Π.Μ.Σ. στην Εφαρμοσμένη Πληροφορική

Ειδίκευση: Ανάπτυξη Λογισμικού και Νέφος

Επιστημονικοί Υπολογισμοί και Λογισμικό

<u>Παράδοση 12/06/2024</u>

Στην εργασία αυτή ζητείται να υπολογίσετε τις τροχιές δύο ουράνιων σωμάτων, γνωστό και ως προσομοίωση 2-σωμάτων (2-Body simulation).

Η κίνηση δύο ουράνιων σωμάτων καθορίζεται βάσει του νόμου της παγκόσμιας έλξης (Νεύτωνα). Αν θεωρήσουμε ότι για τα δύο σώματα A και B:

- $x_A(t)$, $y_A(t)$, $z_A(t)$ είναι η θέση του σώματος A στον τρισδιάστατο χώρο τη χρονική στιγμή t,
- $x_B(t)$, $y_B(t)$, $z_B(t)$ είναι η θέση του σώματος B στον τρισδιάστατο χώρο τη χρονική στιγμή t,
- $v_{x_A}(t)$, $v_{y_A}(t)$, $v_{z_A}(t)$, είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος A στον τρισδιάστατο χώρο τη χρονική στιγμή t,
- $v_{x_B}(t)$, $v_{y_B}(t)$, $v_{z_B}(t)$, είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος B στον τρισδιάστατο χώρο τη χρονική στιγμή t,

τότε προκύπτουν οι σχέσεις:

- Για το σώμα A

$$\frac{dx_A(t)}{dt} = v_{x_A}(t)$$

$$\frac{dy_A(t)}{dt} = v_{y_A}(t)$$

$$\frac{dz_A(t)}{dt} = v_{z_A}(t)$$

$$\frac{dv_{x_A}(t)}{dt} = -\frac{Gm_B\big(x_A(t)-x_B(t)\big)}{\Big(\big(x_A(t)-x_B(t)\big)^2+\big(y_A(t)-y_B(t)\big)^2+\big(z_A(t)-z_B(t)\big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv_{y_A}(t)}{dt} = -\frac{Gm_B\big(y_A(t)-y_B(t)\big)}{\Big(\big(x_A(t)-x_B(t)\big)^2+\big(y_A(t)-y_B(t)\big)^2+\big(z_A(t)-z_B(t)\big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv_{z_A}(t)}{dt} = -\frac{Gm_B\big(z_A(t)-z_B(t)\big)}{\Big(\big(x_A(t)-x_B(t)\big)^2+\big(y_A(t)-y_B(t)\big)^2+\big(z_A(t)-z_B(t)\big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$

- Για το σώμα B

$$\frac{dx_B(t)}{dt} = v_{x_B}(t),$$

$$\frac{dy_B(t)}{dt} = v_{y_B}(t),$$

$$\frac{dz_B(t)}{dt} = v_{z_B}(t)$$

$$\frac{dv_{x_B}(t)}{dt} = -\frac{Gm_A\big(x_B(t) - x_A(t)\big)}{\left(\big(x_A(t) - x_B(t)\big)^2 + \big(y_A(t) - y_B(t)\big)^2 + \big(z_A(t) - z_B(t)\big)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv_{y_B}(t)}{dt} = -\frac{Gm_A\big(y_B(t) - y_A(t)\big)}{\left(\big(x_A(t) - x_B(t)\big)^2 + \big(y_A(t) - y_B(t)\big)^2 + \big(z_A(t) - z_B(t)\big)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

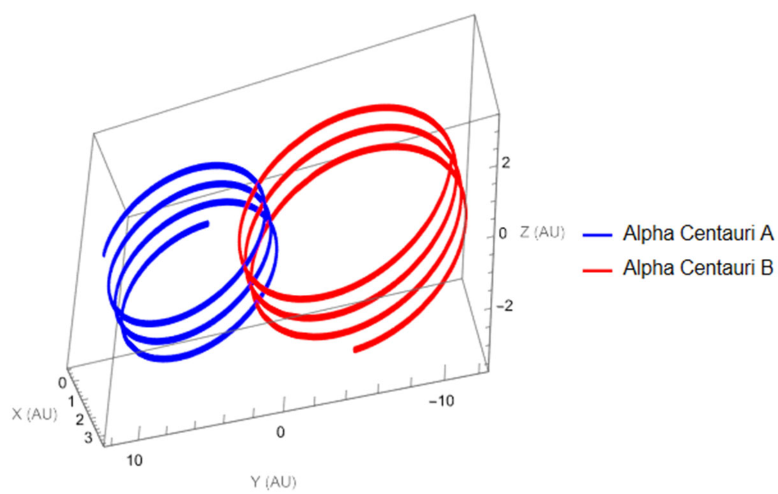
$$\frac{dv_{z_B}(t)}{dt} = -\frac{Gm_A\big(z_B(t) - z_A(t)\big)}{\left(\big(x_A(t) - x_B(t)\big)^2 + \big(y_A(t) - y_B(t)\big)^2 + \big(z_A(t) - z_B(t)\big)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

όπου m_A και m_B είναι οι μάζες των σωμάτων A και B αντίστοιχα, ενώ G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης.

Οι παραπάνω εξισώσεις, αποτελούν ένα σύστημα 12 διαφορικών εξισώσεων με 12 μεταβλητές, το οποίο ζητείται να επιλύσετε αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης, και να υπολογίσετε τη θέση των πλανητών για $t = 100$ έτη με βήμα $h = 0.01$.

Για την επίλυση του συστήματος, θεωρήστε τις ακόλουθες παραμέτρους και αρχικές τιμές, που προσομοιώνουν τη κίνηση των αστέρων A και B του Άλφα Κενταύρου[1]

- $G = 39.47841760435743\ \mathrm{AU}^3/(έτη^2 \cdot μάζα\ ήλιου)$
- $m_A = 1.1\ μάζες\ ήλιου$
- $m_B = 0.907\ μάζες\ ήλιου$
- Αρχικές τιμές:
  - $x_A(0) = 0, y_A(0) = 11.29, z_A(0) = 0, v_{x_A}(t) = 0.1, v_{y_A}(t) = 0, v_{z_A}(t) = 0.295,$
  - $x_B(0) = 0, y_B(0) = -11.29, z_B(0) = 0, v_{x_B}(t) = -0.061, v_{y_B}(t) = 0, v_{z_B}(t) = -0.362$



Σχήμα: Οι τροχιές των δύο σωμάτων που προκύπτουν

[1] https://www.space.com/18090-alpha-centauri-nearest-star-system.html