, "j"] \arrow[ur, "\langle l_1, l_2\rangle"'] & &
\end{tikzcd}
$$

и это та стрелка j, что нам нужна

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, dotted, "j"] \arrow[ddl, "l_1"'] \arrow[ddr, "l_2"] & \\
 & D \arrow[dl, "pr_1 \circ h"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "pr_2 \circ h"] & \\
B \arrow[dr, "f"'] & B \times C \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] & C \arrow[dl, "g"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

□

Теорема 18.20. *Категория с декартовыми квадратами и произведениями пар объектов является категорией с уравнителями.*

Доказательство. Пусть дана пара стрелок

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}
$$

для которых мы хотим построить уравнитель. Построим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
A \arrow[dr, "\langle id, f\rangle"'] & & A \arrow[dl, "\langle id, g\rangle"] \\
& A \times B &
\end{tikzcd}$$

Я утверждаю, что $p_1 = p_2$ и эта стрелка является уравнителем пары f, g. Действительно, коммутативность квадрата выражается равенством

$$\langle id, f\rangle \circ p_1 = \langle id, g\rangle \circ p_2$$

из чего следует равенство первых и вторых компонент

$$id \circ p_1 = id \circ p_2 \text{ (то есть } p_1 = p_2)$$

$$f \circ p_1 = g \circ p_2$$

Дальше, если коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

то коммутативен и квадрат

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "k"] & \\
A \arrow[dr, "\langle id, f\rangle"'] & & A \arrow[dl, "\langle id, g\rangle"] \\
& A \times B &
\end{tikzcd}$$

и поэтому

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[d, dotted, "j"] \arrow[ddl, "k"'] \arrow[ddr, "k"] & \\
& D \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
A \arrow[dr, "\langle id, f\rangle"'] & & A \arrow[dl, "\langle id, g\rangle"] \\
& A \times B &
\end{tikzcd}$$

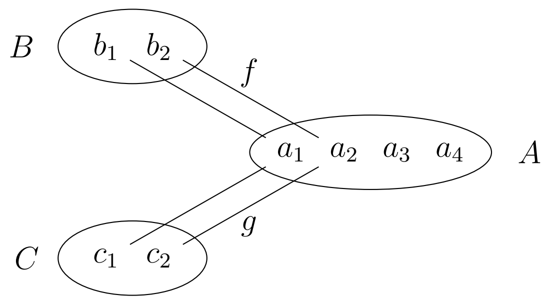
что равносильно коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "p_1"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
E \arrow[u, dotted, "j"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

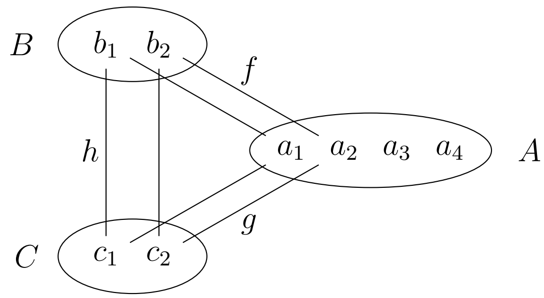
□

Кроме произведения пары объектов, частным случаем декартовых квадратов оказывается такая конструкция, как взятие прообраза подмножества. Здесь я повторю небольшой кусочек главы про мономорфизмы, потому что я его слегка переписал (чтобы не ходить туда-сюда, в следующей версии учебника уберу). Я решил определять подобъекты традиционным образом (как классы эквивалентности мономорфизмов), а не так, как делает Аводей в своём новом учебнике (попробовал – создаёт больше проблем, чем решает).

Пример 18.21. В Set каждый мономорфизм $f\colon B \rightarrowtail A$ задаёт подмножество A (множество значений функции f). Разные мономорфизмы могут задавать одно и то же подмножество, как показывает следующий пример



Здесь функции $f\colon B \rightarrowtail A$ и $g\colon C \rightarrowtail A$ задают одно и то же подмножество A (а именно, $\{a_1, a_2\}$). В этом случае существует изоморфизм $h\colon C \to B$ такой, что $f \circ h = g$



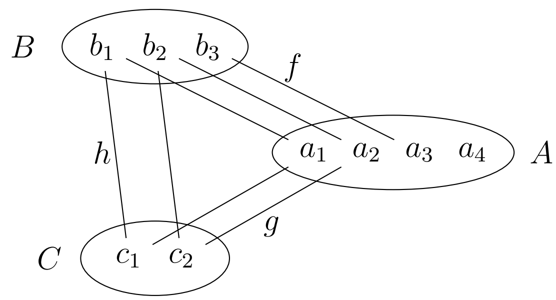
Определение 18.22. В произвольной категории K на множестве всех мономорфизмов с концом A определим предпорядок следующим способом: для стрелок $f\colon B \rightarrowtail A$ и $g\colon C \rightarrowtail A$ положим $g \lesssim f$ если и только если найдётся стрелка $h\colon C \to B$ такая, что $f \circ h = g$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, tail, "f"] & \\
 & A \\
C \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, tail, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Такая стрелка h может быть только одна (поскольку f – мономорфизм), поэтому получается предпорядок. Заметим также, что стрелка h сама является мономорфизмом по упражнению 16.12.

Если $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$, будем писать $f \simeq g$

Пример 18.23. На картинке изображены три множества A, B, C и три мономорфизма $f\colon B \rightarrowtail A$, $g\colon C \rightarrowtail A$, $h\colon C \rightarrowtail A$.



Мы видим, что f отображает B на подмножество $\{a_1, a_2, a_3\}$, а g отображает C на подмножество $\{a_1, a_2\}$, предпорядок на мономорфизмах соответствует порядку по включению между подмножествами.

Теорема 18.24. *Пусть $f\colon B \rightarrowtail A$, $g\colon C \rightarrowtail A$. Тогда $f \simeq g$ если и только если существует (единственный) изоморфизм $h\colon C \to B$ такой, что $f \circ h = g$.*

Доказательство. Если $g \lesssim f$, то для некоторой (единственной) стрелки h будет $f \circ h = g$. Если к тому же $f \lesssim g$, то для некоторой стрелки h' будет $g \circ h' = f$. Получаем

$$f \circ h \circ h' = g \circ h' = f = f \circ id$$

$$g \circ h' \circ h = f \circ h = g = g \circ id$$

и сокращаем слева на мономорфизмы f и g

$$h \circ h' = id$$

$$h' \circ h = id$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, tail, "f"] & \\
C \arrow[u, "h"'] \arrow[r, tail, "g"] & A \\
B \arrow[u, "h'"'] \arrow[ur, tail, "f"'] \arrow[uu, bend left, dotted, "id_B"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, tail, "g"] & \\
B \arrow[u, "h'"'] \arrow[r, tail, "f"] & A \\
C \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, tail, "g"'] \arrow[uu, bend left, dotted, "id_C"] &
\end{tikzcd}$$

□

Определение 18.25. *Подобъектами* объекта A будем называть мономорфизмы с концом A с точностью до отношения $\simeq$ (или классы эквивалентности мономорфизмов, если так понятнее). Каждый мономорфизм f задаёт некоторый подобъект, который будем обозначать $[f]$. Совокупность всех подобъектов объекта A будем обозначать $\mathrm{Sub}(A)$. Предпорядок $\lesssim$ между мономорфизмами превращается в порядок между подобъектами, этот порядок будем обозначать $[f] \subseteq [g]$.

Упражнение 18.26. У каждого объекта A есть наибольший подобъект, задаваемый мономорфизмом $id_A \colon A \to A$

Замечание 18.27. Определение подобъектов как классов эквивалентности мономорфизмов создаёт теоретико-множественные проблемы. Например, в Set почти все такие классы эквивалентности очень „большие" и не являются множествами. В Set и во многих других категориях есть другой выход: можно естественным способом выбрать из каждого класса эквивалентности некоторый *канонический подобъект.* Если в Set задано некоторое подмножество $B \subseteq A$, мы можем определить функцию вложения $f \colon B \rightarrowtail A$ как $f = \{(b, b) \mid b \in B\}$ и этот мономорфизм будет каноническим представителем для данного подмножества.

Соглашение 18.28. Мы будем говорить „B является подобъектом A", если мономорфизм $f \colon B \rightarrowtail A$ ясен из контекста.

Соглашение 18.29. Пусть даны две стрелки с концом A

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, tail, "f"] & \\ & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

причём f является мономорфизмом (а g не обязательно). Будем говорить, что g *пропускается через* f, если существует (единственная) стрелка $h \colon C \to B$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, tail, "f"] & \\ & A \\ C \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

В Set это означает, что функция $g\colon C \to A$ принимает все свои значения в подмножестве $B \subseteq A$. Функция h – это функция g, если воспринимать её как функцию из C в B.

Пример 18.30. Пусть дано множество B, подмножество $B_1 \subseteq B$ и функция $h\colon A \to B$. Тогда следующий квадрат декартов

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A \arrow[d, "h"] \\
B_1 \arrow[r, tail, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

где $A_1 = \{x \in A \mid h(x) \in B_1\}$ (прообраз подмножества B_1 относительно h), стрелки f и f_1 – вложения подмножеств, а h_1 есть ограничение функции h на подмножество A_1.
Действительно, пусть коммутативна диаграмма следующего вида

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, "g_1"] \arrow[ddr, "g_2"'] & & \\
& A_1 \arrow[r, tail, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A \arrow[d, "h"] \\
& B_1 \arrow[r, tail, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Это значит $h \circ g_1 = f \circ g_2$
Функция g_2 – это функция из C в B, принимающая все значения в подмножестве B_1, равенство утверждает, что

$$h(g_1(x)) = g_2(x) \in B_1 \quad \text{для любого } x \in C$$

Мы видим, что функция $h \circ g_1$ принимает все свои значения в подмножестве B_1, поэтому функция g_1 должна принимать все свои значения в подмножестве A_1 (прообразе B_1 относительно h). Поэтому коммутативна такая диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, "g_1"] \arrow[dr, dotted] \arrow[ddr, "g_2"'] & & \\
& A_1 \arrow[r, tail, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A \arrow[d, "h"] \\
& B_1 \arrow[r, tail, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

где единственная стрелка – это функция g_1, если её воспринимать как функцию из C в A_1.

В Set каждая функция $h\colon A \to B$ задаёт отображение $h^*\colon P(B) \to P(A)$ из множества подмножеств B во множество подмножеств A (взятие прообраза относительно функции h). Аналогично, в категориях с декартовыми квадратами каждая стрелка $h\colon A \to B$ определяет отображение $h^*\colon \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$. Любой мономорфизм с концом B (он задаёт подобъект B) поднимается вдоль h до мономорфизма с концом A.

Теорема 18.31. *Если следующий квадрат декартов*

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A \arrow[d, "h"] \\
B_1 \arrow[r, tail, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

то стрелка f_1 тоже является мономорфизмом. Иными словами, подъём мономорфизма является мономорфизмом.

Доказательство. Пусть $f_1 \circ g_1 = f_1 \circ g_2$ для некоторых g_1, g_2

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & A_1 \arrow[r, "f_1"] & A
\end{tikzcd}
$$

Докажем, что $g_1 = g_2$. Докажем сначала, что $h_1 \circ g_1 = h_1 \circ g_2$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A \\
& B_1 &
\end{tikzcd}$$

Это следует из равенства

$$f \circ h_1 \circ g_1 = f \circ h_1 \circ g_2$$

и мономорфности f.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A \arrow[d, "h"] \\
& B_1 \arrow[r, tail, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Дальше рисуем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, "f_1 \circ g_1"] \arrow[ddr, "h_1 \circ g_2"'] & & \\
& A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A \arrow[d, "h"] \\
& B_1 \arrow[r, tail, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

В силу декартовости квадрата, есть единственная стрелка, для которой

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, "f_1 \circ g_1"] \arrow[ddr, "h_1 \circ g_2"'] \arrow[dr, dotted] & & \\
& A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A \arrow[d, "h"] \\
& B_1 \arrow[r, tail, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

и на роль этой стрелки годятся и g_1, и g_2.
$\square$

Упражнение 18.32. Предпорядок между мономорфизмами сохраняется при подъёмах. Это значит, что если $g \lesssim f$ и мы поднимем f и g вдоль стрелки h до некоторых f' и g', то $g' \lesssim f'$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rrr] \arrow[dr, dotted] \arrow[ddr, tail, "g'"'] & & & C_1 \arrow[dl, "h"'] \arrow[ddl, tail, "g"] \\
& {} \arrow[r] \arrow[d, tail, "f'"] & C_2 \arrow[d, tail, "f"'] & \\
& A \arrow[r, "h"] & B &
\end{tikzcd}$$

Из этого следует, что если $f \simeq g$, то $f' \simeq g'$

Замечание 18.33. Вообще говоря, декартовы квадраты определены с точностью до некоторого изоморфизма, поэтому подъём мономорфизма вдоль h определён с точностью до отношения $\simeq$. Но для подобъектов подъём определён уже однозначно.

Соглашение 18.34. В категориях с декартовыми квадратами будем обозначать $h^*\colon \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$ отображение подъёма подобъектов вдоль стрелки $h\colon A \to B$
В предыдущем упражнении $[f'] = h^*([f])$
Из предыдущего упражнения следует, что отображение h^* монотонное, то есть сохраняет порядок $[g] \subseteq [f]$ между подобъектами.

Упражнение 18.35. Квадрат следующего вида всегда декартов

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "id_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Это значит, что подъём (прообраз) наибольшего подобъекта является наибольшим подобъектом.

Следующие две теоремы вместе называют „теорема о двух квадратах“. Ни в одном учебнике не видел выписанного доказательства, везде предлагают доказать в качестве упражнения. Действительно, его трудно изложить понятно. Из спортивного интереса попробую выписать, но, возможно, легче доказать самому.

Теорема 18.36. *Если левый квадрат коммутативен, а внешний прямоугольник и правый квадрат декартовы, то декартов и левый квадрат.*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $h_1 \circ l_1 = f_2 \circ l_2$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[drr, "l_2"] \arrow[ddr, "l_1"'] & & & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Нам надо доказать, что существует единственная стрелка j, делающая коммутативной такую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[drr, "l_2"] \arrow[ddr, "l_1"'] \arrow[dr, dotted, "j"] & & & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Поскольку внешний прямоугольник декартов, мы можем утверждать существование стрелки j, для которой коммутативна такая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrrd, "g_2 \circ l_2"] \arrow[rd, dotted, "j"] \arrow[rdd, "l_1"'] & & & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Чтобы убедиться, что это именно та стрелка, которая нам нужна, достаточно проверить $g_1 \circ j = l_2$. Поскольку правый квадрат декартов, должна существовать единственная стрелка, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrrd, "g_2 \circ l_2"] \arrow[rrd, dotted] \arrow[rdd, "l_1"'] & & & \\
& & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

и на роль этой стрелки годятся и $g_1 \circ j$, и l_2 (проверьте).
□

Теорема 18.37. *Если оба квадрата в следующей диаграмме декартовы, то и внешний прямоугольник декартов*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $h_2 \circ h_1 \circ l_1 = f_3 \circ l_2$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[ddr, "l_1"'] \arrow[drrr, "l_2"] & & & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Нам надо доказать, что существует единственная стрелка j, делающая коммутативной такую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[ddr, "l_1"'] \arrow[drrr, "l_2"] \arrow[dr, dotted, "j"] & & & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Поскольку правый квадрат декартов, должна существовать единственная стрелка k, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[ddr, "l_1"'] \arrow[drrr, "l_2"] \arrow[drr, dotted, "k"'] & & & \\
& & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Поскольку левый квадрат тоже декартов, должна существовать единственная стрелка j, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dotted, "j"] \arrow[drr, "k"] \arrow[drrr, "l_2"] \arrow[ddr, "l_1"'] & & & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Проверим, что это та стрелка j, что нам нужна. Выбросив стрелку k (и соответственно, условие $g_1 \circ j = k$), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "j"] \arrow[drrr, "l_2"] \arrow[ddr, "l_1"'] & & & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

но единственность j при этом может и пропасть, поскольку мы ослабили условия на j. Тем не менее, ничего не пропадает, поскольку из коммутативности последней диаграммы выводится $g_1 \circ j = k$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[drr, dotted, "g_1 \circ j"'] \arrow[drrr, "l_2"] \arrow[ddr, "l_1"'] & & & \\
& & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[drr, dotted, "k"'] \arrow[drrr, "l_2"] \arrow[ddr, "l_1"'] & & & \\
& & A_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
& B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

□

Из теоремы о двух квадратах (второй её части) следует, что операция Sub обладает свойствами функтора.

Теорема 18.38. *Пусть дана категория* K *с декартовыми квадратами, в которой у каждого объекта „не очень много подобъектов“. Это* *значит, что $Sub(A)$ является множеством (а не большим классом) для каждого $A \in Ob(\mathsf{K})$. Тогда отображение $Sub\colon Ob(\mathsf{K}) \to \mathsf{Set}$ можно продолжить до функтора $Sub\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$, определив действие на стрелках следующим способом*

$$Sub(h) = h^*\colon Sub(B) \to Sub(A)$$

для любой стрелки $h\colon A \to B$

Доказательство. Надо доказать свойства функтора (контравариантного)

$$\mathrm{Sub}(id_A) = id_{\mathrm{Sub}(A)}$$
$$\mathrm{Sub}(h_2 \circ h_1) = \mathrm{Sub}(h_1) \circ \mathrm{Sub}(h_2)$$

что соответствует равенствам

$$(id_A)^* = id_{\mathrm{Sub}(A)}$$
$$(h_2 \circ h_1)^* = h_1^* \circ h_2^*$$

Первое равенство означает декартовость следующего квадрата

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "id"] & A \arrow[d, "id_A"] \\
A_1 \arrow[r, tail, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

(подъём вдоль стрелки id_A не меняет подобъекта), которую оставляю в качестве лёгкого упражнения, а второе равенство – это Теорема 18.37. □

Пример 18.39. (Пересечение подобъектов).
Возьмём пару мономорфизмов с общим концом

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, tail, "f"'] & & C \arrow[dl, tail, "g"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Если можно достроить их до декартова квадрата

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, tail, "p_1"'] \arrow[dr, tail, "p_2"] & \\
B \arrow[dr, tail, "f"'] & & C \arrow[dl, tail, "g"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

то стрелка $f \circ p_1 (= g \circ p_2)\colon D \to A$ оказывается наибольшим мономорфизмом, который пропускается и через f, и через g. Действительно, любой мономорфизм $h\colon E \rightarrowtail A$, который пропускается через f и g, должен пропускаться и через $f \circ p_1 (= g \circ p_2)$

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, tail, "p_1"'] \arrow[dr, tail, "p_2"] & \\
B \arrow[dr, tail, "f"'] & E \arrow[l, tail] \arrow[r, tail] \arrow[u, tail, dotted] \arrow[d, tail, "h"'] & C \arrow[dl, tail, "g"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Это значит, что из $[h] \subseteq [f]$ и $[h] \subseteq [g]$ следует $[h] \subseteq [f \circ p_1]$, поэтому подобъект $[f \circ p_1]$ есть пересечение $[f] \cap [g]$

Упражнение 18.40. Попробуйте доказать, что все операции взятия прообраза h^* сохраняют пересечения подобъектов. Это следует из некоторой теоремы, которую мы докажем позже.

Упражнение 18.41. В категориях вида $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, где K – малая, декартовы квадраты строятся покомпонентно. Пусть дана пара естественных преобразований

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, "\tau"'] & & G \arrow[dl, "\sigma"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

где $F, G, H\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$. Декартов квадрат будет иметь вид

$$\begin{tikzcd} & H' \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[dr, "\rho_2"] & \\ F \arrow[dr, "\tau"'] & & G \arrow[dl, "\sigma"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

Для каждого $A \in Ob(\mathsf{K})$ строим декартов квадрат в Set

$$\begin{tikzcd} & H'(A) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F(A) \arrow[dr, "\tau_A"'] & & G(A) \arrow[dl, "\sigma_A"] \\ & H(A) & \end{tikzcd}$$

и определяем действие H' на стрелках, используя свойства декартова квадрата.

Упражнение 18.42. Стрелка $f\colon A \to B$ является мономорфизмом если и только если следующий квадрат декартов

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Замечание 18.43. Предыдущие два упражнения дают другое доказательство Теоремы 17.52 (естественное преобразование τ является мономорфизмом в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ если и только если все его компоненты τ_A являются мономорфизмами в Set)

Упражнение 18.44. Правые сопряжённые функторы сохраняют декартовы квадраты. Точнее, если $F \dashv G$ и следующий квадрат декартов

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
B \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

то декартов и следующий квадрат

$$\begin{tikzcd}
 & G(D) \arrow[dl, "G(p_1)"'] \arrow[dr, "G(p_2)"] & \\
G(B) \arrow[dr, "G(f)"'] & & G(C) \arrow[dl, "G(g)"] \\
 & G(A) &
\end{tikzcd}$$

Замечание 18.45. Есть проблема с терминологией. По-английски категория, в которой у каждого объекта „не очень много“ подобъектов (множество, а не большой класс), называется well-powered category. По-русски такую категорию называют „локально малой слева“. Но это нехорошо, потому что локально малая категория может не быть „локально малой слева“. Надо бы придумать другое название.

18.3 Топосы

В категории множеств Set функтор $\mathrm{Sub}\colon \mathsf{Set}^{op} \to \mathsf{Set}$ представим. Напомню, что

$$\mathrm{Sub}(A) = P(A) \quad \text{(множество подмножеств } A\text{)}$$
$$\mathrm{Sub}(h) = h^* \quad \text{(взятие прообраза относительно } h\text{)}$$

$\mathrm{Sub}(h)\colon \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$ если $h\colon A \to B$
Возьмём множество $\Omega = \{\top, \bot\}$, оно будет представляющим объектом

$$\mathrm{Sub} \cong H_\Omega$$

Действительно, для любого множества B есть изоморфизм

$$\mathrm{Sub}(B) \cong H_\Omega(B) = \mathsf{Set}(B, \Omega)$$

Каждому подмножеству $B' \subseteq B$ изоморфизм сопоставляет его характеристическую функцию $\chi\colon B \to \Omega$, которая принимает значение $\top$ на всех элементах подмножества B' и значение $\bot$ на всех остальных. В обратную сторону, каждой функции $\chi\colon B \to \Omega$ соответствует подмножество $\{x \in B \mid \chi(x) = \top\} \subseteq B$
Пусть дана функция $h\colon A \to B$. Если подмножеству $B' \subseteq B$ соответствует характеристическая функция $\chi\colon B \to \Omega$, то его прообразу $h^*(B') \subseteq A$ соответствует характеристическая функция $\chi \circ h\colon A \to \Omega$

$$\begin{tikzcd}
B & \mathrm{Sub}(B) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "h^*"] & \mathsf{Set}(B,\Omega) \arrow[d, "\circ h"] \\
A \arrow[u, "h"] & \mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "\cong"] & \mathsf{Set}(A,\Omega)
\end{tikzcd}$$

эта диаграмма выражает естественность изоморфизма.
По лемме Йонеды, изоморфизм

$$\tau\colon H_\Omega \to \mathrm{Sub}$$

однозначно определяется элементом $\tau_\Omega(id_\Omega) \in \mathrm{Sub}(\Omega)$
Этот элемент есть подмножество $\{\top\} \subseteq \Omega$, то есть подмножество $\{x \in \Omega \mid id_\Omega(x) = \top\}$
Это подмножество обладает следующим свойством „универсальности“ (Упражнение 17.18): любое подмножество получается как прообраз

$\{\top\} \subseteq \Omega$ единственно возможным способом. Точнее, для любого множества B и подмножества $B' \subseteq B$ есть ровно одна функция $\chi\colon B \to \Omega$ такая, что $B' = \chi^*(\{\top\}) = \{x \in B \mid \chi(x) = \top\}$

Определение 18.46. Пусть K – категория с терминальным объектом. *Классификатором подобъектов* в категории K называется объект Ω вместе со стрелкой вида $\top\colon 1 \to \Omega$, обладающие следующим свойством: для любого мономорфизма $f\colon B' \rightarrowtail B$ существует единственная стрелка $\chi_f\colon B \to \Omega$ такая, что следующий квадрат декартов

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_{B'}"'] & B \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Объект Ω в этом случае называется *классифицирующим объектом*, а стрелка χ_f – *характеристической стрелкой* (или *классифицирующей стрелкой*) мономорфизма f. Элементы Ω называются *значениями истинности*, а элемент $\top\colon 1 \to \Omega$ называется *истиной*.

Напомню, что стрелка из терминального объекта всегда мономорфна, поэтому можно перерисовать квадрат так

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_{B'}"'] & B \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Содержательно, стрелка $\top\colon 1 \rightarrowtail \Omega$ является „универсальным мономорфизмом“, из которого любой мономорфизм f получается как прообраз единственно возможным способом.

Замечание 18.47. Предположим, что есть мономорфизм $\top\colon \Omega' \rightarrowtail \Omega$, из которого любой мономорфизм получается подъёмом вдоль единственно возможной стрелки. Это значит, для любого $f\colon B' \rightarrowtail B$ есть единственная стрелка $\chi\colon B \to \Omega$, для которой есть декартов квадрат такого вида

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\chi"] \\ \Omega' \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Тогда должно быть $\Omega' \cong 1$. Действительно, для любого объекта B должна быть единственная стрелка $\chi\colon B \to \Omega$, для которой есть декартов квадрат такого вида

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "id"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\chi"] \\ \Omega' \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Возьмём произвольную стрелку $g\colon B \to \Omega'$ и нарисуем квадрат

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "id"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\top \circ g"] \\ \Omega' \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Этот квадрат декартов (лёгкая проверка). Но стрелка $\top \circ g$ должна быть единственной, для которой квадрат такого вида декартов, поэтому для каждого объекта B должна быть единственная стрелка вида $g\colon B \to \Omega'$, поэтому $\Omega' \cong 1$

Теорема 18.48. *Все классифицирующие объекты изоморфны между собой. Более того, если даны два классификатора*

$\top\colon 1 \to \Omega$

$\top'\colon 1 \to \Omega'$

то существует единственный изоморфизм $\chi\colon \Omega{\to}\Omega'$ *такой, что*

$\chi \circ \top = \top'$ *(переводящий истину в истину)*

Доказательство. Чтобы доказать существование изоморфизма, рисуем диаграмму из двух декартовых квадратов

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "!_1"'] & \Omega \arrow[d, "\chi_\top"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top'"] \arrow[d, "!_1"'] & \Omega' \arrow[d, "\chi_{\top'}"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

По теореме о двух квадратах, внешний прямоугольник тоже декартов, перерисуем его так

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "!_1"'] & \Omega \arrow[d, "\chi_{\top'} \circ \chi_\top"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Но и такой прямоугольник декартов

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "!_1 = id_1"'] & \Omega \arrow[d, "id_\Omega"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

поэтому $\chi_{\top'} \circ \chi_\top = id_\Omega$ (в силу единственности характеристической стрелки).
Аналогично доказывается $\chi_\top \circ \chi_{\top'} = id_{\Omega'}$
Чтобы доказать единственность изоморфизма, заметим, что для любого изоморфизма χ из коммутативности следующего квадрата (это и есть $\chi \circ \top = \top'$) следует его декартовость (проверьте, это нетрудно)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "!_1"'] & \Omega \arrow[d, "\chi"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top'"'] & \Omega'
\end{tikzcd}$$

и в силу единственности характеристической стрелки такой χ может быть только один.
□

Теорема 18.49. *Два мономорфизма $f\colon A \rightarrowtail C$ и $g\colon B \rightarrowtail C$ задают один и тот же подобъект если и только если $\chi_f = \chi_g$.*

Доказательство. Пусть $f \simeq g$. Рисуем декартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_B"'] & C \arrow[d, "\chi_g"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Поскольку $f \simeq g$, существует изоморфизм h, пропускающий f через g

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, tail, "f"] \arrow[ddr, "!_A"'] & & \\
& B \arrow[r, tail, "g"'] \arrow[d, "!_B"] & C \arrow[d, "\chi_g"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Легко показать, что внешний квадрат тоже декартов, поэтому χ_g является характеристической стрелкой также и для f. В силу единственности характеристической стрелки $\chi_f = \chi_g$.

В обратную сторону, предположим, что $\chi_f = \chi_g$. Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, tail, "f"] \arrow[ddr, "!_A"'] & & \\
& B \arrow[r, tail, "g"'] \arrow[d, "!_B"] & C \arrow[d, "\chi_g"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Внутренний квадрат декартов. Так как $\chi_f = \chi_g$, внешний квадрат тоже декартов, поэтому коммутативен. В силу декартовости внутреннего квадрата, существует стрелка (пунктир), пропускающая f через g, поэтому $f \lesssim g$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, tail, "f"] \arrow[dr, dotted, tail] \arrow[ddr, "!_A"'] & & \\
& B \arrow[r, tail, "g"'] \arrow[d, "!_B"] & C \arrow[d, "\chi_g"] \\
& 1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Меняя f и g местами, точно так же получаем $g \lesssim f$, поэтому $f \simeq g$.
□

Определение 18.50. Категория называется *топосом*, если она:

1. декартово замкнута;
2. с уравнителями (равносильно „с декартовыми квадратами“);
3. имеет классификатор подобъектов.

Замечание 18.51. В топосах ещё многое есть, не очевидное из определения. Например, в каждом топосе есть начальный объект и копроизведения пар объектов.

Замечание 18.52. Локально малая категория K является топосом, если она:

1. декартово замкнута;
2. с уравнителями (равносильно „с декартовыми квадратами“);
3. функтор $\mathrm{Sub}\colon \mathsf{K}^{op} \to \mathsf{Set}$ представим.

Данное выше „элементарное“ определение не использует Set, не зависит от теоретико-множественных проблем, связанных с определением Sub и годится не только для локально малых категорий, хотя от последнего пользы мало.

Замечание 18.53. В любом топосе K подобъекты любого объекта, упорядоченные по включению, образуют алгебру Гейтинга. Доказать это не очень легко. В частности, подобъекты 1 образуют алгебру Гейтинга. Но поскольку

$$\mathrm{Sub}(1) \cong \mathsf{K}(1, \Omega)$$

то подобъекты 1 – это элементы Ω (значения истинности).

Пример 18.54. $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ является топосом для любой малой категории K. Мы уже строили всё, кроме классификатора. Определим классифицирующий объект в $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ (это функтор $\Omega\colon \mathsf{K} \to \mathsf{Set}$) таким способом

$$\Omega(A) = \mathrm{Sub}(H^A) \quad \text{для любого } A \in Ob(\mathsf{K})$$

Идея этого определения в том, что для классифицирующего объекта должны выполняться изоморфизмы

$$\Omega(A) \cong Nat(H^A, \Omega) \cong \mathrm{Sub}(H^A)$$

(первый – по лемме Йонеды). На стрелках функтор Ω действует так

$$\Omega(f) = \mathrm{Sub}(H^f)\colon \mathrm{Sub}(H^A) \to \mathrm{Sub}(H^B)$$

где $f\colon A \to B$
Стрелкой $\top\colon 1 \to \Omega$ будет естественное преобразование с компонентами

$$\top_A\colon 1 \to \mathrm{Sub}(H^A)$$

компонента выдаёт наибольший подобъект H^A.

Пример 18.55. Рассмотрим категорию $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$ над шкалой K

$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop left, "id_B"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"] \end{tikzcd}$$

Функторы H^A и H^B выглядят так

$$\begin{tikzcd} \{f\} & \{id_B\} \\ \{id_A\} \arrow[u, "f\circ"] & \{\emptyset\} \arrow[u, "f\circ"] \end{tikzcd}$$

Естественное преобразование $H^f\colon H^B \to H^A$ выглядит так

$$\begin{tikzcd}
\{id_B\} \arrow[r, "\circ f"] & \{f\} \\
\{\emptyset\} \arrow[u, "f\circ"] \arrow[r, "\circ f"] & \{id_A\} \arrow[u, "f\circ"']
\end{tikzcd}$$

У H^B два подобъекта

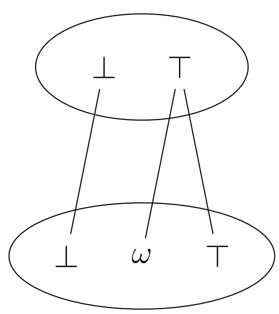
$$\begin{tikzcd}
\{\emptyset\} & \{id_B\} \\
\{\emptyset\} \arrow[u] & \{\emptyset\} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

У H^A три подобъекта

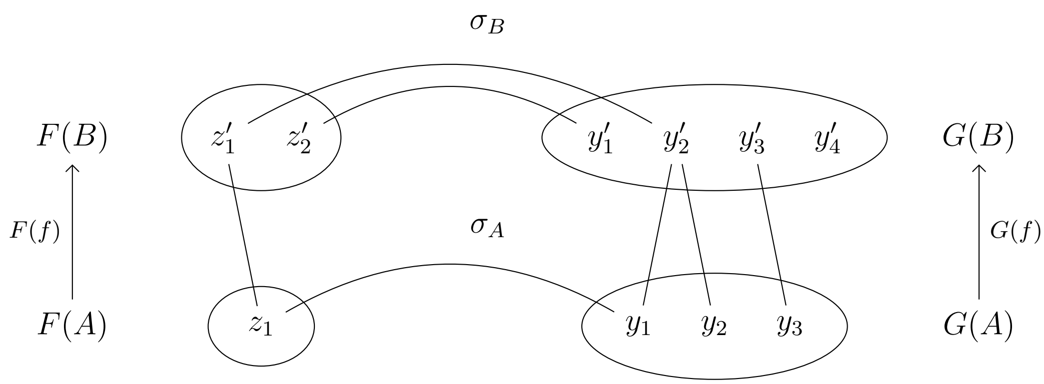
$$\begin{tikzcd}
\{\emptyset\} & \{f\} & \{f\} \\
\{\emptyset\} \arrow[u] & \{\emptyset\} \arrow[u] & \{id_A\} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Отображение $\mathrm{Sub}(H^f)\colon \mathrm{Sub}(H^A) \to \mathrm{Sub}(H^B)$ по каждому подобъекту H^A выдаёт его прообраз относительно H^f, получаем подобъект H^B.
Объект Ω в этой категории выглядит так

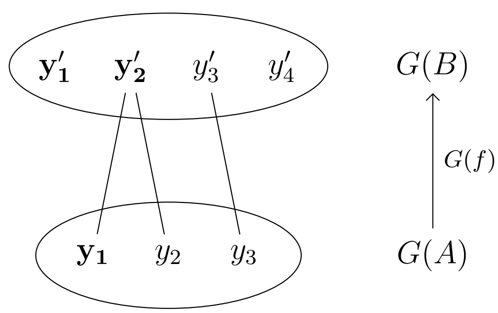
$$\begin{tikzcd}
\Omega(B) \\
\Omega(A) \arrow[u, "\Omega(f)"]
\end{tikzcd}$$



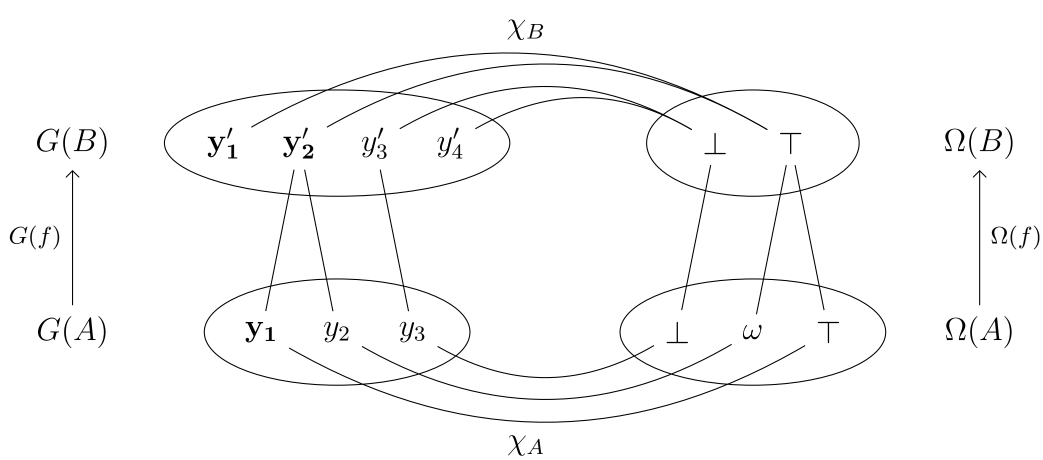
у него три элемента (три стрелки вида $\tau\colon 1 \to \Omega$), которые задаются парами $(\perp,\perp), (\omega,\top), (\top,\top)$. Выделенным элементом будет $(\top,\top)$, он и есть „истина“. Логика этого топоса трёхзначная.
Ниже показан некоторый мономорфизм $\sigma\colon F \rightarrowtail G$



который задаёт следующий подобъект (выделен жирным)



Характеристическая стрелка $\chi_\sigma \colon G \to \Omega$ для этого подобъекта выглядит так



Что же хотел сказать этой картинкой вдохновенный художник? На верхнем уровне (момент времени B) всё просто. Те элементы $G(B)$, которые принадлежат подобъекту, отображаются в $\top$, а те, которые не принадлежат, отображаются в $\bot$. На нижнем уровне (момент времени A) ситуация сложнее. Элемент $G(A)$ может принадлежать подобъекту (тогда он отображается в $\top$), может не принадлежать подобъекту, но попасть в него в будущем (тогда он отображается в ω), может не принадлежать и не попасть никогда (тогда он отображается в $\bot$).

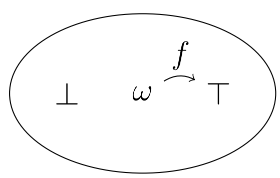
Пример 18.56. Рассмотрим полугруппу с единицей $M = \{e, f\}$, причём $f \circ f = f \neq e$. Рассмотрим M-множество $\Omega = \{\bot, \omega, \top\}$, на котором задано такое действие M

$$f(\bot) = \bot$$

$$f(\omega) = \top$$

$$f(\top) = \top$$

что мы неформально изобразим так

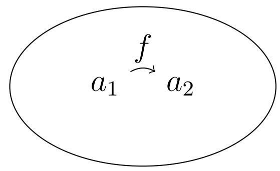


Это и есть классификатор подобъектов в категории M-множеств, а почему, догадайтесь сами. Заметим, что значений истинности (элементов Ω) в данном случае два ($\bot$ и $\top$, поскольку элементы M-множества – это неподвижные точки). Вообще, для любой полугруппы с единицей M в топосе M-множеств есть только два значения истинности, поскольку у терминального объекта только два подобъекта (терминальный объект – это множество $\{*\}$ с тривиальным действием)

Дальше я попробую объяснить на примере этого топоса, как в топосах интерпретировать логику. Возьмём какой-нибудь объект попроще, а именно M-множество $A = \{a_1, a_2\}$, на котором задано такое действие

$$f(a_1) = a_2$$

$$f(a_2) = a_2$$



У объекта A три подобъекта, которые задаются подмножествами $\emptyset, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$. Рассмотрим некоторый язык, на котором можно говорить об объекте A. Язык содержит

$x, y, z \ldots$ переменные

a_2 константа

$=$ знак равенства

$\wedge, \vee, \Rightarrow, \perp, \top, \neg$ логические связки

$\forall, \exists$ кванторы

Константы можно вводить только для теоретико-категорных элементов (то есть, неподвижных точек), иначе не получится никакой хорошей логики. Формулы с одной свободной переменной будут обозначать подобъекты A.
Формула $x = a_2$ обозначает подобъект $\{a_2\}$
Формула $x = x$ (тождественно истинная) обозначает подобъект $\{a_1, a_2\}$
Формула $\neg x = x$ (тождественно ложная) обозначает подобъект $\emptyset$
Формула $\neg x = a_2$ обозначает угадайте какой подобъект. Правильно, $\emptyset$, а не $\{a_1\}$, который вообще не является подобъектом. Отрицание – это самый большой подобъект, не пересекающийся с нашим.
Формула $x = a_2 \vee \neg x = a_2$ обозначает подобъект $\{a_2\}$ (объединение того, что обозначают $x = a_2$ и $\neg x = a_2$)
Формула $\forall x\, (x = a_2 \vee \neg x = a_2)$ имеет такой смысл: „для всех x верно $x = a_2 \vee \neg x = a_2$“. Эта формула не содержит свободных переменных, таким формулам (замкнутым, как говорят логики) соответствуют не подобъекты A, а значения истинности. Вообще, формулам с двумя свободными переменными соответствуют подобъекты $A \times A$, формулам с тремя свободными переменными – подобъекты $A \times A \times A$, формулам с нулём свободных переменных (замкнутым) – подобъекты 1 (значения истинности).
Так вот, формуле $\forall x\, (x = a_2 \vee \neg x = a_2)$ соответствует значение истинности „ложь“. Идея в том, что подобъект $\{a_2\}$, задаваемый формулой

$x = a_2 \vee \neg x = a_2$, не совпадает со всем A (то есть, с $\{a_1, a_2\}$). Таким образом, в этом топосе неверен закон исключённого третьего, хотя логика двузначная.
Формула $\neg\forall x\,(x = a_2 \vee \neg x = a_2)$ принимает логическое значение „истина“.
Из того, что значений истинности два ($\top$ и $\bot$), следует, что всякая замкнутая формула истинна или ложна, поэтому для любой замкнутой формулы α верен закон исключённого третьего

$$\alpha \vee \neg\alpha$$

Но для формулы со свободной переменной $\alpha(x)$ может быть истинна такая формула

$$\neg\forall x\,(\alpha(x) \vee \neg\alpha(x))$$

Вывод: с кванторами всё сложней, чем можно ожидать. Может быть, поможет такое замечание: подобъекты 1 в этом топосе образуют булеву алгебру из двух элементов ($\bot$ и $\top$), но подобъекты объекта A образуют алгебру Гейтинга из трёх элементов $\emptyset, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$, которая уже не является булевой.

Замечание 18.57. И теперь можно читать книгу Голдблатта „Топосы“. Книга написана на редкость бестолково, но содержит много интересной информации. Кого интересует логика, может почитать главу „Логика топосов“ в четвёртом томе „Справочной книги по математической логике“ под редакцией Барвайса. По-английски рекомендую читать книгу Lambek, Scott “Introduction to Higher Order Categorical Logic”. Есть ещё книга Джонстона, но она для профессионалов.

18.4 Относительные категории

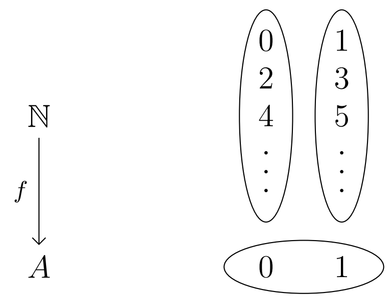
В этом разделе делается попытка объяснить, как на категорном языке говорить об индексированных семействах объектов. В Set мы можем говорить о семействе множеств B_i, индексированных элементами некоторого множества A (то есть $i \in A$). Попытка обобщить эту конструкцию на другие категории приводит к некоторой „ходьбе на голове“, которая с непривычки кажется странной. Тем не менее, польза есть, если мы, допустим, хотим интерпретировать типы, зависящие от параметра в исчислениях Мартин-Лёфа. При первом чтении раздел можно пропустить.

Определение 18.58. Пусть даны категория K и объект $A \in Ob(\mathsf{K})$. *Относительная категория над* A (обозначается K/A, в старых книгах $\mathsf{K}{\downarrow}A$) – это категория, объектами которой являются всевозможные стрелки с концом A, а морфизмом между $f_1\colon B \to A$ и $f_2\colon C \to A$ будет любая стрелка $g\colon B \to C$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & & C \arrow[dl, "f_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Композиции морфизмов и тождественные морфизмы в K/A наследуются из K.

Пример 18.59. В Set стрелка вида $f\colon B \to A$ задаёт набор множеств, индексированных элементами A. Каждому $a \in A$ сопоставим его прообраз $f^*(\{a\})$. Например, пусть $B = \mathbb{N}, A = \{0, 1\}$ и стрелка $f\colon \mathbb{N} \to A$ даёт остаток при делении на два. Прообразом нуля $f^*(\{0\})$ будет множество чётных натуральных чисел, а прообразом единицы $f^*(\{1\})$ – множество нечётных.



При таком способе мыслить стрелка $f\colon B \to A$ называется *расслоением над базой* A, множество B называется *пространством расслоения*, а прообразы элементов A – *слоями*. На картинке выше множество $\mathbb{N}$ распадается на два слоя. Заметим, что слои всегда попарно не пересекаются. В общем случае некоторые слои могут быть пустыми (если стрелка f не является сюръекцией). В обратную сторону, если задано семейство попарно непересекающихся множеств $\{B_a \mid a \in A\}$, можно сделать расслоение со слоями B_a, взяв в качестве B объединение $\bigcup_{a\in A} B_a$. Условие попарной дизъюнктности слоёв не очень существенно, как показывает следующий пример.

Пример 18.60. Пусть дано множество A. Обозначим через Set^A категорию, объектами которой являются произвольные семейства множеств вида $\{B_a \mid a \in A\}$ (не обязательно попарно дизъюнктные), а стрелкой из $\{B_a \mid a \in A\}$ в $\{C_a \mid a \in A\}$ будет любой набор функций $\{g_a\colon B_a \to C_a \mid a \in A\}$. Покажем, что категория Set/A эквивалентна категории Set^A.
Функтор эквивалентности из Set/A в Set^A выглядит так.
По объекту категории Set/A (стрелке вида $f\colon B \to A$) мы можем построить семейство множеств $\{B_a \mid a \in A\} = \{f^*(\{a\}) \mid a \in A\}$.
По морфизму категории Set/A

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & & C \arrow[dl, "f_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

мы можем построить семейство функций $\{g_a \colon B_a \to C_a \mid a \in A\}$, где $C_a = f_2^*(\{a\})$. Условие коммутативности $f_2 \circ g = f_1$ означает, что функция g отображает слой над $a \in A$ опять в слой над $a \in A$ (элементы $f_1^*(\{a\})$ переходят в элементы $f_2^*(\{a\})$ для каждого $a \in A$). Функции g_a получаются как ограничения функции g на B_a.
В обратную сторону, функтор эквивалентности из Set^A в Set/A строится так.
Если дано семейство множеств $\{B_a \mid a \in A\}$, возьмём их дизъюнктное объединение $B = \Sigma_{a \in A} B_a = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B_a\}$ и стрелку $f \colon B \to A$, определённую так

$$f(a, b) = a$$

Слой $f^*(\{a\})$ состоит из всех пар вида (a, b), где $b \in B_a$, он изоморфен B_a, но теперь слои попарно не пересекаются. Если дано семейство функций $\{g_a \colon B_a \to C_a \mid a \in A\}$, сопоставляем ему морфизм в Set/A

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_{a \in A} B_a \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & & \Sigma_{a \in A} C_a \arrow[dl, "f_2"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$$f_1(a, b) = a$$
$$f_2(a, c) = a$$
$$g(a, b) = (a, g_a(b))$$

Стрелку g можно обозначить $\Sigma_{a \in A}\, g_a$, это копроизведение семейства $\{g_a \mid a \in A\}$.
Содержательно, категории K/A есть обобщение категорий Set^A с Set на произвольные K.

Упражнение 18.61. Если в категории K есть терминальный объект, то $\mathsf{K}/1 \cong \mathsf{K}$

Пример 18.62. В категории вида K/A всегда есть терминальный объект, это стрелка $id_A \colon A \to A$, потому что

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & A \arrow[dl, "id_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

В Set стрелка id_A задаёт расслоение, где над каждым $a \in A$ висит слой из одного элемента $\{a\}$.
Элементами объекта f в K/A будут стрелки g со свойством $f \circ g = id_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "id_A"'] & & B \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

такие стрелки называются *сечениями* расслоения f. В Set такая стрелка g по каждому элементу $a \in A$ выдаёт некоторый элемент соответствующего слоя $g(a) \in f^*(\{a\})$

Пример 18.63. Возьмём мономорфизм $f\colon B \rightarrowtail A$ в Set. Над каждым $a \in A$ висит слой из одного элемента (если a принадлежит подмножеству) или пустой (если нет).

Пример 18.64. Возьмём функцию $pr_1\colon A \times B \to A$ в Set. Над каждым $a \in A$ висит слой, изоморфный B (множество всех пар (a, b) таких, что $b \in B$). Поэтому $\Sigma_{x \in A} B \cong A \times B$

Пример 18.65. Декартово произведение объектов $f_1\colon B \to A$ и $f_2\colon C \to A$ в K/A, если оно существует, задаётся некоторым объектом $h\colon D \to A$ и парой проекций p_1, p_2.

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, "h"'] & \\
B \arrow[dr, "f_1"'] & & C \arrow[dl, "f_2"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

Поскольку p_1 и p_2 являются морфизмами в K/A, должны быть выполнены равенства

$$f_1 \circ p_1 = h = f_2 \circ p_2$$

поэтому внешний квадрат должен быть коммутативен. Немного поразмыслив, приходим к выводу, что эта коммутативная диаграмма задаёт произведение в K/A если и только если внешний квадрат декартов.

Пример 18.66. Вспомним, что в Set декартовы квадраты строятся так: пусть даны две стрелки с общим концом

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "f_1"'] & & C \arrow[dl, "f_2"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

Достроим их до квадрата следующим способом

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, "h"'] & \\
B \arrow[dr, "f_1"'] & & C \arrow[dl, "f_2"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

где $D = \{(b,c) \in B \times C \mid f_1(b) = f_2(c)\}$, а p_1 и p_2 есть ограничения проекций $pr_1^{B\times C}$ и $pr_2^{B\times C}$ на множество $D \subseteq B \times C$.
Если ввести обозначения $B_a = f_1^*(\{a\})$ и $C_a = f_2^*(\{a\})$, то стрелка $h = f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2 \colon D \to A$ задаёт расслоение со слоями $B_a \times C_a$.

Замечание 18.67. Часто декартов квадрат изображают так

$$\begin{tikzcd} & B\times_A C \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ B \arrow[dr, "f_1"'] & & C \arrow[dl, "f_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

и называют объект $B \times_A C$ (вместе с проекциями p_1, p_2) „послойным произведением". Обозначение неудачно, потому что операция применяется не к объектам A, B и C, а к паре стрелок f_1 и f_2. Топологи в этом случае правильно говорят о „послойном произведении отображений f_1 и f_2". Разумно было бы писать что-то вроде $f_1 \underset{A}{\times} f_2$, но это уже не от меня зависит.

Пример 18.68. Возьмём категорию K и в ней объект A. Определим функтор $\Sigma_A\colon \mathsf{K}/A \to \mathsf{K}$. По объекту $f\colon B \to A$ категории K/A функтор Σ_A выдаёт B. По стрелке g категории K/A функтор Σ_A выдаёт g.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & & C \arrow[dl, "f_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

В Set этот функтор фактически по семейству множеств $\{B_a \mid a \in A\}$ выдаёт их дизъюнктное объединение $\Sigma_{a\in A} B_a \cong B$, отсюда и обозначение.

Определение 18.69. Возьмём категорию K и в ней стрелку $h\colon A \to B$. Определим функтор $\Sigma_h\colon \mathsf{K}/A \to \mathsf{K}/B$.
Функтор Σ_h переводит объект $f\colon C \to A$ категории K/A в объект $h \circ f\colon C \to B$ категории K/B.
Стрелка g категории K/A переходит в стрелку g категории K/B

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & C_2 \arrow[d, "f_2"] & \\ & A \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Упражнение 18.70. В Set функтор Σ_h действует так. Пусть дано семейство множеств $\{C_a \mid a \in A\}$. Возьмём элемент $b \in B$. В него переходят некоторые элементы $a \in A$ (то есть $h(a) = b$). Повесим над b дизъюнктное объединение соответствующих C_a и получим семейство множеств $\{\Sigma_{a\in A} C_a \mid h(a) = b\}$, индексированное элементами $b \in B$.
По семейству функций $\{g_a \mid a \in A\}$ функтор Σ_h выдаёт семейство функций $\{\Sigma_{a\in A} g_a \mid h(a) = b\}$, индексированное элементами $b \in B$.
Функтор Σ_A из предыдущего примера получается, если в K есть 1, тогда $\mathsf{K} \cong \mathsf{K}/1$ и в качестве h надо взять стрелку $!_A \colon A \to 1$

Теорема 18.71. *Пусть K – категория с декартовыми квадратами. Более того, мы потребуем, чтобы для любой пары стрелок с общим концом был выбран какой-то декартов квадрат из всех возможных (напомню, что декартовы квадраты определены с точностью до изоморфизма). Тогда для любой стрелки h к функтору Σ_h есть правый сопряжённый.*

Доказательство. Возьмём любые два объекта A, B и произвольную стрелку между ними $h\colon A \to B$. Докажем, что есть функтор

$$h^*\colon \mathsf{K}/B \to \mathsf{K}/A \ \text{ такой, что } \Sigma_h \dashv h^*$$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}/A \arrow[r, shift left, "\Sigma_h"] & \mathsf{K}/B \arrow[l, shift left, "h^*"] \end{tikzcd}$$

Мы определим операцию на объектах $h^*\colon Ob(\mathsf{K}/B) \to Ob(\mathsf{K}/A)$ и применим Теорему 12.26.
Чтобы понять сопряжённость, обозначим объекты K/A буквами a, b, c, а объекты K/B буквами X, Y, Z. Определение $h^*(X)$ выглядит так

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "h^*(X)"'] & C \arrow[d, "X"] \\ A \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

где квадрат декартов и верхнюю стрелку обозначили ε_X. Таким образом, $h^*(X)$ – это подъём X вдоль h. Это тот же h^*, который мы раньше применяли к мономорфизмам, теперь мы применяем его к произвольным объектам K/B.

Заметим, что ε_X является морфизмом в K/B между $h \circ h^*(X)$ и X, то есть между $\Sigma_h(h^*(X))$ и X.

Пусть дан произвольный объект a и морфизм f между объектами $\Sigma_h(a)$ и X, то есть между $h \circ a$ и X

$$\begin{tikzcd} D \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "a"'] & & \\ & C' \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "h^*(X)"] & C \arrow[d, "X"] \\ & A \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Внешний квадрат коммутативен, поскольку f является морфизмом в K/B. Внутренний квадрат декартов, поэтому есть единственная стрелка из a в $h^*(X)$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} D \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "a"'] \arrow[dr, dotted] & & \\ & C' \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "h^*(X)"] & C \arrow[d, "X"] \\ & A \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Эта стрелка и есть $\Gamma(f)$. Из диаграммы следует $\varepsilon_X \circ \Gamma(f) = f$, то есть $\varepsilon_X \circ \Sigma_h(\Gamma(f)) = f$, поскольку функтор Σ_h не меняет стрелки.

□

Следствие 18.72. *Функторы h^*, являясь правыми сопряжёнными, сохраняют произведения. Точнее $h^*\colon \mathsf{K}/B \to \mathsf{K}/A$ переводит любые произведения из K/B в произведения в K/A. В частности, все h^* сохраняют пересечения любых семейств мономорфизмов, которые есть в K/B. Ещё проще: прообраз пересечения семейства мономорфизмов есть пересечение их прообразов.*

Замечание 18.73. Мы определили действие h^* только на объектах K/B. Стандартным образом (Теорема 12.26) определяется действие на морфизмах. Морфизм g категории K/B под действием функтора h^* переходит в стрелку, отмеченную пунктиром на следующей диаграмме

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rrr] \arrow[dr, dotted] \arrow[ddr, "h^*(X)"'] & & & C_1 \arrow[dl, "g"'] \arrow[ddl, "X"] \\
& {} \arrow[r] \arrow[d, "h^*(Y)"] & C_2 \arrow[d, "Y"'] & \\
& A \arrow[r, "h"] & B &
\end{tikzcd}$$

Если в качестве X, Y брать мономорфизмы, то стрелка g единственно возможная и картинка изображает монотонность h^* на мономорфизмах.

Упражнение 18.74. В Set функтор h^* по семейству множеств $\{C_b \mid b \in B\}$ выдаёт семейство множеств $\{C_{h(a)} \mid a \in A\}$. По семейству функций $\{g_b \mid b \in B\}$ он выдаёт семейство функций $\{g_{h(a)} \mid a \in A\}$. Таким образом, функтор h^* осуществляет замену индексов или подстановку чего-то вместо параметра (а именно $h(a)$ вместо b).

Замечание 18.75. В Set и во всех топосах к каждому функтору h^* есть не только левый сопряжённый Σ_h, но и правый сопряжённый Π_h и картина выглядит так $\Sigma_h \dashv h^* \dashv \Pi_h$

В Set функтор Π_h действует так. Пусть дано семейство множеств $\{C_a \mid a \in A\}$. Возьмём элемент $b \in B$. В него переходят некоторые элементы $a \in A$ (то есть $h(a) = b$). Повесим над b произведение соответствующих C_a и получим семейство множеств $\{\Pi_{a \in A} C_a \mid h(a) = b\}$, индексированное элементами $b \in B$.

Напоследок очень кратко о теориях Мартин-Лёфа (это надо писать отдельно). Допустим, у нас есть тип (это как бы множество) A и тип $B(x)$, зависящий от параметра, где $x \in A$. Это записывается примерно так

$$x \in A \vdash B(x) : Type$$

Например, возьмём тип списков $List(x)$, где x – длина списка, тогда

$$x \in \mathbb{N} \vdash List(x) : Type$$

„если x – натуральное число, то $List(x)$ – тип“. В категориях типы без параметров интерпретируются как объекты, а типы с параметрами как расслоения. В Set мы берём множество $\Sigma_{x\in\mathbb{N}} List(x)$ (это множество всех списков любой длины) и строим расслоение

$$\begin{tikzcd} \Sigma_{x\in\mathbb{N}} List(x) \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

где функция f выдаёт по списку его длину (над каждым натуральным числом n висит множество списков длины n)
В общем случае, секвенция

$$x \in A \vdash B(x) : Type$$

интерпретируется как некоторая стрелка

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] \\ A \end{tikzcd}$$

В этом случае тип $\Sigma_{x\in A} B(x)$ будет интерпретироваться просто как объект B.
Допустим, написано выражение

$$x \in A \vdash g(x) : B(x)$$

это значит „если x – элемент типа A, то $g(x)$ – элемент типа $B(x)$“. Например, мы можем ввести функцию g, которая по каждому натуральному числу n выдаёт некоторый список длины n (допустим, список $000\ldots0$ длины n), тогда мы напишем

$$x \in \mathbb{N} \vdash g(x) : List(x)$$

На категорном языке g интерпретируется как стрелка $g\colon A \to B$ со свойством $f \circ g = id_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "id_A"'] & & B \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Пусть даны два типа без параметров и тип, зависящий от параметра

$$A : Type$$

$$B : Type$$

$$x \in B \vdash C(x) : Type$$

интерпретация такая

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "f"] \\ A & B \end{tikzcd}$$

Пусть также задан элемент B, зависящий от параметра

$$x \in A \vdash g(x) : B$$

В данном простом случае интерпретация такая

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Мы можем определить новый тип

$$x \in A \vdash C(g(x)) : Type$$

Интерпретация его будет такой

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[d, "g^*(f)"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Более сложный случай

$$A : Type$$

$$x \in A \vdash B(x) : Type$$

$$x \in A, y \in B(x) \vdash C(x, y) : Type$$

Интерпретация такая

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f_2"] \\ B \arrow[d, "f_1"] \\ A \end{tikzcd}$$

Объект B – это $\Sigma_{x \in A} B(x)$, в Set это множество пар вида (x, y), где $x \in A, y \in B(x)$.
Мы можем навесить сигму на $C(x, y)$ и определить новый тип

$$x \in A \vdash \Sigma_{y \in B(x)} C(x, y) : Type$$

интерпретация его будет такой

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f_1 \circ f_2"] \\ A \end{tikzcd}$$

Можно навесить ещё одну сигму и получить тип

$$\Sigma_{x \in A} \Sigma_{y \in B(x)} C(x, y) : Type$$

его интерпретацией будет просто объект C.
Случай чуть попроще

$$A : Type$$

$$B : Type$$

$$x \in A, y \in B \vdash C(x, y) : Type$$

здесь тип B без параметра. Интерпретация выглядит так

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f_2"] \\ A \times B \arrow[d, "pr_1"] \\ A \end{tikzcd}$$

поскольку $\Sigma_{x \in A} B \cong A \times B$
Это набросок, есть много трудностей.

Глава 19

Монады

Монады – довольно специальная математическая конструкция и я не стал бы о них писать, если бы их не добавили в языки программирования. Я также не уверен, что они там нужны, но это решать программистам, а я попытаюсь объяснить технические детали. Дальнейший текст книги от этой главы, видимо, мало зависит.

Если воспринимать категории как „обобщённые частично упорядоченные множества", то монада – это „обобщённый оператор замыкания".

Определение 19.1. Пусть K – упорядоченное множество (можно брать и предпорядок). *Оператором замыкания* на множестве K называется отображение $T\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ со следующими свойствами

1. $\dfrac{A \leqslant B}{T(A) \leqslant T(B)}$ (монотонность)
2. $A \leqslant T(A)$
3. $T(T(A)) \leqslant T(A)$

для любых $A, B \in \mathsf{K}$.

Замечание 19.2. Для упорядоченных множеств можно записывать третью аксиому в форме

$$T(T(A)) = T(A)$$

но в таком виде она не обобщается на монады.

Пример 19.3. Возьмём в качестве K множество всех фигур на плоскости, упорядоченное по включению. Для каждой фигуры A в качестве $T(A)$ возьмём её выпуклую оболочку (я не буду здесь вставлять картинку выпуклой оболочки, но её легко найти).

Пример 19.4. Возьмём в качестве K любую алгебру Гейтинга, например множество из трёх элементов $\{\bot, \omega, \top\}$, где $\bot \leqslant \omega \leqslant \top$. Положим

$$T(A) = \neg\neg A$$

Это оператор замыкания, поскольку выводимы правила

1. $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\neg\neg\alpha \vdash \neg\neg\beta}$
2. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$
3. $\neg\neg(\neg\neg\alpha) \vdash \neg\neg\alpha$

и поэтому в любой алгебре Гейтинга верно

1. $\dfrac{A \leqslant B}{\neg\neg A \leqslant \neg\neg B}$
2. $A \leqslant \neg\neg A$
3. $\neg\neg(\neg\neg A) \leqslant \neg\neg A$

На алгебре $\{\bot, \omega, \top\}$ этот оператор действует так

$$\neg\neg\top = \top$$

$$\neg\neg\omega = \top$$

$$\neg\neg\bot = \bot$$

Напомню, что $\neg A$ – это наибольший элемент B со свойством $A \wedge B = \bot$, поэтому $\neg\omega = \bot$.

Определение 19.5. Пусть K – упорядоченное множество (можно брать и предпорядок). *Оператором замыкания* на множестве K называется отображение $T\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$ со следующими свойствами

1. $A \leqslant T(A)$
2. $\dfrac{A \leqslant T(B)}{T(A) \leqslant T(B)}$

для любых $A, B \in \mathsf{K}$.

Теорема 19.6. *Определения 19.1 и 19.5 равносильны между собой.*

Доказательство. Пусть верны условия

1. $\dfrac{A \leqslant B}{T(A) \leqslant T(B)}$
2. $A \leqslant T(A)$
3. $T(T(A)) \leqslant T(A)$

Тогда правило

$$\frac{A \leqslant T(B)}{T(A) \leqslant T(B)}$$

можно доказать так

$$\frac{\dfrac{A \leqslant T(B)}{T(A) \leqslant T(T(B))}\,1 \qquad T(T(B)) \leqslant T(B)^3}{T(A) \leqslant T(B)}$$

где цифры показывают номера использованных правил, а последний шаг по транзитивности порядка.

В обратную сторону, пусть верны правила

1. $A \leqslant T(A)$
2. $\dfrac{A \leqslant T(B)}{T(A) \leqslant T(B)}$

Тогда правило

$$\frac{A \leqslant B}{T(A) \leqslant T(B)}$$

можно доказать так

$$\dfrac{\dfrac{A \leqslant B \quad B \leqslant T(B)^1}{A \leqslant T(B)}}{T(A) \leqslant T(B)}\,2$$

Правило $T(T(A)) \leqslant T(A)$ можно доказать так (начинаем с рефлексивности порядка)

$$\frac{T(A) \leqslant T(A)}{T(T(A)) \leqslant T(A)}\,2$$

□

Теорема 19.7. *Для операторов замыкания верно следующее правило*

$$\frac{A \leqslant T(B) \quad B \leqslant T(C)}{A \leqslant T(C)}$$

Доказательство. Пусть верны условия

1. $A \leqslant T(A)$
2. $\dfrac{A \leqslant T(B)}{T(A) \leqslant T(B)}$

Тогда правило

$$\frac{A \leqslant T(B) \quad B \leqslant T(C)}{A \leqslant T(C)}$$

можно доказать так

$$\frac{A \leqslant T(B) \qquad \dfrac{B \leqslant T(C)}{T(B) \leqslant T(C)}\,2}{A \leqslant T(C)}$$

□

Теорема 19.8. *Пусть даны два упорядоченных множества* K *и* K_1 *(можно брать и предпорядки) и два отображения*

$$F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}_1$$

$$G\colon \mathsf{K}_1 \to \mathsf{K}$$

со следующими свойствами

1. $\dfrac{A \leqslant B}{F(A) \leqslant F(B)}$ *(монотонность F)*

2. $\dfrac{X \leqslant Y}{G(X) \leqslant G(Y)}$ *(монотонность G)*

3. $F(A) \leqslant X \Leftrightarrow A \leqslant G(X)$

для любых $A, B \in \mathsf{K}$ и $X, Y \in \mathsf{K}_1$
(это означает, что $F \dashv G$, если воспринимать K и K_1 как категории).
Тогда отображение

$$G \circ F \colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$$

является оператором замыкания.

Доказательство. Для краткости буду обозначать $G \circ F$ просто GF. Докажем свойства оператора замыкания

$$A \leqslant GF(A)$$

$$\frac{A \leqslant GF(B)}{GF(A) \leqslant GF(B)}$$

Первое (начинаем с рефлексивности порядка)

$$\frac{F(A) \leqslant F(A)}{A \leqslant GF(A)}\,3$$

Второе

$$\frac{\dfrac{A \leqslant GF(B)}{F(A) \leqslant F(B)}\,3}{GF(A) \leqslant GF(B)}\,2$$

□

Теорема 19.9. *Пусть дан оператор замыкания $T \colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$. Существует пара сопряжённых монотонных отображений $F \dashv G$*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_1 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

таких, что $T = G \circ F$

Доказательство. Положим

$$\mathsf{K}_1 = \{B \in \mathsf{K} \mid T(B) \leqslant B\}$$

с порядком, унаследованным из K.
Положим

$$F(A) = T(A)$$
$$G(B) = B$$

для всех $A \in \mathsf{K}, B \in \mathsf{K}_1$.
Заметим, что $F(A) \in \mathsf{K}_1$, поскольку $T(T(A)) \leqslant T(A)$. Непосредственно видно, что оба отображения монотонны и $G \circ F = T$. Мы знаем следующие факты

1. $\dfrac{A \leqslant B}{T(A) \leqslant T(B)}$ (монотонность)
2. $A \leqslant T(A)$
3. $T(B) \leqslant B$ если $B \in \mathsf{K}_1$

Покажем, что

$$F(A) \leqslant B \Leftrightarrow A \leqslant G(B) \quad \text{если } B \in \mathsf{K}_1$$

По определению F, G это означает

$$T(A) \leqslant B \Leftrightarrow A \leqslant B \quad \text{если } B \in \mathsf{K}_1$$

Слева направо

$$\frac{A \leqslant T(A)^2 \quad T(A) \leqslant B}{A \leqslant B}$$

Справа налево

$$\frac{\dfrac{A \leqslant B}{T(A) \leqslant T(B)}\,1 \qquad T(B) \leqslant B^3}{T(A) \leqslant B}$$

□

Пример 19.10. Для алгебры Гейтинга $\mathsf{K} = \{\bot, \omega, \top\}$ и оператора замыкания

$$T(A) = \neg\neg A$$

в качестве K_1 получаем подмножество $\{\bot, \top\}$ элементов, для которых выполнен закон двойного отрицания

$$\neg\neg A = A$$

Пример 19.11. Для оператора выпуклой оболочки в качестве K_1 получаем множество всех выпуклых фигур. Выпуклая оболочка $T(A)$ фигуры A – это наименьшее выпуклое множество B такое, что $A \subseteq B$

$$T(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \quad \text{если } B \in \mathsf{K}_1$$

Определение 19.12. *Монадой* в категории K называется тройка (T, η, Ψ)

$$T\colon Ob(\mathsf{K}) \to Ob(\mathsf{K})$$

$$\eta_A\colon A \to T(A) \qquad \text{для каждого } A \in Ob(\mathsf{K})$$

$$\frac{g\colon A \to T(B)}{\Psi(g)\colon T(A) \to T(B)} \quad \text{операция на стрелках}$$

(здесь A, B – любые объекты K)
Строго говоря, при Ψ надо ставить индексы и писать что-то вроде

$$\Psi_{A,B}\colon \mathsf{K}(A, T(B)) \to \mathsf{K}(T(A), T(B))$$

Кроме того, должны выполняться следующие равенства

$$\Psi(g) \circ \eta = g$$

$$\Psi(\eta) = id$$

$$\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

Заметим, что T – не функтор, а только операция на объектах.

Замечание 19.13. Пояснение к первому равенству (проверка типов)

$$\frac{\eta_A\colon A \to T(A) \qquad \dfrac{g\colon A \to T(B)}{\Psi(g)\colon T(A) \to T(B)}}{\Psi(g) \circ \eta_A\colon A \to T(B)}$$

Ко второму

$$\frac{\eta\colon A \to T(A)}{\Psi(\eta_A)\colon T(A) \to T(A)}$$

К третьему

$$\dfrac{f\colon A\to T(B) \qquad \dfrac{g\colon B\to T(C)}{\Psi(g)\colon T(B)\to T(C)}}{\dfrac{\Psi(g)\circ f\colon A\to T(C)}{\Psi(\Psi(g)\circ f)\colon T(A)\to T(C)}} \qquad \dfrac{\dfrac{f\colon A\to T(B)}{\Psi(f)\colon T(A)\to T(B)} \qquad \dfrac{g\colon B\to T(C)}{\Psi(g)\colon T(B)\to T(C)}}{\Psi(g)\circ\Psi(f)\colon T(A)\to T(C)}$$

Замечание 19.14. В языке Haskell вместо $T(A)$ пишут ma, операцию Ψ (с некоторой перестановкой аргументов) обозначают $>>=$, а стрелку η называют return. Кроме того, во многих программистских опусах записывают композицию в обратном порядке (вместо $g\circ f$ пишут fg или $f;g$), это действительно часто бывает удобным. Но глубоко вникать в язык Haskell я не буду, поскольку его не знаю.

Пример 19.15. Рассмотрим монаду в Set

$$T(A) = A+1$$
$$\eta_A = k_1\colon A\to A+1$$
$$\Psi(g) = [g,k_2]\colon A+1\to B+1 \quad \text{где } g\colon A\to B+1$$

Таким образом, с точностью до изоморфизма

$T(A)$ – это множество $A\cup\{*\}$, где $*\notin A$

$\eta_A(a) = a$ для любого $a\in A$

$\Psi(g)(a) = g(a)$ для любого $a\in A$

$\Psi(g)(*) = *$

Таким образом, $T(A)$ – это множество A с добавленным новым элементом $*$
Функция η_A вкладывает A в $A\cup\{*\}$
Оператор Ψ продолжает функцию $g\colon A\to B\cup\{*\}$ до функции
$\Psi(g)\colon A\cup\{*\}\to B\cup\{*\}$, полагая $\Psi(g)(*) = *$
Стрелки вида $g\colon A\to T(B)$ соответствуют частичным (не всюду определённым) функциям из A в B (там, где функция не определена, она принимает значение $*$)

Пример 19.16. Рассмотрим такую монаду в Set

$$T(A) = P(A) \quad \text{множество подмножеств } A$$

$$\eta_A(a) = \{a\} \quad \text{где } a \in A$$
$$\Psi(g)(X) = \cup\{g(a) \mid a \in X\} \quad \text{где } g\colon A \to P(B)$$

Таким образом,
$\eta_A\colon A \to P(A)$ по каждому элементу $a \in A$ выдаёт множество $\{a\}$.
$\Psi(g)\colon P(A) \to P(B)$ по каждому подмножеству $X \subseteq A$ выдаёт объединение множеств $g(a)$ для всех $a \in X$.
Стрелки вида $g\colon A \to T(B)$ – это многозначные функции из A в B. Каждая такая функция по элементу A выдаёт подмножество B (не один результат, а много).

Определение 19.17. Пусть дана монада (T, η, Ψ) в категории K. Определим новую операцию на стрелках $g * f$

$$\frac{f\colon A \to T(B) \quad g\colon B \to T(C)}{g * f\colon A \to T(C)}$$

следующим способом

$$g * f = \Psi(g) \circ f$$

$$\frac{f\colon A \to T(B) \qquad \dfrac{g\colon B \to T(C)}{\Psi(g)\colon T(B) \to T(C)}}{\Psi(g) \circ f\colon A \to T(C)}$$

Для операторов замыкания это соответствует Теореме 19.7.
Заметим, что аксиома

$$\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

из определения монады теперь может быть записана так

$$\Psi(g * f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

Определение 19.18. Пусть дана монада (T, η, Ψ) в категории K. *Категорией Клейсли* этой монады будем называть категорию K_T, определённую следующим образом

1. Объекты в K_T те же, что в K.
2. Стрелками из A в B в K_T считаются стрелки из A в $T(B)$ в K.

3. Композицией стрелок в K_T является $g * f$

$$\frac{f\colon A \to T(B) \quad g\colon B \to T(C)}{g * f\colon A \to T(C)}$$

4. Тождественной стрелкой id_A в K_T является $\eta_A\colon A \to T(A)$

Замечание для зануд: строго говоря, стрелки из A в $T(B)$ в K – это ещё не морфизмы, а протоморфизмы из A в B в K_T. Дело в том, что по стрелке $f\colon A \to T(B)$ объект B однозначно не восстанавливается, поскольку для разных объектов $B_1 \neq B_2$ может оказаться $T(B_1) = T(B_2)$. В качестве морфизма можно брать пару (f, B).

Чтобы проверить, что категория Клейсли действительно является категорией, докажем следующую теорему.

Теорема 19.19. *Операция $g * f$ имеет такие свойства*

$$(h * g) * f = h * (g * f)$$

$$g * \eta = g$$

$$\eta * g = g$$

(ассоциативность композиции и свойства двусторонних единиц)

Доказательство. Выпишем аксиомы монад

1. $\Psi(g) \circ \eta = g$
2. $\Psi(\eta) = id$
3. $\Psi(g * f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$

и докажем

$$\begin{aligned}
&(h * g) * f = \\
&= \Psi((h * g) * f) \circ \eta && \text{аксиома 1} \\
&= \Psi(h) \circ \Psi(g) \circ \Psi(f) \circ \eta && \text{аксиома 3} \\
&= \Psi(h * (g * f)) \circ \eta && \text{аксиома 3} \\
&= h * (g * f) && \text{аксиома 1}
\end{aligned}$$

и дальше

$$
\begin{aligned}
&g * \eta = \\
&= \Psi(g) \circ \eta && \text{по определению } * \\
&= g && \text{аксиома 1}
\end{aligned}
$$

и наконец

$$
\begin{aligned}
&\eta * g = \\
&= \Psi(\eta) \circ g && \text{по определению } * \\
&= id \circ g && \text{аксиома 2} \\
&= g
\end{aligned}
$$

□

Замечание 19.20. Для программистов представляет интерес именно категория Клейсли. Идея в том, что стрелки вида $f\colon A \to T(B)$ можно представлять как „функции из A в B с некоторым прибамбахом“, например, многозначные, не всюду определённые, имеющие побочный эффект или ещё какие.

Пример 19.21. Для монады из Примера 19.15 стрелки вида $g\colon A \to T(B)$ соответствуют частичным (не всюду определённым) функциям из A в B и мы получаем в качестве Set_T категорию множеств и их частичных отображений.

Пример 19.22. Для монады из Примера 19.16 стрелки вида $g\colon A \to T(B)$ – это многозначные функции из A в B. Композиция стрелок $f\colon A \to T(B)$ и $g\colon B \to T(C)$ в категории Клейсли этой монады выглядит так

$$
\begin{aligned}
&g * f = \Psi(g) \circ f \\
&(g * f)(a) = \Psi(g)(f(a)) = \cup\{g(b) \mid b \in f(a)\}
\end{aligned}
$$

Каждой стрелке $f\colon A \to T(B)$ сопоставим отношение $R_f(a, b)$ между элементами A и элементами B

$$R_f(a, b) \text{ если и только если } b \in f(a)$$

Тогда композиции стрелок $g * f$ соответствует так называемая композиция отношений

$$(R_g \circ R_f)(a, c) \Leftrightarrow \exists_{b \in B}(R_f(a, b) \wedge R_g(b, c)) \Leftrightarrow \exists_{b \in B}(b \in f(a) \wedge c \in g(b))$$

Таким образом, категория Клейсли этой монады изоморфна категории множеств и отношений между ними.

Далее мы докажем для монад аналог Теоремы 19.8.

Теорема 19.23. *Пусть дана пара сопряжённых функторов* $F \dashv G$

$$\mathsf{K} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_1$$

и соответствующие преобразования Φ, Γ

$$\frac{g\colon A \to G(X)}{\Phi(g)\colon F(A) \to X} \qquad \frac{f\colon F(A) \to X}{\Gamma(f)\colon A \to G(X)}$$

Полагаем

$$T = G \circ F\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$$
$$\eta = \Gamma(id)$$
$$\Psi(g) = G(\Phi(g))$$

$$\frac{id_{F(A)}\colon F(A) \to F(A)}{\Gamma(id_{F(A)})\colon A \to GF(A)} \qquad \cfrac{\cfrac{g\colon A \to GF(B)}{\Phi(g)\colon F(A) \to F(B)}}{G\Phi(g)\colon GF(A) \to GF(B)}$$

Тройка (T, η, Ψ) *является монадой в категории* K.

Доказательство. Выпишем аксиомы сопряжённости

1. $\Gamma(\Phi(g)) = g$
2. $\Phi(\Gamma(f)) = f$
3. $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$
4. $\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$
5. $\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$

6. $\Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$

(эта система аксиом избыточна, но мы не будем экономить). Докажем свойства монады

$$\Psi(g) \circ \eta = g$$
$$\Psi(\eta) = id$$
$$\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

Первое

$$\begin{aligned}
&\Psi(g) \circ \eta = \\
&= G\Phi(g) \circ \eta && \text{по определению } \Psi \\
&= G\Phi(g) \circ \Gamma(id) && \text{по определению } \eta \\
&= \Gamma(\Phi(g) \circ id) && \text{аксиома 4} \\
&= \Gamma\Phi(g) \\
&= g && \text{аксиома 1}
\end{aligned}$$

Второе

$$\begin{aligned}
&\Psi(\eta) = \\
&= G\Phi(\eta) && \text{по определению } \Psi \\
&= G\Phi\Gamma(id) && \text{по определению } \eta \\
&= G(id) && \text{аксиома 2} \\
&= id
\end{aligned}$$

Третье

$$\begin{aligned}
&\Psi(\Psi(g) \circ h) = \\
&= G\Phi(\Psi(g) \circ h) && \text{по определению } \Psi \\
&= G\Phi(G\Phi(g) \circ h) && \text{по определению } \Psi \\
&= G(\Phi(g) \circ \Phi(h)) && \text{аксиома 5} \\
&= G\Phi(g) \circ G\Phi(h) && \text{функториальность } G \\
&= \Psi(g) \circ \Psi(h) && \text{по определению } \Psi
\end{aligned}$$

□

Пример 19.24. Пусть K – декартово замкнутая категория, $C \in Ob(\mathsf{K})$. Рассмотрим два сопряжённых функтора $F \dashv G$

$$F(A) = A \times C$$
$$G(A) = A^C$$

и соответствующую монаду

$$T(A) = (A \times C)^C$$

Стрелки вида $g\colon A \to T(B)$, то есть $g\colon A \to (A \times C)^C$, взаимно однозначно соответствуют стрелкам вида $f\colon A \times C \to B \times C$. Таким образом, стрелка $f\colon A \to B$ в категории Клейсли – это, по сути, стрелка вида $f\colon A \times C \to B \times C$ в K.
Такие стрелки можно представлять как некие „вычисления с побочными эффектами". Если C – это некое „множество состояний", то функция вида $f\colon A \times C \to B \times C$ по элементу A и состоянию выдаёт элемент B (результат вычисления) и новое состояние.

Пример 19.25. Рассмотрим пару сопряжённых функторов $F \dashv G$

$$\mathsf{Set} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathsf{Grp}$$

где $F(A)$ – свободная группа, порождённая множеством A, а $G(X)$ – множество-носитель группы X. Стрелки вида $g\colon A \to T(B)$, то есть $g\colon A \to GF(B)$ взаимно однозначно соответствуют стрелкам вида $f\colon F(A) \to F(B)$. То есть, гомоморфизмам свободных групп. Каждый объект A категории Клейсли определяет свободную группу $F(A)$, стрелки из A в B в категории Клейсли соответствуют гомоморфизмам из $F(A)$ в $F(B)$. Таким образом, категория Клейсли этой монады изоморфна категории свободных групп.

Теорема 19.26. *Пусть дана монада (T, η, Ψ) в категории K. Определим действие T на стрелках следующим образом*

$$T(h) = \Psi(\eta \circ h)$$

$$\cfrac{\cfrac{h\colon A \to B \quad \eta_B\colon B \to T(B)}{\eta_B \circ h\colon A \to T(B)}}{\Psi(\eta_B \circ h)\colon T(A) \to T(B)}$$

Тогда T становится функтором, а η и Ψ естественными преобразованиями, что означает выполнение следующих равенств

$$T(id) = id$$
$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$
$$T(h) \circ \eta = \eta \circ h$$
$$\Psi(g \circ h) = \Psi(g) \circ T(h)$$
$$\Psi(T(h) \circ g) = T(h) \circ \Psi(g)$$

Доказательство. Выпишем аксиомы монады

1. $\Psi(g) \circ \eta = g$
2. $\Psi(\eta) = id$
3. $\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$

и докажем нужные свойства

$$T(id) = id$$
$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$
$$T(h) \circ \eta = \eta \circ h$$
$$\Psi(g \circ h) = \Psi(g) \circ T(h)$$
$$\Psi(T(h) \circ g) = T(h) \circ \Psi(g)$$

Первое

$$\begin{aligned}
&T(id) = \\
&= \Psi(\eta \circ id) && \text{по определению } T \\
&= \Psi(\eta) \\
&= id && \text{аксиома 2}
\end{aligned}$$

Второе

$$\begin{aligned}
&T(g) \circ T(f) = \\
&= \Psi(\eta \circ g) \circ \Psi(\eta \circ f) && \text{по определению } T \\
&= \Psi(\Psi(\eta \circ g) \circ \eta \circ f) && \text{аксиома 3} \\
&= \Psi(\eta \circ g \circ f) && \text{аксиома 1} \\
&= T(g \circ f) && \text{по определению } T
\end{aligned}$$

Третье

$$\begin{aligned}
&T(h) \circ \eta = \\
&= \Psi(\eta \circ h) \circ \eta && \text{по определению } T \\
&= \eta \circ h && \text{аксиома 1}
\end{aligned}$$

Четвёртое

$$\begin{aligned}
&\Psi(g) \circ T(h) = \\
&= \Psi(g) \circ \Psi(\eta \circ h) && \text{по определению } T \\
&= \Psi(\Psi(g) \circ \eta \circ h) && \text{аксиома 3} \\
&= \Psi(g \circ h) && \text{аксиома 1}
\end{aligned}$$

Пятое

$$\begin{aligned}
&\Psi(T(h) \circ g) = \\
&= \Psi(\Psi(\eta \circ h) \circ g) && \text{по определению } T \\
&= \Psi(\eta \circ h) \circ \Psi(g) && \text{аксиома 3} \\
&= T(h) \circ \Psi(g) && \text{по определению } T
\end{aligned}$$

□

Упражнение 19.27. Проверьте, что это единственный способ определить действие T на стрелках, при котором T становится функтором, а η и Ψ естественными преобразованиями.

Дадим теперь другое (эквивалентное) определение монады.

Определение 19.28. *Монадой* в категории K называется тройка (T, η, μ) из функтора и двух естественных преобразований, где

$T\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$

$\eta\colon Id_{\mathsf{K}} \to T$ то есть $\eta_A\colon A \to T(A)$

$\mu\colon T \circ T \to T$ то есть $\mu_A\colon T(T(A)) \to T(A)$

(здесь A – любой объект K), причём коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[d, "T(\eta_A)"'] \arrow[dr, "id_{T(A)}"] & T^2(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3(A) \arrow[r, "\mu_{T(A)}"] \arrow[d, "T(\mu_A)"'] & T^2(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A) \end{tikzcd}$$

где используются сокращения

$T^2(A) = T(T(A))$

$T^3(A) = T(T(T(A)))$

Нарисуем ещё диаграммы, выражающие естественность η и μ

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & T(A) \arrow[d, "T(h)"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & T(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T^2(h)"'] & T(A) \arrow[d, "T(h)"] \\ T^2(B) \arrow[r, "\mu_B"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

и выпишем все пять равенств

$\mu_A \circ \eta_{T(A)} = id_{T(A)}$

$\mu_A \circ T(\eta_A) = id_{T(A)}$

$\mu_A \circ \mu_{T(A)} = \mu_A \circ T(\mu_A)$

$T(h) \circ \eta_A = \eta_B \circ h$

$T(h) \circ \mu_A = \mu_B \circ T(T(h))$

Поскольку так жить нельзя, мы будем опускать индексы и писать так

$$\mu \circ \eta = id$$
$$\mu \circ T(\eta) = id$$
$$\mu \circ \mu = \mu \circ T(\mu)$$
$$T(h) \circ \eta = \eta \circ h$$
$$T(h) \circ \mu = \mu \circ TT(h)$$

Замечание 19.29. Часто диаграммы из определения монады рисуют так

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, "T\eta"'] \arrow[dr, "Id_T"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}$$

где $\eta T, T\eta, \mu T$ и $T\mu$ – это некоторые естественные преобразования (угадайте, какие).

Пример 19.30. Рассмотрим монаду в Set из Примера 19.15. По-новому её можно задать так

$$T(A) = A + 1$$
$$T(f) = f + id_1 \colon A + 1 \to B + 1 \quad \text{где } f \colon A \to B$$
$$\eta_A = k_1 \colon A \to A + 1$$
$$\mu_A = [id_{A+1}, k_2] \colon (A + 1) + 1 \to A + 1$$

Таким образом, с точностью до изоморфизма

$T(A)$ – это множество $A \cup \{*\}$, где $* \notin A$

$T(f)(a) = f(a)$ для любого $a \in A$

$T(f)(*) = *$

$\eta_A(a) = a$ для любого $a \in A$

$T(T(A)) = (A + 1) + 1 = A \cup \{*_1\} \cup \{*_2\}$

$\mu_A(a) = a$ для любого $a \in A$

$\mu_A(*_1) = \mu_A(*_2) = *$

Таким образом, $T(A)$ – это множество A с добавленным новым элементом $*$
Функция $T(f)\colon A \cup \{*\} \to B \cup \{*\}$ продолжает функцию $f\colon A \to B$ на $A \cup \{*\}$, полагая $T(f)(*) = *$
Функция η_A вкладывает A в $A \cup \{*\}$
Функция μ_A отображает $A \cup \{*_1\} \cup \{*_2\}$ в $A \cup \{*\}$, склеивая $*_1$ и $*_2$ в один элемент $*$

Пример 19.31. Рассмотрим монаду в Set из Примера 19.16. По-новому её можно задать так

$$\begin{aligned}
&T(A) = P(A) \quad \text{множество подмножеств } A\\
&T(f)(X) = f[X] \quad \text{где } f\colon A \to B,\ X \subseteq A\\
&\eta_A(a) = \{a\} \quad \text{где } a \in A\\
&\mu_A(\mathcal{Z}) = \cup\mathcal{Z} \quad \text{где } \mathcal{Z} \in P(P(A))
\end{aligned}$$

Таким образом, $T(f)\colon P(A) \to P(B)$ по каждому подмножеству $X \subseteq A$ выдаёт его образ $f[X]$.
$\eta_A\colon A \to P(A)$ по каждому элементу $a \in A$ выдаёт множество $\{a\}$.
$\mu_A\colon P(P(A)) \to P(A)$ по каждому семейству $\mathcal{Z}$ подмножеств A выдаёт его объединение $\cup\mathcal{Z}$.

Определение 19.32. Пусть дана монада (T, η, μ) в категории K. *Алгеброй монады* называется любая стрелка вида $f\colon T(A) \to A$, для которой коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "id_A"'] & T(A) \arrow[d, "f"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T(f)"'] & T(A) \arrow[d, "f"] \\
T(A) \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

что соответствует равенствам

$$\begin{aligned}
&f \circ \eta = id\\
&f \circ \mu = f \circ T(f)
\end{aligned}$$

Свободной алгеброй, порождённой объектом A, будем называть стрелку $\mu_A\colon T^2(A) \to T(A)$. Эта стрелка является алгеброй в силу коммутативности диаграмм из определения монады

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[dr, "id_{T(A)}"'] & T^2(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ & T(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3(A) \arrow[r, "\mu_{T(A)}"] \arrow[d, "T(\mu_A)"'] & T^2(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A) \end{tikzcd}$$

Гомоморфизмом между алгебрами
$f\colon T(A) \to A$ и $g\colon T(B) \to B$ называется любая стрелка $h\colon A \to B$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "f"'] & T(B) \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Категорией Эйленберга-Мура монады (T, η, μ) называется категория K^T всех алгебр этой монады и гомоморфизмов между ними. Строго говоря, это протоморфизмы, поскольку по стрелке h не видно, из какой алгебры в какую она действует.

Пример 19.33. Рассмотрим пару сопряжённых функторов $F \dashv G$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{Grp} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

где $F(A)$ – свободная группа, порождённая множеством A, а $G(X)$ – множество-носитель группы X.
$T(A) = GF(A)$ – множество элементов свободной группы, порождённой множеством A. Если, например, $A = \{x, y\}$, то
$T(A) = \{e, x, y, x^{-1}, y^{-1}, xx, xy, yx, yy, x^{-1}y, xy^{-1}, x^{-1}y^{-1} \ldots\}$

Стрелка $\eta_A \colon A \to T(A)$ – это вложение A в $T(A)$
Положим

$$\mu_A = G(\varepsilon_{F(A)}) = G(\Phi(id_{GF(A)})) = \Psi(id_{T(A)})$$

Получается монада (T, η, μ) (проверять не будем, но чуть позже докажем эквивалентность двух определений монады, из которой это следует).
$TT(A)$ – это множество элементов свободной группы, порождённой множеством $T(A)$.
Если $A = \{x, y\}$, то среди элементов $TT(A)$ будет, допустим, элемент $(xx)(yx)^{-1}$
Отображение $\mu_A \colon TT(A) \to T(A)$ состоит в том, чтобы „раскрыть скобки и вычислить“. Например

$$\mu_A(xx^{-1}) = e$$
$$\mu_A((yx)^{-1}) = x^{-1}y^{-1}$$
$$\mu_A((xx)(yx)^{-1}) = xy^{-1}$$

Всякая группа X с носителем A может быть задана функцией вида $f \colon T(A) \to A$, которая сопоставляет каждому элементу $T(A)$ его значение. Например, возьмём группу положительных действительных чисел с умножением $X = (\mathbb{R}^+, \cdot)$. Элементы $T(\mathbb{R}^+)$ – это „формальные произведения чисел“ вроде $3 \cdot 4 \cdot 2^{-1}$
Группа X может быть задана стрелкой $f \colon T(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}^+$, которая каждому „формальному произведению“ сопоставляет его значение

$$f(3 \cdot 4 \cdot 2^{-1}) = 6$$

Оказывается, что группы – это и есть алгебры этой монады. Доказать это непосредственно довольно трудно, но есть некоторая теорема Бека, которая помогает (о ней в конце главы). Категория Эйленберга-Мура этой монады – это категория групп Grp. Свободные алгебры – это в точности свободные группы. Чуть позже мы докажем, что для любой монады категория Клейсли эквивалентна полной подкатегории категории Эйленберга-Мура, состоящей из свободных алгебр.

Пример 19.34. Рассмотрим монаду в Set из Примера 19.30

$$T(A) = A + 1$$
$$\eta_A = k_1 \colon A \to A + 1$$

$$\mu_A = [id_{A+1}, k_2] \colon (A+1)+1 \to A+1$$

Алгебры этой монады – это функции $f\colon A \cup \{*\} \to A$, тождественные на A, потому что

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "k_1"] \arrow[dr, "id_A"'] & A+1 \arrow[d, "f"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Коммутативность второй диаграммы оставляю в качестве упражнения. Такая функция определяется тем, в какую точку A переходит $*$ и мы получаем в качестве Set^T категорию множеств с выделенным элементом и функций между ними, переводящих выделенный элемент в выделенный. В данном случае категория Клейсли оказывается эквивалентной категории Эйленберга-Мура (разбирали этот пример в главе про эквивалентность категорий).

Пример 19.35. Пусть $(M, e, \circ)$ – некоторая полугруппа с единицей. Определим функтор $T\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$

$$T(A) = M \times A$$
$$T(f) = id_M \times f$$

Определим естественные преобразования $\eta_A\colon A \to M \times A$, а также $\mu_A\colon M \times (M \times A) \to M \times A$

$$\eta_A(a) = (e, a)$$
$$\mu_A(m_1, (m_2, a)) = (m_1 \circ m_2, a)$$

где $a \in A$, $m_1, m_2 \in M$. Диаграммы из определения монады

$$\begin{tikzcd}
M \times A \arrow[r, "\eta_{M\times A}"] \arrow[d, "id_M \times \eta_A"'] \arrow[dr, "id_{M\times A}"] & M \times (M \times A) \arrow[d, "\mu_A"] \\
M \times (M \times A) \arrow[r, "\mu_A"'] & M \times A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \times (M \times (M \times A)) \arrow[r, "\mu_{M\times A}"] \arrow[d, "id_M \times \mu_A"'] & M \times (M \times A) \arrow[d, "\mu_A"] \\
M \times (M \times A) \arrow[r, "\mu_A"'] & M \times A
\end{tikzcd}$$

выражают равенства

$$\mu_A \circ \eta_{M\times A} = id_{M\times A}$$

$$\mu_A \circ (id_M \times \eta_A) = id_{M\times A}$$

$$\mu_A \circ \mu_{M\times A} = \mu_A \circ (id_M \times \mu_A)$$

или, вспоминая определения η, μ

$$(e \circ m, a) = (m, a)$$

$$(m \circ e, a) = (m, a)$$

$$((m_1 \circ m_2) \circ m_3, a) = (m_1 \circ (m_2 \circ m_3), a)$$

то есть, свойства двусторонней единицы и ассоциативность полугруппы.
Алгеброй этой монады будет любая функция вида $f\colon M \times A \to A$, для которой коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "id_A"'] & M \times A \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times (M \times A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "id_M \times f"'] & M \times A \arrow[d, "f"] \\ M \times A \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

и это в точности M-множество. Действительно, если функция f задаёт некоторое действие полугруппы M на множестве A по правилу

$$m \circ a = f(m, a)$$

то коммутативность диаграмм означает равенства

$$e \circ a = a$$

$$(m_1 \circ m_2) \circ a = m_1 \circ (m_2 \circ a)$$

Гомоморфизмами алгебр являются отображения, сохраняющие действие, то есть гомоморфизмы M-множеств.

$$\begin{tikzcd} M \times A \arrow[r, "id_M \times h"] \arrow[d, "f"'] & M \times B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Два определения монады соответствуют двум определениям оператора замыкания. Докажем их эквивалентность.

Теорема 19.36. *Два определения монад (определения 19.12 и 19.28) эквивалентны между собой.*

Доказательство. Пусть дана монада (T, η, μ), выпишем аксиомы

1. $\mu \circ \eta = id$
2. $\mu \circ T(\eta) = id$
3. $\mu \circ \mu = \mu \circ T(\mu)$
4. $T(h) \circ \eta = \eta \circ h$
5. $T(h) \circ \mu = \mu \circ TT(h)$

Определим $\Psi(g)$ следующим способом

$$\Psi(g) = \mu \circ T(g)$$

$$\frac{\dfrac{g\colon A \to T(B)}{T(g)\colon T(A) \to T(T(B))} \qquad \mu_B\colon T(T(B)) \to T(B)}{\mu_B \circ T(g)\colon T(A) \to T(B)}$$

и докажем его свойства

$$\Psi(g) \circ \eta = g$$

$$\Psi(\eta) = id$$

$$\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

Первое

$$\begin{aligned}
&\Psi(g) \circ \eta = \\
&= \mu \circ T(g) \circ \eta && \text{по определению } \Psi \\
&= \mu \circ \eta \circ g && \text{аксиома 4 (естественность } \eta) \\
&= id \circ g && \text{аксиома 1} \\
&= g
\end{aligned}$$

Второе

$$\begin{aligned}
&\Psi(\eta) = \\
&= \mu \circ T(\eta) && \text{по определению } \Psi \\
&= id && \text{аксиома 2}
\end{aligned}$$

Третье

$$\begin{aligned}
&\Psi(\Psi(g) \circ f) = \\
&= \mu \circ T(\Psi(g) \circ f) && \text{по определению } \Psi \\
&= \mu \circ T(\mu \circ T(g) \circ f) && \text{по определению } \Psi \\
&= \mu \circ T(\mu) \circ TT(g) \circ T(f) && \text{функториальность } T \\
&= \mu \circ \mu \circ TT(g) \circ T(f) && \text{аксиома 3} \\
&= \mu \circ T(g) \circ \mu \circ T(f) && \text{аксиома 5 (естественность } \mu) \\
&= \Psi(g) \circ \Psi(f) && \text{по определению } \Psi
\end{aligned}$$

В обратную сторону, пусть дана монада (T, η, Ψ), положим

$$T(h) = \Psi(\eta \circ h)$$

и выпишем аксиомы и три ранее доказанных свойства естественности

1. $\Psi(g) \circ \eta = g$
2. $\Psi(\eta) = id$
3. $\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$
4. $T(h) \circ \eta = \eta \circ h$
5. $\Psi(g \circ h) = \Psi(g) \circ T(h)$

6. $\Psi(T(h) \circ g) = T(h) \circ \Psi(g)$

Определим μ следующим равенством

$$\mu = \Psi(id)$$

$$\frac{id_{T(A)} \colon T(A) \to T(A)}{\Psi(id_{T(A)}) \colon T(T(A)) \to T(A)}$$

и докажем его свойства

$$\mu \circ \eta = id$$

$$\mu \circ T(\eta) = id$$

$$\mu \circ \mu = \mu \circ T(\mu)$$

$$T(h) \circ \eta = \eta \circ h$$

$$T(h) \circ \mu = \mu \circ TT(h)$$

Первое

$$\begin{aligned}
&\mu \circ \eta = \\
&= \Psi(id) \circ \eta && \text{по определению } \mu \\
&= id && \text{аксиома 1}
\end{aligned}$$

Второе

$$\begin{aligned}
&\mu \circ T(\eta) = \\
&= \Psi(id) \circ T(\eta) && \text{по определению } \mu \\
&= \Psi(id \circ \eta) && \text{свойство 5} \\
&= \Psi(\eta) \\
&= id && \text{аксиома 2}
\end{aligned}$$

Третье

$$
\begin{aligned}
&\mu \circ T(\mu) = \\
&= \Psi(id) \circ T(\mu) && \text{по определению } \mu \\
&= \Psi(id \circ \mu) && \text{свойство 5} \\
&= \Psi(\mu) \\
&= \Psi(\mu \circ id) \\
&= \Psi(\Psi(id) \circ id) && \text{по определению } \mu \\
&= \Psi(id) \circ \Psi(id) && \text{аксиома 3} \\
&= \mu \circ \mu && \text{по определению } \mu
\end{aligned}
$$

Четвёртое – естественность η, свойство 4.
Пятое

$$
\begin{aligned}
&T(h) \circ \mu = \\
&= T(h) \circ \Psi(id) && \text{по определению } \mu \\
&= \Psi(T(h) \circ id) && \text{свойство 6} \\
&= \Psi(T(h)) \\
&= \Psi(id \circ T(h)) \\
&= \Psi(id) \circ TT(h) && \text{свойство 5} \\
&= \mu \circ TT(h) && \text{по определению } \mu
\end{aligned}
$$

Докажем ещё, что эти две конструкции, а именно построение (T, η, Ψ) по заданному (T, η, μ) и построение (T, η, μ) по заданному (T, η, Ψ), взаимно обратны. Пусть монада задана через μ, определим Ψ

$$\Psi(g) = \mu \circ T(g)$$

и теперь определим через это Ψ новое μ и новое $T(h)$

$$
\begin{aligned}
&\mu' = \Psi(id) \\
&T'(h) = \Psi(\eta \circ h)
\end{aligned}
$$

Покажем, что получаются те же μ и $T(h)$, с которых начали

$$
\begin{aligned}
&\mu' = \Psi(id) = \mu \circ T(id) = \mu \circ id = \mu \\
&T'(h) = \Psi(\eta \circ h) = \mu \circ T(\eta \circ h) = \mu \circ T(\eta) \circ T(h) = T(h)
\end{aligned}
$$

В обратную сторону, пусть монада задана через Ψ, положим

$$T(h) = \Psi(\eta \circ h)$$
$$\mu = \Psi(id)$$

и теперь определим через них новое Ψ

$$\Psi'(g) = \mu \circ T(g)$$

Покажем, что получается то же Ψ, с которого начали

$$\Psi'(g) = \mu \circ T(g) = \Psi(id) \circ T(g) = \Psi(id \circ g) = \Psi(g)$$

□

Теорема 19.37. *Пусть дана пара сопряжённых функторов* $F \dashv G$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}_1 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

и соответствующие преобразования Φ, Γ

$$\frac{g\colon A \to G(X)}{\Phi(g)\colon F(A) \to X} \qquad \frac{f\colon F(A) \to X}{\Gamma(f)\colon A \to G(X)}$$

Полагаем

$$T = GF\colon \mathsf{K} \to \mathsf{K}$$
$$\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$$
$$\mu_A = G(\varepsilon_{F(A)}) = G(\Phi(id_{GF(A)})$$

$$\frac{id_{F(A)}\colon F(A) \to F(A)}{\Gamma(id_{F(A)})\colon A \to GF(A)} \qquad \cfrac{\cfrac{id_{GF(A)}\colon GF(A) \to GF(A)}{\Phi(id_{GF(A)})\colon FGF(A) \to F(A)}}{G\Phi(id_{GF(A)})\colon GFGF(A) \to GF(A)}$$

Тройка (T, η, μ) *является монадой в категории* K.

Доказательство. Определим Ψ как в Теореме 19.23

$$\Psi(g) = G(\Phi(g))$$

Тройка (T, η, Ψ) является монадой по Теореме 19.23. Определим через Ψ новое действие T на стрелках

$$T'(h) = \Psi(\eta \circ h)$$

Проверим, что оно совпадает со старым (это единственный нетривиальный момент доказательства)

$$T'(h) = \Psi(\eta \circ h) = \Psi(\eta) \circ T(h) = id \circ T(h) = T(h)$$

Определим μ

$$\mu_A = \Psi(id_{T(A)}) = G(\Phi(id_{GF(A)})$$

Тройка (T, η, μ) является монадой по Теореме 19.36.
□

Докажем теперь, что категория Клейсли эквивалентна полной подкатегории категории Эйленберга-Мура, состоящей из свободных алгебр.

Теорема 19.38. *Пусть дана монада (T, η, μ) в категории K. Тогда K_T эквивалентна полной подкатегории K^T, состоящей из свободных алгебр.*

Доказательство. Определим функтор $F \colon \mathsf{K}_T \to \mathsf{K}^T$

$$F(A) = (T^2(A) \overset{\mu_A}{\to} T(A))$$
$$F(h) = \Psi(h) = \mu \circ T(h)$$

Функтор F по объекту A выдаёт свободную алгебру $\mu_A \colon T^2(A) \to T(A)$. По стрелке $h \colon A \to B$ в K_T, то есть стрелке $h \colon A \to T(B)$ в K, функтор F выдаёт гомоморфизм свободных алгебр

$$\begin{tikzcd}
T^2(A) \arrow[r, "T\Psi(h)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T^2(B) \arrow[d, "\mu_B"] \\
T(A) \arrow[r, "\Psi(h)"'] & T(B)
\end{tikzcd}$$

Проверим, что эта диаграмма действительно коммутативна

$$
\begin{aligned}
&\mu \circ T\Psi(h) = \\
&= \mu \circ T(\mu \circ T(h)) && \text{по определению } \Psi \\
&= \mu \circ T(\mu) \circ TT(h) && \text{функториальность } T \\
&= \mu \circ \mu \circ TT(h) && \text{одна из аксиом монады} \\
&= \mu \circ T(h) \circ \mu && \text{естественность } \mu \\
&= \Psi(h) \circ \mu && \text{по определению } \Psi
\end{aligned}
$$

Проверим, что функтор F строгий.

Если $F(h_1) = F(h_2)$ (то есть $\Psi(h_1) = \Psi(h_2)$), то $h_1 = h_2$

$$h_1 = \Psi(h_1) \circ \eta = \Psi(h_2) \circ \eta = h_2$$

Проверим, что функтор F полный. Это значит, для каждого гомоморфизма свободных алгебр

$$
\begin{tikzcd}
T^2(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T^2(B) \arrow[d, "\mu_B"] \\
T(A) \arrow[r, "f"'] & T(B)
\end{tikzcd}
$$

должна быть стрелка $h\colon A \to T(B)$ такая, что $f = \Psi(h)$
(то есть $f = F(h)$)
Запишем коммутативность диаграммы

1. $\mu \circ T(f) = f \circ \mu$

Положим $h = f \circ \eta$ и проверим, что $f = \Psi(h)$

$$
\begin{aligned}
&\Psi(h) = \\
&= \Psi(f \circ \eta) && \text{по определению } h \\
&= \mu \circ T(f \circ \eta) && \text{по определению } \Psi \\
&= \mu \circ T(f) \circ T(\eta) && \text{функториальность } T \\
&= f \circ \mu \circ T(\eta) && \text{в силу 1} \\
&= f \circ id && \text{одна из аксиом монады} \\
&= f
\end{aligned}
$$

Таким образом, функтор F является функтором эквивалентности (строгий, полный, сюръективный на объектах) из категории Клейсли K_T в полную подкатегорию категории Эйленберга-Мура K^T, состоящую из свободных алгебр. Изоморфизма категорий, вообще говоря, не получается, потому что для разных $A \neq B$ может быть $T(A) = T(B)$.
□

Остаток главы занимает решение проблемы – всякая ли монада получается как композиция некоторой пары сопряжённых функторов? Ответ „да“, причём обычно даже не единственным способом. Например, если в примере с группами заменить категорию Grp на её полную подкатегорию, состоящую только из свободных групп, монада в Set получается та же самая. Есть два универсальных способа разложить любую монаду в композицию сопряжённых функторов, они называются „конструкция Эйленберга-Мура“ и „конструкция Клейсли“, переходим к их довольно трудному описанию.

Теорема 19.39. *Пусть дана монада (T, η, μ) в категории K. Определим два функтора*

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{K} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathsf{K}^T \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&F(A) = (T^2(A) \overset{\mu_A}{\to} T(A)) \\
&F(h) = T(h) \\
&G(T(A) \overset{f}{\to} A) = A \\
&G(h) = h
\end{aligned}
$$

Тогда есть такое сопряжение $F \dashv G$ с единицей η, что монада, порождённая этим сопряжением, совпадает с (T, η, μ).

Доказательство. Функтор F по объекту A выдаёт свободную алгебру $\mu_A\colon T^2(A) \to T(A)$. По стрелке $h\colon A \to B$ функтор F выдаёт гомоморфизм $T(h)$ свободных алгебр

$$\begin{tikzcd}
T^2(A) \arrow[r, "T^2(h)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T^2(B) \arrow[d, "\mu_B"] \\
T(A) \arrow[r, "T(h)"'] & T(B)
\end{tikzcd}$$

Функтор G по алгебре $f\colon T(A) \to A$ выдаёт её носитель A. По гомоморфизму алгебр

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "f"'] & T(B) \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

функтор G выдаёт стрелку $h\colon A \to B$. Непосредственно видно, что

$$G \circ F = T$$

Переходим к доказательству $F \dashv G$. Мы хотим, чтобы η было единицей сопряжения. Надо доказать следующее: для любых $A \in Ob(\mathsf{K}), X \in Ob(\mathsf{K}^T)$ и любой стрелки $g\colon A \to G(X)$ (это стрелка в K) существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to X$ в K^T со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\
& G(X) & X
\end{tikzcd}$$

Пусть X – это алгебра $h\colon T(B) \to B$. Нарисуем её на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\
& G(T(B) \xrightarrow{h} B) & & (T(B) \xrightarrow{h} B)
\end{tikzcd}$$

Вспоминая определение F и G, получаем

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & T(A) \arrow[d, dotted, "f"] & & (T^2(A) \xrightarrow{\mu_A} T(A)) \arrow[d, dotted, "f"] \\
& B & & (T(B) \xrightarrow{h} B)
\end{tikzcd}$$

Таким образом, надо доказать, что для любой алгебры $h\colon T(B) \to B$ и любой стрелки $g\colon A \to B$ существует единственный гомоморфизм f из алгебры $\mu_A\colon T^2(A) \to T(A)$ в алгебру $h\colon T(B) \to B$ со свойством $f \circ \eta_A = g$.

Дано: есть стрелки $h\colon T(B) \to B$ и $g\colon A \to B$, причём для h верны равенства

1. $h \circ \eta = id$
2. $h \circ \mu = h \circ T(h)$

поскольку h является алгеброй. Надо доказать, что существует единственная стрелка $f\colon T(A) \to B$ со свойствами

$$f \circ \mu = h \circ T(f)$$
$$f \circ \eta = g$$

первое равенство выражает, что f является гомоморфизмом алгебр

$$\begin{tikzcd}
T^2(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(B) \arrow[d, "h"] \\
T(A) \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Докажем существование. Положим $f = h \circ T(g)$ и проверим свойства. Первое

$$
\begin{aligned}
& f \circ \mu = \\
& = h \circ T(g) \circ \mu && \text{по определению } f \\
& = h \circ \mu \circ TT(g) && \text{естественность } \mu \\
& = h \circ T(h) \circ TT(g) && 2 \\
& = h \circ T(h \circ T(g)) && \text{функториальность } T \\
& = h \circ T(f) && \text{по определению } f
\end{aligned}
$$

Второе

$$
\begin{aligned}
& f \circ \eta = \\
& = h \circ T(g) \circ \eta && \text{по определению } f \\
& = h \circ \eta \circ g && \text{естественность } \eta \\
& = id \circ g && 1 \\
& = g
\end{aligned}
$$

Докажем единственность. Предположим, что для некоторого f выполнены условия

1. $f \circ \mu = h \circ T(f)$
2. $f \circ \eta = g$

и докажем $f = h \circ T(g)$

$$
\begin{aligned}
& h \circ T(g) = \\
& = h \circ T(f \circ \eta) && 2 \\
& = h \circ T(f) \circ T(\eta) && \text{функториальность } T \\
& = f \circ \mu \circ T(\eta) && 1 \\
& = f \circ id && \text{одна из аксиом монады} \\
& = f
\end{aligned}
$$

Остаётся проверить, что монада, порождённая этим сопряжением, совпадает с (T, η, μ). Напомню, что для любого сопряжения $F \dashv G$ с соответствующими Φ, Γ определяется монада (T', η', μ')

$$T' = G \circ F$$
$$\eta'_A = \Gamma(id_{F(A)})$$
$$\mu'_A = \Psi(id_{T'(A)}) = G(\Phi(id_{GF(A)}))$$

надо доказать, что для нашего сопряжения получится исходная монада (T, η, μ). Мы уже проверяли $G \circ F = T$, также верно $\eta = \Gamma(id)$, поскольку η по построению является единицей сопряжения. Мы видели, что для алгебры $X = (h \colon T(B) \to B)$ и стрелки $g \colon A \to G(X)$ верно

$$\Phi_{A,X}(g) = h \circ T(g)$$

Когда мы пишем $G(\Phi(id_{GF(A)})$, к стрелке $id_{GF(A)} \colon GF(A) \to GF(A)$ мы применяем $\Phi_{GF(A),F(A)}$, причём $F(A)$ – это алгебра $\mu_A \colon T^2(A) \to T(A)$, поэтому

$$\Phi_{GF(A),F(A)}(id) = \mu_A \circ T(id) = \mu_A \circ id = \mu_A$$
$$\mu'_A = G(\Phi(id)) = G(\mu_A) = \mu_A$$

□

Упражнение 19.40. Проверьте, что для операторов замыкания конструкция Эйленберга-Мура даёт разложение из Теоремы 19.9.

Разложение Эйленберга-Мура обычно не является единственно возможным разложением данной монады в пару сопряжённых функторов. Например, если мы возьмём вместо K^T её полную подкатегорию, состоящую только из свободных алгебр (а функторы F и G определим как раньше), мы всё равно получим сопряжённость. Сейчас мы дадим интересное описание этой конструкции с помощью категории Клейсли.

Теорема 19.41. *Пусть дана монада (T, η, Ψ) в категории K. Определим два функтора*

$$\mathsf{K} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}_T$$

$$F(A) = A$$

$$F(h) = \eta \circ h$$
$$G(A) = T(A)$$
$$G(h) = \Psi(h)$$

Тогда есть такое сопряжение $F \dashv G$ с единицей η, что монада, порождённая этим сопряжением, совпадает с (T, η, Ψ).

Доказательство. Разберёмся сначала в определении F и G.
Пусть $h\colon A \to B$ в K. Тогда

$$\frac{h\colon A \to B \quad \eta_B\colon B \to T(B)}{\eta_B \circ h\colon A \to T(B)}$$

И мы получаем стрелку $F(h) = \eta \circ h\colon A \to B$ в категории K_T.
Пусть $h\colon A \to B$ в K_T, это значит, что $h\colon A \to T(B)$ в K.

$$\frac{h\colon A \to T(B)}{\Psi(h)\colon T(A) \to T(B)}$$

и мы получаем стрелку $G(h) = \Psi(h)\colon T(A) \to T(B)$ в K.
Докажем, что F и G являются функторами. Надо доказать

$$F(g \circ f) = F(g) * F(f)$$
$$F(id) = \eta$$
$$G(g * f) = G(g) \circ G(f)$$
$$G(\eta) = id$$

Подставим определения F и G

$$\eta \circ (g \circ f) = (\eta \circ g) * (\eta \circ f)$$
$$\eta \circ id = \eta$$
$$\Psi(g * f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$
$$\Psi(\eta) = id$$

Неочевидно только первое равенство, его и докажем

$$(\eta \circ g) * (\eta \circ f) =$$
$$= \Psi(\eta \circ g) \circ \eta \circ f$$
$$= \eta \circ g \circ f$$

Теперь проверим $G \circ F = T$

$$G(F(A)) = T(A) \quad \text{по определению } G \text{ и } F$$

$$G(F(h)) = \Psi(\eta \circ h) = \Psi(\eta) \circ T(h) = id \circ T(h) = T(h)$$

Переходим к доказательству $F \dashv G$. Мы хотим, чтобы η было единицей сопряжения. Надо доказать следующее: для любых $A \in Ob(\mathsf{K}), B \in Ob(\mathsf{K}_T)$ и любой стрелки $g\colon A \to G(B)$ (это стрелка в K) существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to B$ в K_T со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\
& G(B) & B
\end{tikzcd}$$

Стрелка $f\colon F(A) \to B$ в K_T – это стрелка $f\colon F(A) \to T(B)$ в K, поэтому перерисуем правую часть диаграммы так

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dotted, "G(f)"] & F(A) \arrow[d, dotted, "f"] \\
& G(B) & T(B)
\end{tikzcd}$$

(все стрелки на этой диаграмме уже в K)
Вспоминая определение F и G, получаем окончательно:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & T(A) \arrow[d, dotted, "\Psi(f)"] & A \arrow[d, dotted, "f"] \\
& T(B) & T(B)
\end{tikzcd}$$

Таким образом, нам надо доказать, что для любой стрелки $g\colon A \to T(B)$ есть ровно одна стрелка $f\colon A \to T(B)$ со свойством

$$g = \Psi(f) \circ \eta$$

Но это так, поскольку свойство равносильно $g = f$. Заметим сразу, что $\Phi(g) = g$.

Остаётся проверить, что монада, порождённая этим сопряжением, совпадает с (T, η, Ψ). Напомню, что для любого сопряжения $F \dashv G$ с соответствующими Φ, Γ определяется монада (T', η', Ψ')

$$T' = G \circ F$$
$$\eta'_A = \Gamma(id_{F(A)})$$
$$\Psi'(g) = G(\Phi(g))$$

надо доказать, что для нашего сопряжения получится исходная монада (T, η, Ψ). Мы уже проверили $G \circ F = T$. Кроме того, получаются те же η (по построению она является единицей сопряжения) и Ψ

$$\Psi'(g) = G(\Phi(g)) = G(g) = \Psi(g)$$

(второе равенство в силу $\Phi(g) = g$)
□

Замечание 19.42. Конструкции Клейсли и Эйленберга-Мура дают в некотором смысле „наименьшее“ и „наибольшее“ разложение монады в композицию сопряжённых функторов. Говоря строже, для каждой монады есть категория, объектами которой являются всевозможные разложения этой монады, разложение Клейсли является в этой категории начальным объектом, а разложение Эйленберга-Мура терминальным. Функтор $F\colon \mathsf{K}_T \to \mathsf{K}^T$, который мы построили при доказательстве предыдущей теоремы, является морфизмом

$$0 \dashrightarrow 1$$

в этой категории. Есть некоторая теорема Бека (точнее, целый набор теорем), которая показывает, в каких случаях пара сопряжённых функторов даёт разложение Эйленберга-Мура соответствующей монады, но я её здесь доказывать не буду, читайте Маклейна.
По поводу приложений монад к программированию я лично читал статьи Eugenio Moggi. Всем заинтересованным людям также очень рекомендую найти и прочитать статью Kosta Došen „Deductive completeness“ в журнале The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.2, №3, Sept.1996 (на самом деле его фамилия Dožen, но в журнале опечатка)

Глава 20

Замеченные ляпы

1) В замечании 17.57 было неправильно написано, что во что переходит при вложении, двойственном к Йонеде. Было написано „он переводит начальные объекты K^{op} в терминальные объекты $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, копроизведения K^{op} в произведения $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, эпиморфизмы K^{op} в мономорфизмы $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$.
Следует читать „он переводит терминальные объекты K^{op} (они же начальные объекты K) в терминальные объекты $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, произведения K^{op} (они же копроизведения K) в произведения $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$, мономорфизмы K^{op} (они же эпиморфизмы K) в мономорфизмы $\mathsf{Set}^{\mathsf{K}}$.
Я там удалил, разберу ещё раз в главе про пределы.
2) В позапрошлой (шестой) версии учебника было неправильное определение скелета категории (Определение 16.93). Я его исправил на следующий день в версии семь, на всякий случай здесь напоминаю.
3) В Упражнении 14.17 было написано „для любых $f\colon A \to N$,
$g\colon B \to N$“, на самом деле $f\colon A \to N, g\colon A \to N$
4) В Примере 15.41 было написано „продолжим его до функтора
$F\colon Free(A) \to \mathsf{Set}$“, на самом деле $F\colon Free(M) \to \mathsf{Set}$
5) В доказательстве леммы Йонеды (Теорема 17.12) под первыми двумя диаграммами подписано „для любого $B \in Ob(\mathsf{K})$ и любой стрелки $f\colon A \to B$“, на самом деле стрелка $f\colon B \to A$, что и видно на диаграммах.
6) В Упражнении 17.36 на первой диаграмме были неправильно подписаны вертикальные стрелки, вместо H^f и $(H^f) \times (H^f)$ надо $H^{A+B}(f)$ и $H^A(f) \times H^B(f)$
7) В самом конце доказательства Теоремы 16.101 в паре мест было написано (A, h, B) вместо (A, h, X)