《复变函数论》试题库

《复变函数》考试试题（一）

一、　判断题（20 分）：

1. 若 f(z)在 z_0 的某个邻域内可导，则函数 f(z)在 z_0 解析.　（　）

2. 有界整函数必在整个复平面为常数 2 4 一起看下　（　）

3. 若 $\{z_n\}$ 收敛，则 $\{\operatorname{Re} z_n\}$ 与 $\{\operatorname{Im} z_n\}$ 都收敛.　（　）

4. 若 f(z)在区域 D 内解析，且 $f'(z)\equiv 0$，则 $f(z)\equiv C$（常数）.　（　）

5. 若函数 f(z)在 z_0 处解析，则它在该点的某个邻域内可以展开为幂级数.　（　）

6. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 1/ $f(z)$ 的 m 阶极点.　（　）

7. 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限，则 z_0 是函数 f(z)的可去奇点.　（　）

8. 若函数 f(z)在是区域 D 内的单叶函数，则 $f'(z)\neq 0(\forall z\in D)$.　（　）

9. 若 *f*(*z*)在区域 *D* 内解析，则对 *D* 内任一简单闭曲线 $C\int_C f(z)dz=0$.

（　）

10. 若函数 f(z)在区域 D 内的某个圆内恒等于常数，则 f(z)在区域 D 内恒等于常数.（　）

二. 填空题（20 分）

1、$\displaystyle\int_{|z-z_0|=1}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=$ __________.（n 为自然数）

2. $\sin^2 z+\cos^2 z=$ ________.

3. 函数 $\sin z$ 的周期为___________.

4. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的孤立奇点有__________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$ 的收敛半径为__________.

6. 若函数 f(z)在整个平面上处处解析，则称它是__________.

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\xi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}=$ ______________.

8. $\operatorname{Re}s(\frac{e^z}{z^n},0)=$ ________，其中 n 为自然数.

9. $\frac{\sin z}{z}$的孤立奇点为__________ .

10. 若z_0是$f(z)$的极点，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=$____ .

三. 计算题（40 分）：

1. 设 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$，求$f(z)$在$D=\{z:0<|z|<1\}$内的罗朗展式.

2. $\int_{|z|=1}\frac{1}{\cos z}dz.$

3. 设 $f(z)=\int_C\frac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda$，其中$C=\{z:|z|=3\}$，试求$f'(1+i)$.

4. 求复数$w=\frac{z-1}{z+1}$的实部与虚部.

四. 证明题.（20 分）

1. 函数$f(z)$在区域D内解析. 证明：如果$|f(z)|$在D内为常数，那么它在D内为常数.

2. 试证: $f(z)=\sqrt{z(1-z)}$在割去线段$0\le \operatorname{Re}z\le 1$的$z$平面内能分出两个单值解析分支, 并求出支割线$0\le \operatorname{Re}z\le 1$上岸取正值的那支在$z=-1$的值.

《复变函数》考试试题（二）

一． 判断题.（20 分）

1. 若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内连续，则 $u(x,y)$与 $v(x,y)$都在 D 内连续. ( )
2. $\cos z$ 与 $\sin z$ 在复平面内有界. ( )
3. 若函数 $f(z)$在 z_0 解析，则 $f(z)$在 z_0 连续. ( )
4. 有界整函数必为常数. ( )
5. 如 z_0 是函数 $f(z)$的本性奇点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 一定不存在. ( )
6. 若函数 $f(z)$在 z_0 可导，则 $f(z)$在 z_0 解析. ( )
7. 若 $f(z)$在区域 D 内解析, 则对 D 内任一简单闭曲线 $C \int_C f(z)dz=0$. ( )
8. 若数列$\{z_n\}$收敛，则$\{\operatorname{Re} z_n\}$与$\{\operatorname{Im} z_n\}$都收敛. ( )
9. 若 $f(z)$在区域 D 内解析，则$|f(z)|$也在 D 内解析. ( )
10. 存在一个在零点解析的函数 $f(z)$使 $f(\frac{1}{n+1})=0$ 且 $f(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2n}, n=1,2,\ldots$. ( )

二． 填空题. (20 分)

1. 设 $z=-i$，则 $|z|=$ ___, $\arg z=$ ___, $\bar{z}=$ ___
2. 设 $f(z)=(x^2+2xy)+i(1-\sin(x^2+y^2)), \forall z=x+iy\in C$，则 $\lim\limits_{z\to 1+i} f(z)=$________.
3. $\displaystyle\int_{|z-z_0|=1}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=$ ________.（n 为自然数）
4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$ 的收敛半径为__________ .
5. 若 z_0 是 $f(z)$的 m 阶零点且 $m>0$，则 z_0 是 $f'(z)$ 的_____零点.
6. 函数 e^z 的周期为__________.
7. 方程 $2z^5-z^3+3z+8=0$ 在单位圆内的零点个数为________.
8. 设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，则 $f(z)$ 的孤立奇点有_________.
9. 函数 $f(z)=|z|$ 的不解析点之集为________.

10. $\mathrm{Res}(\frac{z-1}{z^4},1)=$ _____.

三. 计算题. (40 分)

1. 求函数 $\sin(2z^3)$ 的幂级数展开式.

2. 在复平面上取上半虚轴作割线. 试在所得的区域内取定函数 $\sqrt{z}$ 在正实轴取正实值的一个解析分支，并求它在上半虚轴左沿的点及右沿的点 $z=i$ 处的值.

3. 计算积分：$I=\int_{-i}^{i}|z|\,\mathrm{d}z$，积分路径为（1）单位圆（$|z|=1$）的右半圆.

4. 求 $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$.

四. 证明题. (20 分)

1. 设函数 $f(z)$在区域 D 内解析，试证：$f(z)$在 D 内为常数的充要条件是 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析.

2. 试用儒歇定理证明代数基本定理.

《复变函数》考试试题（三）

一．判断题．(20 分)．

1. $\cos z$ 与 $\sin z$ 的周期均为 $2k\pi$．　（　）
2. 若 $f(z)$ 在 z_0 处满足柯西-黎曼条件，则 $f(z)$ 在 z_0 解析．　（　）
3. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f(z)$ 在 z_0 连续．　（　）
4. 若数列 $\{z_n\}$ 收敛，则 $\{\operatorname{Re} z_n\}$ 与 $\{\operatorname{Im} z_n\}$ 都收敛．　（　）
5. 若函数 $f(z)$ 是区域 D 内解析且在 D 内的某个圆内恒为常数，则数 $f(z)$ 在区域 D 内为常数．　（　）
6. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内可导．　（　）
7. 如果函数 $f(z)$ 在 $D=\{z:|z|\le 1\}$ 上解析，且 $|f(z)|\le 1(|z|=1)$，则

   $|f(z)|\le 1(|z|\le 1)$．　（　）
8. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则它在该点的某个邻域内可以展开为幂级数．　（　）
9. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $1/f(z)$ 的 m 阶极点．　（　）
10. 若 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname{Res}(f(z),z_0)=0$．　（　）

二．填空题．(20 分)

1. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的定义域为____________．
2. 函数 e^z 的周期为__________．
3. 若 $z_n=\dfrac{n+2}{1-n}+i(1+\dfrac{1}{n})^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=$___________．
4. $\sin^2 z+\cos^2 z=$____________．
5. $\displaystyle\int_{|z-z_0|=1}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=$__________．（$n$ 为自然数）
6. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径为__________．
7. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的孤立奇点有__________．
8. 设 $e^z=-1$，则 $z=$____．
9. 若 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=$____．

10. $\mathrm{Res}(\frac{e^z}{z^n},0)=$______.

三. 计算题. (40 分)

1. 将函数 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 在圆环域 $0<|z|<\infty$ 内展为 Laurent 级数.

2. 试求幂级数 $\sum_{n=}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径.

3. 算下列积分：$\int_C \frac{e^z \mathrm{d}z}{z^2(z^2-9)}$，其中 C 是 $|z|=1$.

4. 求 $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$ 在 $|z|<1$ 内根的个数.

四. 证明题. (20 分)

1. 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 证明：如果 $|f(z)|$ 在 D 内为常数，那么它在 D 内为常数.

2. 设 $f(z)$ 是一整函数，并且假定存在着一个正整数 n，以及两个正数 R 及 M，使得当 $|z|\geq R$ 时

$$|f(z)|\leq M|z|^n,$$

证明 $f(z)$ 是一个至多 n 次的多项式或一常数。

《复变函数》考试试题（四）

一． 判断题.（20 分）

1. 若 $f(z)$在 z_0 解析，则 $f(z)$在 z_0 处满足柯西-黎曼条件. （ ）
2. 若函数 $f(z)$在 z_0 可导，则 $f(z)$在 z_0 解析. （ ）
3. 函数 $\sin z$ 与 $\cos z$ 在整个复平面内有界. （ ）
4. 若 $f(z)$在区域 D 内解析，则对 D 内任一简单闭曲线 C 都有 $\int_C f(z)dz = 0$.

（ ）

5. 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限，则 z_0 是函数的可去奇点. （ ）
6. 若函数 $f(z)$在区域 D 内解析且 $f'(z)=0$，则 $f(z)$在 D 内恒为常数. （ ）
7. 如果 z_0 是 $f(z)$的本性奇点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 一定不存在. （ ）
8. 若 $f(z_0)=0, f^{(n)}(z_0)=0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的 n 阶零点. （ ）
9. 若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 D 内解析，且在 D 内一小弧段上相等，则 $f(z)\equiv g(z), z\in D$. （ ）
10. 若 $f(z)$在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，则

$\mathrm{Res}(f(z),0) = -\mathrm{Res}(f(z),\infty)$. （ ）

二. 填空题. (20 分)

1. 设 $z=\dfrac{1}{1-i}$，则 $\mathrm{Re}\, z=$__, $\mathrm{Im}\, z=$____.
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}=$______________.
3. 函数 e^z 的周期为__________.
4. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 的幂级数展开式为__________
5. 若函数 $f(z)$在复平面上处处解析，则称它是___________.
6. 若函数 $f(z)$在区域 D 内除去有限个极点之外处处解析，则称它是 D 内的_____________.
7. 设 $C:|z|=1$，则 $\int_C (z-1)dz=$____.

8. $\dfrac{\sin z}{z}$的孤立奇点为________.

9. 若z_0是$f(z)$的极点，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=$____.

10. $\mathrm{Res}(\dfrac{e^z}{z^n},0)=$___________.

三. 计算题. (40 分)

1. 解方程$z^3+1=0$.

2. 设$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$，求$\mathrm{Res}(f(z),\infty)$.

3. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz.$.

4. 函数$f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$有哪些奇点？各属何类型（若是极点，指明它的阶数）.

四. 证明题. (20 分)

1. 证明：若函数$f(z)$在上半平面解析，则函数$\overline{f(\overline{z})}$在下半平面解析.

2. 证明$z^4-6z+3=0$方程在$1<|z|<2$内仅有 3 个根.

《复变函数》考试试题（五）

一．判断题.（20 分）

1. 若函数 $f(z)$是单连通区域 D 内的解析函数，则它在 D 内有任意阶导数.（　　）
2. 若函数 $f(z)$在区域 D 内的解析，且在 D 内某个圆内恒为常数，则在区域 D 内恒等于常数.（　　）
3. 若 $f(z)$在区域 D 内解析，则$|f(z)|$也在 D 内解析.（　　）
4. 若幂级数的收敛半径大于零，则其和函数必在收敛圆内解析.（　　）
5. 若函数 $f(z)$在 z_0 处满足 Cauchy-Riemann 条件，则 $f(z)$在 z_0 解析.（　　）
6. 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限，则 z_0 是 $f(z)$的可去奇点.（　　）
7. 若函数 $f(z)$在 z_0 可导，则它在该点解析.（　　）
8. 设函数 $f(z)$ 在复平面上解析，若它有界，则必 $f(z)$ 为常数.（　　）
9. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\operatorname{Res}(f(z),z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$（　　）

10. 若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 D 内解析，且在 D 内一小弧段上相等，则 $f(z)\equiv g(z), z\in D$.（　　）

二．填空题.（20 分）

1. 设 $z=1-\sqrt{3}i$，则 $|z|=$ __, $\arg z=$ __, $\bar{z}=$ __.
2. 当 $z=$ ____时，e^z 为实数.
3. 设 $e^z=-1$，则 $z=$ ____.
4. e^z 的周期为___.
5. 设 $C:|z|=1$，则 $\int_C (z-1)dz=$ ____.
6. $\operatorname{Res}(\frac{e^z-1}{z},0)=$ _____.
7. 若函数 $f(z)$在区域 D 内除去有限个极点之外处处解析，则称它是 D 内的_____________。
8. 函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 的幂级数展开式为_________.

9. $\dfrac{\sin z}{z}$的孤立奇点为________.

10. 设 C 是以为 a 心，r 为半径的圆周，则$\int_C \dfrac{1}{(z-a)^n}dz=$ ____.（n 为自然数）

三. 计算题. (40 分)

1. 求复数$\dfrac{z-1}{z+1}$的实部与虚部.

2. 计算积分：

$$I=\int_L \operatorname{Re} z dz,$$

在这里 L 表示连接原点到$1+i$ 的直线段.

3. 求积分：$I=\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$，其中 $0<a<1$.

4. 应用儒歇定理求方程$z=\varphi(z)$，在$|z|<1$ 内根的个数，在这里$\varphi(z)$在$|z|\le 1$上解析，并且$|\varphi(z)|<1$.

四. 证明题. (20 分)

1. 证明函数$f(z)=|z|^2$除去在$z=0$外，处处不可微.

2. 设$f(z)$是一整函数，并且假定存在着一个正整数 n，以及两个数 R 及 M，使得当$|z|\ge R$时

$$|f(z)|\le M|z|^n,$$

证明: $f(z)$是一个至多 n 次的多项式或一常数.

《复变函数》考试试题（六）

一、判断题（30 分）：

1. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 连续. （ ）

2. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 处满足 Caychy-Riemann 条件，则 $f(z)$ 在 z_0 解析. （ ）

3. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 处满足 Caychy-Riemann 条件. （ ）

4. 若函数 $f(z)$ 在是区域 D 内的单叶函数，则 $f'(z)\neq 0(\forall z\in D)$. （ ）

5. 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则对 D 内任一简单闭曲线 C 都有 $\int_C f(z)dz=0$.
（ ）

6. 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则对 D 内任一简单闭曲线 C 都有 $\int_C f(z)dz=0$.（ ）

7. 若 $f'(z)\neq 0(\forall z\in D)$，则函数 $f(z)$ 在是 D 内的单叶函数.（ ）

8. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.（ ）

9. 如果函数 $f(z)$ 在 $D=\left\{z:|z|\leq 1\right\}$ 上解析，且 $|f(z)|\leq 1(|z|=1)$,则 $|f(z)|\leq 1(|z|\leq 1)$.
（ ）

10. $|\sin z|\leq 1(\forall z\in C)$.（ ）

二、填空题（20 分）

1. 若 $z_n=\dfrac{n+2}{1-n}+i(1+\dfrac{1}{n})^n$，则 $\lim z_n=$__________.

2. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的定义域为__________________________.

3. 函数 $\sin z$ 的周期为______________________.

4. $\sin^2 z+\cos^2 z=$______________________.

5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$ 的收敛半径为_______________.

6. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点且 $m>1$，则 z_0 是 $f'(z)$ 的___________零点.

7. 若函数 $f(z)$ 在整个复平面处处解析，则称它是_____________.

8. 函数 $f(z)=|z|$ 的不解析点之集为_________.

9. 方程 $2z^5-z^3+3z+8=0$ 在单位圆内的零点个数为__________.

10. 公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 称为____________________.

三、计算题（30 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-i}{6}\right)^n$.

2、设 $f(z)=\int_C\dfrac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda$，其中 $C=\left\{z:|z|=3\right\}$，试求 $f'(1+i)$.

3、设 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$，求 $\operatorname{Re}s(f(z),i)$.

4、求函数 $\dfrac{\sin z^3}{z^6}$ 在 $0<|z|<\infty$ 内的罗朗展式.

5、求复数 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部.

6、求 $e^{-\frac{\pi}{3}i}$ 的值.

四、证明题（20 分）

1、 方程 $z^7+9z^6+6z^3-1=0$ 在单位圆内的根的个数为 6.

2、 若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，$v(x,y)$ 等于常数，则 $f(z)$ 在 D 恒等于常数.

3、 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

《复变函数》考试试题（七）

一、判断题（24 分）

1. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的某个领域内可导.（　）

2. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f(z)$ 在 z_0 满足 Cauchy-Riemann 条件.（　）

3. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 一定存在且等于零.（　）

4. 若函数 $f(z)$ 是区域 D 内的单叶函数，则 $f'(z)\neq 0(\forall z\in D)$.（　）

5. 若函数 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数，则它在 D 内有任意阶导数.（　）

6. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内的解析，且在 D 内某个圆内恒为常数，则在区域 D 内恒等于常数.（　）

7. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.（　）

二、填空题（20 分）

1. 若 $z_n=\sin\dfrac{1}{1-n}+i(1+\dfrac{1}{n})^n$，则 $\lim z_n=$___________.

2. 设 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的定义域为____________________________.

3. 函数 e^z 的周期为______________.

4. $\sin^2 z+\cos^2 z=$_______________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 z^{n^2}$ 的收敛半径为________________.

6. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点且 $m>1$，则 z_0 是 $f'(z)$ 的____________零点.

7. 若函数 $f(z)$ 在整个复平面处处解析，则称它是______________.

8. 函数 $f(z)=|z|$ 的不解析点之集为__________.

9. 方程 $3z^8-z^3+3z+8=0$ 在单位圆内的零点个数为___________.

10. $\operatorname{Re}s(\dfrac{e^z}{z^n},0)=$_________________.

三、计算题（30 分）

1、求 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$.

2、设 $f(z)=\int_C \frac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda$，其中 $C=\left\{z:|z|=3\right\}$，试求 $f'(1+i)$.

3、设 $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$，求 $\mathrm{Re}\,s(f(z),0)$.

4、求函数 $\frac{z}{(z-1)(z+1)}$ 在 $1<|z|<2$ 内的罗朗展式.

5、求复数 $w=\frac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部.

6、利用留数定理计算积分：$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}$，$(a>1)$.

四、证明题（20 分）

1、方程 $24z^7+9z^6+6z^3+z^3+1=0$ 在单位圆内的根的个数为 7.

2、若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，$|f(z)|$ 等于常数，则 $f(z)$ 在 D 恒等于常数.

3、若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

五、计算题（10 分）

求一个单叶函数，去将 z 平面上的上半单位圆盘 $\left\{z:|z|<1,\mathrm{Im}\,z>0\right\}$ 保形映射为 w 平面的单位圆盘 $\left\{w:|w|<1\right\}$

《复变函数》考试试题（八）

一、判断题（20 分）

1、若函数 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 连续.（ ）

2、若函数 $f(z)$ 在 z_0 满足 Cauchy-Riemann 条件，则 $f(z)$ 在 z_0 处解析.（ ）

3、如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 一定不存在.（ ）

4、若函数 $f(z)$ 是区域 D 内解析，并且 $f'(z)\neq 0(\forall z\in D)$，则 $f(z)$ 是区域 D 的单叶函数.（ ）

5、若函数 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数，则它在 D 内有任意阶导数.（ ）

6、若函数 $f(z)$ 是单连通区域 D 内的每一点均可导，则它在 D 内有任意阶导数.（ ）

7、若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析且 $f'(z)=0$，则 $f(z)$ 在 D 内恒为常数.（ ）

8. 存在一个在零点解析的函数 $f(z)$ 使 $f(\frac{1}{n+1})=0$ 且 $f(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2n}, n=1,2,\cdots$.（ ）

9. 如果函数 $f(z)$ 在 $D=\left\{z:|z|\leq 1\right\}$ 上解析，且 $|f(z)|\leq 1(|z|=1)$，则 $|f(z)|\leq 1(|z|\leq 1)$.（ ）

10. $\sin z$ 是一个有界函数.（ ）

二、填空题（20 分）

1、若 $z_n=\frac{n+2}{1-n}+i(1+\frac{1}{n})^n$，则 $\lim z_n=$___________.

2、设 $f(z)=\ln z$，则 $f(z)$ 的定义域为____________________________.

3、函数 $\sin z$ 的周期为______________.

4、若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\xi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=$_______________.

5、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nz^{n^5}$ 的收敛半径为________________.

6、函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 的幂级数展开式为______________________________.

7、若 C 是单位圆周，n 是自然数，则 $\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz=$______________.

8、函数 $f(z)=|z|$ 的不解析点之集为__________.

9、方程 $15z^5-z^3+4z^2+8=0$ 在单位圆内的零点个数为___________.

10、若 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，则 $f(z)$ 的孤立奇点有________________.

三、计算题（30 分）

1、求 $\int_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz+\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\dfrac{dz}{(z-1)(z-4)}$

2、设 $f(z)=\int_C \dfrac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda$，其中 $C=\{z:|z|=3\}$，试求 $f'(1+i)$.

3、设 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$，求 $\operatorname{Re}s(f(z),\infty)$.

4、求函数 $\dfrac{z+10}{(z-1)(z^2-2)}$ 在 $\sqrt{2}<|z|<+\infty$ 内的罗朗展式.

5、求复数 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部.

四、证明题（20 分）

1、方程 $15z^7+5z^6+6z^3-1=0$ 在单位圆内的根的个数为 7.

2、若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内连续，则二元函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 都在 D 内连续.

4、 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

五、计算题（10 分）

求一个单叶函数，去将 z 平面上的区域 $\left\{z:0<\arg z<\dfrac{4}{5}\pi\right\}$ 保形映射为 w 平面的单位圆盘 $\{w:|w|<1\}$.

《复变函数》考试试题（九）

一、判断题（20 分）

1、若函数 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 解析.（　）

2、若函数 $f(z)$ 在 z_0 满足 Cauchy-Riemann 条件，则 $f(z)$ 在 z_0 处解析.（　）

3、如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 一定存在且等于无穷大.（　）

4、若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则对 D 内任一简单闭曲线 C 都有 $\int_C f(z)dz=0$.（　）

5、若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则它在该点的某个领域内可以展开为幂级数.（　）

6、若函数 $f(z)$ 在区域 D 内的解析，且在 D 内某一条曲线上恒为常数，则 $f(z)$ 在区域 D 内恒为常数.（　）

7、若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.（　）

8、如果函数 $f(z)$ 在 $D=\{z:|z|\le 1\}$ 上解析，且 $|f(z)|\le 1(|z|=1)$，则 $|f(z)|\le 1(|z|\le 1)$.（　）

9、$\lim\limits_{z\to\infty} e^z=\infty$.（　）

10、如果函数 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 内解析，则 $\max\limits_{|z|\le 1}\{|f(z)|\}=\max\limits_{|z|=1}\{|f(z)|\}$.（　）

二、填空题（20 分）

1、若 $z_n=\sin\dfrac{1}{1+n}+i(1-\dfrac{2}{n})^n$，则 $\lim z_n=$ __________.

2、设 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$，则 $f(z)$ 的定义域为__________________________.

3、函数 $\sin z$ 的周期为_____________.

4、$\sin^2 z+\cos^2 z=$ ______________.

5、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nz^n$ 的收敛半径为_______________.

6、若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点且 $m>1$，则 z_0 是 $f'(z)$ 的___________零点.

7、若函数 $f(z)$ 在整个复平面除去有限个极点外，处处解析，则称它是_____________.

8、函数 $f(z)=\overline{z}$ 的不解析点之集为_________.

9、方程 $20z^8-11z^3+3z+5=0$ 在单位圆内的零点个数为__________.

10、$\operatorname{Res}(\frac{e^z}{z^2-1},1)=$________________.

三、计算题（30 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2-i}{6}\right)^n$

2、设 $f(z)=\int_C \frac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda$，其中 $C=\{z:|z|=3\}$，试求 $f'(1+i)$.

3、设 $f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}$，求 $\operatorname{Res}(f(z),\pm i)$.

4、求函数 $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ 在 $1<|z|<2$ 内的罗朗展式.

5、 求复数 $w=\frac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部.

6、 利用留数定理计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$.

四、证明题（20 分）

1、方程 $z^7+9z^6+6z^3-1=0$ 在单位圆内的根的个数为 6.

2、若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，$u(x,y)$ 等于常数，则 $f(z)$ 在 D 恒等于常数.

7、 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

五、计算题（10 分）

求一个单叶函数，去将 z 平面上的带开区域 $\left\{z:\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\pi\right\}$ 保形映射为 w 平面的单位圆盘 $\{w:|w|<1\}$.

《复变函数》考试试题（十）

一、判断题（40 分）：

1、若函数 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内可导.（　）

2、如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，则 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 一定不存在.（　）

3、若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内连续，则 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 都在 D 内连续.（　）

4、 $\cos z$ 与 $\sin z$ 在复平面内有界.（　）

5、若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $1/f(z)$ 的 m 阶极点.（　）

6、若 $f(z)$ 在 z_0 处满足柯西-黎曼条件，则 $f(z)$ 在 z_0 解析.（　）

7、若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在且有限，则 z_0 是函数的可去奇点.（　）

8、若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则对 D 内任一简单闭曲线 C 都有 $\int_C f(x)dz=0$.（　）

9、若函数 $f(z)$ 是单连通区域 D 内的解析函数，则它在 D 内有任意阶导数.（　）

10、若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且在 D 内某个圆内恒为常数，则在区域 D 内恒等于常数.（　）

二、填空题（20 分）：

1、函数 e^z 的周期为________________.

2、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nz^n$ 的和函数为________________.

3、设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$，则 $f(z)$ 的定义域为________________.

4、$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nz^n$ 的收敛半径为________________.

5、$\operatorname{Re}s(\dfrac{e^z}{z^n},0)=$________________.

三、计算题（40 分）：

1、$\displaystyle\int_{|z|} \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz.$

2、求 $\operatorname{Re}s(\dfrac{e^{iz}}{1+z^2},-i).$

3、$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$.

4、设$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$. 求$v(x,y)$，使得 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数，且满足 $f(1+i)=\ln 2$。其中 $z\in D$（D为复平面内的区域）.

5、求 $z^4-5z+1=0$，在$|z|<1$内根的个数.

《复变函数》考试试题（十一）

一、判断题.（正确者在括号内打√，错误者在括号内打×，每题 2 分）

1．当复数 $z=0$ 时，其模为零，辐角也为零.　（　）

2．若 z_0 是多项式 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0\ (a_n\neq 0)$ 的根，则 $\overline{z_0}$ 也 $P(z)$ 是的根.（　）

3．如果函数 $f(z)$ 为整函数，且存在实数 M，使得 $\operatorname{Re} f(z)<M$，则 $f(z)$ 为一常数.（　）

4. 设函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在区域内 D 解析，且在 D 内的一小段弧上相等，则对任意的 $z\in D$，

有 $f_1(z)\equiv f_2(z)$.（　）

5．若 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$.　（　）

二、填空题.（每题 2 分）

1．$i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5\cdot i^6=$ ____________________.

2．设 $z=x+iy\neq 0$，且 $-\pi<\arg z\leq\pi,\ -\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$，当 $x<0, y>0$ 时，$\arg=\arctan\dfrac{y}{x}+$ _______________.

3．函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 z 平面上的曲线 $(x-1)^2+y^2=1$ 变成 w 平面上的曲线_____________.

4．方程 $z^4+a^4=0(a>0)$ 的不同的根为_______________.

5．$(1+i)^i$ ___________________.

6．级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]z^2$ 的收敛半径为___________________.

7．$\cos nz$ 在 $|z|<n$（n 为正整数）内零点的个数为____________________.

8．函数 $f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)$ 的零点 $z=0$ 的阶数为____________________.

9．设 a 为函数 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的一阶极点，且 $\varphi(a)\neq 0,\ \psi(a)=0,\ \psi'(a)\neq 0$，则 $\operatorname*{Res}_{z=a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=$ ____________________.

10．设 a 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 $\operatorname*{Res}_{z=a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=$ ____________________.

三、计算题（50 分）

1．设$u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$。求$v(x,y)$，使得$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为解析函数，且满足$f(1+i)=\dfrac{1}{2}\ln 2$.其中$z\in D$（$D$为复平面内的区域）.（15 分）

2．求下列函数的奇点，并确定其类型（对于极点要指出它们的阶）.（10 分）

（1） $\tan^2 z$；（5 分） （2）$\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$.（5 分）

3．计算下列积分.（15 分）

（1）$\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{z^{19}}{(z^2+1)^4(z^4+2)^3}dz$ （8 分），

（2）$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$ （7 分）.

4．叙述儒歇定理并讨论方程$z^7-5z^4+z^2-2=0$在$|z|<1$内根的个数.（10 分）

四、证明题（20 分）

1. 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是上半复平面内的解析函数，证明$\overline{f(\bar{z})}$是下半复平面内的解析函数.（10 分）

2．设函数$f(z)$在$|z|<R$内解析，令$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$，$(0\le r<R)$。证明：$M(r)$在区间$[0,R)$上是一个上升函数，且若存在$r_1$及$r_2$（$0\le r_1<r_2<R$），使$M(r_1)=M(r_2)$，则$f(z)\equiv$常数.（10 分）

《复变函数》考试试题（十二）

二、判断题。（正确者在括号内打√，错误者在括号内打×，每题 2 分）

1．设复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$，若 $x_1=x_2$ 或 $y_1=y_2$，则称 z_1 与 z_2 是相等的复数。（　　）

2．函数 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 在复平面上处处可微。　　　　（　）

3．$\sin^2 z+\cos^2 z=1$ 且 $|\sin z|\le 1,\ \ |\cos z|\le 1$。　　　（　）

4．设函数 $f(z)$ 是有界区域 D 内的非常数的解析函数，且在闭域 $\overline{D}=D+\partial D$ 上连续，则存在 $M>0$，使得对任意的 $z\in D$，有 $|f(z)|<M$。　（　）

5．若函数 $f(z)$ 是非常的整函数，则 $f(z)$ 必是有界函数。（　）

二、填空题。（每题 2 分）

1．$i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5\cdot i^6=$ ____________________。

2．设 $z=x+iy\ne 0$，且 $-\pi<\arg z\le\pi,\ -\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$，当 $x<0, y>0$ 时，$\arg=\arctan\dfrac{y}{x}+$ _______________。

3. 若已知 $f(z)=x(1+\dfrac{1}{x^2+y^2})+iy(1-\dfrac{1}{x^2+y^2})$，则其关于变量 z 的表达式为_________。

4．$\sqrt[n]{z}$ 以 $z=$ _______________为支点。

5．若 $\ln z=\dfrac{\pi}{2}i$，则 $z=$ ______________。

6．$\displaystyle\int_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right|=$ _______________。

7．级数 $1+z^2+z^4+z^6+\cdots$ 的收敛半径为_______________。

8．$\cos nz$ 在 $|z|<n$（n 为正整数）内零点的个数为______________。

9．若 $z=a$ 为函数 $f(z)$ 的一个本质奇点，且在点 a 的充分小的邻域内不为零，则 $z=a$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的_______________奇点。

10．设 a 为函数 $f(z)$ 的 n 阶极点，则 $\operatorname*{Res}\limits_{z=a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=$ ____________________。

三、计算题（50 分）

1．设区域D是沿正实轴割开的z平面，求函数$w=\sqrt[5]{z}$在D内满足条件$\sqrt[5]{-1}=-1$的单值连续解析分支在$z=1-i$处之值。　（10 分）

2．求下列函数的奇点，并确定其类型（对于极点要指出它们的阶），并求它们留数。（15 分）

（1）$f(z)=\dfrac{Ln\,z}{z^2-1}$的各解析分支在$z=1$各有怎样的孤立奇点，并求这些点的留数（10 分）

（2）求$\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{e^z}{z^{n+1}}$。　（5 分）

3．计算下列积分。（15 分）

（1）$\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^7}{(z^2-1)^3(z^2+2)}dz$　（8 分），

（2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}\quad(a>0)$　（7 分）。

4．叙述儒歇定理并讨论方程$z^6+6z+10=0$在$|z|<1$内根的个数。（10 分）

四、证明题（20 分）

1．讨论函数$f(z)=e^{\bar{z}}$在复平面上的解析性。　（10 分）

2．证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^n e^{z\xi}}{n!\xi^n}\cdot\frac{d\xi}{\xi}=(\frac{z^n}{n!})^2。$$

此处C是围绕原点的一条简单曲线。（10 分）

《复变函数》考试试题（十三）

一、填空题．（每题 2 分）

1．设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 $\dfrac{1}{z}=$____________________．

2．设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$， $A=u_0+iv_0$， $z_0=x_0+iy_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件是______________________．

3．设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内沿任意一条简单闭曲线 C 的积分 $\int_C f(z)dz=$________________________．

4．设 $z=a$ 为 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=$____________________．

5．设 $f(z)=z\sin z$，则 $z=0$ 是 $f(z)$ 的________阶零点．

6．设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内的泰勒展式为__________________．

7．设 $|z-a|+|z+a|=b$，其中 a,b 为正常数，则点 z 的轨迹曲线是__________________．

8．设 $z=-\sin\dfrac{\pi}{6}-i\cos\dfrac{\pi}{6}$，则 z 的三角表示为_________________________．

9．$\int_0^{\frac{\pi}{4}}z\cos zdz=$___________________________．

10．设 $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^2}$，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的留数为________________________．

二、计算题．

1．计算下列各题．（ 9 分）

(1) $\cos i$；　　(2) $\ln(-2+3i)$；　　(3) 3^{3-i}

2．求解方程 $z^3+8=0$．（ 7 分）

3．设 $u=x^2-y^2+xy$，验证 u 是调和函数，并求解析函数 $f(z)=u+iv$，使之 $f(i)=-1+i$．（ 8 分）

4．计算积分．（10 分）

(1) $\int_C(x^2+iy)dz$，其中 C 是沿 $y=x^2$ 由原点到点 $z=1+i$ 的曲线．

(2) $\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$，积分路径为自原点沿虚线轴到 i，再由 i 沿水平方向向右到 $1+i$．

5．试将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在圆环域 $0<|z|<1$ 和 $1<|z|<2$ 内展开为洛朗级

数.（ 8 分）

6．计算下列积分.（ 8 分）

(1) $\oint_{|z|=2}\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$；　　　　(2) $\oint_{|z|=4}\dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz$.

7．计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^4}dx$.（ 8 分）

8．求下列幂级数的收敛半径.（ 6 分）

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$；　　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}z^n$.

9．讨论 $f(z)=|z|^2$ 的可导性和解析性.（ 6 分）

三、证明题.

1．设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$|f(z)|$ 为常数，证明 $f(z)$ 必为常数.（ 5 分）

2．试证明 $\bar{a}z+a\bar{z}+b=0$ 的轨迹是一直线，其中 a 为复常数，b 为实常数.（ 5 分）

《复变函数》考试试题（十四）

一、填空题.（每题 2 分）

1．设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 $z^n=$__________________.

2．设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件____________________.

3．设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内沿任意一条简单闭曲线 C 的积分 $\int_C f(z)dz=$________________________.

4．设 $z=a$ 为 $f(z)$ 的可去奇点，$\lim\limits_{z\to a} f(z)=$____________________.

5．设 $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$，则 $z=0$ 是 $f(z)$ 的________阶零点.

6．设 $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内的泰勒展式为________________.

7．设 $|z-a|+|z+a|=b$，其中 a,b 为正常数，则点 z 的轨迹曲线是________________.

8．设 $z=\sin\alpha+i\cos\alpha$，则 z 的三角表示为________________________.

9．$\int_0^{1+i} ze^z dz=$__________________________.

１０．设 $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的留数为_______________________.

二、计算题.

1．计算下列各题.（ 9 分）

(1) $Ln(-3+4i)$；　　(2) $e^{-1+\frac{\pi i}{6}}$；　　(3) $(1-i)^{1+i}$

2．求解方程 $z^3+2=0$.（ 7 分）

3．设 $u=2(x-1)y$，验证 u 是调和函数，并求解析函数 $f(z)=u+iv$，使之 $f(2)=-i$.（ 8 分）

4．计算积分 $\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$，其中路径为（ 1 ）自原点到点 $1+i$ 的直线段；(2)自原点沿虚轴到 i，再由 i 沿水平方向向右到 $1+i$.（10 分）

5．试将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)}$ 在 $z=1$ 的邻域内的泰勒展开式.（ 8 分）

6．计算下列积分.（ 8 分）

(1) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$；　　(2) $\oint_{|z|=4}\dfrac{z^2-2}{z^2(z-3)}dz$.

7．计算积分$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$．（6 分）

8．求下列幂级数的收敛半径．（6 分）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$；　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$．

9．设 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$为复平面上的解析函数，试确定$l$，$m$，$n$的值．（6 分）

三、证明题．

1．设函数 $f(z)$在区域D内解析，$\overline{f(z)}$在区域D内也解析，证明 $f(z)$必为常数．（5 分）

2．试证明$\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$的轨迹是一直线，其中$a$为复常数，$b$为实常数．（5 分）

试卷一至十四参考答案

《复变函数》考试试题（一）参考答案

一． 判断题

1．×2． √ 3． √ 4． √ 5． √ 6． √ 7． × 8． × 9． ×10． ×

二．填空题

1. $\begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$； 2. 1； 3. $2k\pi$，$(k\in z)$； 4. $z=\pm i$； 5. 1

6. 整函数； 7. ξ； 8. $\dfrac{1}{(n-1)!}$； 9. 0； 10. ∞.

三．计算题.

1. 解 因为 $0<|z|<1$, 所以 $0<|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n .$$

2. 解 因为

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z+\frac{\pi}{2}}{\cos z}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z}=-1,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z)=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos z}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z}=1.$$

所以 $\int_{|z|=2}\frac{1}{\cos z}dz=2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)=0$.

3. 解 令 $\varphi(\lambda)=3\lambda^2+7\lambda+1$, 则它在 z 平面解析, 由柯西公式有在 $|z|<3$ 内,

$$f(z)=\int_c\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-z}dz=2\pi i\varphi(z) .$$

所以 $f'(1+i)=2\pi i\,\varphi'(z)\big|_{z=1+i}=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i)$.

4. 解 令 $z=a+bi$, 则

$$w=\frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}=1-\frac{2(a+1-bi)}{(a+1)^2+b^2}=1-\frac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+1)^2+b^2} .$$

故 $\mathrm{Re}(\frac{z-1}{z+1})=1-\frac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}$, $\mathrm{Im}(\frac{z-1}{z+1})=\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$.

四. 证明题.

1. 证明 设在D内$|f(z)|=C$.

令 $f(z)=u+iv$, 则$|f(z)|^2=u^2+v^2=c^2$.

两边分别对x,y求偏导数，得 $\begin{cases} uu_x+vv_x=0 & (1) \\ uu_y+vv_y=0 & (2) \end{cases}$

因为函数在D内解析，所以$u_x=v_y, u_y=-v_x$. 代入 (2) 则上述方程组变为

$\begin{cases} uu_x+vv_x=0 \\ vu_x-uv_x=0 \end{cases}$. 消去$u_x$得，$(u^2+v^2)v_x=0$.

1) 若$u^2+v^2=0$，则 $f(z)=0$ 为常数.

2) 若$v_x=0$，由方程 (1) (2) 及 $C.-R.$方程有$u_x=0$, $u_y=0$, $v_y=0$.

所以$u=c_1, v=c_2$. (c_1, c_2为常数).

所以 $f(z)=c_1+ic_2$ 为常数.

2. 证明 $f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 的支点为$z=0,1$. 于是割去线段$0\le \mathrm{Re}\, z\le 1$的$z$平面内变点就不可能单绕 0 或 1 转一周，故能分出两个单值解析分支.

由于当z从支割线上岸一点出发,连续变动到$z=0,1$ 时，只有z的幅角增加π. 所以 $f(z)=\sqrt{z(1-z)}$ 的幅角共增加$\frac{\pi}{2}$. 由已知所取分支在支割线上岸取正值，于是可认为该分支在上岸之幅角为 0，因而此分支在$z=-1$的幅角为$\frac{\pi}{2}$，故 $f(-1)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}=\sqrt{2}i$.

《复变函数》考试试题（二）参考答案

一．判断题.

1．√　2．×3．√　4．√　5．×6．×7．×8．√　9．×10．×.

二． 填空题

1. 1，$-\dfrac{\pi}{2}$，　i；　　2. $3+(1-\sin 2)i$；　　3. $\begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$；　　4. 1；　　5. $m-1$.

6. $2k\pi i$，$(k\in z)$.　　7. 0；　　8. $\pm i$；　　9. R；　　10. 0.

三．计算题

1. 解　$\sin(2z^3)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2z^3)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}z^{6n+3}}{(2n+1)!}$.

2. 解　令 $z=re^{i\theta}$.

　则 $f(z)=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}$，　$(k=0,1)$.

　又因为在正实轴去正实值，所以 $k=0$.

　所以 $f(i)=e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3. 单位圆的右半圆周为 $z=e^{i\theta}$，$-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$.

　所以 $\int_{-i}^{i}|z|dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}de^{i\theta}=e^{i\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2i$.

4. 解

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=2\pi i(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi i\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0.$$

四．证明题.

1.　证明（必要性）令 $f(z)=c_1+ic_2$,则 $\overline{f(z)}=c_1-ic_2$. (c_1,c_2 为实常数).

　令 $u(x,y)=c_1,v(x,y)=-c_2$. 则 $u_x=v_y=u_y=v_x=0$.

　即 u,v 满足 $C.-R.$，且 u_x,v_y,u_y,v_x 连续，故 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析.

（充分性）令 $f(z)=u+iv$，则　$\overline{f(z)}=u-iv$，

　因为 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析，所以

$u_x=v_y$，　$u_y=-v_x$，　且 $u_x=(-v)_y=-v_y$，　$u_y=-(-v_x)=-v_x$.

比较等式两边得　$u_x=v_y=u_y=v_x=0$. 从而在 D 内 u,v 均为常数,故 $f(z)$ 在 D 内为常数.

2. 即要证“任一　n　次方程　$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$　　$(a_0\neq 0)$　有且只有　n 个根”.

　证明　令 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$，取 $R>\max\left\{\dfrac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{|a_0|},1\right\}$，当 z

在 $C:|z|=R$ 上时，有 $|\varphi(z)|\le|a_1|R^{n-1}+\cdots+|a_{n-1}|R+|a_n|<(|a_1|+\cdots+|a_n|)R^{n-1}<|a_0|R^n$.

$$=|f(z)|.$$

由儒歇定理知在圆 $|z|<R$ 内，方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 与 $a_0z^n=0$ 有相同个数的根. 而 $a_0z^n=0$ 在 $|z|<R$ 内有一个 n 重根 $z=0$. 因此 n 次方程在 $|z|<R$ 内有 n 个根.

《复变函数》考试试题（三）参考答案

一. 判断题

1．× 2．×3． √ 4． √ 5． √6． √7． √ 8． √ 9． √ 10． √.

二. 填空题.

1. $\{z|z\neq\pm i,\text{且}z\in C\}$; 2. $2k\pi i\quad(k\in z)$; 3. $-1+ei$; 4. 1; 5. $\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$;

6. 1; 7. $\pm i$; 8. $z=(2k+1)\pi i$; 9. ∞; 10. $\dfrac{1}{(n-1)!}$.

三. 计算题.

1. 解 $z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{-n+2}}{n!}$.

2. 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n!}{n^n}\cdot\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

所以收敛半径为e.

3. 解 令 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2-9)}$，则 $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=\left.\dfrac{e^z}{z^2-9}\right|_{z=0}=-\dfrac{1}{9}$.

故原式$=2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=-\dfrac{2\pi i}{9}$.

4. 解 令 $f(z)=z^9-2z^6+z^2-2$，$\varphi(z)=-8z$.

则在C: $|z|=1$上 $f(z)$与$\varphi(z)$均解析，且$|f(z)|\leq 6<|\varphi(z)|=8$，故由儒歇定理有

$N(f+\varphi,C)=N(f+\varphi,C)=1$. 即在 $|z|<1$ 内，方程只有一个根.

四. 证明题.

1. 证明 证明 设在D内$|f(z)|=C$.

令 $f(z)=u+iv$, 则$|f(z)|^2=u^2+v^2=c^2$.

两边分别对x,y求偏导数，得 $\begin{cases}uu_x+vv_x=0 & (1)\\ uu_y+vv_y=0 & (2)\end{cases}$

因为函数在D内解析，所以$u_x=v_y,u_y=-v_x$. 代入 (2) 则上述方程组变为

$\begin{cases}uu_x+vv_x=0\\ vu_x-uv_x=0\end{cases}$. 消去$u_x$得，$(u^2+v^2)v_x=0$.

1) $u^2+v^2=0$，则 $f(z)=0$ 为常数.

2) 若$v_x=0$，由方程 (1) (2) 及 $C.-R.$方程有$u_x=0$, $u_y=0$，$v_y=0$.

所以$u=c_1,v=c_2$. (c_1,c_2为常数).

所以 $f(z)=c_1+ic_2$ 为常数.

2. 证明 取 $r > R$，则对一切正整数 $k > n$ 时，$\left|f^{(k)}(0)\right| \leq \dfrac{k!}{2\pi}\int_{|z|=r}\left|\dfrac{f(z)}{z^{k+1}}\right||dz| \leq \dfrac{k!Mr^n}{r^k}$.

于是由r的任意性知对一切$k > n$均有 $f^{(k)}(0) = 0$.

故 $f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_n z_n$，即 $f(z)$是一个至多n次多项式或常数.

《复变函数》考试试题（四）参考答案

一. 判断题.

1．√ 2．× 3．× 4．× 5．× 6．√ 7．× 8．× 9．√ 10．√．

二. 填空题.

1. $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$； 2. ξ； 3. $2k\pi i \quad (k\in z)$； 4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \quad (|z|<1)$； 5. 整函数;

6. 亚纯函数; 7. 0; 8. $z=0$; 9. ∞; 10. $\frac{1}{(n+1)!}$.

三. 计算题.

1.

$$解: z^3=-1\Rightarrow z=\cos\frac{2k\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{3} \qquad k=0,1,2$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$z_3=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2. 解 $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=1}=\frac{e}{2}$，$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=-1}=\frac{e^{-1}}{-2}$.

故原式$=2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z))=\pi i(e-e^{-1})$.

3. 解 原式$=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)=2\pi i\left.\frac{z}{9-z^2}\right|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}$.

4. 解 $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}$，令 $z(e^z-1)=0$，得 $z=0, z=2k\pi i$，$k=\pm1,\pm2,\cdots$

而 $\lim\limits_{z\to0}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}\right)=\lim\limits_{z\to0}\frac{z-e^z+1}{(e^z-1)z}=\lim\limits_{z\to0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}$

$=\lim\limits_{z\to0}\frac{-e^z}{e^z+e^z+ze^z}=-\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore z=0$ 为可去奇点

当 $z=2k\pi i$ 时，$(k\neq0), z-e^z+1\neq0$

而 $\left.\left[(e^z-1)z\right]'\right|_{z=2k\pi i}=\left.e^z-1+ze^z\right|_{z=2k\pi i}\neq0$ $\qquad \therefore z=2k\pi i$ 为一阶极点.

四. 证明题.

1. 证明 设 $F(z)=\overline{f(\overline{z})}$，在下半平面内任取一点 z_0，z 是下半平面内异于 z_0 的点，考虑

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\overline{\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{z-z_0}}.$$

而 $\overline{z_0}$，$\overline{z}$ 在上半平面内，已知 $f(z)$ 在上半平面解析，因此 $F'(z_0)=\overline{f'(\overline{z_0})}$，从而 $F(z)=\overline{f(\overline{z})}$ 在下半平面内解析.

2. 证明 令 $f(z)=-6z+3$，$\varphi(z)=z^4$，则 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 在全平面解析,

且在$C_1:|z|=2$上，$|f(z)|\le 15<|\varphi(z)|=16$，

故在$|z|<2$内$N(f+\varphi,C_1)=N(\varphi,C_1)=4$.

在$C_2:|z|=1$上，$|f(z)|\ge 3>|\varphi(z)|=1$，

故在$|z|<1$内$N(f+\varphi,C_2)=N(f,C_2)=1$.

所以$f+\varphi$在$1<|z|<2$内仅有三个零点，即原方程在$1<|z|<2$内仅有三个根.

《复变函数》考试试题（五）参考答案

一. 判断题.

1. √ 2. √ 3. × 4. √ 5. × 6. × 7. × 8. √ 9. √ 10. √.

二. 填空题.

1. 2, $-\dfrac{\pi}{3}$, $1+\sqrt{3}i$; 2. $a+2k\pi i \quad (k\in z, a\text{为任意实数})$;

3. $(2k+1)\pi i$, $(k\in z)$; 4. $2k\pi i, (k\in z)$; 5. 0; 6. 0;

7. 亚纯函数; 8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \quad (|z|<1)$; 9. 0; 10. $\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$.

三. 计算题.

1. 解 令 $z=a+bi$，则

$$w=\frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}=1-\frac{2(a+1-bi)}{(a+1)^2+b^2}=1-\frac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}.$$

故 $\mathrm{Re}(\dfrac{z-1}{z+1})=1-\dfrac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}$，$\mathrm{Im}(\dfrac{z-1}{z+1})=\dfrac{2b}{(a+1)^2+b^2}$.

2. 解 连接原点及 $1+i$ 的直线段的参数方程为 $z=(1+i)t \quad 0\le t\le 1$,

故 $\int_c \mathrm{Re}\, zdz=\int_0^1\{\mathrm{Re}[(1+i)t]\}(1+i)dt=(1+i)\int_0^1 tdt=\dfrac{1+i}{2}$.

3. 令 $z=e^{i\theta}$，则 $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$. 当 $a\neq 0$ 时

$$1-2a\cos\theta+a^2=1-a(z+z^{-1})+a^2=\frac{(z-a)(1-az)}{z},$$

故 $I=\dfrac{1}{i}\int_{|z|=1}\dfrac{dz}{(z-a)(1-az)}$，且在圆 $|z|<1$ 内 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(1-az)}$ 只以 $z=a$ 为一级极点，在 $|z|=1$ 上无奇点，故 $\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=a} f(z)=\dfrac{1}{1-az}\Big|_{z=a}=\dfrac{1}{1-a^2}, (0<|a|<1)$，由残数定理有

$$I=\frac{1}{i}2\pi i \mathop{\mathrm{Res}}_{z=a} f(z)=\frac{2\pi}{1-a^2}, (0\le |a|<1).$$

4. 解 令 $f(z)=-z$，则 $f(z),\varphi(z)$ 在 $|z|\le 1$ 内解析，且在 $C:|z|=1$ 上，$|\varphi(z)|<1=|f(z)|$，所以在 $|z|<1$ 内，$N(f+\varphi,C)=N(f,C)=1$，即原方程在 $|z|<1$ 内只有一个根.

四. 证明题.

1. 证明 因为 $u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)\equiv 0$，故 $u_x=2x, u_y=2y, v_x=v_y=0$.
这四个偏导数在 z 平面上处处连续，但只在 $z=0$ 处满足 $C.-R.$ 条件，故 $f(z)$ 只在除了 $z=0$ 外处处不可微.

2. 证明 取 $r>R$，则对一切正整数 $k>n$ 时，$\left|f^{(k)}(0)\right|\le \dfrac{k!}{2\pi}\int_{|z|=r}\left|\dfrac{f(z)}{z^{k+1}}\right||dz|\le \dfrac{k!Mr^n}{r^k}$.

于是由 r 的任意性知对一切 $k>n$ 均有 $f^{(k)}(0)=0$.

故 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} c_n z_n$，即 $f(z)$ 是一个至多 n 次多项式或常数.

《复变函数》考试试题（六）参考答案

一、判断题：1. √　2. ×　3. √　4. √　5. √　6. √　7. ×　8. √　9. √　10. ×

二、填空题：1. $-1+ei$　2. $z \neq \pm 1$　3. 2π　4. 1　5. 1

6. $m-1$阶　7. 整函数　8. □　9. 0　10. 欧拉公式

三、计算题：

1. 解：因为 $\left|\dfrac{2-i}{6}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}} = \dfrac{\sqrt{5}}{6} < 1,$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2-i}{6})^n = 0$.

2. 解：$\because |1+i| = \sqrt{2} < 3,$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}d\lambda$$

$$= \int_C \frac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda - z}d\lambda.$$

因此　$f(\lambda) = 2\pi i(3\lambda^2+7\lambda+1)$

故 $f(z) = 2\pi i(3z^2+7z+1)$

$$f'(1+i) = 2\pi i(6z+7)\big|_{1+i} = 2\pi i(13+6i) = 2\pi(-6+13i).$$

3.解：$\dfrac{e^z}{z^2+1} = \dfrac{e^z}{2}\cdot(\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i})$

$$\therefore \operatorname{Re}s(f(z), i) = \frac{e^i}{2}.$$

4.解：$\sin z^3 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z^3)^{2n+1}}{(2n+1)!},$

$$\therefore \frac{\sin z^3}{z^6} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{6n-3}.$$

5．解：设 $z = x+iy$，则 $w = \dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{x-1+iy}{z+1+iy} = \dfrac{(x^2+y^2-1)+2yi}{(x+1)^2+y^2}$.

$$\therefore \operatorname{Re} w = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},\quad \operatorname{Im} w = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

6．解：$e^{-\frac{\pi}{3}i} = \cos(-\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}i).$

四、1. 证明：设 $f(z)=9z^6$，$\varphi(z)=z^7+6z^3-1,$

则在$|z|=1$上，$|f(z)|=9,\ |\varphi(z)|\le 1+6+1=8,$ 即有$|f(z)|>|\varphi(z)|$.

根据儒歇定理，$f(z)$与$f(z)+\varphi(z)$在单位圆内有相同个数的零点，而$f(z)$的零点个数为 6，故$z^7+9z^6+6z^3-1=0$在单位圆内的根的个数为 6.

2.证明：设$v(x,y)=a+bi$，则$v_x=v_y=0$，由于$f(z)=u+iv$在内D解析，因此$\forall(x,y)\in D$有 $u_x=v_y=0$， $u_y=-v_x=0$.

于是$u(x,y)\equiv c+di$故$f(z)=(a+c)+(b+d)i$，即$f(z)$在内D恒为常数.

3.证明：由于z_0是$f(z)$的m阶零点，从而可设

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),$$

其中$g(z)$在z_0的某邻域内解析且$g(z_0)\neq 0$，

于是 $$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{g(z)}$$

由$g(z_0)\neq 0$可知存在z_0的某邻域D_1，在D_1内恒有$g(z)\neq 0$，因此$\dfrac{1}{g(z)}$在内D_1解析，故z_0为$\dfrac{1}{f(z)}$的m阶极点.

《复变函数》考试试题（七）参考答案

一、判断题：1. √　2. √　3. ×　4. √　5. √　6. √　7. √　8. ×

二、填空题：1. ei　2. $z \neq \pm 1$　3. $2\pi i$　4. 1　5. 1

6. $m-1$阶　7. 整函数　8. □　9. 0　10. $\dfrac{1}{(n-1)!}$

三、计算题：

1. 解：$(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2 + (\dfrac{1-i}{\sqrt{2}})^2 = i - i = 0.$

2. 解：$\because |1+i| = \sqrt{2} < 3,$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}d\lambda$$

$$= \int_C \frac{3\lambda^2 + 7\lambda + 1}{\lambda - z}d\lambda.$$

因此　$f(\lambda) = 2\pi i(3\lambda^2 + 7\lambda + 1)$

故 $f(z) = 2\pi i(3z^2 + 7z + 1)$

$$f'(1+i) = 2\pi i(6z+7)\big|_{1+i} = 2\pi i(13+6i) = 2\pi(-6+13i).$$

3. 解：$\dfrac{e^z}{z^2} = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2} + \cdots,$

因此$\mathrm{Re}\,s(f(z), 0) = 1.$

4. 解：$\dfrac{z}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{-1}{z-1} + \dfrac{2}{z-2} = \dfrac{-1}{z(1-\frac{1}{z})} - \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$

由于$1 < |z| < 2$，从而$\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1,$　$\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1.$

因此在$1 < |z| < 2$内

有　$\dfrac{z}{(z-1)(z-2)} = -\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{1}{z})^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{z}{2})^n = -\sum_{n=0}^{\infty}[(\dfrac{1}{z})^{n+1} + (\dfrac{z}{2})^n].$

5．解：设 $z=x+iy$，则 $w=\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{x-1+iy}{z+1+iy}=\dfrac{(x^2+y^2-1)+2yi}{(x+1)^2+y^2}$.

$$\therefore \operatorname{Re} w=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}, \quad \operatorname{Im} w=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

6.解：设 $z=e^{i\theta}$，则 $d\theta=\dfrac{dz}{iz}, \cos\theta=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$，

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\cdot\frac{2}{2a+z+\dfrac{1}{z}}=\int_{|z|=1}\frac{2idz}{z^2+2az+1}$$

$\because a>1$，故奇点为 $z_0=\sqrt{a^2-1}-a$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=4\pi\cdot\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=4\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

四、证明题：

1. 证明：设 $f(z)=24z^7$，$g(z)=9z^6+6z^3+z^2+1,$

则在 $|z|=1$ 上，$|f(z)|=24,\ |g(z)|\le 9+6+1+1=17,$ 即有 $|f(z)|>|g(z)|$.

根据儒歇定理知在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在单位圆内有相同个数的零点，而在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 的零点个数为 7，故 $24z^7+9z^6+6z^3+z^2+1=0$ 在单位圆内的根的个数为 7.

2.证明：设 $|f(z)|=u^2+v^2\equiv c$，则

$$2u\cdot u_x+2v\cdot v_x=0,$$
$$2u\cdot u_y+2v\cdot v_y=0.$$

已知 $f(z)$ 在区域 D 内解析，从而有 $u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$

将此代入上上述两式得

$$uu_x-vu_y=0,$$
$$uu_y+vu_x=0.$$

因此有 $u_x=0, u_y=0,$ 于是有 $v_x=0, v_y=0$.

即有 $u\equiv c_1, v\equiv c_2,\quad f(z)=c_1+ic_2$

故 $f(z)$ 在区域 D 恒为常数.

3.证明：由于 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，从而可设

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的某邻域内解析且 $g(z_0)\neq 0$，

于是 $$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{g(z)}$$

由 $g(z_0)\neq 0$ 可知存在 z_0 的某邻域 D_1，在 D_1 内恒有 $g(z)\neq 0$，因此 $\dfrac{1}{g(z)}$ 在内 D_1 解析，故

z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

五、计算题

解：根据线性变换的保对称点性知 i 关于实轴的对称点 $-i$ 应该变到 $w=0$ 关于圆周的对称点 $w=\infty$，故可设 $w=k\dfrac{z-i}{z+i}$

《复变函数》考试试题（八）参考答案

一、判断题：1. √ 2. × 3. √ 4. × 5. √ 6. √ 7. √ 8. × 9. √ 10. ×

二、填空题：1. $-1+ei$ 2. $z\neq 0$，∞ 3. 2π 4. ξ 5. 1

6. $\sum_{k=0}^{\infty}(iz)^{2k}$ 7. $\begin{cases}0, & n\neq 1\\ 2\pi i, & n=1\end{cases}$ 8. □ 9. 5 10. $z\neq\pm 1$

三、计算题：

1. 解：由于 $e^{z+1}\sin z$ 在 $|z|\leq 1$ 解析，

所以 $\int_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz=0$

而 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)(z-4)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{\frac{1}{(z-4)}dz}{(z-1)}=-\frac{1}{3}$

因此 $\int_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)(z-4)}=-\frac{1}{3}$.

2. 解：$\because |1+i|=\sqrt{2}<3,$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\lambda)}{\lambda-z}d\lambda$$

$$=\int_C\frac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda.$$

因此 $f(\lambda)=2\pi i(3\lambda^2+7\lambda+1)$

故 $f(z)=2\pi i(3z^2+7z+1)$

$$f'(1+i)=2\pi i(6z+7)\big|_{1+i}=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i).$$

3. 解：$f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}=\frac{e^z}{2}(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1})$

$$\operatorname{Re}s(f(z),1)=\frac{e}{2},\qquad \operatorname{Re}s(f(z),-1)=-\frac{e^{-1}}{2},$$

因此 $\operatorname{Re}s(f(z),\infty)=-(\frac{e}{2}-\frac{e^{-1}}{2})=\frac{e^{-1}-e}{2}$.

4.解：$\frac{z+10}{(z-1)(z^2-2)}=-\frac{11}{z-1}+\frac{11z+12}{z^2-2}=-\frac{11}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{11z+12}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z^2}}$

由于 $\sqrt{2}<|z|<+\infty$，从而 $\left|\frac{1}{z}\right|<1, \quad \left|\frac{2}{z^2}\right|<1$

因此在 $\sqrt{2}<|z|<+\infty$ 内有

$$\frac{z+10}{(z-1)(z^2-2)}=-\frac{11}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n+\frac{11z+12}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z^2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{2(n+1)}[2^n\cdot(11z+12)-11z^{n+1}]$$

5．解：设 $z=x+iy$，则 $w=\frac{z-1}{z+1}=\frac{x-1+iy}{z+1+iy}=\frac{(x^2+y^2-1)+2yi}{(x+1)^2+y^2}$.

$$\therefore \operatorname{Re} w=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}, \quad \operatorname{Im} w=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

6．解：设 $z=e^{ix}$，则 $dz=ie^{ix}dx=izdx$

$$\sin x=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\sin^2 x}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{1}{iz}\cdot\frac{2iz}{z^2+4iz-1}dz=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

在 $|z|<1$ 内 $\frac{1}{z^2+4iz-1}$ 只有 $z=(\sqrt{3}-2)i$ 一个一级极点

$$\operatorname{Re}s[f(z),(\sqrt{3}-2)i]=-\frac{i}{2\sqrt{3}}$$

因此 $$\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\sin^2 x}=2\pi i\cdot\frac{-i}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

四、证明：

1. 证明：设 $f(z)=15z^7$， $g(z)=5z^6+z^5+6z^3-1,$

则在 $|z|=1$ 上， $|f(z)|=15, \quad |g(z)|\le 13,$ 即有 $|f(z)|>|g(z)|$.

根据儒歇定理知在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在单位圆内有相同个数的零点，而在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 的零点个数为 7，故 $15z^7+5z^6+z^5+6z^3-1=0$ 在单位圆内的根的个数为 7

2. 证明：因为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，在 D 内连续，所以 $\forall(x_0,y_0)\in D$，

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0.$

当$\left|x-x_0\right|<\delta,\left|y-y_0\right|<\delta$时有

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|=\left|u(x,y)-u(x_0,y_0)+i[v(x,y)-v(x_0,y_0)]\right|$$

$$=\{[u(x,y)-u(x_0,y_0)]^2+[v(x,y)-v(x_0,y_0)]^2\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$

从而有$\left|u(x,y)-u(x_0,y_0)\right|<\varepsilon,$

$\left|v(x,y)-v(x_0,y_0)\right|<\varepsilon.$

即与在连续，由$(x_0,y_0)\in D$的任意性知$u(x,y)$与$v(x,y)$都在D内连续

3.证明：由于z_0是$f(z)$的m阶零点，从而可设

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),$$

其中$g(z)$在z_0的某邻域内解析且$g(z_0)\neq 0$，

于是 $$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{g(z)}$$

由$g(z_0)\neq 0$可知存在z_0的某邻域D_1，在D_1内恒有$g(z)\neq 0$，因此$\dfrac{1}{g(z)}$在内D_1解析，故

z_0为$\dfrac{1}{f(z)}$的m阶极点.

五、解：1.设$\xi=z^{\frac{5}{4}}$，则ξ将区域$\{z:0<\arg z<\frac{4}{5}\pi\}$保形映射为区域$\{z:0<\arg\xi<\pi\}$

2.设$w=e^{i\theta}\dfrac{\xi-i}{\xi+i}$，则$w$将上半平面保形变换为单位圆$|w|<1$.

因此所求的单叶函数为

$$w=e^{i\theta}\frac{z^{\frac{5}{4}}-i}{z^{\frac{5}{4}}+i}.$$

《复变函数》考试试题（九）参考答案

一、判断题（20 分）

1、× 2、× 3、√ 4、√ 5、√ 6、√ 7、√ 8、√ 9、× 10、√

二、填空题（20 分）

1、 $e^{-z}i$ 2、 $z\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 3、 2π 4、1 5、1

6、 $m-1$ 7、整函数 8、 c 9、8 10、 e

三、计算题（30）

1、解： $\because \left|\frac{2-i}{6}\right|<\frac{5}{6}<1,\ \therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2-i}{6})^n=0.$

2、解： $\because |1+i|=\sqrt{2}<3,$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\lambda)}{\lambda-z}d\lambda$$

$$=\int_C\frac{3\lambda^2+7\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda.$$

因此 $f(\lambda)=2\pi i(3\lambda^2+7\lambda+1)$

故 $f(z)=2\pi i(3z^2+7z+1)$

$$f'(1+i)=2\pi i(6z+7)\big|_{1+i}=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i).$$

3、解：

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}=\frac{e^z}{(z+i)(z-i)}.$$

$$\operatorname{Res}(f(z),i)=\frac{-ie^i}{2},\quad \operatorname{Res}(f(z),-i)=\frac{ie^i}{2}.$$

4、解： $\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

由于 $1<|z|<2$，从而 $\left|\frac{1}{z}\right|<1,\quad \left|\frac{z}{2}\right|<1$.

因此在 $1<|z|<2$ 内

有 $$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}[(\frac{1}{z})^{n+1}+(\frac{z}{2})^n].$$

5、解：设 $z=x+iy$，则 $w=\frac{z-1}{z+1}=\frac{x-1+iy}{z+1+iy}=\frac{(x^2+y^2-1)+2yi}{(x+1)^2+y^2}$.

$$\therefore \operatorname{Re} w=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}, \quad \operatorname{Im} w=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

6、解：设 $f(z)=\dfrac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$, 则 $f(z)$ 在 $\operatorname{Im} z>0$ 内有两个一级极点 $z_1=3i, z_2=i$，

$\operatorname{Re}s(f(z),3i)=\dfrac{3+7i}{48}$，$\operatorname{Re}s(f(z),i)=-\dfrac{1+i}{16}$,

因此，根据留数定理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}dz=2\pi i\left(\frac{3+7i}{48}-\frac{1+i}{16}\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

四、证明题（20 分）

1、证明：设 $f(z)=9z^6$，$\varphi(z)=z^7+6z^3-1$,

则在 $|z|=1$ 上，$|f(z)|=9$, $|\varphi(z)|\le 1+6+1=8$, 即有 $|f(z)|>|\varphi(z)|$.

根据儒歇定理，$f(z)$ 与 $f(z)+\varphi(z)$ 在单位圆内有相同个数的零点，而 $f(z)$ 的零点个数为 6，故 $z^7+9z^6+6z^3-1=0$ 在单位圆内的根的个数为 6.

2、证明：设 $u(x,y)=a+bi$，则 $u_x=u_y=0$，由于 $f(z)=u+iv$ 在内 D 解析，因此 $\forall(x,y)\in D$ 有 $\quad u_x=v_y=0$, $\quad u_y=-v_x=0$.

于是 $v(x,y)\equiv c+di$ 故 $f(z)=(a+c)+(b+d)i$，即 $f(z)$ 在内 D 恒为常数.

3、证明：由于 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，从而可设

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的某邻域内解析且 $g(z_0)\neq 0$，

于是 $$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{g(z)}$$

由 $g(z_0)\neq 0$ 可知存在 z_0 的某邻域 D_1，在 D_1 内恒有 $g(z)\neq 0$，因此 $\dfrac{1}{g(z)}$ 在内 D_1 解析，故 z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

五、计算题（10 分）

解：1、设 $\xi = z - \frac{\pi}{2} i$, 则 ξ 将区域 $\{z: \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi\}$ 保形变换为区域 $\{\xi: 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}$.

2、设 $t = e^{\xi}$,则 t 将区域 $\{\xi: 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}$ 保形变换为区域 $D\{t: 0 < \arg t < \frac{\pi}{2}\}$.

3、设 $s = t^2$, 则 s 将 D 保形变换为上半平面,因此,所求的单叶函数为

$$w = e^{i\theta} \cdot \frac{s-i}{s+i} = e^{i\theta} \cdot \frac{t^2 - i}{t^2 + i} = e^{i\theta} \cdot \frac{e^{2\xi} - i}{e^{2\xi} + i} = e^{i\theta} \cdot \frac{-e^{2z} - i}{-e^{2z} + i}.$$

《复变函数》考试试题（十）参考答案

一、判断题（40 分）：

1. √ 2. √ 3. √ 4. × 5. √ 6. × 7. √ 8. √ 9. √ 10. √

二、填空题（20 分）：

1. $2\pi i$ 2. $\dfrac{z}{(1-z)^2}$ 3. $z \neq \pm i$ 4. 1 5. $\dfrac{1}{(n-1)!}$

三、计算题（40 分）

1. 解：$f(z)=\dfrac{z}{9-z^2}$ 在 $|z|\le 2$ 上解析，由 $cauchy$ 积分公式，有

$$\int_{|z|=2}\frac{2}{(9-z^2)(z+i)}dz=\int_{|z|=2}\frac{\frac{z}{9-z^2}}{z+i}dz=2\pi i\cdot\frac{z}{9-z^2}\bigg|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}$$

2. 解：设 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$，有 $\operatorname{Re}s(f,-i)=\dfrac{e^{-i^2}}{-2i}=\dfrac{i}{2}e$

3. 解：$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n=(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})^n+(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4})^n$

$$=\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}=2\cos\frac{n\pi}{4}$$

4. 解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-u_y dx+u_x dy+c=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{-2y}{x^2+y^2}dx+\frac{2x}{x^2+y^2}dy+c$$

$$=\int_0^y\frac{2x}{x^2+y^2}dy+c=2\arctan\frac{y}{x}+c$$

$$f(1+i)=u(1,1)+iv(1,1)=\ln 2+i(2\arctan 1+c)=\ln 2$$

故 $c=-\dfrac{\pi}{2}$， $v(x,y)=2\arctan\dfrac{y}{x}-\dfrac{\pi}{2}$

5. 解：令 $f(x)=-5z$， $g(z)=z^4+1$ 则 $f(x)$， $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内均解析，且当 $|z|=1$ 时

$$|f(z)|=5>|z^4|+1\ge|z^4+1|=|g(z)|$$

由 $Rouche$ 定理知 $z^4-5z+1=0$ 根的个数与 $-5z=0$ 根的个数相同.

故 $z^4-5z+1=0$ 在 $|z|<1$ 内仅有一个根.

《复变函数》考试试题（十一）参考答案

一、1．× 2．√ 3．× 4．√ 5．√

二、1． 1 2． π 3． $u=\dfrac{1}{2}$ 4． $u=\dfrac{1}{2}$

5． $z_k=\sqrt[4]{a}(\cos\dfrac{2k\pi+\pi}{4}+i\sin\dfrac{2k\pi+\pi}{4})\quad(k=0,1,2,3)$

6． $\dfrac{1}{3}$ 7． $\dfrac{2n^2}{\pi}-1$ 8． 15

9. $\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$ 10. $-m$

三、1．解： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-u_y dx+u_x dy+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy+C$$

$$=\int_0^y\frac{x}{x^2+y^2}dy+C=\arctan\frac{y}{x}+C.$$

又 $f(1+i)=u(1,1)+iv(1,1)$

$$=\frac{1}{2}\ln 2+i(\arctan 1+C)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

故 $C=-\dfrac{\pi}{4}$， $v(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}-\dfrac{\pi}{4}$.

2.解: (1) $\tan^2 z=\dfrac{\sin^2 z}{\cos^2 z}$ 奇点为 $z=(2k+\dfrac{1}{2})\pi$， $k=0,\pm 1\cdots$ 对任意整数 k，

$z=(2k+\dfrac{1}{2})\pi$ 为二阶极点，$z=\infty$ 为本性奇点.

(2) 奇点为 $z_0=1$， $z_k=2k\pi i$， $(k=0,\pm 1\cdots)$

$z=1$ 为本性奇点,对任意整数 k，z_k 为一级极点, $z=\infty$ 为本性奇点.

3. (1)解: $f(z)=\dfrac{z^{19}}{(z^2+1)^4(z^4+2)^3}$ 共有六个有限奇点，且均在内 $C:|z|=4$，

由留数定理,有

$$\int_{|z|=4}f(z)dz=2\pi i[-\mathrm{Re}\,s(f,\infty)]$$

将 f 在 $z=\infty$ 的去心邻域内作 $Laurent$ 展开

$$f(z)=\frac{z^{19}}{z^{8}(1+\frac{1}{z^{2}})^{4}\cdot z^{12}(1+\frac{2}{z^{4}})^{3}}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{z^{2}})^{4}(1+\frac{2}{z^{4}})^{3}}$$

$$=\frac{1}{z}(1-\frac{4}{z^{2}}+\frac{10}{z^{4}}-\cdots)(1-\frac{6}{z^{4}}+\frac{z^{4}}{z^{8}}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{4}{z^{3}}+\cdots$$

所以 $\operatorname{Re}s(f,\infty)=-C_{-1}=-1$

$$\int_{|z|=4}f(z)dz=2\pi i\,.$$

(2)解: 令 $z=e^{i\theta}$,则

$$I=\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^{2}\theta}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^{2}\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{C:|z|=1}\frac{4zdz}{i(z^{4}+6z^{2}+1)}$$

再令 $z^{2}=u$ 则 $\frac{4zdz}{i(z^{4}+6z^{2}+1)}=\frac{2du}{i(u^{2}+6u+1)}$,故

$$I=\frac{1}{2}\cdot 2\int_{C:|z|=1}\frac{2du}{i(u^{2}+6u+1)}=\frac{2}{i}\int_{C}\frac{du}{u^{2}+6u+1}$$

由留数定理,有

$$I=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\operatorname{Re}s(f,-3+\sqrt{8})=4\pi\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4.解：儒歇定理：设 c 为一条围线，若函数 f 与 φ 均在 c 内部及 c 上解析且 $|\varphi(z)|<|f(z)|$， $z\in c$，则 $f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 c 内部的零点个数相同.

令 $f(z)=-5z^{4}$，$g(z)=z^{7}+z^{2}-2$ 则 $f(z),g(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析且

当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|=5>|z^{7}|+|z^{2}|+2\geq|z^{7}+z^{2}-2|=|g(z)|$,

由儒歇定理 $z^{7}-5z^{4}+z^{2}-2=0$ 的根个数与 $-5z^{4}=0$ 根个数相同

故 $z^7-5z^4+z^2-2=0$ 在 $|z|<1$ 内有 4 个根.

四、1.证明: $\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)=u^*+iv^*$

$$u^*=u(x,-y),\quad v^*=-v(x,-y)$$

$$u_x{}^*=u_x,\quad u_y{}^*=-u_y,\quad v_x{}^*=-v_x,\quad v_y{}^*=v_y$$

由 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在上半平面内解析,从而有

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

因此有 $u_x{}^*=v_y{}^*,\quad u_y{}^*=-v_x{}^*$

故 $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面内解析.

2.证明: (1) $\forall r_1<r_2,\quad 0\le r_1<r_2<R$ 则

$$M(r_1)=\max_{|z|=r_1}|f(z)|=\max_{|z|\le r_1}|f(z)|$$

$$M(r_2)=\max_{|z|=r_2}|f(z)|=\max_{|z|\le r_2}|f(z)|$$

故 $M(r_2)\ge M(r_1)$,即 $M(r)$ 在 $[0,R)$ 上为 r 的上升函数.

(2)如果存在 r_1 及 r_2 $(0\le r_1<r_2<R)$ 使得 $M(r_1)=M(r_2)$

则有 $\max\limits_{|z|\le r_2}|f(z)|=\max\limits_{|z|=r_1}|f(z)|$

于是在 $r_1\le|z|\le r_2$ 内 $f(z)$ 恒为常数,从而在 $|z|<R$ 内 $f(z)$ 恒为常数.

《复变函数》考试试题（十二）参考答案

一、判断题.

1. × 2. × 3. × 4. √ 5. ×

二、填空题.

1. -1 2. $(-\pi)$ 3. $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ 4. $0,\infty$

5. i 6. 2π 7. 1 8. $\dfrac{2n^2}{\pi}-1$

9.本性 10. $-\pi$

三、计算题.

1.解：$w_k=|z|^{\frac{1}{5}}e^{\frac{\arg z+2k\pi}{5}i}\qquad k=0,1,2,3,4$

由$\sqrt[5]{-1}=-1$ 得$-1=e^{\frac{\pi+2k\pi}{5}i}$ 从而有$k=2$

$$w_2(1-i)=2^{\frac{1}{10}}\cdot e^{\frac{-\frac{\pi}{4}+4\pi}{5}}i=2^{\frac{1}{10}}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=\frac{1-i}{\sqrt[5]{4}}$$

2.解：（1） $f(z)=\dfrac{Lnz}{z^2-1}$ 的各解析分支为 $f_k(z)=\dfrac{\ln z+2k\pi}{z^2-1}$，$(k=0,\pm1,\cdots)$.

$z=1$为 $f_0(z)$ 的可去奇点，为 $f_k(z)$ 的一阶极点$(k=0,\pm1,\cdots)$。

$$\operatorname{Re}s(f_0(z),1)=0\qquad \operatorname{Re}s(f_k(z),1)=k\pi i.\quad (k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

（2）$$\operatorname*{Re}_{z=0}s\frac{e^z}{z^{n+1}}=\operatorname*{Re}_{z=0}s\left[\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right]=\frac{1}{n!}$$

3.计算下列积分

解：（1） $$f(z)=\frac{z^7}{(z^2-1)^3(z^2+2)}=\frac{1}{z(1-\frac{1}{z^2})^3(1+\frac{2}{z^2})}$$

$$\operatorname{Re}s(f,\infty)=-C_{-1}=-1$$

$$\int_{|z|=2}f(z)dz=2\pi i[-\operatorname{Re}s(f,\infty)]=2\pi i$$

（2）设 $$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}=\frac{z^2}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$$

令 $\varphi(z)=\dfrac{z^2}{(z+ai)^2}$， $\varphi'(z)=\dfrac{2aiz}{(z+ai)^3}$

则 $\operatorname{Re}s(f,ai)=\dfrac{\varphi'(ai)}{1!}=\dfrac{2(ai^2)}{(2ai)^3}=-\dfrac{1}{4a}i$

$$\int_{\operatorname{Im}z>0} f(z)dz=2\pi i\operatorname{Re}s(f,ai)=\frac{\pi}{2a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{2a}$$

4.儒歇定理：设 c 是一条围线， $f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 满足条件：

（1）它们在 c 的内部均解析，且连续到 c；

（2）在 c 上， $|f(z)|>|\varphi(z)|$

则 f 与 $f+\varphi$ 在 c 的内部有同样多零点，

即 $f(z)=10$ $g(z)=z^6+6z$ 有 $|f(z)|>|g(z)|$

由儒歇定理知 $z^6+6z+10=0$ 在 $|z|<1$ 没有根。

四、证明题

1 证明：.设 $z=x+iy$ 有 $f(z)=e^{\bar{z}}=e^x(\cos y-i\sin y)$

$$u(x,y)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=-e^x\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\cos y$$

易知 $u(x,y)$ ， $v(x,y)$ 在任意点都不满足 $C-R$ 条件，故 f 在复平面上处处不解析。

2.证明：于高阶导数公式得 $(e^{z\xi})^{(n)}\Big|_{\xi=0}=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi|=1}\dfrac{e^{z\xi}}{\xi n+1}d\xi$

即 $z^n=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi|=1}\dfrac{e^{z\xi}}{\xi n+1}d\xi$

故 $\dfrac{z^n}{n!}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi|=1}\dfrac{e^{z\xi}}{\xi n+1}d\xi$ 从而 $\left(\dfrac{z^n}{n!}\right)^2=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C:|\xi|=1}\dfrac{z^n}{n!}\cdot\dfrac{e^{z\xi}}{\xi n+1}d\xi$

《复变函数》考试试题（十三）参考答案

一、填空题.（每题 2 分）

1. $\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$　　2. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0$　　3. 0　　4. ∞

5. 2　　6. $1-z^2+z^4-z^6+\cdots(-1)^n z^{2n}+\cdots$　　7.椭圆

8. $-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2}i)$　　9. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\dfrac{\pi}{4})-1$　　10. -1

二、计算题.

１．计算下列各题.（９分）

解: (1) $\cos i=\dfrac{1}{2}(e+e^{-1})$

(2) $\ln(-2+3i)=\ln\left|-2+3i\right|+i\arg(-2+3i)$

$$=\frac{1}{2}\ln 13+i(\pi-\arctan\frac{3}{2})$$

(3) $3^{3-i}=e^{(3-i)\ln 3}=e^{(3-i)(\ln 3+i\cdot 2k\pi)}=e^{3\ln 3+2k\pi+i(6k\pi-\ln 3)}$

$$=27e^{2k\pi}[\cos(\ln 3)-i\sin(\ln 3)]$$

2. 解: $z^3+8=0\Rightarrow z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8e^{i\pi}}=2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}\quad(k=0,1,2)$

故 $z^3+8=0$ 共有三个根: $z_0=1+\sqrt{3}$，$z_1=-2$，$z_2=1-\sqrt{3}$

3. 解: $u=x^2-y^2+xy\Rightarrow u_x=2x+y,u_y=-2y+x$

$\Rightarrow\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0\Rightarrow u$ 是调和函数.

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(-u_y)dx+u_x dy+c=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)dx+(2x+y)dy+c$$

$$=\int_0^x(-x)dx+\int_0^y(2x+y)dy+c$$

$$=-\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+c$$

$$\Rightarrow f(z)=u+iv=(x^2-y^2+xy)+i(-\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}(2-i)z^2+\frac{1}{2}i$$

4. 解 (1) $\int_c (x^2+iy)dz=\int_0^1 (x^2+ix^2)d(x+ix^2)=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$

(2) $\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz=i\int_0^1(-y)dy+\int_0^1[(x-1)+ix^2]dx$

$$=-\frac{i}{2}+\frac{i}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}(3+i)$$

5. 解: $0<|z|<1$ 时 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\sum_{n=o}^{\infty}(\frac{z}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{z^{n+1}})z^n$$

$1<|z|<2$ 时 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2(1-\frac{z}{2})}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}$

$$=-\sum_{n=o}^{+\infty}\frac{z_n}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$$

6. 解: (1) $\oint_{c=|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz=2\pi i[-\operatorname{Re}s(f,\infty)]=-4\pi i$

(2) $\oint_{|z|=4}\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz=2\pi i[-\operatorname{Re}s(f,\infty)]=0$

7.解: 设 $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$ $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 和 $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ 为上半平面内的两个一级极点,

且 $\operatorname{Re}s[f(z),z_1]=\lim_{z\to z_1}\frac{z^2}{[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)](z^2+i)}=\frac{1+i}{4\sqrt{2}i}$

$\operatorname{Re}s[f(z),z_2]=\lim_{z\to z_2}\frac{z^2}{[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)](z^2+i)}=\frac{1-i}{4\sqrt{2}i}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=2\pi i(\frac{1+i}{4\sqrt{2}i}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}i})=\frac{\pi}{2}$

8. (1) $R=1$ (2) $R=\infty$

9. 解: 设 $z=x+iy$,则 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ $u_x=2x,u_y=2y,v_x=v_y=0$

当且仅当 $x=y=0$ 时,满足 $C-R$ 条件,故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 可导,在 z 平面内处处不解析.

三、

1. 证明: 设 $f=u+iv$,因为$\left|f(z)\right|$为常数,不妨设$u^2+v^2=C$ (C为常数)

则$u\cdot u_x+v\cdot v_y=0$ $u\cdot u_y+v\cdot v_y=0$

由于 $f(z)$在D内解析,从而有$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$

将此代入上述两式可得$u_x=u_y=v_x=v_y=0$

于是$u\equiv C_1, v\equiv C_2$ 因此 $f(z)$在D内为常数.

2. 解: 设$z=x+iy$, $a=A+Bi$ （A，B为实常数）

则$\overline{a}z=(A-Bi)(x+iy)=(Ax+By)+i(Ay-Bx)$

$\overline{a}z+a\overline{z}+b=\overline{a}z+\overline{\overline{a}z}+b=0 \Leftrightarrow 2(Ax+By)+b=0$

故$\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$的轨迹是直线$2Ax+2By)+b=0$

《复变函数》考试试题（十四）参考答案

一、

1、 $r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$ 　　2、$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u\left(x,y\right)=u_0$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v\left(x,y\right)=v_0$

3、0 　　4、有限值 　　5、4 　　6、$1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots$

7、椭圆 　　8、$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 　　9、ie^{1+i} 　　10、$-\frac{1}{6}$

二、计算题。

1、解（1）$\ln\left(-3+4i\right)$

$$=\ln 5+i\left[\pi-\arg\tan\frac{4}{3}+2n\pi\right]$$

$$=\ln 5+i\left[-\arg\tan\frac{4}{3}+\left(2n+1\right)\pi\right]\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

（2）$ie^{-1+\frac{\pi i}{6}}=\frac{1}{e}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{e}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$

（3）$\left(1-i\right)^{1+i}=e^{(1+i)\ln(1-i)}=e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}=e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi\right)+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi+l\,\mathrm{n}\sqrt{2}\right)}$

$$==\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}\right)\right]$$

2、解：$z^3=-2=2e^{i\pi}$ 　　$z=\sqrt[3]{2}e^{i\cdot\frac{\pi+2n\pi}{3}}\left(n=0,1,2\right)$

故：方程 $z^3+2=0$ 共有三个根，分别为：$\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(1\pm\sqrt{3}i\right),-\sqrt[3]{2}$

3、解：$u_x=2y,u_y=2\left(x-1\right)$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$$

故 u 是调和函数。

$$v\left(x,y\right)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-u_ydx+u_xdy+c$$

4. 解: (1) $\int_0^{1+i}\left[(x-y)+ix^2\right]dz=\int_0^1\left(ix^2\right)d\left(x+ix\right)$

$$=i(1+i)\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(i-1\right)$$

(2) $\int_0^{1+i}\left[(x-y)+ix^2\right]dz=\frac{1}{3}(i-1)$

5. 解: $f(z)=\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{3\left(1-\frac{z+1}{3}\right)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

6. 解: (1) $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=2\pi i\cdot\cos(\frac{\pi}{2})=0$

(2) $f(z)=\frac{z^2-2}{z^2(z-3)}=\frac{1}{z}(1+\frac{3}{z}+\cdots)$

$\operatorname{Res}(f,\infty)=-C_{-1}=-1$

$\oint_{|z|=4}f(z)dz=2\pi i\left[-\operatorname{Res}(f,\infty)\right]=2\pi i$

7. 解: 设 $z=e^{i\theta}$ 则 $d\theta=\frac{dz}{iz}$, $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{3z^2+10iz-3}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{3(z+3i)(z+\frac{i}{3})}dz$$

令 $f(z)=\frac{2}{3(z+3i)(z+\frac{i}{3})}$, 则 f 在 $|z|=1$ 内只有一级权点, $z=-\frac{i}{3}$,依离数定理有

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}=2\pi i\operatorname{Res}\left[f(z),-\frac{i}{3}\right]=2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

8. 解: (1) $|(1+i)z|<1$ 即 $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$. 故 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $C_n=\frac{(n!)^2}{n^n}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=0$$

9.解 设 $u(x,y)=my^3+nx^2y, v(x,y)=x^3+lxy^2$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy,\frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2,$

$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2,\frac{\partial v}{\partial y}=2lxy$, 因 $f(z)$ 解析,由 $C-R$ 条件有 $\begin{cases} 2nxy=2lxy \\ 3my^2+nx^2=-3x^2-ly^2 \end{cases}$,解得

$l=-3,m=1,n=-3$.

三 1. 证明 设 $f=u+iv$,由 $f\in H(D)$ 有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$,(1)

又 $\overline{f(z)}=u-iv$ 也在 D 也解析,有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}$,(2)

由(1)与(2)得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$

故 f 在 D 内为常数.

2. 证明,设 $z=x+iy,a=A+iB$, 有 $\overline{a}z=(A-iB)(x+iy)=(Ax+By)+i(Ay-Bx)$

$\overline{a}z+a\overline{z}+b=\overline{a}z+\overline{\overline{a}z}+b=2(Ax+By)+b=0$

即点 z 在直线 $2Ax+2By+b=0$ 上 A,B,b 为实常数.