Γεώργιος Δημόπουλος

Α.Μ. 2964

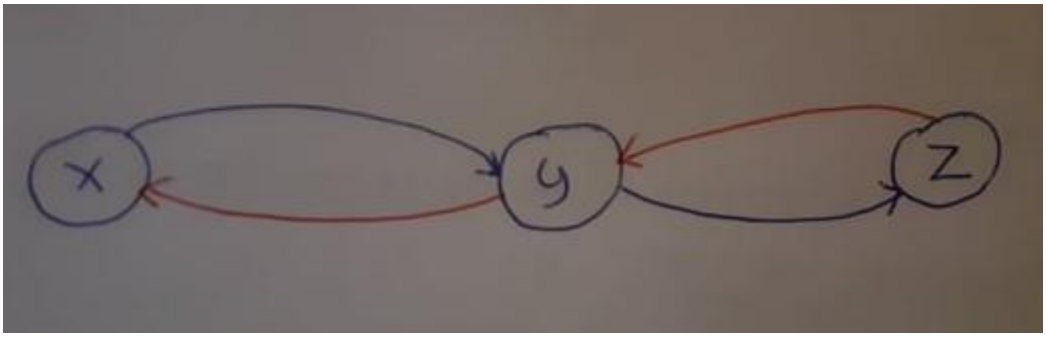
Άσκηση 1 (k-συνεκτικότητα)

α) <u>Ανακλαστική</u>: Θεωρούμε ότι ο κάθε κόμβος έχει άπειρο πλήθος μονοπατιών προς τον εαυτό του, άρα είναι ανακλαστική.

<u>Συμμετρική</u>: Επειδή είναι k-συνεκτικοί κόμβοι, έχω k-συνεκτικά μονοπάτια από τον x στον y και k-συνεκτικά μονοπάτια από τον y στον x, άρα ισχύει και η συμμετρικότητα.

<u>Μεταβατική</u>: Βρίσκω την ελάχιστή τομή μεταξύ του x και του z. Η ελάχιστή τομή έχει το λιγότερο 2k ακμές. Αυτό συμβαίνει επειδή το γράφημα είναι k-συνεκτικό. Αν το y ανήκει στο υπογράφημα του x (χωρίς βλάβη της γενικότητας), τότε οι ακμές του θα ενώνονται με το άλλο υπογράφημα. Έτσι θα έχουμε k συνεκτικά μονοπάτια του ενός υπογραφήματος με το άλλο. Όμως και το υπογράφημα που ανήκει το y έχει k-συνεκτικά μονοπάτια με τον κόμβο x. Άρα επειδή το x->y έχει k-ανεξάρτητα μονοπάτια και το y->z έχει k-ανεξάρτητα μονοπάτια, έτσι και το x->z έχουν k-ανεξάρτητα μονοπάτια.

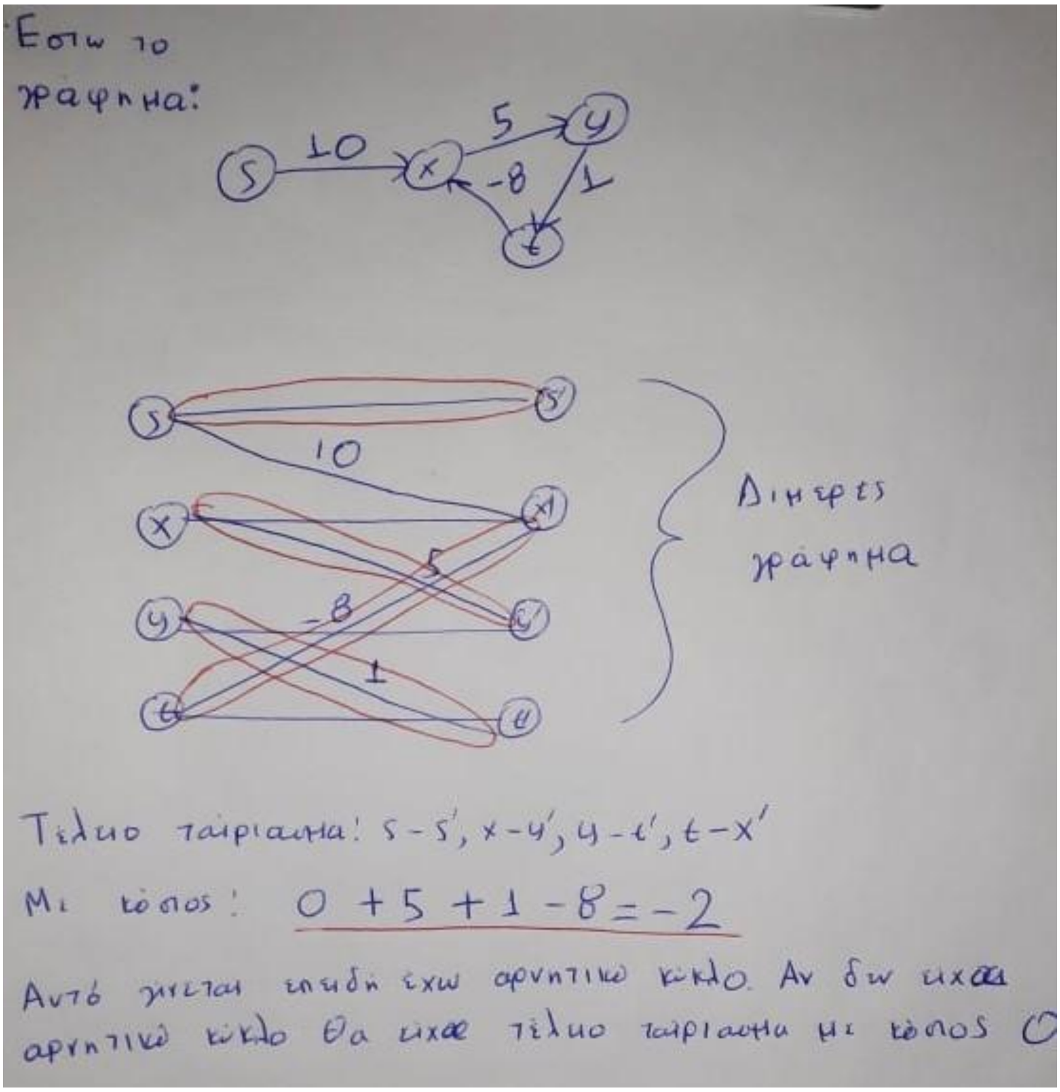
β) Δεν ισχύει η σχέση ισοδυναμίας επειδή με την σύμβαση που κάνουμε για τα ανεξάρτητα μονοπάτια δεν θα ισχύει η μεταβατικότητα:



Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι οι κόμβοι x και y έχουν 1 ανεξάρτητο μονοπάτι. Άρα είναι 1-συνεκτικοί. Επίσης οι κόμβοι y και z έχουν 1 ανεξάρτητο μονοπάτι. Άρα είναι 1-συνεκτικοί. Για να ισχύει η μεταβατικότητα θα πρέπει και x και z να έχουν 1 ανεξάρτητο μονοπάτι. Αυτό όμως δεν ισχύει (δεν έχουν κανένα συνεκτικό μονοπάτι), γιατί σύμφωνα με την σύμβαση μας πρέπει τα ανεξάρτητα μονοπάτια να μην έχουν κανένα κοινό κόμβο. Επομένως επειδή δεν ισχύει η μεταβατικότητα, δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

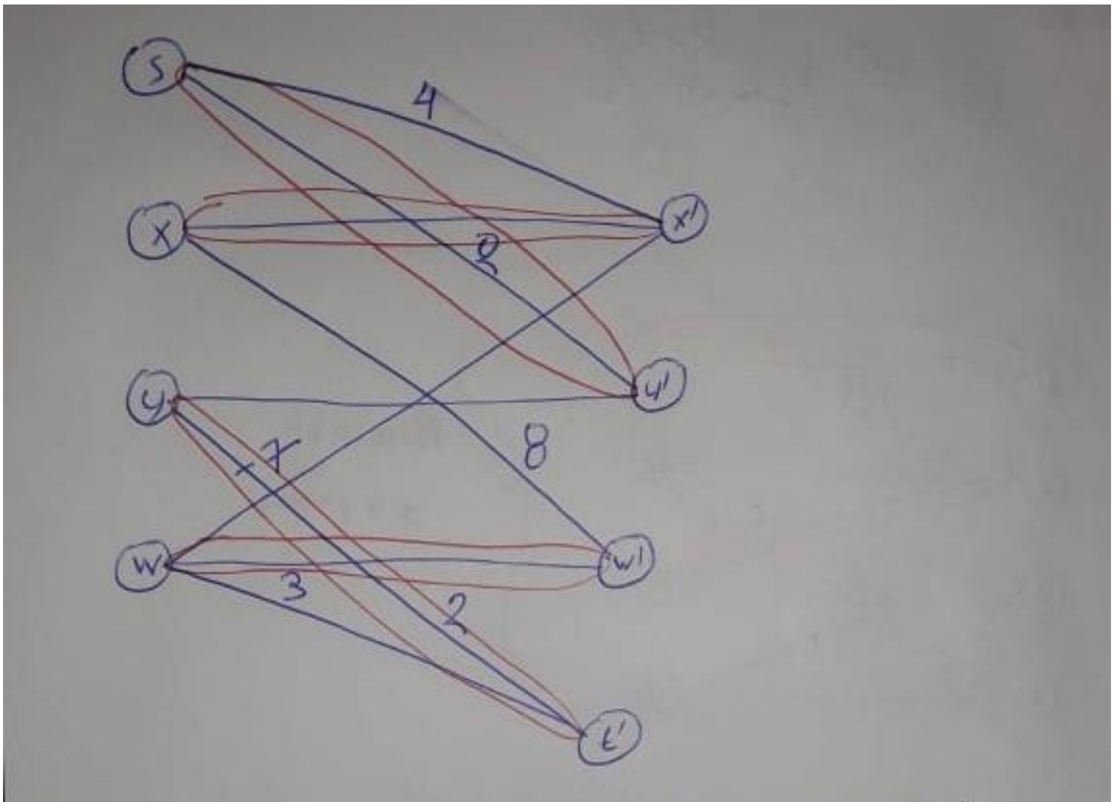
Άσκηση 2 (Ταιριάσματα ελαχίστου κόστους)

α) Το G είναι ένα διμερές γράφημα. Το τέλειο ταίριασμα θα είναι πάντα αν πάρουμε όλε τις ακμές με τον εαυτό τους (s-s’,x-x’,y-y’ κ.ο.κ). Έτσι θα έχουμε ένα τέλειο ταίριασμα με κόστος 0. Δεν μπορούμε να βρούμε κάτι καλύτερο. Η μόνο περίπτωση να έχουμε καλύτερο ταίριασμα είναι να έχουμε κύκλο αρνητικού κόστους, ώστε το κόστος του τέλειου ταιριάσματος να είναι αρνητικό. Έτσι αντί το διμερές γράφημα να επιλέξει κόμβους της μορφής x-x’, θα επιλέξει για τέλειο ταίριασμα τις ακμές που αν προσθέσουμε τα βάρη τους να βγαίνει κάτι αρνητικό.



β) Για να υπολογίσω το ελαφρύτατο μονοπάτι από τον s στον t, αρκεί να βρω το τέλειο ταίριασμα στον διμερές γράφημα αφαιρώντας τους κόμβους s’ και t. Έτσι το τέλειο ταίριασμα που θα βρω φανερώνει και το ελάχιστο μονοπάτι από τον s στο t. Αν δεν είχα αφαιρέσει τους κόμβους s’ και t, το τέλειο ταίριασμα θα ισούταν με 0 (επειδή όλοι οι κόμβοι θα είχαν ταίριασμα με τους εαυτούς τους). Τώρα που ο s δεν μπορεί να κάνει ταίριασμα με τον s’ ούτε ο t’ μπορεί να κάνει ταίριασμα με τον t, οι ακμές του τέλειου ταιριάσματος θα φανερώνουν και το ελαφρύτατο μονοπάτι από τον s στον t.

γ)



Τέλειο ταίριασμα: s - y', x - x', y - t', w - w'

Με κόστος: 2 + 0 + 2 + 0 = 4

Που φανερώνει και το ελαφρύτατο μονοπάτι από τον s → t, με μονοπάτι s → y → t

Άσκηση 3 (Πιθανοτικοί αλγόριθμοι)

Στην παρακάτω εικόνα σας παρουσιάζω χειρόγραφα την λύση της 3^{η}ς άσκησης:

Έστω ότι έχω την δείκτρια τυχαία μεταβλητή:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{αν δεν έχουμε τοποθετήσει τον αριθμό } i \text{ στο } S \text{ στο τέλος του προγράμματος.} \\ 1, & \text{αν έχουμε τοποθετήσει τον αριθμό } i \text{ στο } S \text{ στο τέλος του προγράμματος.} \end{cases}$$

Οπότε $|S| = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right] = \sum_{i=1}^{n}(E[X_i]) = \sum_{i=1}^{n} P(i \in S) \quad (1)$$

Τώρα υπολογίζω την πιθανότητα ο αριθμός i να ανήκει στο S μετά το τέλος του προγράμματος:

$$P(i \in S) = \underbrace{\frac{1}{n}}_{1^{\eta}\ \text{προσπάθεια}} + \underbrace{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}}_{2^{\eta}\ \text{προσπάθεια}} + \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}}_{3^{\eta}\ \text{προσπάθεια}} + \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}}_{k^{\eta}\ \text{προσπάθεια}} \Rightarrow$$

$$P(i \in S) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

Συνεπώς (1) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right] \Rightarrow \boxed{E[|S|] = n\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right]}$

Θέλω: $E[|S|] \geq n-1 \Rightarrow n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \geq n-1 \Rightarrow$

$-n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \geq -1 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^k \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[e^{-1}\right]^k \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow k \ln(e^{-1}) \leq n \ln(n^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow -k \leq -n \ln n \Rightarrow \boxed{k \geq n \ln n}$

Άσκηση 4 (Πιθανοτικοί αλγόριθμοι)

α) Ξέρω ότι σε ένα διμερές γράφημα το αριστερό και το δεξί μέλος είναι ανεξάρτητα. Αυτό γίνεται ισχύει επειδή δεν υπάρχει καμία ακμή που να συνδέει τους κόμβους του αριστερού μέλους (και αντίστοιχα και του δεξιού) μεταξύ τους.

Οπότε έστω ότι το γράφημα είναι διμερές. Χρωματίζω τους κόμβους του γραφήματος με μπλε και κόκκινο. Αρχίζω με μπλε και οι γείτονες του μπλε τους χρωματίζω κόκκινους και αντίστοιχα τους γείτονες των κόκκινων τους χρωματίζω μπλε. Επειδή είναι διμερές το γράφημα όλοι οι κόκκινοι κόμβοι θα αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο του G. Το ίδιο και οι μπλε κόμβοι θα αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο του G. Τώρα αν το γράφημα δεν είναι διμερές σημαίνει ότι θα έχει κύκλο περιττού μήκους. Πάλι χρωματίζω το γράφημα με τον ίδιο τρόπο. Αυτοί οι κόμβοι που δεν χρωματίζονται δεν αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο του G. Οι κόκκινοι κόμβοι όμως αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο του G, όπως και οι μπλε κόμβοι αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο του G.