Άσκηση 3

α)

$$f[k \cdot \Delta t] \to T \quad k = 0, 1 \dots N-1$$
$$h[k \cdot \Delta t] \to T \quad k = 0, 1 \dots N-1$$

$$f[k] * h[k] = \sum_{i=0}^{N-1} f[i] \cdot h[k-i] \Delta t$$

$$f[k] * (c \cdot h_1 + d \cdot h_2)[k] =$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} f[i] \cdot \{c \cdot (h_1[k-i]) + d(h_2[k-i])\} \Delta t =$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} f[k] \cdot c \cdot h_1[k-i] \Delta t + \sum_{i=0}^{N-1} f[k] \, d \cdot h_2[k-i] \Delta t =$$
$$= c(f[k] * h_1[k]) + d(f[k] * h_2[k])$$

Άρα είναι γραμμικός μετασχηματισμός

Άσκηση 3

β)

Έστω η ακολουθία $f(n), n = 0, 1, \dots N-1 \ (N \geq 1)$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{\frac{-2\pi i n k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots N-1$$

Το $F(k)$ ορίζεται ως Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier της $f(n)$ (DFT)

Έστω $p = \frac{-2\pi i n \cdot k}{N}$

$$DFT\{x(n)\} = a x_1(n) + B x_2(n)$$
$$x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} (a x_1(n) + B \cdot x_2(n)) \cdot e^p =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} a \, x_1(n) \, e^p + \sum_{n=0}^{N-1} B \, x_2(n) \, e^p =$$
$$= a \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot e^p + B \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) \cdot e^p =$$
$$= a X_1(k) + B X_2(k)$$

Άρα είναι γραμμικός μετασχηματισμός