Оглавление

Вступление

Это примерно половина задуманного учебника по теории категорий. Автор поставил целью написать учебник, доступный мат.логикам и функциональным программистам, в котором не будет ни слова про гомотопии и гомологии. Почти все русскоязычные книги по теории категорий написаны алгебраистами для алгебраистов, в нагрузку к теории категорий в них предлагают изучать гомологическую алгебру. Исключение составляет книга Голдблатта „Топосы“, но она, по мнению автора, как учебник не очень годится (хотя сама по себе интересная). Для чтения книги нужно шапочное знакомство с понятиями „группа“, „свободная группа“ и „гомоморфизм групп“. Если читатель их не знает, советую сначала прочитать популярную книжку Александрова „Введение в теорию групп“.

Символ $\Leftrightarrow$ означает „тогда и только тогда“.

Символ $\wedge$ означает „и“, автор иногда вставляет его между формулами.

Глава 1

Категории, изоморфизмы

Категории – это некоторые математические структуры, частными случаями которых являются частично упорядоченные множества, а также полугруппы с единицей (в том числе группы). Во многих случаях категорию удобно представлять как „обобщённое частично упорядоченное множество“, в других случаях как „обобщённую полугруппу с единицей“. Чуть позже мы дадим точные определения этих понятий.

Определение 1.1. *Категория* К задаётся следующим набором данных:

1. Совокупностью *объектов*, которые мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C \ldots$

2. Совокупностью *морфизмов*, или *стрелок*, которые мы будем обозначать строчными латинскими буквами $f, g, h \ldots$

3. Операциями *dom* и *cod*, которые сопоставляют каждой стрелке f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются *началом* и *концом* f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, наглядно изображается так

   $$f\colon A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B$$

   В этом случае говорят, что f – стрелка (или морфизм) из A в B.

4. Операцией *композиции*, которая по каждой паре стрелок f и g, расположенных так

   $$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

(то есть, $cod(f) = dom(g)$), выдаёт некоторую стрелку

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

(она называется *композицией* f и g).

5. Операцией id, которая по каждому объекту A выдаёт некоторую стрелку

$$A \xrightarrow{id_A} A$$

(она называется *тождественной* или *единичной стрелкой* объекта A, а также *тождественным* или *единичным морфизмом* объекта A, можно называть эту стрелку и просто *тождеством* объекта A).

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции.
Для любой тройки стрелок f, g, h, расположенных так

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества.
Для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено равенство $f \circ id_A = f$.
Для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено равенство $id_B \circ f = f$.

Замечание 1.2. Часто вместо id_A пишут 1_A.

Пример 1.3. Категория множеств **Set**. Её объектами являются произвольные множества $A, B, C \ldots$, а морфизмами – упорядоченные тройки вида $(A, \mathfrak{f}, B)$, где $\mathfrak{f}$ – функция из A в B (определённая на всех элементах A). Операции dom и cod задаются равенствами:

$$dom(A, \mathfrak{f}, B) = A$$

$$cod(A, \mathfrak{f}, B) = B$$

Тождественный морфизм id_A есть по определению $(A, \mathfrak{id}_A, A)$, где $\mathfrak{id}_A$ есть тождественная функция из A в A.
Композицией морфизмов $(A, \mathfrak{f}, B)$ и $(B, \mathfrak{g}, C)$ будет морфизм $(A, \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}, C)$.

В принципе, можно было бы определить морфизмы как пары $(\mathfrak{f}, B)$, потому что начало однозначно находится по $\mathfrak{f}$ (это область определения $\mathfrak{f}$). Но конец надо указывать явно, так как по функции $\mathfrak{f}$ он однозначно не находится (множество значений $\mathfrak{f}$ может быть строго меньше B). Например, функцию, определённую на всех действительных числах и тождественно равную нулю, можно считать действующей во множество натуральных чисел, рациональных чисел, или действительных чисел, по желанию.

Соглашение 1.4. Совокупность всех объектов категории K будем обозначать $Ob(\mathrm{K})$. Совокупность всех стрелок категории K будем обозначать $Mor(\mathrm{K})$. Совокупность всех стрелок из A в B в категории K будем обозначать $\mathrm{K}(A, B)$.

Замечание 1.5. Часто вместо $\mathrm{K}(A, B)$ пишут $Hom_{\mathrm{K}}(A, B)$.

С теоретико-множественной точки зрения совокупность объектов **Set** (то есть, совокупность всех множеств) не является множеством, она слишком велика. То же относится и к совокупности морфизмов **Set**.

Определение 1.6. Категория K называется *локально малой*, если $\mathrm{K}(A, B)$ является множеством для любых A и B.

Определение 1.7. Категория K называется *малой*, если $Mor(\mathrm{K})$ (то есть, объединение всех $\mathrm{K}(A, B)$) является множеством.

Всякая малая категория является локально малой. Обратное неверно. **Set** является локально малой, но не является малой.

Совокупность объектов $Ob(\mathrm{K})$ малой категории тоже является множеством, потому что объектов „не больше“, чем морфизмов. В самом деле, каждому объекту A соответствует его единичный морфизм id_A, причём разным объектам соответствуют разные единичные морфизмы (из $id_A = id_B$ следует $dom(id_A) = dom(id_B)$, поэтому $A = B$).

Замечание 1.8. Категории приходится делить на „большие“и „малые“ по техническим причинам, чтобы избежать парадоксов, близких к парадоксу Кантора из теории множеств.

Определение 1.9. Полугруппа с единицей (или *моноид*) – это множество M (будем обозначать его элементы $f, g, h \ldots$), на котором задана двухместная операция умножения $g \circ f$ и выделен элемент e (двусторонняя единица), причём для любых элементов f, g, h выполнены равенства:

1. Ассоциативность умножения.
   $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
2. Свойства двусторонней единицы.
   $f \circ e = f$
   $e \circ f = f$

Пример 1.10. Примеры полугруп с единицей:

1. Любая группа.
2. Множество натуральных чисел с операцией умножения.
3. Множество натуральных чисел с операцией сложения (двусторонней единицей будет 0).
4. Множество слов в некотором алфавите с операцией приписывания (двусторонней единицей будет пустое слово).

Любая малая категория K с единственным объектом (обозначим его A) задаёт некоторую полугруппу с единицей. Элементами этой полугруппы будут стрелки категории (то есть, множество M – это $Mor(\mathrm{K})$). Любая стрелка $f \in \mathrm{K}(A, A)$, поэтому существует композиция любых двух стрелок, операция композиции ассоциативна и существует двусторонняя единица id_A. Обратно, любую полугруппу с единицей можно превратить в малую категорию с единственным объектом (надо выбрать произвольный объект A и положить $dom(f) = cod(f) = A$ для всех элементов полугруппы).

Определение 1.11. Множество M называется *предупорядоченным* (или просто *предпорядком*), если на нём задано рефлексивное транзитивное отношение $\lesssim$ (*отношение предпорядка*). Это значит, что для любых элементов множества (будем их обозначать $A, B, C \ldots$) выполнены следующие условия

1. Рефлексивность.
   $A \lesssim A$

2. Транзитивность.
   $A \lesssim B$ и $B \lesssim C$ влечёт $A \lesssim C$

Если выполнено также свойство антисимметричности

$$A \lesssim B \text{ и } B \lesssim A \text{ влечёт } A = B$$

то множество называется *частично упорядоченным* (или просто *частичным порядком*).

Определение 1.12. Категория K называется *категорией предпорядка*, если $K(A, B)$ содержит не больше одной стрелки для любых A и B. Иными словами, если у двух стрелок одинаковое начало и одинаковый конец, то эти стрелки равны.

Любая малая категория предпорядка задаёт некоторое предупорядоченное множество. Его элементами будут объекты категории (то есть, множество M – это $Ob(K)$), а отношение предпорядка задаётся условием

$$A \lesssim B \text{ если и только если существует стрелка из } A \text{ в } B$$

Рефлексивность следует из наличия тождественных стрелок id_A, а транзитивность – из наличия композиции стрелок. Обратно, любое предупорядоченное множество можно превратить в малую категорию предпорядка. Её объектами будут элементы этого множества, надо лишь для любых объектов со свойством $A \lesssim B$ произвольным образом выбрать единственную стрелку из A в B. Например, можно считать стрелкой саму упорядоченную пару (A, B). В этом случае будет

$$id_A = (A, A)$$

$$(B, C) \circ (A, B) = (A, C)$$

Независимо от конкретного выбора стрелок, верны ассоциативность композиции и свойства тождества, потому что любые две стрелки с одинаковым началом и одинаковым концом равны. Например, если $f\colon A \to B$, то $f \circ id_A\colon A \to B$, поэтому $f \circ id_A = f$.

Определение 1.13. Стрелка $f\colon A \to B$ называется *изоморфизмом*, если существует стрелка $g\colon B \to A$ со свойствами

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

Такая стрелка g называется *обратной* к f.

Обратная стрелка может быть только одна. Предположив, что к f есть две обратные стрелки g_1 и g_2, мы получим

$$g_1 \circ f \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$$

$$g_1 \circ f \circ g_2 = g_1 \circ id_B = g_1$$

поэтому $g_1 = g_2$. Обратную стрелку к f, если она существует, будем обозначать f^{-1}.

Определение 1.14. Объекты A и B называются *изоморфными*, если между ними есть изоморфизм. Это обозначается $A \cong B$.

Упражнение 1.15. Композиция двух изоморфизмов является изоморфизмом. Тождественные стрелки являются изоморфизмами. Стрелка, обратная к изоморфизму, является изоморфизмом. Для любых A и B

1. $A \cong A$
2. $A \cong B$ влечёт $B \cong A$
3. $A \cong B$ и $B \cong C$ влечёт $A \cong C$

Пример 1.16. В **Set** два множества A и B изоморфны $\Leftrightarrow$ они равномощны.

Пример 1.17. Малая категория с одним объектом задаёт группу $\Leftrightarrow$ все её стрелки являются изоморфизмами (то есть, обратимы).

Пример 1.18. Малая категория предпорядка задаёт частичный порядок $\Leftrightarrow$ изоморфные объекты равны. Действительно, объекты A и B в категории предпорядка изоморфны $\Leftrightarrow$ существуют стрелки $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$, то есть $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$ (равенства $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$ выполняются автоматически, поскольку любые две стрелки с одинаковым началом и одинаковым концом равны).

Глава 2

Другое определение категории

Определение 1.1 является стандартным, но реально мы пользуемся немного другим.

Определение 2.1. На практике категория обычно задаётся следующим набором данных:

1. Совокупностью *объектов*, которые мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C \dots$

2. Совокупностью *протоморфизмов*, или *протострелок*, которые мы будем обозначать готическими буквами $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \dots$

3. Трёхместным отношением $\mathfrak{f} \colon A \to B$ (или $A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B$), которое означает „$\mathfrak{f}$ можно считать стрелкой из A в B“. По протоморфизму его начало и конец не обязаны определяться однозначно, в этом разница.

4. Операцией *композиции*, которая по каждой паре протострелок $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$, расположенных так
$$A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B \xrightarrow{\mathfrak{g}} C$$
выдаёт некоторую протострелку $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ (она называется *композицией* $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$), причём верно $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f} \colon A \to C$.

5. Операцией $\mathfrak{id}$, которая по каждому объекту A выдаёт некоторую протострелку $\mathfrak{id}_A$, причём верно $\mathfrak{id}_A \colon A \to A$.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции.
   Для любой тройки протострелок $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, расположенных так
   $$A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B \xrightarrow{\mathfrak{g}} C \xrightarrow{\mathfrak{h}} D$$
   выполнено равенство $(\mathfrak{h} \circ \mathfrak{g}) \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{h} \circ (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f})$.

2. Свойства тождества.
   Для любой протострелки $\mathfrak{f}\colon A \to B$ выполнено равенство $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{id}_A = \mathfrak{f}$.
   Для любой протострелки $\mathfrak{f}\colon A \to B$ выполнено равенство $\mathfrak{id}_B \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$.

Подчёркиваю, единственное отличие от определения 1.1 в том, что по протоморфизму его начало и конец не обязаны определяться однозначно.

Имея такой набор данных, мы можем построить категорию в смысле определения 1.1. В качестве морфизмов из A в B берутся упорядоченные тройки $(A, \mathfrak{f}, B)$, для которых верно $\mathfrak{f}\colon A \to B$. При этом:

$$dom(A, \mathfrak{f}, B) = A$$

$$cod(A, \mathfrak{f}, B) = B$$

$$id_A = (A, \mathfrak{id}_A, A)$$

$$(B, \mathfrak{g}, C) \circ (A, \mathfrak{f}, B) = (A, \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}, C)$$

Именно так мы строили категорию **Set**, протоморфизмами в этом случае были теоретико-множественные функции. В примере 1.11 мы строили категорию по предупорядоченному множеству, в этом случае достаточно взять единственный протоморфизм $*\colon A \to B$ для всех A и B со свойством $A \lesssim B$.

Замечание 2.2. Слово „протоморфизм“ и определение 2.1 взяты из книги Freyd, Scedrov „Categories, Allegories“.

Глава 3

Функторы

Функторы – это правильные отображения категорий друг в друга. Частными случаями функторов являются монотонные отображения упорядоченных множеств, а также гомоморфизмы полугрупп с единицей (в том числе гомоморфизмы групп).

Определение 3.1. *Функтор* F из категории K_1 в категорию K_2 – это пара отображений (обозначаемых одной буквой)

$$F\colon Ob(\mathrm{K}_1) \to Ob(\mathrm{K}_2)$$

$$F\colon Mor(\mathrm{K}_1) \to Mor(\mathrm{K}_2)$$

первое из которых отображает объекты K_1 в объекты K_2, а второе – морфизмы K_1 в морфизмы K_2, причём сохраняются *dom*, *cod*, *id* и композиция. Это значит, что для любых f, g, A, B, C из категории K_1 выполнено:

1. $f\colon A \to B$ влечёт $F(f)\colon F(A) \to F(B)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ влечёт $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Соглашение 3.2. Функторы будем обозначать буквами F, G, H. Если функтор F действует из категории K_1 в категорию K_2, будем это записывать как $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ или $\mathrm{K}_1 \xrightarrow{F} \mathrm{K}_2$.

Пример 3.3. Если K_1 и K_2 – малые категории с одним объектом каждая, то функторы между ними взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам соответствующих полугрупп с единицей. Функтор $F\colon K_1 \to K_2$ переводит единственный объект K_1 в единственный объект K_2, сохраняет композицию стрелок и двустороннюю единицу. Таким образом, отображение $F\colon Mor(K_1) \to Mor(K_2)$ является гомоморфизмом полугрупп с единицей.

Пример 3.4. Если K_1 и K_2 – малые категории предпорядка, то функторы между ними взаимно однозначно соответствуют монотонным отображениям соответствующих предпорядков. Если $A \lesssim B$, то $F(A) \lesssim F(B)$, поскольку единственная стрелка из A в B переходит в единственную стрелку из $F(A)$ в $F(B)$. Обратно, любое монотонное отображение $Ob(K_1)$ в $Ob(K_2)$ превращается в функтор единственно возможным способом (проверьте детали).

Упражнение 3.5. Проверьте, что функторы переводят изоморфизмы в изоморфизмы и обратные стрелки в обратные.

Определение 3.6. Каждой категории K сопоставляется *тождественный функтор* $Id_K\colon K \to K$, действующий так:

$$Id_K(A) = A$$

$$Id_K(f) = f$$

для любых A и f категории K.

Определение 3.7. Каждой паре функторов F и G, расположенных так

$$K_1 \xrightarrow{F} K_2 \xrightarrow{G} K_3$$

сопоставляется их *композиция* $G \circ F\colon K_1 \to K_3$, которая определяется равенствами:

$$(G \circ F)(A) = G(F(A))$$

$$(G \circ F)(f) = G(F(f))$$

для любых A и f категории K_1.

Определение 3.8. Категория **Cat** имеет в качестве объектов все малые категории, а в качестве протоморфизмов – функторы.

Замечание 3.9. Морфизмами будут упорядоченные тройки вида $(\mathrm{K}_1, F, \mathrm{K}_2)$, где $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$. Здесь ситуация примерно такая, как при построении категории **Set** (только хуже) – по функтору (то есть, паре отображений) категории K_1 и K_2 восстановить в общем случае нельзя, поэтому их надо указывать явно.

Упражнение 3.10. Проверьте, что категория **Cat** локально малая.

Замечание 3.11. Попытка образовать категорию всех категорий (не только малых) приводит к парадоксу, близкому к парадоксу Кантора.

Определение 3.12. Функтор $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ называется *изоморфизмом категорий*, если к нему существует (однозначно определённый) обратный функтор $F^{-1}\colon \mathrm{K}_2 \to \mathrm{K}_1$ такой, что:

$$F \circ F^{-1} = Id_{\mathrm{K}_2}$$

$$F^{-1} \circ F = Id_{\mathrm{K}_1}$$

В этом случае категории K_1 и K_2 называются *изоморфными* (пишется $\mathrm{K}_1 \cong \mathrm{K}_2$).

Для малых категорий это определение даёт в точности изоморфизм в категории **Cat**.

Глава 4

Конкретные категории

Часто встречаются „категории множеств с некоторой дополнительной структурой“. Например, объектами категории **Grp** являются произвольные группы, а протоморфизмами – гомоморфизмы групп. Точно так же можно рассматривать категорию линейных пространств и линейных отображений, категорию топологических пространств и непрерывных отображений и т.д. Не обязательно брать такие большие категории. Можно взять несколько (каких угодно) топологических пространств и их непрерывные отображения друг в друга, это будет категория. Не обязательно брать и все отображения. Если взять только сюръективные или только инъективные отображения, всё равно получится категория, потому что композиция сюръективных (инъективных) отображений тоже сюръективна (инъективна) и все тождественные отображения сюръективны (инъективны). Общим для всех таких категорий является наличие „хорошего“ функтора в категорию множеств **Set**. Этот функтор по любому объекту (группе, линейному пространству, топологическому пространству и т.д.) выдаёт его множество-носитель.

Определение 4.1. Функтор $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ называется *строгим*, если для любых A, B, f, g из категории K_1 верно следующее утверждение

$$f\colon A \to B \wedge g\colon A \to B \wedge F(f) = F(g) \text{ влечёт } f = g$$

Иными словами, F отображает $\mathrm{K}_1(A, B)$ в $\mathrm{K}_2(F(A), F(B))$ инъективно для любых $A, B \in Ob(\mathrm{K}_1)$.

Содержательно, строгость означает, что стрелка f определена однозначно, если мы знаем $dom(f), cod(f)$ и $F(f)$.

Определение 4.2. *Конкретная категория* задаётся следующим набором данных:

1. Категория K.
2. Строгий функтор $F\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$, этот функтор называется *стирающим* или *забывающим* функтором.

Заметим, что при нашем определении конкретная категория – это не категория, а пара „категория и функтор“.

Все перечисленные выше категории „множеств с дополнительной структурой“ являются конкретными, если в качестве стирающих функторов брать функторы „множества-носителя“. Рассмотрим подробнее категорию **Grp**. Каждой группе Gr соответствует её множество-носитель $F(Gr)$. Гомоморфизмы групп задаются как отображения множеств-носителей, сохраняющие дополнительную структуру (умножение и двустороннюю единицу). Гомоморфизм полностью определён, если известно соответствующее отображение множеств-носителей, из этого следует строгость F. Композиция гомоморфизмов определяется как композиция соответствующих отображений множеств-носителей, поэтому F является функтором.

Теорема 4.3. *Для любой малой категории* K *существует строгий функтор* $F\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$.

Доказательство. Определим функтор F следующими равенствами:

$$F(A) = \{f \in Mor(\mathrm{K})\colon cod(f) = A\}$$

$$F(g)(f) = g \circ f$$

Таким образом, каждому объекту A сопоставляется множество $F(A)$ всех стрелок с концом A. Каждой стрелке $g\colon A \to B$ сопоставляется функция $F(g)\colon F(A) \to F(B)$, которая по любому элементу $f \in F(A)$ выдаёт $g \circ f \in F(B)$. Стрелка g однозначно определяется по A и $F(g)$, поскольку $g = F(g)(id_A)$, из этого следует строгость F.
□

В частном случае, когда категория K задаёт группу (то есть, в K один объект и все стрелки являются изоморфизмами), мы получаем известную *теорему Кэли*: любая группа может быть представлена как группа перестановок некоторого множества (а именно, множества её элементов).

Замечание 4.4. Уже локально малую категорию не всегда можно сделать конкретной (выбрав подходящий функтор в **Set**). Но простейший естественный контрпример, приходящий автору на ум, содержит слово „гомотопия“.

Замечание 4.5. О терминологии. Некоторые люди вместо слова „строгий“ используют странное слово „унивалентный“. Юрий Иванович Манин на вопрос автора по терминологии ответил „Когда мы с С. Гельфандом писали “Методы гомологической алгебры” (русская публикация 1988), мы пользовались вполне установившейся русской терминологией. Полезные классы функторов назывались строгими, полными, или одновременно теми и другими (см. стр. 84). “Унивалентных” функторов тогда я не встречал“.

Глава 5

Диаграммы

Различные утверждения о категориях удобно представлять с помощью картинок определённого вида, называемых *диаграммами*.

Определение 5.1. *Диаграмма* в категории K – это ориентированный граф, вершинам которого сопоставлены некоторые объекты K, а рёбрам – некоторые морфизмы K.

Определение 5.2. *Путём* в диаграмме называется последовательность стрелок, расположенных так

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$$

где $n \geqslant 1$. Каждому пути сопоставим композицию всех входящих в него стрелок $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$.
Диаграмма называется *коммутативной*, если для любых вершин A и B в диаграмме любые два пути из A в B дают равные композиции стрелок.

Пример 5.3. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

означает, что $g \circ f = h$.

Пример 5.4. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "l"] & D \end{tikzcd}$$

означает, что $g \circ f = l \circ h$.

Пример 5.5. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "f"] \end{tikzcd}$$

означает, что $f = f \circ f = f \circ f \circ f = \ldots$

Упражнение 5.6. Проверьте, что в категориях предпорядка все диаграммы коммутативны.

Пример 5.7. Свойства тождества выражаются следующими коммутативными диаграммами:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ A \arrow[u, "id_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[d, "id_B"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Соглашение 5.8. Если какая-то стрелка в диаграмме нарисована пунктиром, это означает „эта стрелка – единственная, которая делает диаграмму коммутативной, находясь в указанном положении“.

Пример 5.9. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dashed] & A \end{tikzcd}$$

означает „существует ровно одна стрелка из объекта B в объект A“.

Пример 5.10. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
 & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

означает „существует единственная стрелка h со свойством $f_1 \circ h = g_1 \wedge f_2 \circ h = g_2$“.

Глава 6

Естественные преобразования

В этой главе будет мало примеров, но в следующей мы всё наверстаем. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ и $G\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$.

Определение 6.1. *Естественным преобразованием* τ функтора F в функтор G называется отображение

$$\tau\colon Ob(\mathrm{K}_1) \to Mor(\mathrm{K}_2)$$

выдающее по каждому объекту $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ стрелку $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$, причём для любых $A, B \in Ob(\mathrm{K}_1)$ и любой стрелки $f\colon A \to B$ должна быть коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

В этом случае пишут $\tau\colon F \to G$ или $F \xrightarrow{\tau} G$.

Определение 6.2. Каждому функтору $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ сопоставляется *тождественное преобразование* $id_F\colon F \to F$, которое по каждому объекту $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ выдаёт стрелку $id_{F(A)}\colon F(A) \to F(A)$.

Упражнение 6.3. Проверьте, что id_F является естественным преобразованием, доказав коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "id_{F(A)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "id_{F(B)}"] & F(B) \end{tikzcd}$$

Определение 6.4. Каждой паре естественных преобразований $\tau\colon F \to G$ и $\sigma\colon G \to H$ (где F, G, H – функторы из K_1 в K_2) сопоставляется их *композиция* $\sigma\circ\tau\colon F \to H$, которая по каждому объекту $A \in Ob(K_1)$ выдаёт стрелку $\sigma_A \circ \tau_A$.

Упражнение 6.5. Проверьте, что $\sigma \circ \tau$ является естественным преобразованием, доказав коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \arrow[r, "\sigma_B"] & H(B) \end{tikzcd}$$

(оба квадрата коммутативны, надо доказать коммутативность внешнего прямоугольника).

Определение 6.6. Пусть K_1 и K_2 – малые категории. *Категорией функторов* $\mathrm{K}_2^{\mathrm{K}_1}$ называется категория, объектами которой являются функторы $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$, а протоморфизмами – естественные преобразования $\tau\colon F \to G$.

Пример 6.7. Пусть K_1 и K_2 – малые категории предпорядка. Соответствующие отношения предпорядка на $Ob(\mathrm{K}_1)$ и $Ob(\mathrm{K}_2)$ обозначим $\lesssim_1$ и $\lesssim_2$. В этом случае $\mathrm{K}_2^{\mathrm{K}_1}$ тоже является малой категорией предпорядка. С точностью до изоморфизма категорий, её можно описать так: объектами являются монотонные отображения $Ob(\mathrm{K}_1)$ в $Ob(\mathrm{K}_2)$ (обозначим их $F, G, H\ldots$), при этом порядок $F \lesssim G$ на множестве отображений задаётся условием

$$F \lesssim G \Leftrightarrow \text{для всякого } A \in Ob(\mathrm{K}_1) \text{ верно } F(A) \lesssim_2 G(A)$$

Действительно, монотонные отображения взаимно однозначно соответствуют функторам. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ должно сопоставлять каждому $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ стрелку $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$. Такие стрелки существуют (и однозначно определены) $\Leftrightarrow$ для всякого $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ верно $F(A) \lesssim_2 G(A)$. Таким образом, между любыми двумя функторами в данном случае может быть не больше одного естественного преобразования.

Упражнение 6.8. Проверьте, что для малых K_1 и K_2 категория $\mathrm{K}_2^{\mathrm{K}_1}$ тоже малая.

Определение 6.9. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ называется *естественным изоморфизмом*, если существует (однозначно определённое) обратное преобразование $\tau^{-1}\colon G \to F$, для которого выполнены условия:

$$\tau \circ \tau^{-1} = id_G$$

$$\tau^{-1} \circ \tau = id_F$$

В этом случае функторы F и G называются *естественно изоморфными* или просто *изоморфными* (пишется $F \cong G$).

Упражнение 6.10. Проверьте, что $\tau\colon F \to G$ является естественным изоморфизмом $\Leftrightarrow$ для любого A стрелка $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$ является изоморфизмом.

Глава 7

Топосы вида $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$

Для „больших“ категорий существование категории функторов очевидно не всегда. Существует ли категория $\mathbf{Set}^{\mathbf{Set}}$? Если да, то она должна быть очень „большой“. Один важный частный случай мы рассмотрим отдельно.

Соглашение 7.1. Мы будем считать, что для любой малой категории K существует категория $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$. Категорию K в этой ситуации будем называть *шкалой*.

Упражнение 7.2. Проверьте, что все такие категории $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$ локально малы.

Категории вида $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$, где K малая, являются важными примерами так называемых *топосов*. Неформально, топосы – это категории, сильно похожие на $\mathbf{Set}$. Объекты любого топоса можно воспринимать как некие „обобщённые“ или „нестандартные“ множества.

Пример 7.3. Возьмём в качестве шкалы K следующую малую категорию предпорядка (на диаграмме показаны все её объекты и все стрелки)

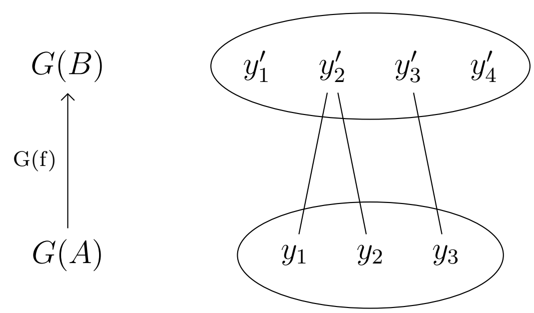
$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop left, "id_B"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"] \end{tikzcd}$$

Шкалу K будем воспринимать как „время“. Есть два момента времени A и B, причём A предшествует B (поскольку $A \lesssim B$). Функтор $G\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$

определяется парой множеств $G(A)$ и $G(B)$, а также функцией между ними $G(f)$.

$$\begin{tikzcd} G(B) \\ G(A) \arrow[u, "G(f)"] \end{tikzcd}$$

Например, пусть множество $G(A)$ состоит из трёх элементов $\{y_1, y_2, y_3\}$, множество $G(B)$ состоит их четырёх элементов $\{y_1', y_2', y_3', y_4'\}$, а функция $G(f)$ отображает $G(A)$ в $G(B)$ как показано на картинке:



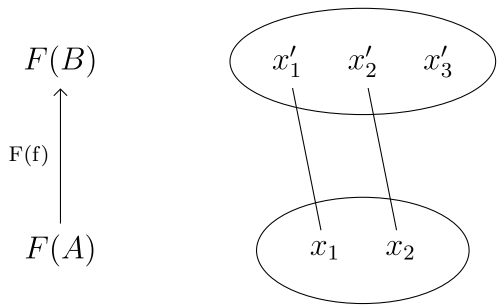
Это значит, что

$$G(f)(y_1) = y_2'$$

$$G(f)(y_2) = y_2'$$

$$G(f)(y_3) = y_3'$$

Содержательно, функтор G – это „множество, меняющееся со временем“. В момент времени A мы видим элементы y_1, y_2, y_3. В момент времени B выясняется, что y_1 равен y_2 (о чём в момент времени A мы ещё не знали) и эти элементы „слипаются“ в один элемент y_2'. Элемент y_3 остаётся обособленным и переходит в элемент y_3'. Вдобавок, появляются два новых элемента y_1' и y_4', о существовании которых в момент времени A мы не знали. Рассмотрим другой функтор $F\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$, выглядящий так:



Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ определяется парой функций

$$\tau_A\colon F(A) \to G(A)$$

$$\tau_B\colon F(B) \to G(B)$$

для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \\
F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Например, пусть

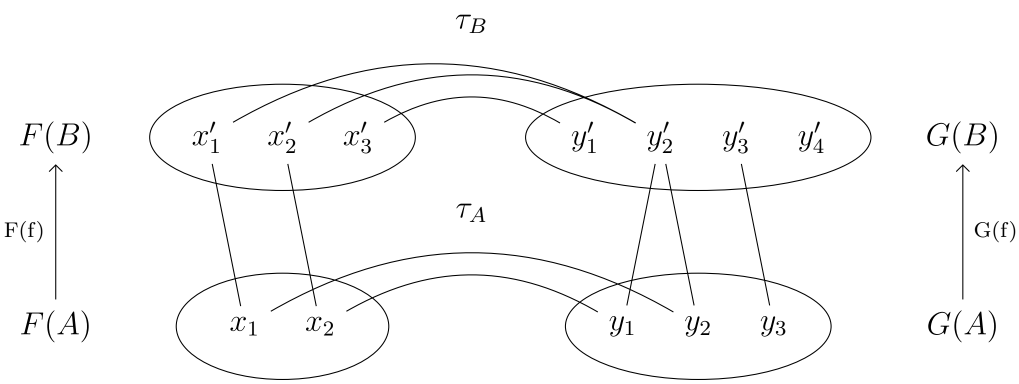
$$\tau_B(x'_1) = y'_2$$

$$\tau_B(x'_2) = y'_2$$

$$\tau_B(x'_3) = y'_1$$

$$\tau_A(x_1) = y_2$$

$$\tau_A(x_2) = y_1$$



Коммутативность диаграммы означает равенство следующих функций

$$\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$$

Это значит, что для любого $x \in F(A)$ выполнено равенство

$$\tau_B(F(f)(x)) = G(f)(\tau_A(x))$$

Иными словами

$$F(f)(x) = x' \wedge \tau_B(x') = y' \wedge \tau_A(x) = y \text{ влечёт } G(f)(y) = y'$$

для любых $x \in F(A)$, $x' \in F(B)$, $y \in G(A)$ и $y' \in G(B)$.

Определение 7.4. Пусть M – полугруппа с единицей. *M-множеством* называется множество-носитель X вместе с заданным на нём *действием* полугруппы M. Это значит, что для любых $f \in M$ и $x \in X$ определён некоторый элемент $f(x) \in X$, причём выполнены следующие условия:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$e(x) = x$$

для любых $f, g \in M$ и $x \in X$.

Содержательно, каждому элементу f полугруппы M сопоставляется функция из X в X. Эта функция переводит x в $f(x)$. Условия означают, что произведение $g \circ f$ переходит в композицию соответствующих функций, а двусторонняя единица e – в тождественную функцию id_X.

Определение 7.5. Пусть даны два M-множества с носителями X и Y. *Гомоморфизмом M-множеств* называется функция $t\colon X \to Y$, сохраняющая действие. Это значит, что

$$t(f(x)) = f(t(x))$$

для любых $f \in M$ и $x \in X$.

Пример 7.6. Возьмём в качестве шкалы K малую категорию с одним объектом A, обозначим буквой M соответствующую полугруппу с единицей. Таким образом, M – это $Mor(\mathrm{K})$ с композицией в качестве умножения и двусторонней единицей id_A. Категорию $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$ с точностью до изоморфизма категорий можно описать следующим образом: её объектами являются M-множества, а протострелками – их гомоморфизмы. Действительно, каждый функтор $F\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ определяется множеством $F(A)$ и отображением $F\colon Mor(\mathrm{K}) \to Mor(\mathbf{Set})$, переводящим каждую стрелку $f\colon A \to A$ в стрелку $F(f)\colon F(A) \to F(A)$. Это отображение задаёт действие M на носителе $F(A)$ по правилу

$$f(x) = F(f)(x)$$

для любых $f \in M$ и $x \in F(A)$. Функтор $G\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ задаёт действие M на носителе $G(A)$ по правилу

$$f(y) = G(f)(y)$$

для любых $f \in M$ и $y \in G(A)$. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ определяется функцией $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$, которая является гомоморфизмом M-множеств.

Упражнение 7.7. Проверьте детали, посмотрев на следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \\
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[u, "F(f)"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Пример 7.8. Возьмём в качестве шкалы K следующую категорию (на диаграмме показаны все её объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Функтор $F\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ задаётся парой множеств $F(A)$ и $F(B)$ и парой функций между ними

$$F(A) \overset{F(f)}{\underset{F(g)}{\rightrightarrows}} F(B)$$

Как множества, так и функции совершенно произвольны. Оказывается, есть взаимно однозначное соответствие между такими функторами и ориентированными графами. Рассмотрим для примера следующий граф

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "e"] & Y \arrow[d, "b"] \\ Z \arrow[r, "d"] & V \end{tikzcd}$$

Сопоставим ему функтор следующим образом. В качестве $F(A)$ возьмём множество рёбер $\{a, b, c, d, e\}$. В качестве $F(B)$ возьмём множество вершин $\{X, Y, Z, V\}$. В качестве $F(f)$ и $F(g)$ возьмём функции, сопоставляющие каждому ребру его начало и конец, соответственно. Естественным преобразованиям функторов соответствуют некие „гомоморфизмы графов“, отображающие вершины одного графа в вершины другого, а рёбра в рёбра с сохранением начал и концов. Категорию графов и их гомоморфизмов в дальнейшем будем обозначать **Grph**.

Глава 8

Терминальные объекты, элементы

Определение 8.1. Объект $A \in Ob(\text{К})$ называется *терминальным* в категории К, если для любого $B \in Ob(\text{К})$ существует ровно одна стрелка из B в A.

$$B \dashrightarrow A$$

Пример 8.2. В **Set** терминальными объектами являются одноэлементные множества и только они. Единственная функция из множества B в одноэлементное множество A переводит все элементы B в единственный элемент A.

Теорема 8.3. *Все терминальные объекты изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – терминальные объекты в некоторой категории. Есть единственная стрелка $f\colon A_1 \to A_2$ и единственная стрелка $g\colon A_2 \to A_1$. Композиция $g \circ f\colon A_1 \to A_1$ должна быть единственной стрелкой из A_1 в A_1, а композиция $f \circ g\colon A_2 \to A_2$ должна быть единственной стрелкой из A_2 в A_2. Но есть стрелки $id_{A_1}\colon A_1 \to A_1$ и $id_{A_2}\colon A_2 \to A_2$, поэтому

$$g \circ f = id_{A_1}$$

$$f \circ g = id_{A_2}$$

□

Пример 8.4. В **Cat** терминальными объектами являются категории с единственным объектом и единственной (тождественной) стрелкой

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "id_X"] \end{tikzcd}$$

Единственный функтор из категории K в терминальную категорию переводит все объекты K в единственный объект терминальной категории, а все стрелки K в единственную стрелку.

Пример 8.5. В категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$ терминальные объекты – это функторы F, для которых множества $F(A)$ одноэлементные при любых $A \in Ob(K)$, а стрелки $F(f)$ единственно возможные между одноэлементными множествами.

Пример 8.6. Пусть K – категория предпорядка. Объект A является терминальным $\Leftrightarrow$ A является наибольшим элементом относительно $\lesssim$.
В самом деле, наличие (необходимо единственной в категории предпорядка) стрелки из любого B в A означает, что $B \lesssim A$ для любого $B \in Ob(\mathrm{K})$.

Замечание 8.7. Если предпорядок не является частичным порядком, наибольших элементов может быть несколько. Например, отношение $A \lesssim B$, тождественно истинное для любых A и B, является предпорядком, в котором все элементы наибольшие.

Соглашение 8.8. Если предполагается, что в категории выбран какой-то терминальный объект (из всех возможных), будем обозначать его символом 1. Единственную стрелку из объекта B в 1 будем обозначать $!_B$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dashed, "!_B"] & 1 \end{tikzcd}$$

Упражнение 8.9. Проверьте, что $!_1 = id_1$.

Упражнение 8.10. Проверьте, что для любой стрелки $f\colon A \to B$ выполнено $!_B \circ f = !_A$.

Упражнение 8.11. Пусть стрелка $f\colon 1 \to A$ является изоморфизмом. Докажите, что объект A терминальный и единственная стрелка из B в A выглядит так $f \circ !_B$.

Упражнение 8.12. Любой объект, изоморфный терминальному, сам является терминальным.

Соглашение 8.13. Будем считать, что в **Set** выбрано в качестве 1 некоторое одноэлементное множество $\{*\}$ с единственным элементом $*$ (конкретный выбор совершенно не важен).

Определение 8.14. *Элементами*, или *точками* объекта B называются стрелки вида $f\colon 1 \to B$.

Замечание 8.15. Стрелка $f\colon A \to B$ переводит элементы A в элементы B следующим образом: каждый элемент $g\colon 1 \to A$ переходит в элемент $f \circ g\colon 1 \to B$.

Пример 8.16. В **Set** точки множества B взаимно однозначно соответствуют элементам B в обычном теоретико-множественном смысле. Действительно, функция из $\{*\}$ в B однозначно определяется элементом B, в который переходит $*$.

Пример 8.17. Пусть даны два множества A и B, точка $g\colon \{*\} \to A$, переводящая $*$ в некоторое $a \in A$ и функция $f\colon A \to B$. В этом случае $f \circ g\colon \{*\} \to B$ переводит $*$ в $f(a) \in B$. Это показывает, как теоретико-множественное применение функции к аргументу изображается с помощью композиции.

Пример 8.18. В категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$ в качестве 1 выберем функтор $1\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$, для которого $1(A) = \{*\}$ для всех $A \in Ob(\mathrm{K})$. Пусть дан функтор $G\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$. Элементы функтора G – это естественные преобразования $\tau\colon 1 \to G$. Каждая стрелка (в **Set**) $\tau_A\colon \{*\} \to G(A)$ выделяет элемент множества $G(A)$. Условия естественности

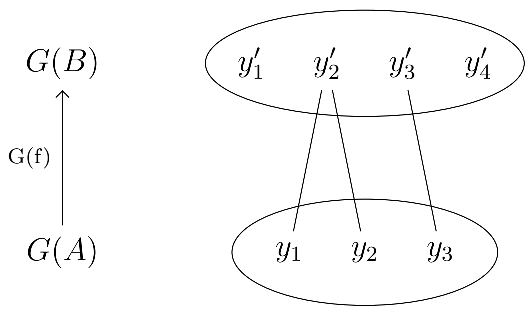
$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \\
\{*\} \arrow[u, dashed, "!_{\{*\}}"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

означают, что для каждой стрелки $f\colon A \to B$ соответствующая функция $G(f)\colon G(A) \to G(B)$ переводит выделенный элемент множества $G(A)$ в выделенный элемент множества $G(B)$.

Пример 8.19. Рассмотрим категорию $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$ со шкалой K

$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop left, "id_B"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"] \end{tikzcd}$$

и функтор $G\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$, имеющий вид



Элементы функтора G – это пары элементов $y \in G(A), y' \in G(B)$ со свойством $G(f)(y) = y'$. В данном случае элементов три, они задаются парами $(y_1, y_2'), (y_2, y_2')$ и (y_3, y_3'). Содержательно, точка в данном случае – это „мировая линия точки во времени“.

Замечание 8.20. Естественное преобразование $\tau\colon F \to G$ переводит элементы функтора F в элементы функтора G. Элемент $\sigma\colon 1 \to F$ переходит в элемент $\tau \circ \sigma\colon 1 \to G$. Тут полезно ещё раз посмотреть на картинку на стр. 28.

Пример 8.21. Пусть K – малая категория с одним объектом A, задающая моноид M. Функтор $1\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ определяет M-множество с носителем $\{*\}$ и действием

$$f(*) = *$$

для всякого $f \in M$. Пусть дан функтор $G\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$. Он задаёт M-множество с носителем $G(A)$ и действием

$$f(y) = G(f)(y)$$

для любых $f \in M$ и $y \in G(A)$. В этом случае элементы G соответствуют неподвижным элементам $G(A)$, то есть таким $y \in G(A)$, что $G(f)(y) = y$ для всех $f \in M$.

Упражнение 8.22. Проверьте детали, посмотрев на коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \\
\{*\} \arrow[u, dashed, "!_{\{*\}}"] \arrow[r, "\tau_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Пример 8.23. В категории графов $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$ над шкалой K (показаны все объекты и все стрелки, кроме единичных)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

терминальный объект 1 имеет вид

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[loop above, "*"]
\end{tikzcd}$$

(это граф с одной вершиной и одним ребром, которое необходимо должно быть петлёй). Точка графа – это пара (V, r), где V – вершина графа, а r – петля, то есть ребро из V в V.

Пример 8.24. В категории групп **Grp** терминальным объектом 1 будет группа из одного единичного элемента $\{e\}$. Тут мы видим неприятную ситуацию – в каждой группе Gr с категорной точки зрения есть только один элемент. Действительно, есть ровно один гомоморфизм из $\{e\}$ в Gr (переводящий e в единичный элемент группы Gr). Таким образом, элементы множества-носителя группы Gr не соответствуют её категорным элементам. Тем не менее, определение 8.14 удобно и мы будем им пользоваться.

Глава 9

Двойственные категории

Для каждой категории К мы определим двойственную категорию $К^{op}$, в которой те же объекты, а стрелки формально обращены в противоположную сторону. Это значит, что стрелка из A в B в К считается стрелкой из B в A в $К^{op}$.

Определение 9.1. Для данной категории К *двойственная категория* $К^{op}$ задаётся следующим набором данных:

1. Объекты $A, B, C \dots$ в $К^{op}$ те же, что в К.
2. Стрелки $f, g, h \dots$ в $К^{op}$ те же, что в К.
3. $f\colon B \to A$ в $К^{op}$ в том и только том случае, если $f\colon A \to B$ в К.
4. Композиция $f \circ g$ в $К^{op}$ по определению равна композиции $g \circ f$ в К (обратите внимание на разный порядок множителей).
5. Тождественные стрелки id_A в $К^{op}$ те же, что в К.

Пример 9.2. Слева некоторая категория К, справа $К^{op}$ (показаны все стрелки)

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[loop left, "id_C"] \\
B \arrow[u, "g"] \arrow[loop left, "id_B"] \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[uu, bend right, "g \circ f"'] \arrow[loop left, "id_A"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f \circ g"'] \arrow[loop right, "id_C"] \\
B \arrow[d, "f"] \arrow[loop right, "id_B"] \\
A \arrow[loop right, "id_A"]
\end{tikzcd}
$$

Замечание 9.3. Операции *dom* и *cod* в K^{op} соответствуют *cod* и *dom* в категории K.

Упражнение 9.4. Проверьте, что $(\mathrm{K}^{op})^{op} = \mathrm{K}$ (это не просто изоморфизм категорий, а точное совпадение).

Упражнение 9.5. Проверьте, что изоморфизмы в K остаются изоморфизмами в K^{op}.

Каждому понятию теории категорий соответствует некоторое двойственное понятие, которое получается, если „сделать то же самое в двойственной категории“. Например, двойственным к понятию „терминальный объект“ является понятие „начальный объект“.

Определение 9.6. Объект $A \in Ob(\mathrm{K})$ называется *начальным объектом* в категории K, если для любого $B \in Ob(\mathrm{K})$ существует ровно одна стрелка из A в B.

Упражнение 9.7. Проверьте, что объект A является начальным в K $\Leftrightarrow$ объект A является терминальным в K^{op}.

Пример 9.8. В **Set** есть единственный начальный объект, это пустое множество $\emptyset$. Из $\emptyset$ в любое множество B есть ровно одна функция – с пустым графиком.

Пример 9.9. В любой категории вида $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$ есть единственный начальный объект – это функтор F, для которого множество $F(A)$ пустое при любом $A \in Ob(K)$, а стрелки $F(f)$ единственно возможные между пустыми множествами.

Упражнение 9.10. Проверьте, что в категории предпорядка объект A является начальным $\Leftrightarrow$ A является наименьшим элементом относительно предпорядка $\lesssim$.

Упражнение 9.11. Проверьте, что в $\mathbf{Set}^{op}$ много начальных объектов и только один терминальный.

Упражнение 9.12. В категории групп начальный объект совпадает с терминальным (это группа из одного единичного элемента $\{e\}$).

Соглашение 9.13. Если предполагается, что в категории выбран какой-то начальный объект (из всех возможных), будем обозначать его символом 0. Единственную стрелку из объекта 0 в B будем обозначать $0_B \colon 0 \to B$.

Теорема 9.14. *Все начальные объекты изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – начальные объекты в некоторой категории. Есть единственная стрелка $f \colon A_1 \to A_2$ и единственная стрелка $g \colon A_2 \to A_1$. Композиция $g \circ f \colon A_1 \to A_1$ должна быть единственной стрелкой из A_1 в A_1, а композиция $f \circ g \colon A_2 \to A_2$ должна быть единственной стрелкой из A_2 в A_2. Но есть стрелки $id_{A_1} \colon A_1 \to A_1$ и $id_{A_2} \colon A_2 \to A_2$, поэтому

$$g \circ f = id_{A_1}$$

$$f \circ g = id_{A_2}$$

□

Другое доказательство. Начальные объекты в K – это терминальные объекты в K^{op}. Мы знаем, что все терминальные объекты изоморфны. Изоморфизмы в K те же, что в K^{op}. Следовательно, все начальные объекты изоморфны.

□

Второе доказательство является примером применения так называемого *принципа двойственности*. Для каждого утверждения в языке теории категорий можно формально написать двойственное утверждение, заменив *dom* на *cod*, *cod* на *dom* и все композиции $g \circ f$ на $f \circ g$. Например, двойственным к утверждению „все терминальные объекты изоморфны“ будет утверждение „все начальные объекты изоморфны“.

Теорема 9.15. *(Принцип двойственности). Если некоторое утверждение, записанное в теоретико-категорном языке, верно для всех категорий, то и двойственное к нему утверждение верно для всех категорий.*

Доказательство. Если утверждение верно для некоторой категории K, то двойственное утверждение верно для категории K^{op}. Если утверждение верно для всех категорий K, то двойственное утверждение верно для всех категорий вида K^{op} (то есть, двойственных к чему-нибудь). Но любая категория двойственна к чему-нибудь в силу равенства $K = (K^{op})^{op}$.

□

Конечно, это не строгая формулировка и не строгое доказательство, не будем пытаться его формализовать (хотя это не особенно трудно). Подробное изложение можно найти в книге Маклейна „Категории для работающего математика“.

Упражнение 9.16. Объект, изоморфный начальному, сам является начальным.

Следующее определение обобщает такое наблюдение: монотонное отображение упорядоченных множеств остаётся монотонным, если оба множества „перевернуть вверх ногами“.

Определение 9.17. Каждому функтору $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ сопоставим функтор $F^{op}\colon \mathrm{K}_1^{op} \to \mathrm{K}_2^{op}$, который действует на объектах и на стрелках точно так же, как F. Иными словами, F и F^{op} совпадают как протоморфизмы категорий, но у них разные начала и концы.

Упражнение 9.18. Проверьте, что F^{op} является функтором (то есть, сохраняет композицию, тождественные стрелки, *dom* и *cod*).

В старых книгах по теории категорий то, что мы называем функтором, называли *ковариантным функтором.* Использовали также понятие *контравариантный функтор.*

Определение 9.19. *Контравариантный функтор* F из категории K_1 в категорию K_2 – это пара отображений (обозначаемых одной буквой)

$$F\colon Ob(\mathrm{K}_1) \to Ob(\mathrm{K}_2)$$

$$F\colon Mor(\mathrm{K}_1) \to Mor(\mathrm{K}_2)$$

первое из которых отображает объекты K_1 в объекты K_2, а второе – морфизмы K_1 в морфизмы K_2, причём для любых f, g, A, B, C из категории K_1 выполнено:

1. $f\colon A \to B$ влечёт $F(f)\colon F(B) \to F(A)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ влечёт $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

Упражнение 9.20. Проверьте, что контравариантные функторы из K_1 в K_2 взаимно однозначно соответствуют обычным (ковариантным) функторам из K_1 в K_2^{op}.

Упражнение 9.21. Проверьте, что контравариантные функторы из K_1 в K_2 взаимно однозначно соответствуют обычным (ковариантным) функторам из K_1^{op} в K_2.

Глава 10

Произведения

Определение 10.1. *Произведение* двух объектов A и B в категории К задаётся следующим набором данных:

1. Объектом $C \in Ob(\text{К})$.

2. Упорядоченной парой стрелок $f_1 \colon C \to A$ и $f_2 \colon C \to B$, эти стрелки называются *первой проекцией* и *второй проекцией*.

При этом требуется, чтобы для любого объекта $D \in Ob(\text{К})$ и любой упорядоченной пары стрелок $g_1 \colon D \to A$ и $g_2 \colon D \to B$ существовала единственная стрелка из D в C, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Читатель, возможно, уже почувствовал, что все определения в теории категорий даются „с точностью до изоморфизма“. Это некоторый общий принцип, который можно строго доказать (формализовав язык теории категорий), но мы не будем. В частности, у пары объектов A и B может быть много произведений, но все они изоморфны между собой (мы это докажем).

Соглашение 10.2. Если предполагается, что для двух объектов A и B выбрано некоторое произведение (из всех возможных), объект произведения будем обозначать $A \times B$, а проекции $pr_1^{A\times B}$ и $pr_2^{A\times B}$. Если A и B ясны из контекста, будем обозначать проекции просто pr_1 и pr_2. Будем обозначать $\langle g_1, g_2 \rangle$ единственную стрелку, делающую коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "\langle g_1, g_2 \rangle"] &
\end{tikzcd}$$

Мы видим, что

$$pr_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_1$$

$$pr_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_2$$

$pr_1 \circ f = g_1 \wedge pr_2 \circ f = g_2$ влечёт $f = \langle g_1, g_2 \rangle$
для любой стрелки $f\colon D \to A \times B$

Пример 10.3. Произведением множеств A и B в **Set** является декартово произведение $A \times B$, то есть множество упорядоченных пар вида (a, b), где $a \in A, b \in B$. Проекции определяются так

$$pr_1(a, b) = a$$

$$pr_2(a, b) = b$$

Функция $\langle g_1, g_2 \rangle\colon D \to A \times B$ определяется равенством

$$\langle g_1, g_2 \rangle(x) = (g_1(x), g_2(x))$$

для любого $x \in D$, где в правой части равенства круглые скобки обозначают обычную теоретико-множественную упорядоченную пару (например, по Куратовскому). Разберёмся, что будет, если в качестве множества

D взять $\{*\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[ld, "pr_1"'] \arrow[rd, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & \{*\} \arrow[lu, "g_1"] \arrow[ru, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "\langle g_1, g_2 \rangle"] &
\end{tikzcd}$$

Стрелка $g_1 \colon \{*\} \to A$ задаёт некоторый элемент A. Стрелка $g_2 \colon \{*\} \to B$ задаёт некоторый элемент B. Диаграмма утверждает, что существует единственный элемент $A \times B$ (это $\langle g_1, g_2 \rangle$), первая проекция которого равна g_1, а вторая проекция равна g_2.

$$pr_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_1$$

$$pr_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_2$$

Тут следует ещё раз посмотреть пример 8.17. Если g_1 переводит $*$ в некоторое $a \in A$, а g_2 переводит $*$ в некоторое $b \in B$, то $\langle g_1, g_2 \rangle$ переводит $*$ в теоретико-множественную упорядоченную пару (a, b). Таким образом, точки $A \times B$ взаимно однозначно соответствуют парам „точка A и точка B“.

Замечание 10.4. Стрелки вида $f \colon A \times B \to C$ в **Set** соответствуют функциям от двух аргументов $f(a, b)$, где $a \in A, b \in B$.

Замечание 10.5. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[ld, "pr_1"'] \arrow[rd, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & 1 \arrow[lu, "g_1"] \arrow[ru, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "\langle g_1, g_2 \rangle"] &
\end{tikzcd}$$

(внизу терминальный объект) однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет произведение в категории **Set**. В произвольных категориях это не так. Например, в категории групп **Grp** для любой группы A есть ровно одна стрелка из 1 в A (см. пример 8.24), поэтому приведённая диаграмма вообще не налагает ограничений на $A \times B$.

Упражнение 10.6. Произведением двух групп Gr_1 и Gr_2 в **Grp** будет множество пар вида (x, y), где x – элемент носителя Gr_1, y – элемент носителя Gr_2; с двусторонней единицей (e, e) и умножением $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$

Упражнение 10.7. Пусть K – локально малая категория, в которой есть произведение некоторой пары объектов A и B. Покажите, что

$$\mathrm{K}(C, A \times B) \cong \mathrm{K}(C, A) \times \mathrm{K}(C, B) \quad \text{для любого } C \in Ob(\mathrm{K})$$

(это изоморфизмы в **Set**). Попытайтесь доказать, что эти изоморфизмы являются компонентами некоторых естественных изоморфизмов.

Теорема 10.8. *Если есть два произведения A и B*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & & & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\ A & & B & \text{и} & A & & B \end{tikzcd}$$

то $C \cong D$. Более того, существует единственный изоморфизм $h\colon D \to C$, для которого коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[dd, dashed, bend left, "h^{-1}"] & \\ A & & B \\ & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, bend left, "h"] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть у объектов A и B есть два произведения

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & & & D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\ A & & B & \text{и} & A & & B \end{tikzcd}$$

По определению произведения, должны существовать стрелки
$h_1 \colon D \to C$ и $h_2 \colon C \to D$, делающие коммутативными следующие диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, dashed, "h_1"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, dashed, "h_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

Из равенств

$$f_1 \circ h_1 = g_1$$

$$f_2 \circ h_1 = g_2$$

$$g_1 \circ h_2 = f_1$$

$$g_2 \circ h_2 = f_2$$

легко выводятся равенства

$$f_1 \circ h_1 \circ h_2 = f_1$$

$$f_2 \circ h_1 \circ h_2 = f_2$$

$$g_1 \circ h_2 \circ h_1 = g_1$$

$$g_2 \circ h_2 \circ h_1 = g_2$$

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, "h_1"] & B \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, "h_2"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "h_2"] & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[u, "h_1"] &
\end{tikzcd}
$$

означающие коммутативность следующих диаграмм

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, dashed, "h_1 \circ h_2" description] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "h_2 \circ h_1" description] &
\end{tikzcd}$$

Из этого следует, что

$$h_1 \circ h_2 = id_C$$

$$h_2 \circ h_1 = id_D$$

поскольку следующие диаграммы тоже коммутативны.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, dashed, "id_C" description] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "id_D" description] &
\end{tikzcd}$$

□

Другое доказательство. Для данных объектов A и B категории K определим новую категорию K_1, объектами которой являются „вилки“ следующего вида

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Морфизмом между „вилками“

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

по определению будет любая стрелка $h\colon D \to C$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Композиция морфизмов в K_1 по определению такая же, как в K, единичные стрелки тоже. Поскольку композиция и единичные стрелки такие же, как в K, любой изоморфизм в K_1 будет изоморфизмом в K. Произведение A и B является терминальным объектом в K_1 (именно это утверждает определение произведения). Но все терминальные объекты изоморфны и изоморфизмы между ними единственно возможные.
□

Упражнение 10.9. Проверьте, что композиция морфизмов в K_1 является морфизмом, посмотрев на следующую диаграмму (надо доказать её коммутативность при некоторых условиях)

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\
A & C \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "l"] & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 10.10. Если стрелка $f\colon C \to A \times B$ является изоморфизмом, то C является произведением A и B с проекциями $pr_1 \circ f\colon C \to A$ и $pr_2 \circ f\colon C \to B$.

Замечание 10.11. Произведение в **Set** тоже определено только с точностью до изоморфизма (с теоретико-категорной точки зрения). Произведением конечных множеств с мощностями m и n будет любое множество мощностью $m \times n$ с подходящими проекциями. Какими именно проекциями – смотрите предыдущее упражнение.

Определение 10.12. *Произведением категорий* K_1 и K_2 называется категория $\mathrm{K}_1 \times \mathrm{K}_2$, заданная следующим образом:

1. Объектами $K_1 \times \mathrm{K}_2$ являются пары (A, B), где
   $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$
   $B \in Ob(\mathrm{K}_2)$
2. Морфизмами из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) являются пары (f, g), где
   $f \in \mathrm{K}_1(A_1, A_2)$
   $g \in \mathrm{K}_2(B_1, B_2)$
3. Композицией морфизмов
   $(f_1, g_1)\colon (A_1, B_1) \to (A_2, B_2)$ и
   $(f_2, g_2)\colon (A_2, B_2) \to (A_3, B_3)$
   является морфизм
   $(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)\colon (A_1, B_1) \to (A_3, B_3)$
4. Тождественной стрелкой объекта (A, B) является стрелка (id_A, id_B)

Упражнение 10.13. Проверьте, что это определение даёт произведение в **Cat**. Как устроены проекции?

Упражнение 10.14. Проверьте, что категория $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ изоморфна категории $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$, где шкала K имеет следующий вид (два объекта, стрелки только тождественные)

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "id_A"] & B \arrow[loop right, "id_B"]
\end{tikzcd}
$$

Замечание 10.15. Категории, в которых все стрелки тождественные, называются *дискретными*.

Упражнение 10.16. В категории предпорядка произведение $A \times B$ – это пересечение $A \sqcap B$, то есть наибольший (относительно $\lesssim$) объект C со свойством $C \lesssim A \wedge C \lesssim B$.

Теорема 10.17. $\langle pr_1^{A\times B}, pr_2^{A\times B}\rangle = id_{A\times B}$

Доказательство.

$$
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & A\times B \arrow[ul, "pr_1"] \arrow[ur, "pr_2"'] \arrow[uu, dashed, "\langle pr_1, pr_2\rangle"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & A\times B \arrow[ul, "pr_1"] \arrow[ur, "pr_2"'] \arrow[uu, dashed, "id_{A\times B}"] &
\end{tikzcd}
$$

□

Теорема 10.18. $\langle g_1, g_2\rangle \circ f = \langle g_1 \circ f, g_2 \circ f\rangle$
если обе части равенства определены.

Доказательство.

$$
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & D \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, dashed, "\langle g_1, g_2\rangle"] & B \\
 & C \arrow[ul, "g_1\circ f"] \arrow[ur, "g_2\circ f"'] \arrow[u, "f"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "g_1\circ f"] \arrow[ur, "g_2\circ f"'] \arrow[uu, dashed, "\langle g_1\circ f, g_2\circ f\rangle"] &
\end{tikzcd}
$$

□

Упражнение 10.19. $\langle pr_1 \circ f, pr_2 \circ f\rangle = f$
если левая часть равенства определена.

Определение 10.20. Для двух стрелок $f\colon A \to C$ и $g\colon B \to D$ их *произведение* $f\times g\colon A\times B \to C\times D$ определяется следующим равенством

$$f \times g = \langle f \circ pr_1, g \circ pr_2\rangle$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & C \\
A \times B \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dashed, "f \times g"] & C \times D \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
B \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}
$$

Пример 10.21. В **Set** произведением $f \times g$ будет функция, действующая так

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$$

для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Теорема 10.22. $id_A \times id_B = id_{A \times B}$

Доказательство.

$$id_A \times id_B = \langle id_A \circ pr_1, id_B \circ pr_2 \rangle = \langle pr_1, pr_2 \rangle = id_{A \times B}$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] & A \\
A \times B \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dashed, "id_{A \times B}"] & A \times B \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
B \arrow[r, "id_B"] & B
\end{tikzcd}
$$

□

Теорема 10.23. $(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)$
если обе части равенства определены.

Доказательство.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & C_1 \\
A_1 \times A_2 \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dashed, "f_1 \times f_2"] & B_1 \times B_2 \arrow[u, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, dashed, "g_1 \times g_2"] & C_1 \times C_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2
\end{tikzcd}
$$

Заметим, что правая часть равенства может быть определена, а левая нет (если $B_1 \times B_2$ не существует).
□

Упражнение 10.24. Если $A_1 \cong A_2$ и $B_1 \cong B_2$, то $A_1 \times B_1 \cong A_2 \times B_2$.

Теорема 10.25. $(g_1 \times g_2) \circ \langle f_1, f_2 \rangle = \langle g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2 \rangle$
если обе части равенства определены.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[r, "g_1"] & C_1 \\
A \arrow[ur, bend left, "f_1"] \arrow[dr, bend right, "f_2"'] \arrow[r, dashed, "\langle f_1, f_2 \rangle"] & B_1 \times B_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \arrow[r, dashed, "g_1 \times g_2"] & C_1 \times C_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
 & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2
\end{tikzcd}$$

Заметим, что правая часть равенства может быть определена, а левая нет (если $B_1 \times B_2$ не существует).
□

Пример 10.26. В топосах вида Set^{K} произведением функторов F и G является функтор $F \times G$, определённый следующими равенствами:

$$(F \times G)(A) = F(A) \times G(A)$$

$$(F \times G)(f) = F(f) \times G(f)$$

Проекциями $pr_1 \colon F \times G \to F$ и $pr_2 \colon F \times G \to G$ будут естественные преобразования с компонентами:

$$pr_1 \colon F(A) \times G(A) \to F(A)$$

$$pr_2 \colon F(A) \times G(A) \to G(A)$$

Для естественных преобразований $\tau \colon H \to F$ и $\sigma \colon H \to G$ стрелкой $\langle \tau, \sigma \rangle$ будет естественное преобразование с компонентами

$$\langle \tau_A, \sigma_A \rangle \colon H(A) \to F(A) \times G(A)$$

Упражнение 10.27. Проверьте детали.

Теорема 10.28. *Произведение A и 1 существует всегда, причём $A \times 1 \cong A$.*

Доказательство. В качестве произведения A и 1 работает следующая вилка

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "!_A"] & \\ A & & 1 \end{tikzcd}$$

потому что

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "!_A"] & \\ A & & 1 \\ & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2 = !_D"'] \arrow[uu, dashed, "g_1"] & \end{tikzcd}$$

□

Замечание 10.29. При любом выборе произведения A и 1 изоморфизм $A \times 1 \cong A$ выглядит так:

$$pr_1 \colon A \times 1 \to A$$

$$\langle id_A, !_A \rangle \colon A \to A \times 1$$

Действительно, $!_A \circ pr_1^{A\times 1} = pr_2^{A\times 1}$ (обе эти стрелки из $A \times 1$ в 1), поэтому

$$\langle id_A, !_A \rangle \circ pr_1 = \langle id_A \circ pr_1, !_A \circ pr_1 \rangle = \langle pr_1, pr_2 \rangle = id_{A\times 1}$$

$$pr_1 \circ \langle id_A, !_A \rangle = id_A$$

Упражнение 10.30. Пусть в категории K есть терминальный объект и выбрано некоторое произведение A и 1 для любого $A \in Ob(\mathrm{K})$. Рассмотрим следующий функтор $F \colon \mathrm{K} \to \mathrm{K}$

$$F(A) = A \times 1$$

$$F(f) = f \times id_1$$

Проверьте, что изоморфизмы из замечания 10.29 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F \to Id_{\mathrm{K}}$$

$$\tau^{-1}\colon Id_{\mathrm{K}} \to F$$

Замечание 10.31. Изоморфизм $A \times 0 \cong 0$, верный в **Set** и во всех топосах, в общем случае неверен. Контрпример – категория групп **Grp**, в которой начальный объект совпадает с терминальным (это группа из одного единичного элемента $\{e\}$), поэтому $A \times 0 \cong A \times 1 \cong A$.

Теорема 10.32. *Если существует произведение A и B, то существует и произведение B и A, причём $A \times B \cong B \times A$.*

Доказательство. В качестве произведения B и A работает следующая вилка

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "pr_2^{A\times B}"'] \arrow[dr, "pr_1^{A\times B}"] & \\ B & & A \end{tikzcd}$$

потому что

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "pr_2^{A\times B}"'] \arrow[dr, "pr_1^{A\times B}"] & \\ B & & A \\ & D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "\langle g_2, g_1\rangle"] & \end{tikzcd}$$

□

Замечание 10.33. Изоморфизм $A \times B \cong B \times A$ выглядит так:

$$\langle pr_2, pr_1\rangle\colon A \times B \to B \times A$$

$$\langle pr_2, pr_1\rangle\colon B \times A \to A \times B$$

Упражнение 10.34. Проверьте, что эти стрелки обратны друг к другу.

Определение 10.35. Категория называется *категорией с произведениями пар объектов*, если в ней есть произведение любой пары объектов.

Замечание 10.36. На практике обычно предполагается, что для любой пары объектов выбрано некоторое произведение из всех возможных. Строго говоря, в этом случае надо говорить о *категории с выбранными произведениями пар объектов*. При наличии аксиомы выбора разница, конечно, невелика, но иногда приходится работать без аксиомы выбора по чисто техническим причинам.

Упражнение 10.37. Пусть K – категория с выбранными произведениями пар объектов. Рассмотрим следующие функторы $F\colon \mathrm{K}\times\mathrm{K}\to\mathrm{K}$ и $G\colon \mathrm{K}\times\mathrm{K}\to\mathrm{K}$

$$F(A,B) = A\times B$$

$$F(f,g) = f\times g$$

$$G(A,B) = B\times A$$

$$G(f,g) = g\times f$$

Проверьте, что изоморфизмы из замечания 10.33 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F\to G$$

$$\tau^{-1}\colon G\to F$$

Определение 10.38. Пусть дано некоторое множество I и некоторое семейство объектов $\{A_i \mid i\in I\}$, где $A_i\in Ob(\mathrm{K})$. *Конусом* будем называть любой объект $C\in Ob(\mathrm{K})$ вместе с произвольным набором стрелок $f_i\colon C\to A_i$, индексированных элементами I. *Морфизмом между конусами* (D,g) и (C,f) будем называть любую стрелку $h\colon D\to C$, делающую коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "f_i"] & \\
& A_i \\
D \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "g_i"'] &
\end{tikzcd}$$

для всех $i\in I$.

Определение 10.39. *Произведением семейства объектов* $\{A_i \mid i \in I\}$ называется терминальный объект в категории конусов.

Соглашение 10.40. Произведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\prod_{i \in I} A_i$ с проекциями $pr_i \colon \prod_{i \in I} A_i \to A_i$ и единственной стрелкой $\langle g_i \rangle_{i \in I}$ для любого семейства стрелок $\{g_i \colon D \to A_i \mid i \in I\}$, делающей коммутативными все диаграммы следующего вида

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} A_i \arrow[dr, "pr_i"] & \\
& A_i \\
D \arrow[uu, "\langle g_i \rangle_{i\in I}"] \arrow[ur, "g_i"'] &
\end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Соглашение 10.41. Если множество I конечно (возьмём для ясности $I = \{1, 2, \ldots, n\}$), произведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ с проекциями $pr_i \colon A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_i$ и стрелками $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$, делающими коммутативными соответствующие диаграммы.

Пример 10.42. Произведение трёх объектов определяется следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
& & A \times B \times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dl, "pr_2"] \arrow[dr, "pr_3"] & \\
A & B & & C \\
& & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "\langle g_1, g_2, g_3 \rangle"] \arrow[ur, "g_3"'] &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 10.43. В $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Cat}$, $\mathbf{Grp}$ и категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$, где K – малая, существуют произведения любых множеств объектов (как конечных, так и бесконечных).

Пример 10.44. Произведение пустого семейства объектов – это терминальный объект.

$$\begin{tikzcd}
1 \\
\\
D \arrow[uu, dashed]
\end{tikzcd}$$

Пример 10.45. Произведение семейства, состоящего из одного объекта A – это, например, объект A с единственной проекцией $id_A \colon A \to A$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "id_A"'] \\
A & \\
& D \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

Теперь мы докажем, что произведение конечного числа объектов можно строить с помощью произведения пар следующим способом $((\ldots(A_1 \times A_2) \times \ldots) \times A_n)$.

Теорема 10.46. *Если в категории* K *есть терминальный объект и произведение любой пары объектов, то в* K *есть произведение любого конечного семейства объектов.*

Доказательство по индукции. Пусть уже построено произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Определим $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$ как $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}$ с набором проекций

$$pr_1 = pr_1^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$pr_2 = pr_2^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$\ldots$$

$$pr_n = pr_n^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$pr_{n+1} = pr_2^{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

Стрелка $\langle g_1, g_2, \dots, g_n, g_{n+1}\rangle$ задаётся следующим равенством

$$\langle g_1, g_2, \dots, g_n, g_{n+1}\rangle = \langle\langle g_1, g_2, \dots, g_n\rangle, g_{n+1}\rangle$$

□

Пример 10.47.

$$\begin{tikzcd}
& & A \times B \times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dl, "pr_2"] \arrow[dr, "pr_3"] & \\
A & B & & C \\
& & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[ur, "g_3"'] \arrow[uu, dashed, "\langle g_1, g_2, g_3\rangle"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & & (A \times B) \times C \arrow[dll, "pr_1"'] \arrow[dd, "pr_2"] \\
& A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & & \\
A & & B & C \\
& & D \arrow[ull, "g_1"] \arrow[u, "g_2"] \arrow[ur, "g_3"'] \arrow[uul, dashed, bend left, "\langle g_1, g_2\rangle"] \arrow[uuur, dashed, "\langle\langle g_1, g_2\rangle, g_3\rangle"] &
\end{tikzcd}$$

$$pr_1^{A\times B\times C} = pr_1^{A\times B} \circ pr_1^{(A\times B)\times C}$$

$$pr_2^{A\times B\times C} = pr_2^{A\times B} \circ pr_1^{(A\times B)\times C}$$

$$pr_3^{A\times B\times C} = pr_2^{(A\times B)\times C}$$

$$\langle g_1, g_2, g_3\rangle = \langle\langle g_1, g_2\rangle, g_3\rangle$$

Упражнение 10.48. Проверьте, что эта конструкция действительно даёт произведение трёх объектов A, B, C.

Можно строить произведение конечного числа объектов и таким способом $(A_1 \times (\ldots \times (A_{n-1} \times A_n) \ldots))$. Порядок расстановки скобок неважен в силу следующей теоремы.

Теорема 10.49. *Если существуют оба произведения* $(A \times B) \times C$ *и* $A \times (B \times C)$, *то* $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

Доказательство. Изоморфизмы выглядят так

$$\langle pr_1 \circ pr_1, \langle pr_2 \circ pr_1, pr_2\rangle\rangle \colon (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$$

$$\langle\langle pr_1, pr_1 \circ pr_2\rangle, pr_2 \circ pr_2\rangle \colon A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$$

□

Упражнение 10.50. Показать, что эти стрелки обратны друг к другу.

Замечание 10.51. Проще показать, что $A \times (B \times C)$ с подходящими проекциями тоже является произведением трёх объектов A, B, C, а все произведения изоморфны, как терминальные объекты в соответствующей категории конусов.

Упражнение 10.52. (Для трудолюбивых людей). Пусть K – категория с выбранными произведениями пар объектов. Рассмотрим следующие функторы $F\colon \mathrm{K} \times \mathrm{K} \times \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ и $G\colon \mathrm{K} \times \mathrm{K} \times \mathrm{K} \to \mathrm{K}$

$$F(A, B, C) = (A \times B) \times C$$

$$F(f, g, h) = (f \times g) \times h$$

$$G(A, B, C) = A \times (B \times C)$$

$$G(f, g, h) = f \times (g \times h)$$

Проверьте, что изоморфизмы из доказательства теоремы 10.49 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau\colon F \to G$$

$$\tau^{-1}\colon G \to F$$

Определение 10.53. Категория называется *категорией с конечными произведениями*, если в ней есть терминальный объект и произведение любой пары объектов. Равносильное условие: в категории есть произведение любого конечного семейства объектов.

Замечание 10.54. На практике обычно предполагается, что для любого конечного семейства объектов выбрано некоторое произведение из всех возможных. Строго говоря, в этом случае надо говорить о *категории с выбранными конечными произведениями*.

Замечание 10.55. О терминологии. По-английски стрелку вида $f \times g$ называют “product map”, а стрелку вида $\langle f, g\rangle$ называют как попало или никак. По-русски в некоторых книгах стрелку $\langle f, g\rangle$ явно неудачно называют „произведением“, для стрелки $f \times g$ в этом случае приходится придумывать странные названия. В принципе, в силу упражнения 10.7 стрелку вида $\langle f, g\rangle$ можно называть просто „упорядоченной парой“, хотя она и отличается в **Set** от упорядоченной пары по Куратовскому.

Глава 11

Копроизведения

Копроизведение – это произведение в двойственной категории.

Определение 11.1. *Копроизведение* двух объектов A и B в категории К задаётся следующим набором данных:

1. Объектом $C \in Ob(\mathrm{K})$.

2. Упорядоченной парой стрелок $f_1 \colon A \to C$ и $f_2 \colon B \to C$, эти стрелки называются *первой копроекцией* и *второй копроекцией*.

При этом требуется, чтобы для любого объекта $D \in Ob(\mathrm{K})$ и любой упорядоченной пары стрелок $g_1 \colon A \to D$ и $g_2 \colon B \to D$ существовала единственная стрелка из C в D, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, dashed] & \\
A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.2. Копроизведения определены с точностью до изоморфизма.

Соглашение 11.3. Если предполагается, что для двух объектов A и B выбрано некоторое копроизведение (из всех возможных), объект копроизведения будем обозначать $A + B$, а копроекции k_1^{A+B} и k_2^{A+B}. Если A и

B ясны из контекста, будем обозначать копроекции просто k_1 и k_2. Будем обозначать $[g_1, g_2]$ единственную стрелку, делающую коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & A+B \arrow[dd, dashed, "{[g_1,g_2]}"] & \\
A \arrow[ur, "k_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & B \arrow[ul, "k_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

Мы видим, что

$$[g_1, g_2] \circ k_1 = g_1$$

$$[g_1, g_2] \circ k_2 = g_2$$

$f \circ k_1 = g_1 \wedge f \circ k_2 = g_2$ влечёт $f = [g_1, g_2]$
для любой стрелки $f\colon A + B \to D$.

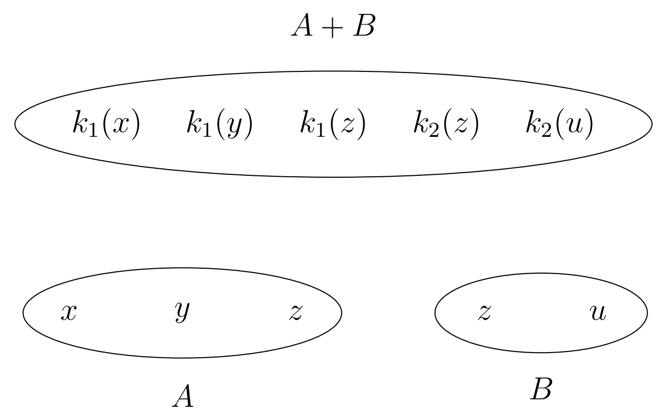
Упражнение 11.4. Пусть K – локально малая категория, в которой есть копроизведение некоторой пары объектов A и B. Покажите, что

$$\mathrm{K}(A + B, C) \cong \mathrm{K}(A, C) \times \mathrm{K}(B, C) \quad \text{для любого } C \in Ob(\mathrm{K}).$$

Покажите, что эти изоморфизмы являются компонентами некоторых естественных изоморфизмов.

Пример 11.5. В **Set** копроизведение множеств A и B – это их дизъюнктное объединение $A+B$, то есть объединение непересекающихся изоморфных копий A и B (если A и B не пересекаются, можно взять просто объединение). Стрелки $k_1\colon A \to A + B$ и $k_2\colon B \to A + B$ – это вложения A в $A + B$ и B в $A + B$ соответственно.

Пример 11.6.



Упражнение 11.7. Разберитесь, как устроена стрелка $[g_1, g_2]$ в $\mathbf{Set}$. Она определяется некоторым „разбором случаев“.

Пример 11.8. В категории предпорядка копроизведение $A + B$ – это объединение $A \sqcup B$, то есть наименьший (относительно $\lesssim$) объект C со свойством $A \lesssim C \wedge B \lesssim C$.

Упражнение 11.9. $[k_1^{A+B}, k_2^{A+B}] = id_{A+B}$

Упражнение 11.10. $f \circ [g_1, g_2] = [f \circ g_1, f \circ g_2]$
если обе части равенства определены.

Упражнение 11.11. $[f \circ k_1, f \circ k_2] = f$
если левая часть равенства определена.

Определение 11.12. Для двух стрелок $f\colon C \to A$ и $g\colon D \to B$ их *копроизведение* $f + g\colon C + D \to A + B$ определяется следующим равенством

$$f + g = [k_1 \circ f, k_2 \circ g]$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "k_1"'] & C \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A + B & C + D \arrow[l, dashed, "f + g"'] \\
B \arrow[u, "k_2"] & D \arrow[l, "g"] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.13. $id_A + id_B = id_{A+B}$

$$\begin{tikzcd}
A & A \arrow[l, "id_A"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A + B \arrow[u, leftarrow, "k_1"'] & A + B \arrow[l, dashed, "id_{A+B}"'] \\
B \arrow[u, "k_2"] & B \arrow[l, "id_B"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.14. $(f_1 + f_2) \circ (g_1 + g_2) = (f_1 \circ g_1) + (f_2 \circ g_2)$
если обе части равенства определены.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "k_1"'] & B_1 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "k_1"'] & C_1 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \arrow[l, dashed, "f_1 + f_2"'] & C_1 + C_2 \arrow[l, dashed, "g_1 + g_2"'] \\
A_2 \arrow[u, "k_2"] & B_2 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[u, "k_2"] & C_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.15. $[f_1, f_2] \circ (g_1 + g_2) = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$
если обе части равенства определены.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[dl, bend right, "f_1"'] \arrow[d, "k_1"] & C_1 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "k_1"] \\
A & B_1 + B_2 \arrow[l, dashed, "{[f_1, f_2]}"'] & C_1 + C_2 \arrow[l, dashed, "g_1 + g_2"'] \\
 & B_2 \arrow[ul, bend left, "f_2"] \arrow[u, "k_1"'] & C_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[u, "k_2"']
\end{tikzcd}$$

Пример 11.16. В топосах вида Set^{K} копроизведением функторов F и G является функтор $F + G$, определённый следующими равенствами:

$$(F + G)(A) = F(A) + G(A)$$

$$(F + G)(f) = F(f) + G(f)$$

Копроекциями $k_1\colon F \to F+G$ и $k_2\colon G \to F+G$ будут естественные преобразования с компонентами:

$$k_1\colon F(A) \to F(A)+G(A)$$

$$k_2\colon G(A) \to F(A)+G(A)$$

Для естественных преобразований $\tau\colon F \to H$ и $\sigma\colon G \to H$ стрелкой $[\tau,\sigma]$ будет естественное преобразование с компонентами

$$[\tau_A,\sigma_A]\colon F(A)+G(A) \to H(A)$$

Упражнение 11.17. Проверьте детали.

Упражнение 11.18. Копроизведение A и 0 существует всегда, причём $A+0 \cong A$.

Упражнение 11.19. Если существует копроизведение A и B, то существует и копроизведение B и A, причём $A+B \cong B+A$.

Определение 11.20. Пусть дано некоторое множество I и некоторое семейство объектов $\{A_i \mid i \in I\}$, где $A_i \in Ob(\mathrm{K})$. *Коконусом* будем называть любой объект $C \in Ob(\mathrm{K})$ вместе с произвольным набором стрелок $f_i\colon A_i \to C$, индексированных элементами I. *Морфизмом между коконусами* (C,f) и (D,g) будем называть любую стрелку $h\colon C \to D$, делающую коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dd, "h"'] & \\
& A_i \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[dl, "g_i"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Определение 11.21. *Копроизведением семейства объектов* $\{A_i \mid i \in I\}$ называется начальный объект в категории коконусов.

Соглашение 11.22. Копроизведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\sum_{i\in I} A_i$ с копроекциями $k_i \colon A_i \to \sum_{i\in I}$ и единственной стрелкой $[g_i]_{i\in I}$ для любого семейства стрелок $\{g_i \colon A_i \to D \mid i \in I\}$, делающей коммутативными все диаграммы следующего вида

$$\begin{tikzcd}
\sum_i A_i \arrow[dd, "{[g_i]_{i\in I}}"'] & \\
& A_i \arrow[ul, "k_i"'] \arrow[dl, "g_i"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

для всех $i \in I$.

Соглашение 11.23. Если множество I конечно (возьмём для ясности $I = \{1, 2, \ldots, n\}$), копроизведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ с копроекциями $k_i \colon A_i \to A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ и стрелками $[g_1, g_2, \ldots, g_n]$, делающими коммутативными соответствующие диаграммы.

Пример 11.24. Копроизведение трёх объектов определяется следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & & A+B+C \arrow[d, dashed, "{[g_1,g_2,g_3]}"] & \\
A \arrow[urr, "k_1"] \arrow[drr, "g_1"'] & B \arrow[ur, "k_2"] \arrow[dr, "g_2"] & {} \arrow[d, dashed] & C \arrow[ul, "k_3"'] \arrow[dl, "g_3"] \\
 & & D &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 11.25. В **Set**, **Cat** и категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$, где K – малая, существуют копроизведения любых множеств объектов (как конечных, так и бесконечных).

Пример 11.26. Копроизведение пустого семейства объектов – это начальный объект.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, dashed] \\ D \end{tikzcd}$$

Пример 11.27. Копроизведение семейства, состоящего из одного объекта A – это, например, объект A с единственной копроекцией $id_A \colon A \to A$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, dashed, "g"] \\ A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & D \end{tikzcd}$$

Упражнение 11.28. Если в категории K есть начальный объект и копроизведение любой пары объектов, то в K есть копроизведение любого конечного семейства объектов.

Упражнение 11.29. Если существуют оба копроизведения $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$, то $(A+B)+C \cong A+(B+C)$

Замечание 11.30. Изоморфизм $A\times(B+C) \cong (A\times B)+(A\times C)$, верный в **Set** и во всех топосах, в общем случае неверен. Контрпример – категория $\mathbf{Set}^{op}$, поскольку в **Set** неверен двойственный изоморфизм
$A + (B \times C) \cong (A + B) \times (A + C)$. Можно найти гораздо „меньший“ контрпример среди упорядоченных множеств (любая не дистрибутивная решётка).

Глава 12

Сопряжённые функторы

Если воспринимать категории как „обобщённые упорядоченные множества", а функторы как „обобщённые монотонные отображения", то сопряжённость – это „обобщённое соответствие Галуа". Это пояснение для тех, кто знает, что такое соответствие Галуа, а кто не знает, может о нём не беспокоиться.

Определение 12.1. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\mathrm{K}_1 \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}_2$$

Чтобы удобнее различать, будем обозначать объекты категории K_1 буквами A, B, C, а объекты категории K_2 буквами X, Y, Z. Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если для любых $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathrm{K}_2)$ есть взаимно однозначное соответствие между стрелками вида $f\colon F(A) \to X$ и стрелками вида $g\colon A \to G(X)$, в некотором смысле „естественное" по A и X.
Говоря строже, для любых $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathrm{K}_2)$ есть отображения

$$\Gamma_{A,X}\colon \mathrm{K}_2(F(A), X) \to \mathrm{K}_1(A, G(X))$$

$$\Phi_{A,X}\colon \mathrm{K}_1(A, G(X)) \to \mathrm{K}_2(F(A), X)$$

(обычно мы будем писать просто Γ и Φ), взаимно обратные и естественные в смысле следующих равенств

$$\Phi(\Gamma(f)) = f$$

$$\Gamma(\Phi(g)) = g$$

$$\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$$

$$\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$$

Функтор F в этом случае называется *левым сопряжённым*, а функтор G *правым сопряжённым*. Говорят также, что F *сопряжён слева* к G, а G *сопряжён справа* к F.

Замечание 12.2. Можно попытаться проиллюстрировать условия естественности следующими неформальными картинками. Если стрелки f и g соответствуют друг другу при сопряжении

$$\begin{tikzcd} F(A) \xrightarrow{f} X \arrow[d, shift left=3ex, "\Gamma_{A,X}"] \\ A \xrightarrow{g} G(X) \arrow[u, shift left=3ex, "\Phi_{A,X}"] \end{tikzcd}$$

то соответствуют друг другу также стрелки $h \circ f$ и $G(h) \circ g$

$$\begin{tikzcd} F(A) \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h} Y \arrow[d, shift left=3ex, "\Gamma_{A,Y}"] \\ A \xrightarrow{g} G(X) \xrightarrow{G(h)} G(Y) \arrow[u, shift left=3ex, "\Phi_{A,Y}"] \end{tikzcd}$$

и стрелки $f \circ F(h)$ и $g \circ h$

$$\begin{tikzcd} F(B) \xrightarrow{F(h)} F(A) \xrightarrow{f} X \arrow[d, shift left=3ex, "\Gamma_{B,X}"] \\ B \xrightarrow{h} A \xrightarrow{g} G(X) \arrow[u, shift left=3ex, "\Phi_{B,X}"] \end{tikzcd}$$

Упражнение 12.3. Доказать, что для сопряжённых функторов верны следующие равенства

$$\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$$

$$\Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$$

Упражнение 12.4. Если категории K_1 и K_2 локально малые, то сопряжённость $F \dashv G$ равносильна естественному изоморфизму следующих функторов $H_1 \colon \mathrm{K}_1^{op} \times \mathrm{K}_2 \to \mathbf{Set}$ и $H_2 \colon \mathrm{K}_1^{op} \times \mathrm{K}_2 \to \mathbf{Set}$

$$H_1(A, X) = \mathrm{K}_2(F(A), X)$$

$$H_1(h_1, h_2)(f) = h_2 \circ f \circ F(h_1)$$

$$H_2(A, X) = \mathrm{K}_1(A, G(X))$$

$$H_2(h_1, h_2)(g) = G(h_2) \circ g \circ h_1$$

причём изоморфизм выглядит так

$$H_1 \underset{\Phi}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} H_2$$

Пример 12.5. Пусть функторы F и G взаимно обратные, то есть

$$G \circ F = Id_{\mathrm{K}_1}$$

$$F \circ G = Id_{\mathrm{K}_2}$$

В этом случае $F \dashv G$. Стрелке f соответствует стрелка $G(f)$, а стрелке g соответствует стрелка $F(g)$. В этом случае также $G \dashv F$, поскольку взаимная обратность – отношение симметричное.

Пример 12.6. Пусть K_1 и K_2 – частично упорядоченные множества, а F и G – монотонные отображения. В этом случае сопряжённость $F \dashv G$ означает выполнение следующего условия

$$F(A) \leqslant X \Leftrightarrow A \leqslant G(X)$$

Это один из вариантов определения соответствия Галуа.

Пример 12.7. Пусть M и N – некоторые множества, а $f\colon M \to N$ некоторая функция. Пусть $\mathcal{P}(M)$ и $\mathcal{P}(N)$ – множества подмножеств M и N, упорядоченные по включению. Рассмотрим две монотонные функции

$$\mathcal{P}(M) \underset{f^*}{\overset{\mathcal{P}(f)}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(N)$$

$\mathcal{P}(f)$ переводит любое подмножество M в его образ при отображении f, а f^* переводит любое подмножество N в его прообраз относительно f. Если $A \subseteq M$ и $X \subseteq N$, то

$$\mathcal{P}(f)(A) \subseteq X \Leftrightarrow A \subseteq f^*(X)$$

(образ A является подмножеством $X \Leftrightarrow A$ является подмножеством прообраза X), поэтому $\mathcal{P}(f) \dashv f^*$

Пример 12.8. Рассмотрим категорию **Cat** и категорию графов **Grph**. Каждой малой категории можно сопоставить граф, вершинами которого будут объекты категории, а рёбрами – морфизмы. Тем самым задан „стирающий“ функтор $G\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grph}$. Этот функтор строгий (говорят, что **Cat** является *конкретной над* **Grph**). Он как бы забывает, как делать композицию и какие стрелки являются единичными, оставляя только *dom* и *cod*. К функтору G есть левый сопряжённый $F\colon \mathbf{Grph} \to \mathbf{Cat}$, который по графу A выдаёт категорию $F(A)$, свободно порождённую этим графом. Объектами категории будут вершины графа, а морфизмами из вершины V в вершину V' – конечные последовательности рёбер вида $(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1)$, где $n \geqslant 1$ и рёбра расположены цепочкой $V \overset{r_1}{\to} V_1 \overset{r_2}{\to} \ldots \overset{r_{n-1}}{\to} V_{n-1} \overset{r_n}{\to} V'$ (допускается, чтобы некоторые из вершин цепочки совпадали, цепочка может „петлять“). Каждую такую последовательность можно воспринимать как „формальную композицию“ $r_n \circ r_{n-1} \circ \ldots \circ r_1$. Кроме того, для каждой вершины V формально добавляется новая стрелка id_V. Удобно использовать в качестве всех id_V последовательность длины ноль (и работать с ней как с протоморфизмом), в этом случае композиция в категории $F(A)$ будет просто приписыванием последовательностей друг к другу. Если A – граф и X – малая категория, то каждый морфизм графов $g \in \mathbf{Grph}(A, G(X))$ однозначно определяет функтор $f \in \mathbf{Cat}(F(A), X)$, действующий на стрелках категории $F(A)$ так

$$f(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1) = g(r_n) \circ g(r_{n-1}) \circ \ldots \circ g(r_1)$$

$$f(id_V) = id_{g(V)}$$

Упражнение 12.9. Пусть дан набор категорий и функторов, расположенных так

$$\mathrm{K}_1 \underset{G_1}{\overset{F_1}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}_2 \underset{G_2}{\overset{F_2}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}_3$$

Пусть $F_1 \dashv G_1$ и $F_2 \dashv G_2$. Проверьте, что $F_2 \circ F_1 \dashv G_1 \circ G_2$

Если применить Γ к стрелке $id_{F(A)} \colon F(A) \to F(A)$, получим некоторую стрелку $\eta_A \colon A \to G(F(A))$.
Если применить Φ к стрелке $id_{G(X)} \colon G(X) \to G(X)$, получим некоторую стрелку $\varepsilon_X \colon F(G(X)) \to X$. Эти стрелки являются компонентами некоторых естественных преобразований.

Определение 12.10. *Единицей сопряжения* будем называть естественное преобразование $\eta \colon Id_{\mathrm{K}_1} \to G \circ F$ с компонентами $\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$.
Коединицей сопряжения будем называть естественное преобразование $\varepsilon \colon F \circ G \to Id_{\mathrm{K}_2}$ с компонентами $\varepsilon_X = \Phi(id_{G(X)})$.

Упражнение 12.11. Проверьте, что η и ε действительно являются естественными преобразованиями.

Теорема 12.12. *Верны следующие равенства*

$$\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$$

$$\Phi(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$$

для любых $f \colon F(A) \to X$ *и* $g \colon A \to G(X)$

Доказательство.

$$\Gamma(f) = \Gamma(f \circ id_{F(A)}) = G(f) \circ \Gamma(id_{F(A)}) = G(f) \circ \eta_A$$

$$\Phi(g) = \Phi(id_{G(X)} \circ g) = \Phi(id_{G(X)}) \circ F(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$$

□

Есть несколько определений сопряжённости (равносильных исходному), которые используют η или ε в качестве основных понятий.

Определение 12.13. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathrm{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

По-прежнему будем обозначать объекты категории K_1 буквами A, B, C, а объекты категории K_2 буквами X, Y, Z. Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть естественное преобразование $\eta\colon Id_{\mathrm{K}_1} \to G \circ F$ такое, что для любой стрелки $g\colon A \to G(X)$ существует ровно одна стрелка $f\colon F(A) \to X$ со свойством $G(f) \circ \eta_A = g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dashed, "G(f)"] & & F(A) \arrow[d, dashed, "f"] \\ & G(X) & & X \end{tikzcd}$$

Замечание 12.14. Если единственную стрелку f обозначать $\Phi(g)$, диаграмма примет вид

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, dashed, "G(\Phi(g))"] & & F(A) \arrow[d, dashed, "\Phi(g)"] \\ & G(X) & & X \end{tikzcd}$$

Коммутативность этой диаграммы равносильна выполнению двух условий

$$G(\Phi(g)) \circ \eta_A = g$$

$$\Phi(G(f) \circ \eta_A) = f$$

для любых $g\colon A \to G(X)$ и $f\colon F(A) \to X$
Второе равенство получается так: берём произвольную стрелку $f\colon F(A) \to X$, а в качестве g возьмём $G(f) \circ \eta_A$. Левый треугольник диаграммы из определения 12.13 будет коммутативен. В силу единственности f должно быть $\Phi(g) = f$, поэтому $\Phi(G(f) \circ \eta_A) = f$.

Упражнение 12.15. Проверьте, что определение 12.13 равносильно исходному определению сопряжённости.

Можно не предполагать заранее, что F является функтором, достаточно знать его действие на объектах.

Теорема 12.16. *Пусть даны две категории* K_1 *и* K_2*, а также функтор* $G\colon \mathrm{K}_2 \to \mathrm{K}_1$ *и отображение* $F\colon Ob(\mathrm{K}_1) \to Ob(\mathrm{K}_2)$*. Пусть для каждого* $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ *задана стрелка* $\eta_A\colon A \to G(F(A))$ *такая, что что для любой стрелки* $g\colon A \to G(X)$ *существует ровно одна стрелка* $\Phi(g)\colon F(A) \to X$ *со свойством* $G(\Phi(g)) \circ \eta_A = g$ *(см. диаграмму выше).*
Тогда есть ровно один способ определить действие F *на стрелках, при котором* F *становится функтором, а набор стрелок* η_A *– естественным преобразованием, а именно*

$$F(h) = \Phi(\eta_B \circ h)$$

где $h\colon A \to B$

Упражнение 12.17. Докажите, посмотрев на следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(h))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) \end{tikzcd}$$

Упражнение 12.18. Пусть **Grp** – категория групп. Рассмотрим стирающий функтор $G\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, выдающий по каждой группе её множество-носитель, а также функтор $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$, выдающий по множеству A свободную группу со множеством образующих A.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{Grp} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Покажите, что $F \dashv G$, если в качестве стрелки $\eta_A\colon A \to G(F(A))$ брать вложение множества образующих A во множество всех элементов свободной группы $F(A)$.

Упражнение 12.19. Возьмём некоторый объект $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$. Рассмотрим категорию, объектами которой являются стрелки вида $g\colon A \to G(X)$, а морфизмом между объектами

$g_1\colon A \to G(Z)$ и $g_2\colon A \to G(X)$ будет любая стрелка $h\colon Z \to X$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & G(Z) \arrow[d, "G(h)"] \\ & G(X) \end{tikzcd}$$

Покажите, что стрелка η_A будет начальным объектом в этой категории. Покажите, что левый сопряжённый функтор к заданному функтору G, если он существует, определён однозначно с точностью до естественного изоморфизма (проверка естественности требует некоторых вычислений).

Упражнение 12.20. Если $F \dashv G$, то $G^{op} \dashv F^{op}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathrm{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}_2^{op} \arrow[r, shift left, "G^{op}"] & \mathrm{K}_1^{op} \arrow[l, shift left, "F^{op}"] \end{tikzcd}$$

Это упражнение позволяет нам применять к сопряжённости принцип двойственности. Любому верному утверждению о левых сопряжённых функторах соответствует двойственное верное утверждение о правых сопряжённых функторах, и наоборот. В частности, мы получаем ещё одно (эквивалентное) определение сопряжённости, двойственное определению 12.13.

Определение 12.21. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathrm{K}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

По-прежнему будем обозначать объекты категории K_1 буквами A, B, C, а объекты категории K_2 буквами X, Y, Z. Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть естественное преобразование $\varepsilon\colon F \circ G \to Id_{\mathrm{K}_2}$ такое, что для любой стрелки $f\colon F(A) \to X$ существует ровно одна стрелка $g\colon A \to G(X)$ со свойством $\varepsilon_X \circ F(g) = f$

$$\begin{tikzcd}
 & F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "F(g)"] & A \arrow[d, dashed, "g"] \\
X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

Упражнение 12.22. Если единственную стрелку g обозначать $\Gamma(f)$, диаграмма примет вид

$$\begin{tikzcd}
 & F(A) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "F(\Gamma(f))"] & A \arrow[d, dashed, "\Gamma(f)"] \\
X & F(G(X)) \arrow[l, "\varepsilon_X"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

Коммутативность этой диаграммы равносильна выполнению двух условий

$$\varepsilon_X \circ F(\Gamma(f)) = f$$

$$\Gamma(\varepsilon_X \circ F(g)) = g$$

для любых $f\colon F(A) \to X$ и $g\colon A \to G(X)$

Теорема 12.23. *Пусть даны две категории* K_1 *и* K_2, *а также функтор* $F\colon \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ *и отображение* $G\colon Ob(\mathrm{K}_2) \to Ob(\mathrm{K}_1)$. *Пусть для каждого* $X \in Ob(\mathrm{K}_2)$ *задана стрелка* $\varepsilon_X\colon F(G(X)) \to X$ *такая, что для любой стрелки* $f\colon F(A) \to X$ *существует ровно одна стрелка* $\Gamma(f)\colon A \to G(X)$ *со свойством* $\varepsilon_X \circ F(\Gamma(f)) = f$ *(см. диаграмму выше).*
Тогда есть ровно один способ определить действие G *на стрелках, при котором* G *становится функтором, а набор стрелок* ε_X *– естественным преобразованием, а именно*

$$G(h) = \Gamma(h \circ \varepsilon_X)$$

где $h\colon X \to Y$

Упражнение 12.24. Чтобы лучше понять, посмотрите на следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(G(X)) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "F(G(h))"'] & X \arrow[d, "h"] \\
F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Упражнение 12.25. Покажите, что правый сопряжённый функтор к заданному функтору F, если он существует, определён однозначно с точностью до естественного изоморфизма.

Определение 12.26. Пусть К – категория с произведениями пар объектов. *Экспонентой* объектов A и B называется объект B^A (определённый с точностью до изоморфизма) вместе со стрелкой $ev_{A,B}\colon B^A \times A \to B$ такой, что для любых $C \in Ob(\text{К})$ и $f\colon C \times A \to B$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "g \times id_A"] & C \arrow[d, dashed, "g"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev_{A,B}"] & B^A
\end{tikzcd}$$

Это значит, что есть единственная стрелка $g\colon C \to B^A$ такая, что $ev_{A,B} \circ (g \times id_A) = f$. Стрелку $ev_{A,B}$ часто называют *отображением вычисления*, нижние индексы при ней не пишут, если они ясны из контекста.

Замечание 12.27. Единственную стрелку g в этом случае традиционно обозначают $\Lambda(f)$

$$\begin{tikzcd}
 & C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\Lambda(f) \times id_A"] & C \arrow[d, dashed, "\Lambda(f)"] \\
B & B^A \times A \arrow[l, "ev_{A,B}"] & B^A
\end{tikzcd}$$

Пример 12.28. В **Set** объект B^A – это множество всех функций из A в B, а ev и $\Lambda(f)$ определяются следующими равенствами

$$ev(h, a) = h(a)$$

$$\Lambda(f)(c)(a) = f(c, a)$$

где h – элемент B^A (то есть, функция из A в B), f – функция из $C \times A$ в B, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

Определение 12.29. Категория называется *декартово замкнутой*, если в ней есть терминальный объект и для любой пары объектов существуют произведение и экспонента. В дальнейшем, говоря о какой-либо декартово замкнутой категории, мы всегда будем предполагать, что в ней выбраны некоторое произведение и некоторая экспонента (из всех возможных) для любой пары объектов.

Упражнение 12.30. Пусть дана декартово замкнутая категория K и некоторый объект $A \in Ob(\mathrm{K})$. Определим два функтора $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ и $G\colon \mathrm{K} \to \mathrm{K}$

$$F(C) = C \times A$$

$$F(h) = h \times id_A$$

$$G(B) = B^A$$

$$G(h) = \Lambda(h \circ ev)$$

Покажите, что $F \dashv G$.

Упражнение 12.31. Покажите, что элементы экспоненты (то есть, стрелки вида $g\colon 1 \to B^A$) взаимно однозначно соответствуют стрелкам из A в B.

Упражнение 12.32. **Cat** является декартово замкнутой категорией.

Упражнение 12.33. Категория всех частично упорядоченных множеств и их монотонных отображений является декартово замкнутой.

Теорема 12.34. *Правые сопряжённые функторы сохраняют терминальные объекты. Точнее, если $F \dashv G$, то $G(1)$ является терминальным объектом.*

Доказательство. Надо доказать, что для любого $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ существует единственная стрелка из A в $G(1)$. Это стрелка

$$A \overset{\Gamma(!_{F(A)})}{\dashrightarrow} G(1)$$

соответствующая при сопряжении единственной стрелке

$$F(A) \overset{!_{F(A)}}{\dashrightarrow} 1$$

□

Теорема 12.35. *Правые сопряжённые функторы сохраняют произведения пар. Точнее, если $F \dashv G$ и существует произведение $X \times Y$ с проекциями pr_1 и pr_2, то $G(X \times Y)$ с проекциями $G(pr_1)$ и $G(pr_2)$ является произведением $G(X)$ и $G(Y)$.*

Доказательство. Необходимо доказать коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& G(X \times Y) \arrow[dl, "G(pr_1)"'] \arrow[dr, "G(pr_2)"] & \\
G(X) & & G(Y) \\
& A \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed] &
\end{tikzcd}$$

В качестве единственной стрелки возьмём $\Gamma(\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle)$

$$\begin{tikzcd}
& G(X \times Y) \arrow[dl, "G(pr_1)"'] \arrow[dr, "G(pr_2)"] & \\
G(X) & & G(Y) \\
& A \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[uu, dashed, "\Gamma(\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle)" description] &
\end{tikzcd}$$

соответствующую при сопряжении стрелке $\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle$

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
X & & Y \\
& F(A) \arrow[ul, "\Phi(g_1)"] \arrow[ur, "\Phi(g_2)"'] \arrow[uu, dashed, "\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle" description] &
\end{tikzcd}$$

□

Упражнение 12.36. Проверьте детали.

Теорема 12.37. *Правые сопряжённые функторы сохраняют произведения любых множеств объектов (не только конечных, но и бесконечных). Точнее, если $F \dashv G$ и существует произведение $\prod_{i \in I} X_i$ с проекциями pr_i, то $G(\prod_{i \in I} X_i)$ с проекциями $G(pr_i)$ является произведением семейства объектов $\{G(X_i) \mid i \in I\}$.*

Упражнение 12.38. Докажите.

В силу принципа двойственности немедленно получаем следующие теоремы.

Теорема 12.39. *Левые сопряжённые функторы сохраняют начальные объекты. Точнее, если $F \dashv G$, то $F(0)$ является начальным объектом.*

Теорема 12.40. *Левые сопряжённые функторы сохраняют копроизведения пар. Точнее, если $F \dashv G$ и существует копроизведение $A + B$ с копроекциями k_1 и k_2, то $F(A+B)$ с копроекциями $F(k_1)$ и $F(k_2)$ является копроизведением $F(A)$ и $F(B)$.*

Теорема 12.41. *Левые сопряжённые функторы сохраняют копроизведения любых множеств объектов (не только конечных, но и бесконечных). Точнее, если $F \dashv G$ и существует копроизведение $\sum_{i \in I} A_i$ с копроекциями k_i, то $F(\sum_{i \in I} A_i)$ с копроекциями $F(k_i)$ является копроизведением семейства объектов $\{F(A_i) \mid i \in I\}$.*

Упражнение 12.42. В декартово замкнутых категориях верны следующие изоморфизмы

$A \times 0 \cong 0$

$A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C$

$A \times (\sum_{i \in I} B_i) \cong \sum_{i \in I} A \times B_i$

$1^A \cong 1$

$(B \times C)^A \cong B^A \times C^A$

$(\prod_{i \in I} B_i)^A \cong \prod_{i \in I} B_i^A$

Упражнение 12.43. Пусть K – декартово замкнутая категория, $A \in Ob(\mathrm{K})$. Определим функтор $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{K}^{op}$

$$F(B) = A^B$$

$$F(h) = \Lambda(ev \circ (id_{A^C} \times h))$$

где $h\colon B \to C$. Проверьте, что $F \dashv F^{op}$, посмотрев на следующие изоморфизмы

$$\mathrm{K}^{op}(A^B, C) \cong \mathrm{K}(C, A^B) \cong \mathrm{K}(C \times B, A) \cong \mathrm{K}(B \times C, A) \cong \mathrm{K}(B, A^C)$$

Упражнение 12.44. В декартово замкнутых категориях верны следующие изоморфизмы

$$A^0 \cong 1$$

$$A^{B+C} \cong A^B \times A^C$$

$$A^{\sum_{i \in I} B_i} \cong \prod_{i \in I} A^{B_i}$$

Упражнение 12.45. Попытайтесь доказать следующие изоморфизмы

$$A^1 \cong A$$

$$A^{B \times C} \cong (A^B)^C$$

Упражнение 12.46. Если в декартово замкнутой категории с начальным объектом верно $0 \cong 1$, то эта категория вырожденная, то есть все её объекты изоморфны терминальному. Указание: рассмотрите объекты A^0 и A^1.

Упражнение 12.47. Категория групп не является декартово замкнутой.

Упражнение 12.48. Множество-носитель произведения групп является произведением их множеств-носителей.

Напоследок приведём ещё одно определение сопряжённости, которое встречается в некоторых книгах.

Определение 12.49. Пусть даны две категории K_1 и K_2, а также два функтора между ними

$$\mathrm{K}_1 \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}_2$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть два естественных преобразования $\eta\colon Id_{\mathrm{K}_1} \to G \circ F$ и $\varepsilon\colon F \circ G \to Id_{\mathrm{K}_2}$, для которых коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "id_{F(A)}"'] & F(G(F(A))) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\
& F(A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r, "\eta_{G(X)}"] \arrow[dr, "id_{G(X)}"'] & G(F(G(X))) \arrow[d, "G(\varepsilon_X)"] \\
& G(X)
\end{tikzcd}$$

для любых $A \in Ob(\mathrm{K}_1)$ и $X \in Ob(\mathrm{K}_2)$.

Замечание 12.50. Если обозначить через $F\eta$ естественное преобразование с компонентами $F(\eta_A)$, через εF естественное преобразование с компонентами $\varepsilon_{F(A)}$, через ηG естественное преобразование с компонентами $\eta_{G(X)}$ и через $G\varepsilon$ естественное преобразование с компонентами $G(\varepsilon_X)$, диаграммы становится легче запомнить

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "id_F"'] & F \circ G \circ F \arrow[d, "\varepsilon F"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "id_G"'] & G \circ F \circ G \arrow[d, "G\varepsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Упражнение 12.51. При желании можете доказать, что это определение эквивалентно остальным.

Глава 13

Лемма Йонеды

Определение 13.1. Пусть K – локально малая категория. Для каждого $A \in Ob(\mathrm{K})$ определим следующий функтор $h^A \colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$

$$h^A(B) = \mathrm{K}(A, B)$$

$$h^A(f)(g) = f \circ g$$

где $B \in Ob(\mathrm{K})$, $f \in \mathrm{K}(B, C)$, $g \in \mathrm{K}(A, B)$.
Заметим, что $h^A(f) \colon \mathrm{K}(A, B) \to \mathrm{K}(A, C)$.
Функтор $H \colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ называется *представимым*, если для некоторого $A \in Ob(\mathrm{K})$ выполнен изоморфизм

$$H \cong h^A$$

В этом случае объект A называют *представляющим объектом функтора* H, а сам изоморфизм – *представлением функтора* H. Функторы h^A иногда называют *основными представимыми функторами*.

Упражнение 13.2. Пусть K – некоторая категория. Пусть функтор $H \colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ сопоставляет каждому объекту K одноэлементное множество. H представим $\Leftrightarrow$ в K есть начальный объект.

Упражнение 13.3. Пусть K – локально малая категория, $A, B \in Ob(\mathrm{K})$. Функтор $\mathrm{K}(A, -) \times \mathrm{K}(B, -) \colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ представим $\Leftrightarrow$ существует копроизведение A и B. Представляющим объектом будет $A + B$.

Соглашение 13.4. Совокупность всех естественных преобразований функтора F в функтор G будем обозначать $Nat(F, G)$.

Теорема 13.5. *(Лемма Йонеды). Пусть* K *– локально малая категория,* $H\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$. *Существует взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями из* h^A *в* H *и элементами множества* $H(A)$. *Точнее, есть изоморфизм в* **Set**

$$Nat(h^A, H) \cong H(A)$$

Доказательство. Каждому элементу $a \in H(A)$ мы поставим в соответствие естественное преобразование $\breve{a}\colon h^A \to H$, определённое так

$$\breve{a}_B(f) = H(f)(a)$$

где $f \in \mathrm{K}(A, B)$. Заметим, что $\breve{a}_B\colon h^A(B) \to H(B)$, то есть
$\breve{a}_B\colon \mathrm{K}(A, B) \to H(B)$, при этом $H(f)\colon H(A) \to H(B)$.
Каждому естественному преобразованию $\tau\colon h^A \to H$ поставим в соответствие элемент $\tau_A(id_A) \in H(A)$.
□

Упражнение 13.6. Проверьте взаимную обратность этих отображений, посмотрев на следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}(A,A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "h_A(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] & A \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{K}(A,B) \arrow[r, "\tau_B"] & H(B) & B
\end{tikzcd}$$

Проверьте, что $\breve{a}$ является естественным преобразованием для любого $a \in H(A)$.

Упражнение 13.7. Попытайтесь доказать, что изоморфизмы из леммы Йонеды естественны по A и H. Точнее, если заданы стрелки $g\colon A_1 \to A_2$ и $\rho\colon H_1 \to H_2$, то соответствующие диаграммы коммутативны.

Следствие 13.8. *Пусть даны категория* K *и функтор* $H\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$. *Есть взаимно однозначное соответствие между представлениями функтора* H *(то есть, естественными изоморфизмами вида* $\tau\colon h^A \to H$*)*
и парами $A \in Ob(\mathrm{K}), a \in H(A)$, *обладающими следующим свойством универсальности: для любой пары* $B \in Ob(\mathrm{K}), b \in H(B)$ *есть ровно одна стрелка* $f\colon A \to B$ *такая, что* $H(f)(a) = b$.

Упражнение 13.9. Для функтора $\mathrm{K}(A,-)\times\mathrm{K}(B,-)$ пара, задающая представление, состоит из объекта $A+B$ и элемента
$(k_1^{A+B}, k_2^{A+B}) \in \mathrm{K}(A, A+B)\times\mathrm{K}(B, A+B)$

Упражнение 13.10. Если $F\dashv G$, то пара, задающая представление функтора $\mathrm{K}_1(A, G(-))\colon \mathrm{K}_2\to\mathbf{Set}$, состоит из объекта $F(A)$ и элемента $\eta_A\in\mathrm{K}_1(A, G(F(A)))$

Упражнение 13.11. Пусть даны локально малые категории K_1 и K_2, а также функтор $G\colon\mathrm{K}_2\to\mathrm{K}_1$. Функтор G имеет левый сопряжённый $\Leftrightarrow$ функторы вида $\mathrm{K}_1(A, G(-))\colon\mathrm{K}_2\to\mathbf{Set}$ представимы для всех
$A\in Ob(\mathrm{K}_1)$.

Всю теорию представимости можно излагать некоторым двойственным, но эквивалентным способом на языке контравариантных функторов.

Определение 13.12. Пусть K – локально малая категория. Для каждого $A\in Ob(\mathrm{K})$ определим следующий функтор $h_A\colon\mathrm{K}^{op}\to\mathbf{Set}$

$$h_A(B)=\mathrm{K}(B,A)$$

$$h_A(f)(g)=g\circ f$$

где $B\in Ob(\mathrm{K})$, $f\in\mathrm{K}(B,C)$, $g\in\mathrm{K}(C,A)$.
Заметим, что $h_A(f)\colon\mathrm{K}(C,A)\to\mathrm{K}(B,A)$.
Функтор $H\colon\mathrm{K}^{op}\to\mathbf{Set}$ называется *представимым*, если для некоторого $A\in Ob(\mathrm{K})$ выполнен изоморфизм

$$H\cong h_A$$

В этом случае объект A называют *представляющим объектом функтора H*, а сам изоморфизм – *представлением функтора H*. Функторы h_A иногда называют *основными представимыми контравариантными функторами*.

Упражнение 13.13. Пусть K – некоторая категория. Пусть функтор
$H\colon\mathrm{K}^{op}\to\mathbf{Set}$ сопоставляет каждому объекту K одноэлементное множество. H представим $\Leftrightarrow$ в K есть терминальный объект.

Упражнение 13.14. Пусть K – локально малая категория, $A, B\in Ob(\mathrm{K})$. Функтор $\mathrm{K}(-,A)\times\mathrm{K}(-,B)\colon\mathrm{K}^{op}\to\mathbf{Set}$ представим $\Leftrightarrow$ существует произведение A и B. Представляющим объектом будет $A\times B$.

Теорема 13.15. *(Лемма Йонеды). Пусть* K *– локально малая категория,* $H\colon \mathrm{K}^{op} \to \mathbf{Set}$*. Существует взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями из* h_A *в* H *и элементами множества* $H(A)$*. Точнее, есть изоморфизм в* **Set**

$$Nat(h_A, H) \cong H(A)$$

Доказательство. Каждому элементу $a \in H(A)$ мы поставим в соответствие естественное преобразование $\breve{a}\colon h_A \to H$, определённое так

$$\breve{a}_B(f) = H(f)(a)$$

где $f \in \mathrm{K}(B, A)$. Заметим, что $\breve{a}_B\colon h_A(B) \to H(B)$, то есть
$\breve{a}_B\colon \mathrm{K}(B, A) \to H(B)$, при этом $H(f)\colon H(A) \to H(B)$.
Каждому естественному преобразованию $\tau\colon h_A \to H$ поставим в соответствие элемент $\tau_A(id_A) \in H(A)$.
□

Упражнение 13.16. Проверьте взаимную обратность этих отображений, посмотрев на следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}(A,A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "h_A(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] & A \\
\mathrm{K}(B,A) \arrow[r, "\tau_B"] & H(B) & B \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Проверьте, что $\breve{a}$ является естественным преобразованием для любого $a \in H(A)$.

Упражнение 13.17. Изоморфизмы из леммы Йонеды естественны по A и H. Точнее, если заданы стрелки $g\colon A_1 \to A_2$ и $\rho\colon H_1 \to H_2$, то соответствующие диаграммы коммутативны.

Следствие 13.18. *Пусть даны категория* K *и функтор* $H\colon \mathrm{K}^{op} \to \mathbf{Set}$*. Есть взаимно однозначное соответствие между представлениями функтора* H *(то есть, естественными изоморфизмами вида* $\tau\colon h_A \to H$*) и парами* $A \in Ob(\mathrm{K}), a \in H(A)$*, обладающими следующим свойством универсальности: для любой пары* $B \in Ob(\mathrm{K}), b \in H(B)$ *есть ровно одна стрелка* $f\colon B \to A$ *такая, что* $H(f)(a) = b$*.*

Упражнение 13.19. Для функтора $\mathrm{K}(-,A)\times\mathrm{K}(-,B)$ пара, задающая представление, состоит из объекта $\mathrm{A}\times B$ и элемента $(pr_1, pr_2)\in\mathrm{K}(A\times B,A)\times\mathrm{K}(A\times B,B)$

Упражнение 13.20. Если $F\dashv G$, то пара, задающая представление функтора $\mathrm{K}_2(F(-),X)\colon\mathrm{K}_1^{op}\to\mathbf{Set}$, состоит из объекта $G(X)$ и элемента $\varepsilon_X\in\mathrm{K}_2(F(G(X)),X)$

Упражнение 13.21. Пусть даны локально малые категории K_1 и K_2, а также функтор $F\colon\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2$. Функтор F имеет правый сопряжённый $\Leftrightarrow$ функторы вида $\mathrm{K}_2(F(-),X)\colon\mathrm{K}_1^{op}\to\mathbf{Set}$ представимы для всех $X\in Ob(\mathrm{K}_2)$.

С помощью леммы Йонеды мы сейчас построим экспоненты в категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$.

Определение 13.22. Пусть K – локально малая категория, $A,B\in Ob(\mathrm{K})$. Каждой стрелке $f\colon A\to B$ сопоставим естественное преобразование $h^f\colon h^B\to h^A$

$$h^f(C)(g)=g\circ f$$

где $g\in\mathrm{K}(B,C)$. Заметим, что $h^f(C)\colon\mathrm{K}(B,C)\to\mathrm{K}(A,C)$
Через $h^f(C)$ мы обозначили компоненту h^f на объекте C (если написать C нижним индексом, будет путаница в обозначениях).

Теорема 13.23. *Пусть* K *– малая категория. Тогда* $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$ *является декартово замкнутой категорией.*

Доказательство. Для функторов $F\colon\mathrm{K}\to\mathbf{Set}$ и $G\colon\mathrm{K}\to\mathbf{Set}$ их экспоненту $G^F\colon\mathrm{K}\to\mathbf{Set}$ определим так

$$G^F(A)=Nat(h^A\times F,G)$$

Идея этого определения в том, что для экспоненты должны выполняться изоморфизмы

$$G^F(A)\cong Nat(h^A,G^F)\cong Nat(h^A\times F,G)$$

(первый – по лемме Йонеды, второй – по определению экспоненты как сопряжённой справа к декартову произведению). На стрелках функтор G^F по определению будет действовать так

$$G^F(f)(\tau) = \tau \circ (h^f \times id_F)$$

где $f\colon A \to B, \quad \tau\colon h^A \times F \to G, \quad G^F(f)(\tau)\colon h^B \times F \to G$

$$G^F(f)(\tau)\colon h^B \times F \xrightarrow{h^f \times id_F} h^A \times F \xrightarrow{\tau} G$$

Отображением вычисления $ev\colon G^F \times F \to G$ будет естественное преобразование со следующими компонентами $ev(A)\colon G^F(A) \times F(A) \to G(A)$

$$ev(A)(\tau, x) = \tau_A(id_A, x)$$

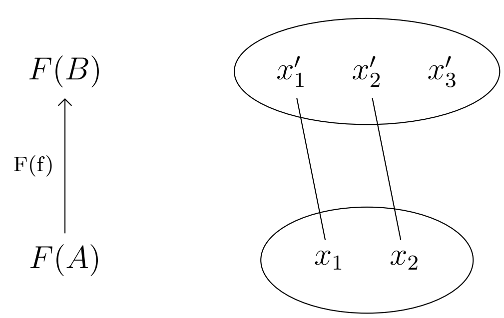
где $\tau \in G^F(A), x \in F(A)$. Заметим, что $\tau\colon h^A \times F \to G$,
поэтому $\tau_A\colon \mathrm{K}(A, A) \times F(A) \to G(A)$
$\square$

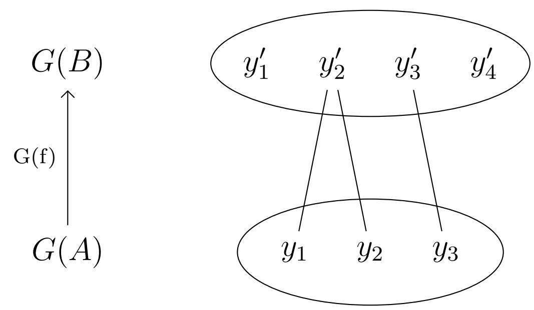
Упражнение 13.24. При сильном желании проверьте, что это определение действительно даёт экспоненту в $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$.

Пример 13.25. Рассмотрим категорию $\mathbf{Set}^{\mathrm{K}}$, где K имеет вид

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[loop left, "id_B"] \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[loop left, "id_A"]
\end{tikzcd}$$

Возьмём два функтора $F\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ и $G\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$





Как найти экспоненту G^F? Наивное (и неверное) решение состоит в том, чтобы положить

$$G^F(A) = G(A)^{F(A)}$$

$$G^F(B) = G(B)^{F(B)}$$

Но тогда неясно, как определить функцию $G^F(f)\colon G^F(A) \to G^F(B)$ (попробуйте). Правильное определение выглядит так

$$G^F(A) = Nat(F, G)$$

$$G^F(B) = G(B)^{F(B)}$$

$$G^F(f)(\tau) = \tau_B$$

где $\tau\colon F \to G$. Идея в том, что в каждый момент времени надо учитывать все моменты времени, лежащие выше (людям, знакомым с моделями Крипке, тут следует вспомнить импликацию в моделях Крипке).

Упражнение 13.26. Разберитесь, как устроены в данном случае функторы h^A и h^B (они очень простые) и почему приведённая выше конструкция даёт экспоненту G^F.

В одном частном случае описание экспоненты можно сильно упростить. А именно, если шкала K задаёт группу (то есть, в K один объект и все стрелки обратимы).

Пример 13.27. Пусть K – малая категория с одним объектом A, в которой все стрелки обратимы (то есть $Mor(\mathrm{K})$ является группой, для общности обозначим её Gr). Два функтора $F\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ и $G\colon \mathrm{K} \to \mathbf{Set}$ можно представить как два множества $X = F(A)$ и $Y = G(A)$, на которых заданы действия группы Gr. Экспоненту G^F можно описать так

$$G^F(A) = Y^X$$

$$G^F(f)(h) = G(f) \circ h \circ F(f^{-1})$$

где $f \in Gr, h \in Y^X$. Иными словами, в качестве носителя берётся множество всех функций из X в Y (не только сохраняющих действие, а вообще всех). Отображение вычисления $ev\colon G^F \times F \to G$ имеет единственную компоненту $ev(A)\colon Y^X \times X \to Y$, представляющую собой отображение вычисления в **Set**.

Упражнение 13.28. Проверьте, что это определение действительно даёт экспоненту G^F. Проверьте, что элементы экспоненты (то есть, морфизмы из 1 в G^F) взаимно однозначно соответствуют отображениям X в Y, сохраняющим действие группы.