北京交通大学 国家级精品课程

信号与系统

Signals and Systems

信号与系统教研室

电子信息工程学院

2010年

[例] 判断下列系统是否为线性系统。

$$(1)\ y(t)=t^2x(t)$$

$$(2)\ y(t)=3x(t)+4$$

$$(3)\ y(t)=4\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

解: $(1)\ y(t)=t^2x(t)$

① 均匀特性

$$x_1(t)\to t^2x_1(t) \qquad Kx_1(t)\to t^2Kx_1(t)$$

② 叠加特性

$$x_1(t)\to t^2x_1(t) \qquad x_2(t)\to t^2x_2(t)$$

$$x_1(t)+x_2(t)\to t^2[x_1(t)+x_2(t)]$$

满足均匀特性和叠加特性，该系统为线性系统。

[例] 判断下列系统是否为线性系统。

$$(1)\, y(t) = t^2 x(t)$$

$$(2)\, y(t) = 3x(t) + 4$$

$$(3)\, y(t) = 4\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

解:

$$(2)\, y(t) = 3x(t) + 4$$

$$x_1(t) \to 3x_1(t) + 4$$

$$Kx_1(t) \to 3Kx_1(t) + 4$$

不满足均匀特性，该系统为非线性系统。

[例] 判断下列系统是否为线性系统。

$$(1)\ y(t)=t^2x(t)$$

$$(2)\ y(t)=3x(t)+4$$

$$(3)\ y(t)=4\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

解： $(3)\ y(t)=4\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$

① 均匀特性

$$x_1(t)\to 4\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}\qquad Kx_1(t)\to 4\frac{\mathrm{d}Kx_1(t)}{\mathrm{d}t}=4K\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

② 叠加特性

$$x_1(t)\to 4\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}\qquad x_2(t)\to 4\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$x_1(t)+x_2(t)\to 4\frac{\mathrm{d}[x_1(t)+x_2(t)]}{\mathrm{d}t}=4\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}+4\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

满足均匀特性和叠加特性，该系统为线性系统。

注：微积分运算是线性运算。

[例] 判断下列输出响应所对应的系统是否为线性系统？（其中$y(0)$为系统的初始状态，$x(t)$为系统的输入激励，$y(t)$为系统的输出响应）。

$$(1)\, y(t)=5y(0)+4x(t)$$

线性系统

$$(2)\, y(t)=2y(0)+6x^2(t)$$

零状态响应非线性

非线性系统

不满足可分解性

$$(3)\, y(t)=4y(0)\cdot x(t)+3x(t)$$

非线性系统

$$(4)\, y(t)=4y(0)+3x(t)+2\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

线性系统

解： 分析

任意线性系统的输出响应都可分解为零输入响应与零状态响应两部分之和,即

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

因此，判断一个系统是否为线性系统，应从三个方面来判断：

1、具有可分解性

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

2、零输入线性，系统的零输入响应必须对所有的初始状态呈现线性特性。

3、零状态线性，系统的零状态响应必须对所有的输入信号呈现线性特性。

[例] 试判断下列系统是否为时不变系统。

(1) $y(t) = \sin[x(t)]$ 时不变系统

(2) $y(\mathrm{t}) = \cos t \cdot x(t)$ 时变系统

(3) $y(t) = 4x^{2}(t) + 3x(t)$ 时不变系统

(4) $y(t) = 2t \cdot x(t)$ 时变系统

分析: 判断一个系统是否为时不变系统，只需判断当输入激励$x(t)$变为$x(t-t_0)$时，相应的输出响应$y(t)$是否也变为 $y(t-t_0)$。由于系统的时不变特性只考虑系统的零状态响应，因此在判断系统的时不变特性时，不涉及系统的初始状态。

[例] 计算下列各式

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\cdot\delta(t-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t$$

$$(2)\int_{-2}^{+3}\mathrm{e}^{-5t}\cdot\delta(t-1)\mathrm{d}t$$

$$(3)\int_{-4}^{+6}\mathrm{e}^{-2t}\cdot\delta(t+8)\mathrm{d}t$$

$$(4)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\delta(2-2t)\mathrm{d}t$$

$$(5)\int_{-2}^{+2}(t^2+3t)\cdot\delta(\frac{t}{3}-1)\mathrm{d}t$$

$$(6)(t^3+2t^2+3)\cdot\delta(t-2)$$

$$(7)\mathrm{e}^{-4t}\cdot\delta(2+2t)$$

$$(8)\mathrm{e}^{-2t}u(t)\cdot\delta(t+1)$$

解:

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\cdot\delta(t-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t=\sin(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}/2$$

$$(2)\int_{-2}^{+3}\mathrm{e}^{-5t}\cdot\delta(t-1)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-5\times1}=1/\mathrm{e}^{5}$$

$$(3)\int_{-4}^{+6}\mathrm{e}^{-2t}\cdot\delta(t+8)\mathrm{d}t=0$$

$$(4)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\delta(2-2t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t-1)\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

$$(5)\int_{-2}^{+2}(t^{2}+3t)\cdot\delta(\frac{t}{3}-1)\mathrm{d}t=\int_{-2}^{+2}(t^{2}+3t)\cdot3\delta(t-3)\cdot\mathrm{d}t=0$$

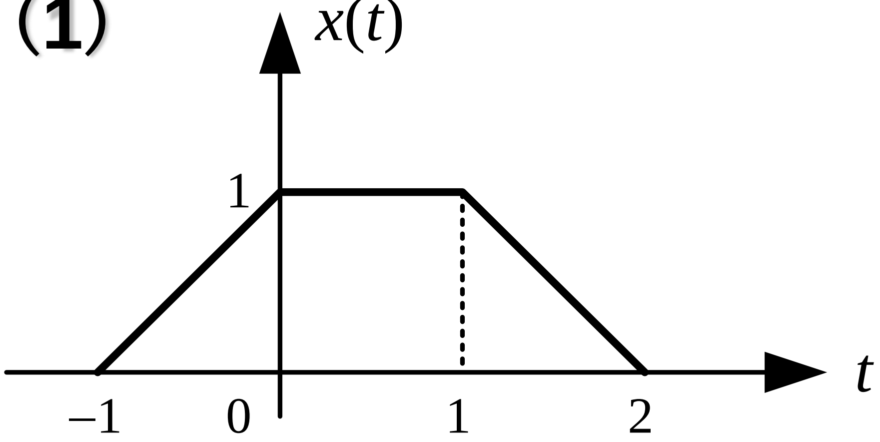
$$(6)(t^{3}+2t^{2}+3)\cdot\delta(t-2)=(2^{3}+2\cdot2^{2}+3)\cdot\delta(t-2)=19\cdot\delta(t-2)$$

$$(7)\mathrm{e}^{-4t}\cdot\delta(2+2t)=\mathrm{e}^{-4t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t+1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4\times(-1)}\delta(t+1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4}\delta(t+1)$$

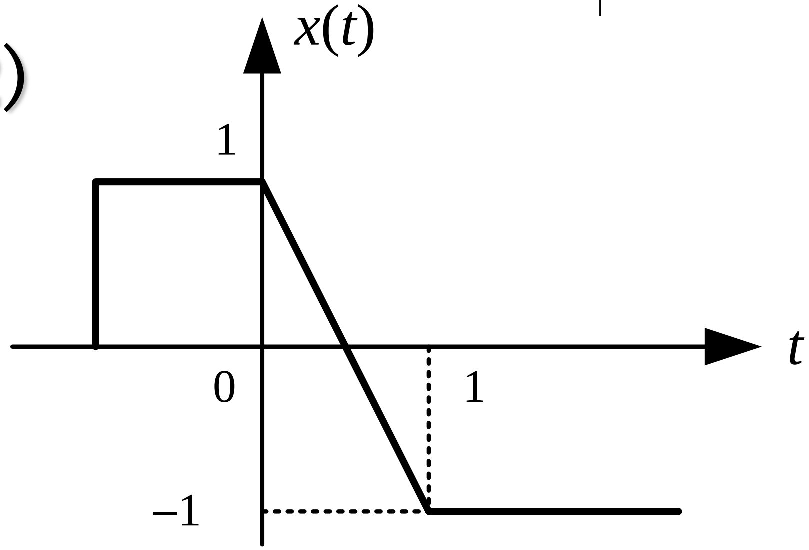
$$(8)\mathrm{e}^{-2t}u(t)\cdot\delta(t+1)=\mathrm{e}^{-2\times(-1)}u(-1)\cdot\delta(t+1)=0\times\delta(t+1)=0$$

[例] 写出图示信号的时域描述式。

(1)



(2)



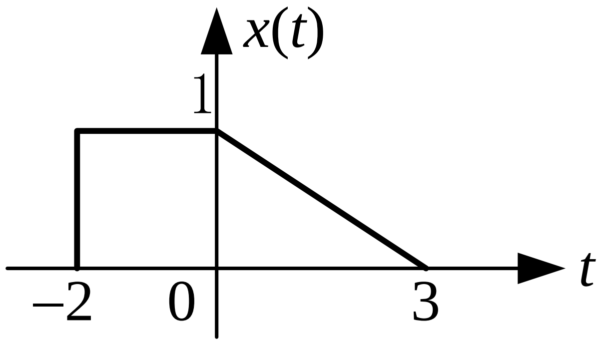
解:

(1) $$x(t) = r(t+1) - r(t) - r(t-1) + r(t-2)$$

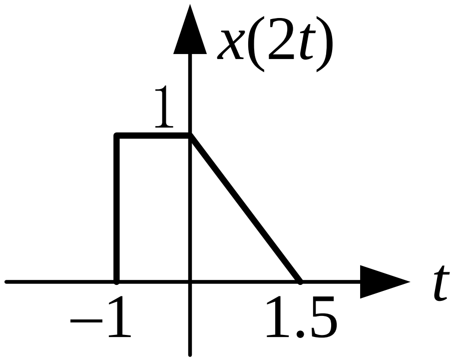
(2) $$x(t) = u(t+1) - 2r(t) + 2r(t-1)$$

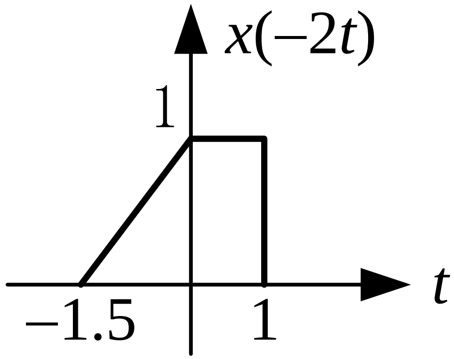
[例] 已知$x(t)$的波形如图所示，试画出$x(6-2t)$的波形。

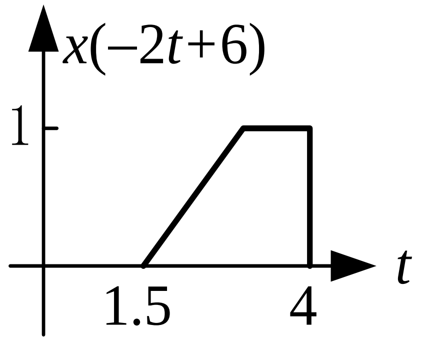
解：



$$x(t) \xrightarrow{\text{缩}2} x(2t) \xrightarrow{\text{翻转}} x(-2t) \xrightarrow{\text{右移}3} x[-2(t-3)]$$







[例] 画出下列信号及其一阶导数的波形，其中T为常数，$\omega_0 = 2\pi/T$。

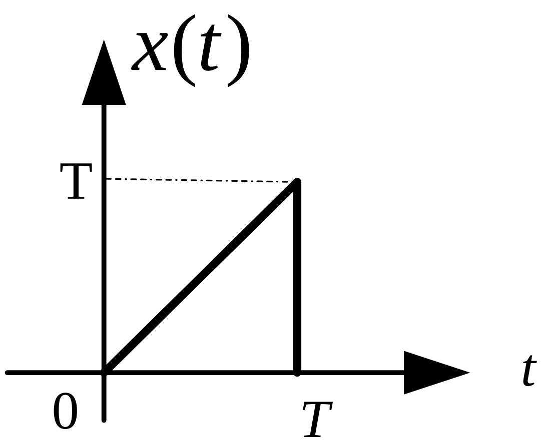
（1） $x(t) = t[u(t) - u(t-T)]$

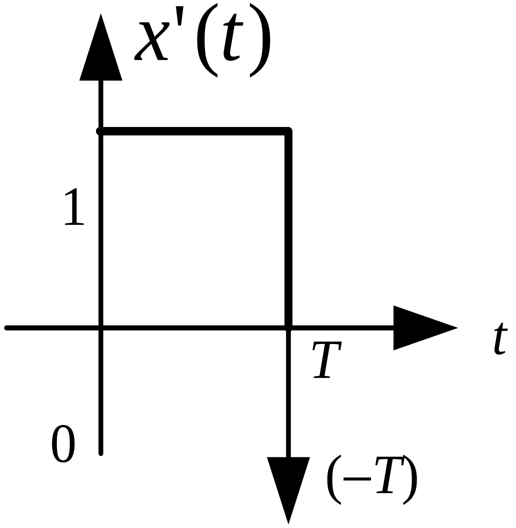
（2） $x(t) = \sin \omega_0 t \cdot [u(t) - u(t-T)]$

解： （1） $x(t) = t[u(t) - u(t-T)]$

$$x'(t) = u(t) - u(t-T) + t[\delta(t) - \delta(t-T)]$$

$$= u(t) - u(t-T) - T\delta(t-T)$$





[例] 画出下列信号及其一阶导数的波形，其中T为常数，$\omega_0 = 2\pi/T$。

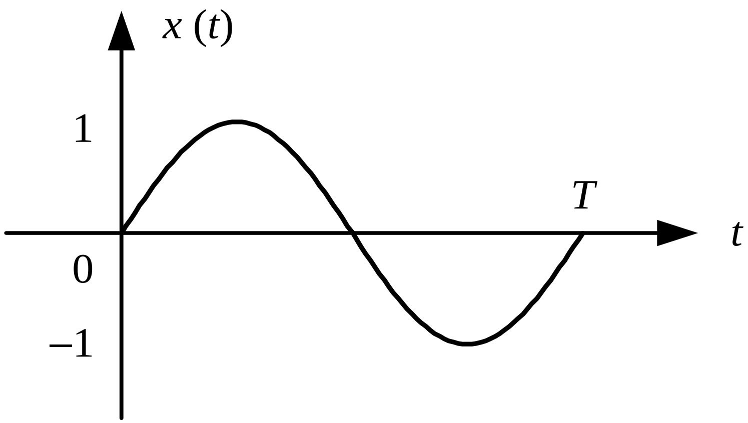
（1）$x(t) = t[u(t) - u(t-T)]$

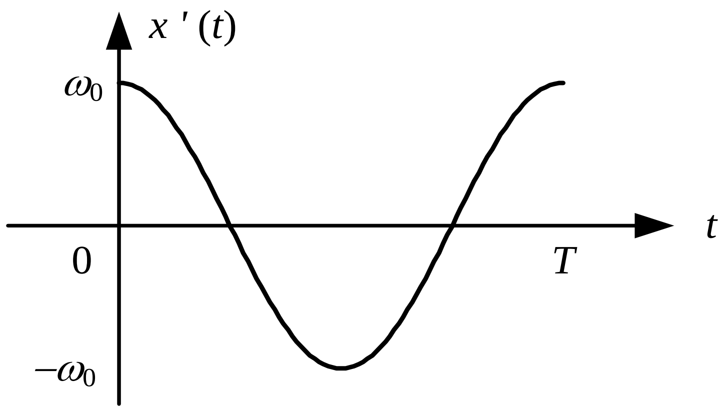
（2）$x(t) = \sin\omega_0 t \cdot [u(t) - u(t-T)]$

解： （2）$x(t) = \sin\omega_0 t \cdot [u(t) - u(t-T)]$

$$x'(t) = \omega_0 \cos\omega_0 t \cdot [u(t) - u(t-T)] + \sin\omega_0 t \cdot [\delta(t) - \delta(t-T)]$$

$$= \omega_0 \cos\omega_0 t \cdot [u(t) - u(t-T)]$$





[例]判断下列离散序列是否为周期信号.

1） $x_1[k] = \cos(k\pi/6)$

$\Omega_0/2\pi = 1/12$, 由于1/12是不可约的有理数，

故离散序列的周期N=12。

2） $x_2[k] = \cos(k/6)$

$\Omega_0/2\pi = 1/12\pi$, 由于 $1/12\pi$不是有理数，

故离散序列是非周期的。

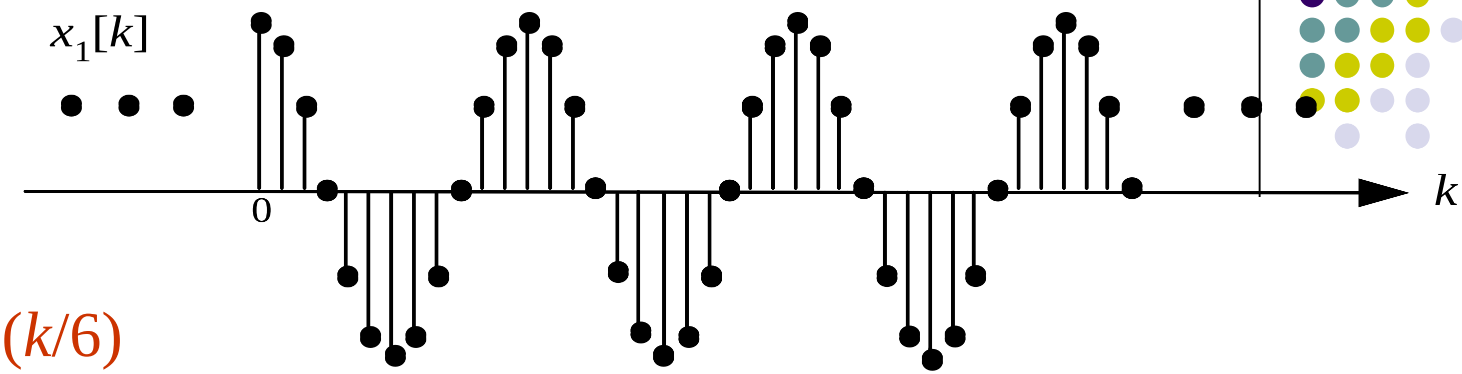
3）对$x_3(t) = \cos 6\pi t$, 以f_s= 8 Hz抽样所得序列

$$x_3[k] = x_3(t)\Big|_{t=\frac{1}{8}k} = \cos(\frac{6\pi}{8}k)$$

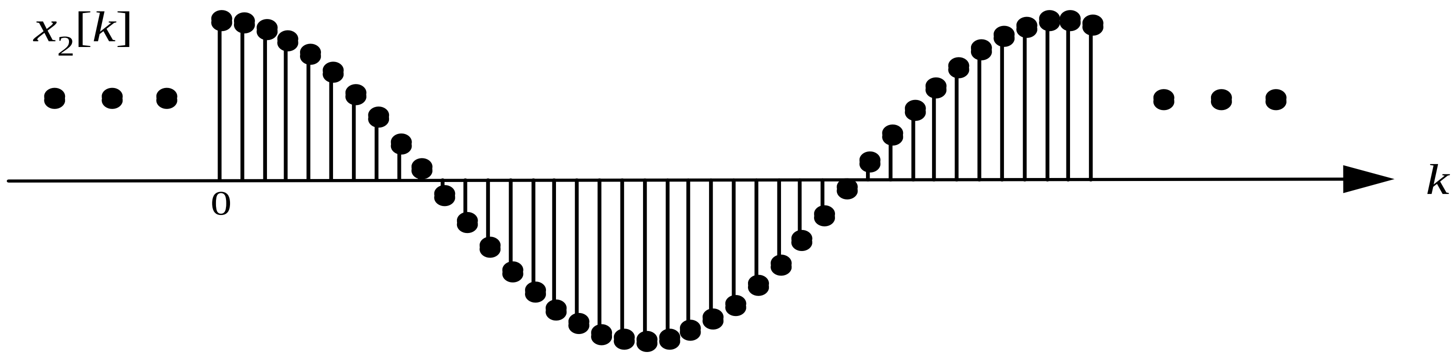
$\Omega_0/2\pi = 3/8$， 由于3/8是不可约的有理数，

故离散序列的周期N=8。

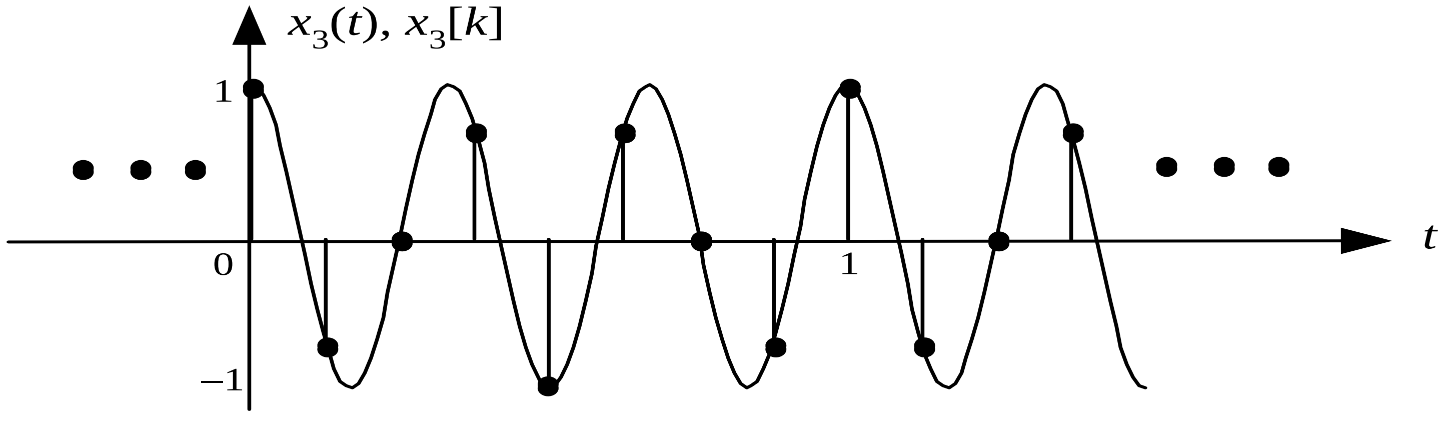
1) $x_1[k] = \cos(k\pi/6)$



2) $x_2[k] = \cos(k/6)$

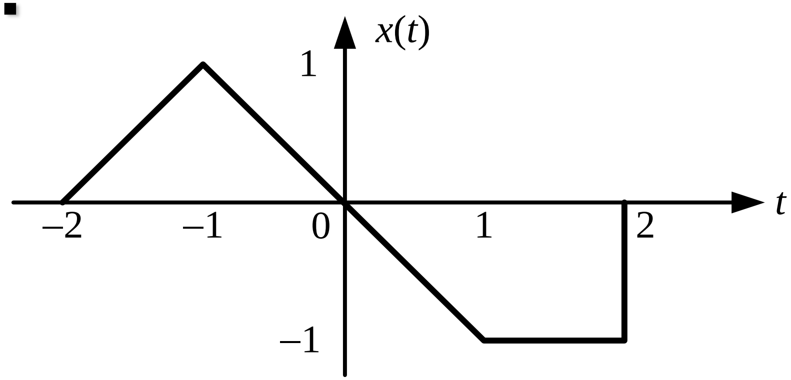


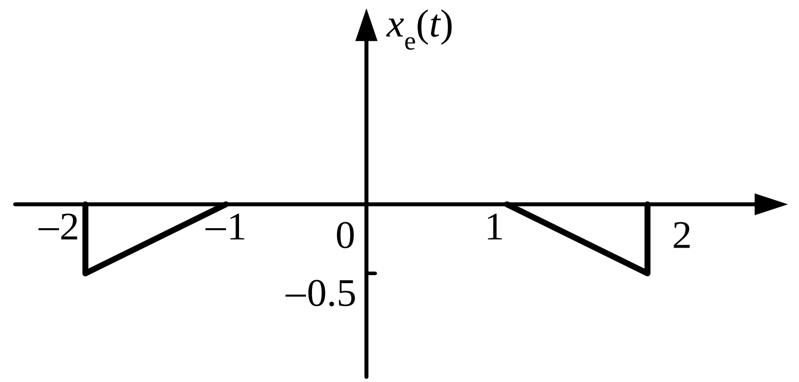
3) 对$x_3(t) = \cos 6\pi t$,以f_s= 8 Hz抽样所得序列

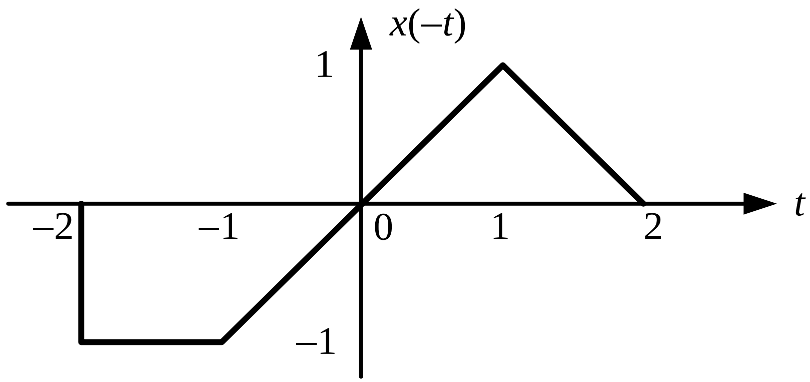


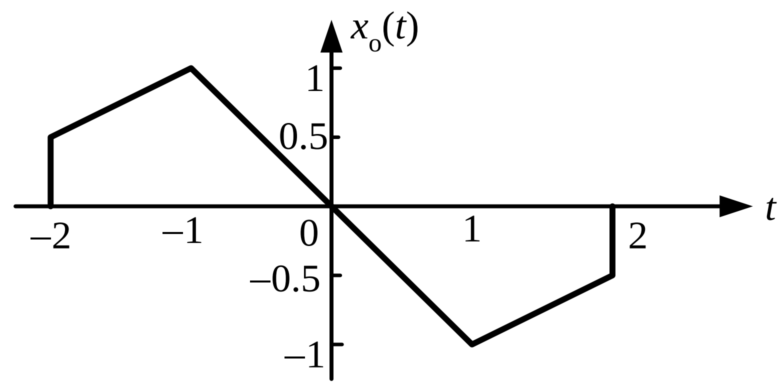
[例] 画出信号$x(t)$ 的奇、偶分量

解：

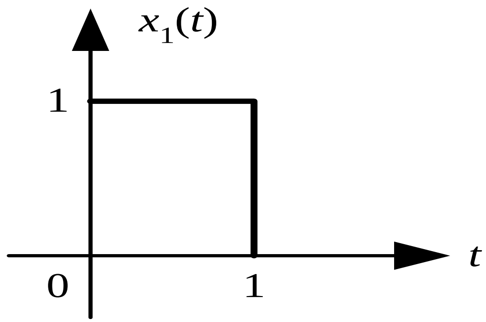


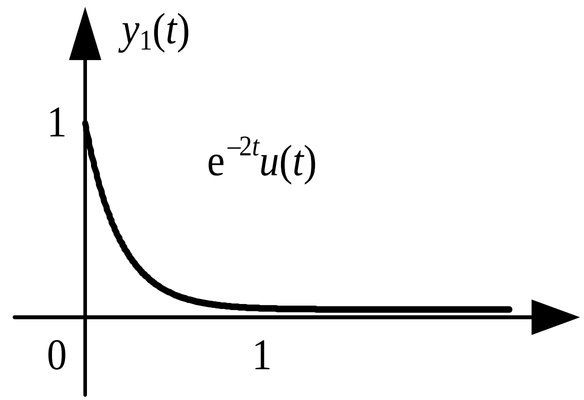


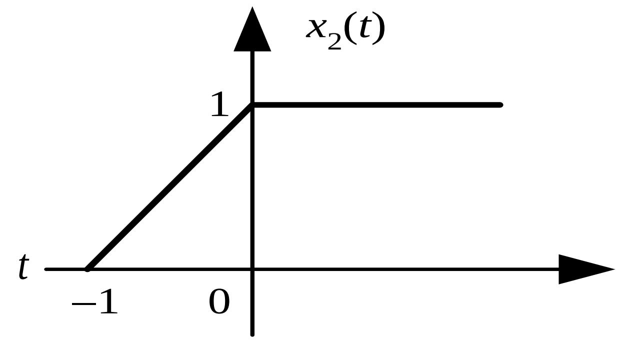




［例］ 已知LTI系统在$x_1(t)$激励下产生的响应为$y_1(t)$，试求系统在$x_2(t)$激励下产生的响应$y_2(t)$。







解： 从$x_1(t)$和$x_2(t)$图形可以看得出，$x_2(t)$与$x_1(t)$存在以下关系

$$x_2(t)=x_1^{(-1)}(t+1)=\int_{-\infty}^{t+1}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

根据线性时不变性质，$y_2(t)$与$y_1(t)$之间也存在同样的关系

$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{t+1}y_1(\tau)\mathrm{d}\tau=0.5(1-\mathrm{e}^{-2(t+1)})u(t+1)$$

[例] 已知某二阶线性时不变连续时间系统的动态方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t),\ t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=e^{-t}u(t)$，求系统的完全响应$y(t)$。

解:

(1) 求齐次方程$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=0$的齐次解$y_h(t)$

特征方程为 $s^2+6s+8=0$

特征根为 $s_1=-2$， $s_2=-4$

齐次解$y_h(t)$ $\boxed{y_h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}}$ $t>0$

[例] 已知某二阶线性时不变连续时间系统的动态方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t),\ t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=e^{-t}u(t)$，求系统的完全响应$y(t)$。

解:

(2) 求非齐次方程$y''(t)+6y'(t)+8y(t) = x(t)$的特解$y_p(t)$

由输入$x(t)$的形式，设方程的特解为

$$y_p(t) = Ce^{-t} \qquad t>0$$

将特解带入原微分方程即可求得常数$C=1/3$。

[例] 已知某二阶线性时不变连续时间系统的动态方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=x(t),\ t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$x(t)=e^{-t}u(t)$，求系统的完全响应$y(t)$。

解:

(3) 求方程的全解

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t}$$

$$y(0)=A+B+\frac{1}{3}=1$$

$$y'(0)=-2A-4B-\frac{1}{3}=2$$

解得 $A=5/2$，$B=-11/6$

$$y(t)=\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{11}{6}e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t},\quad t\geq 0$$

[例] 已知某线性时不变系统的动态方程式为:

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=4x(t),\ t>0$$

系统的初始状态为$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=3$，

求系统的零输入响应$y_{zi}(t)$。

解: 系统的特征方程为 $s^2+5s+6=0$

系统的特征根为 $s_1=-2$，$s_2=-3$

$$y_{zi}(t)=K_1\mathrm{e}^{-2t}+K_2\mathrm{e}^{-3t},t\geq 0$$

$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=K_1+K_2=1$

$y'(0^-)=y'_{zi}(0^-)=-2K_1-3K_2=3$

解得 $K_1=6$，$K_2=-5$

$$y_{zi}(t)=6\mathrm{e}^{-2t}-5\mathrm{e}^{-3t},t\geq 0$$

[例] 已知某线性时不变系统的动态方程式为:

$y''(t)+4y'(t)+4y(t) = 2x'(t)+3x(t),\ t>0$

系统的初始状态为$y(0^-) = 2$，$y'(0^-) = -1$，求系统的零输入响应$y_{zi}(t)$。

解: 系统的特征方程为 $s^2+4s+4=0$

系统的特征根为 $s_1=s_2=-2$ （两相等实根）

$$y_{zi}(t)=K_1e^{-2t}+K_2te^{-2t}$$

$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=K_1=2$

$y'(0^-)=y'_{zi}(0^-)=-2K_1+K_2=-1$

解得 $K_1 = 2,\ K_2= 3$

$$y_{zi}(t)=2e^{-2t}+3te^{-2t},\ t\geq 0$$

[例] 已知某线性时不变系统的动态方程式为：

$y''(t)+2y'(t)+5y(t) = 4x'(t)+3x(t),\ t>0$

系统的初始状态为$y(0^-) = 1$，$y'(0^-) = 3$，求系统的零输入响应$y_{zi}(t)$。

解: 系统的特征方程为 $s^2+2s+5=0$

系统的特征根为 $s_1=-1+2\text{j}$，$s_2=-1-2\text{j}$

$$y_{zi}(t)=\mathrm{e}^{-t}(K_1\cos 2t+K_2\sin 2t)$$

$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=K_1=1$

$y'(0^-)=y'_{zi}(0^-)=-K_1+2K_2=3$

解得 $K_1=1$，$K_2=2$

$$y_{zi}(t)=\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t+2\sin 2t),\quad t\geq 0$$

[例] 已知某LTI系统的动态方程式为：

$$y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

系统的冲激响应 $h(t) = 2\mathrm{e}^{-3t}\, u(t)$, $x(t) = 3u(t)$, 试求系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

解： $y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} 3u(\tau)\cdot 2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases} \int_0^t 3\cdot 2e^{-3(t-\tau)}d\tau & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2\left(1-e^{-3t}\right) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$=2(1-e^{-3t})u(t)$$

例1 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=2x(t),\quad t>0$$

试求系统的冲激响应。

解： 当$x(t)=\delta(t)$时，$y(t)=h(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+3h(t)=2\delta(t)$$

动态方程式的特征根$s=-3$, 且$n>m$, 故$h(t)$的形式为

$$\boxed{h(t)=A\mathrm{e}^{-3t}u(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\mathrm{e}^{-3t}\,u(t)]+3A\mathrm{e}^{-3t}\,u(t)=2\delta(t)$$

解得$A=2$

$$h(t)=2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

例2 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+6y(t)=2x(t)+3x'(t),\quad t>0$$

试求系统的冲激响应。

解： 当$x(t)=\delta(t)$时，$y(t)=h(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+6h(t)=2\delta(t)+3\delta'(t)$$

动态方程式的特征根$s=-6$, 且$n=m$, 故$h(t)$的形式为

$$h(t)=A\mathrm{e}^{-6\mathrm{t}}u(t)+B\delta(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\mathrm{e}^{-6t}\,u(t)+B\delta(t)]+6[A\mathrm{e}^{-6t}\,u(t)+B\delta(t)]=2\delta(t)+3\delta'(t)$$

解得$A=-16$, $B=3$　　$h(t)=3\delta(t)-16\mathrm{e}^{-6\mathrm{t}}u(t)$

例3 求例1所述系统的单位阶跃响应 $g(t)$。

例1 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=2x(t),\quad t>0$$

解：

例1 系统的冲激响应为

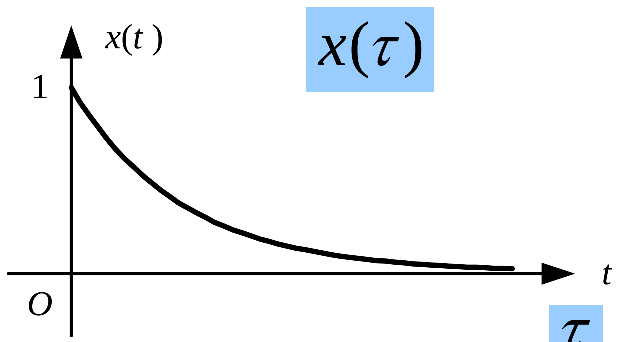
$$h(t) = 2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

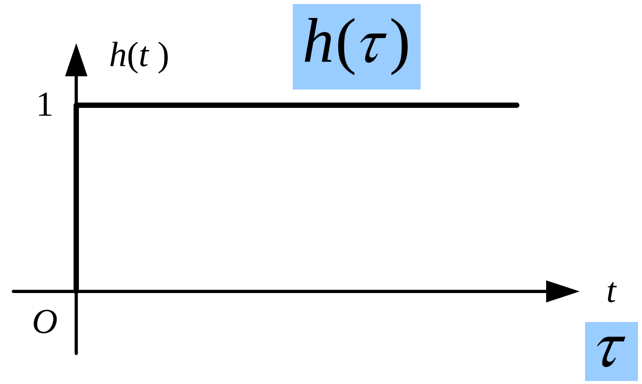
利用冲激响应与阶跃响应的关系，可得

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{t}2\mathrm{e}^{-3\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{2}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

[例] 计算$x(t)*h(t), x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t), h(t)=u(t)$

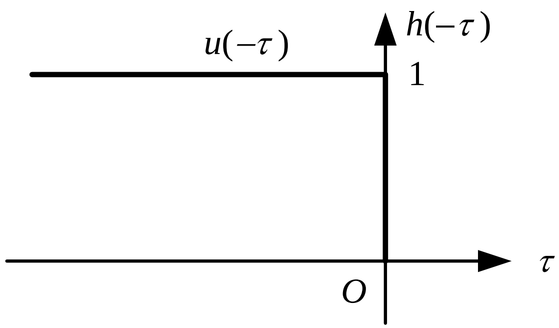
解： 将信号的自变量由t改为τ

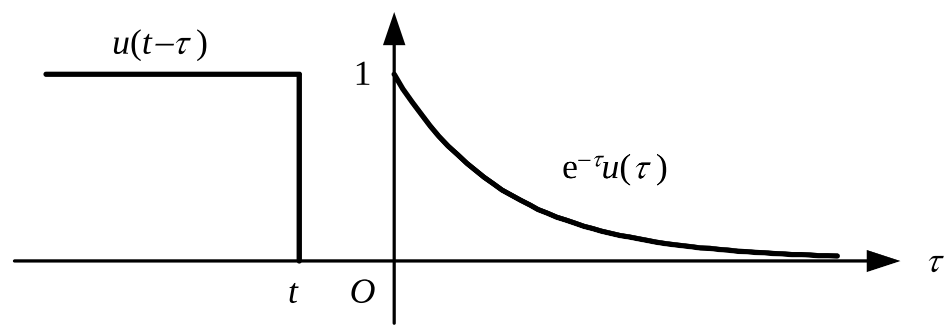




将$h(\tau)$翻转得$h(-\tau)$

将$h(-\tau)$平移t。当$t<0$时， $x(\tau)\,h(t-\tau)=0$

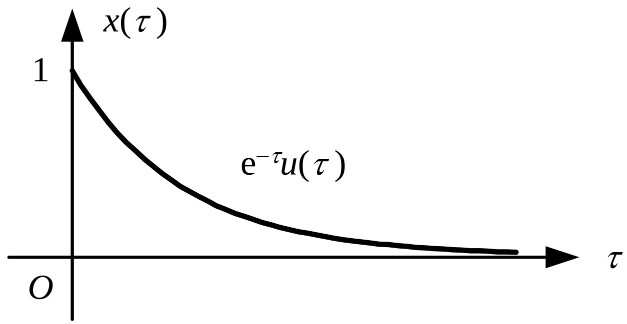


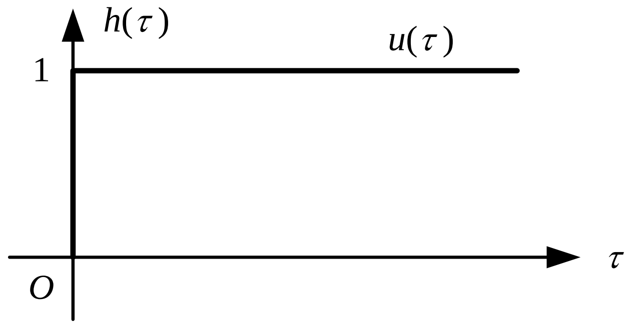


故$x(t)*h(t)=0$

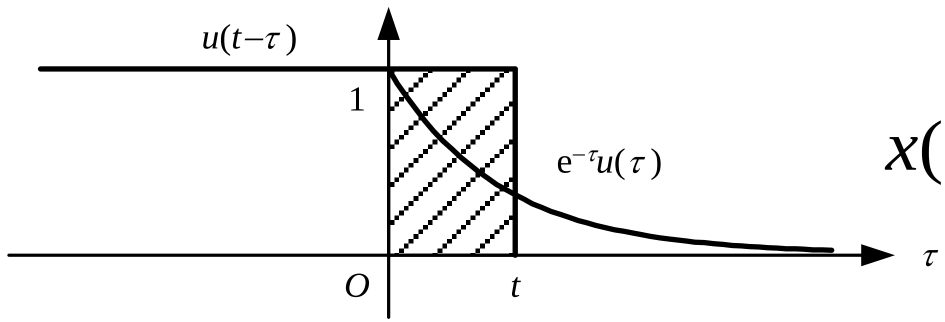
[例] 计算$x(t)*h(t), x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t), h(t)=u(t)$

解：





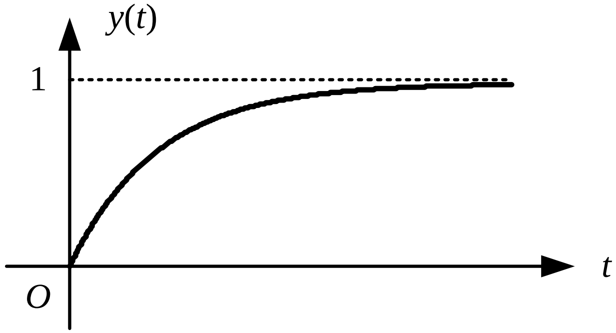
当$t>0$时， $x(\tau)h(t-\tau)=\mathrm{e}^{-\tau}[u(\tau)-u(\tau-t)]$



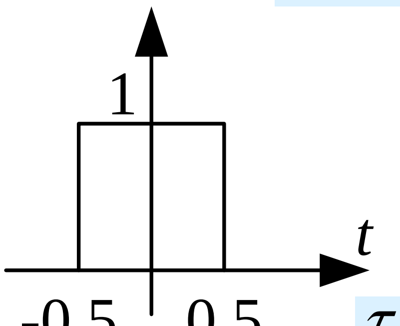
$$x(t)*h(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^{-t}$$

由此可得

$$x(t)*h(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})u(t)$$



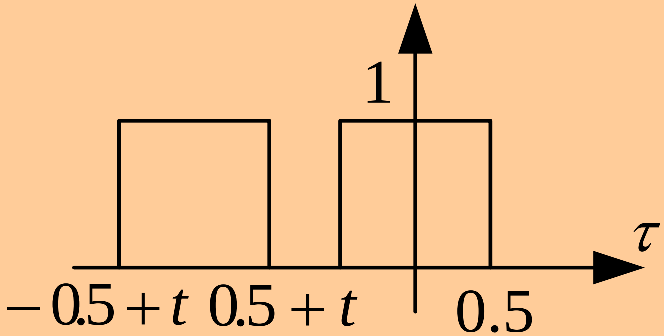
［例］ 计算 $y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。



解：

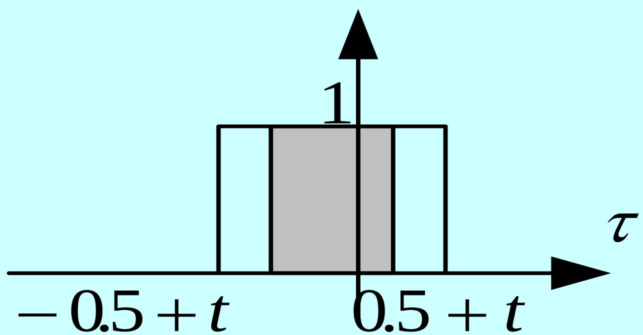
$-\infty < t \le -1$

$p_1(\tau)\, p_1(t - \tau)$



$-1 < t \le 0$

$p_1(\tau)\, p_1(t - \tau)$



a) $-\infty < t \le -1$

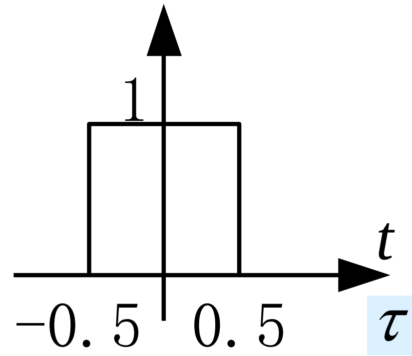
$$y(t) = 0$$

b) $-1 < t \le 0$

$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} \mathrm{d}t = 1 + t$$

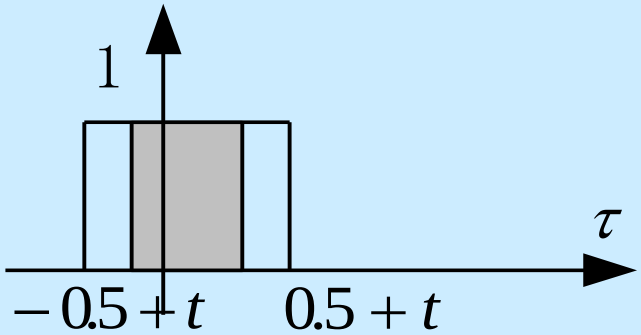
[例] 计算 $y(t)=p_1(t)*p_1(t)$。

$p_1(t)$ $p_1(\tau)$



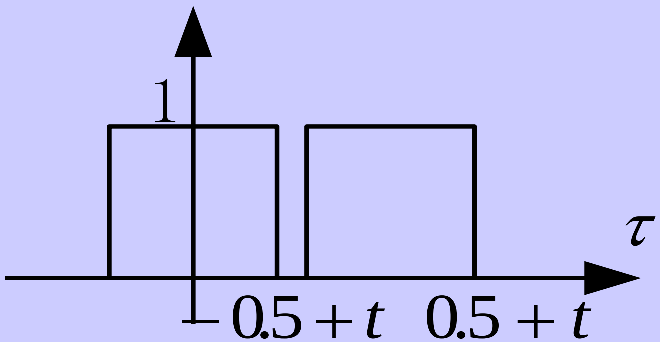
$0<t\le 1$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



$t>1$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



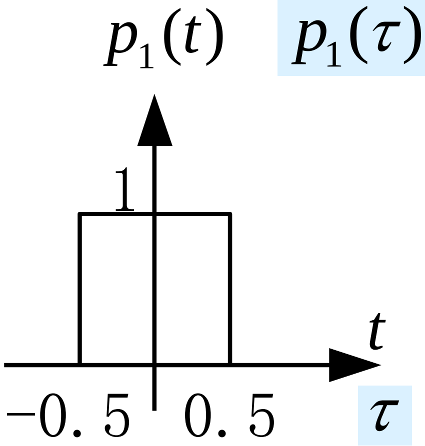
c) $0<t\le 1$

$$y(t)=\int_{-0.5+t}^{0.5}\mathrm{d}t=1-t$$

d) $t>1$

$$y(t)=0$$

[例] 计算 $y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。



a) $-\infty < t \le -1$ $\quad y(t) = 0$

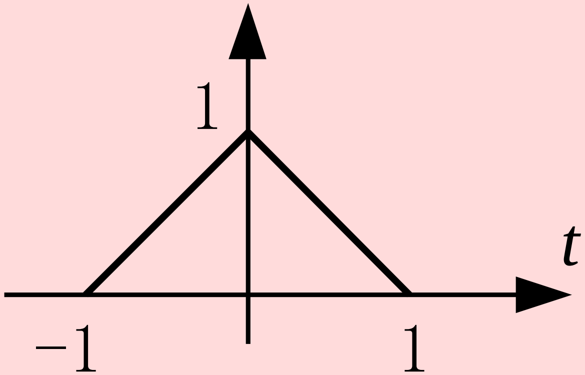
b) $-1 < t \le 0$

$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} \mathrm{d}t = 1 + t$$

c) $0 < t \le 1$

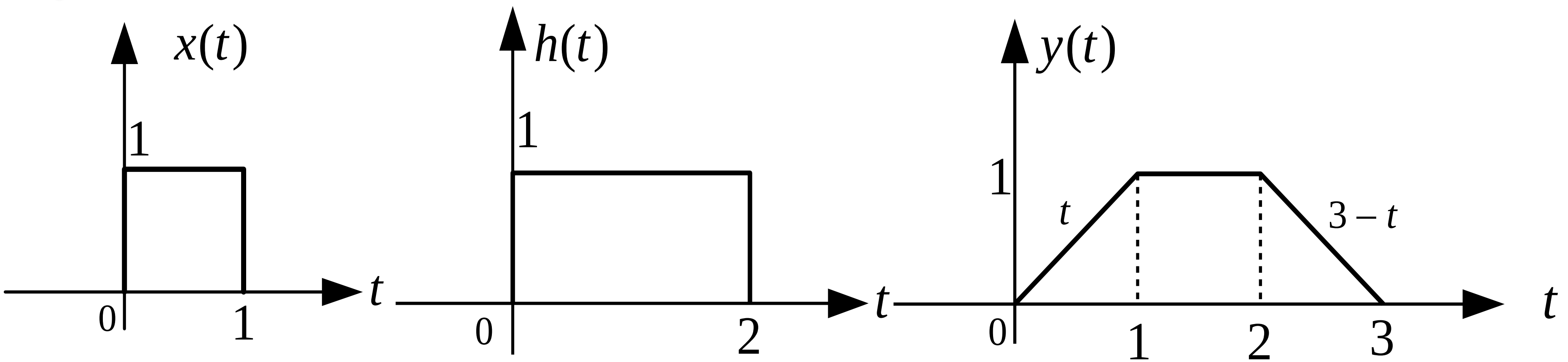
$$y(t) = \int_{-0.5+t}^{0.5} \mathrm{d}t = 1 - t$$

d) $t > 1$ $\quad y(t) = 0$



[例] 利用平移特性及$u(t) * u(t) = r(t)$，计算$y(t) = x(t) * h(t)$。

解:



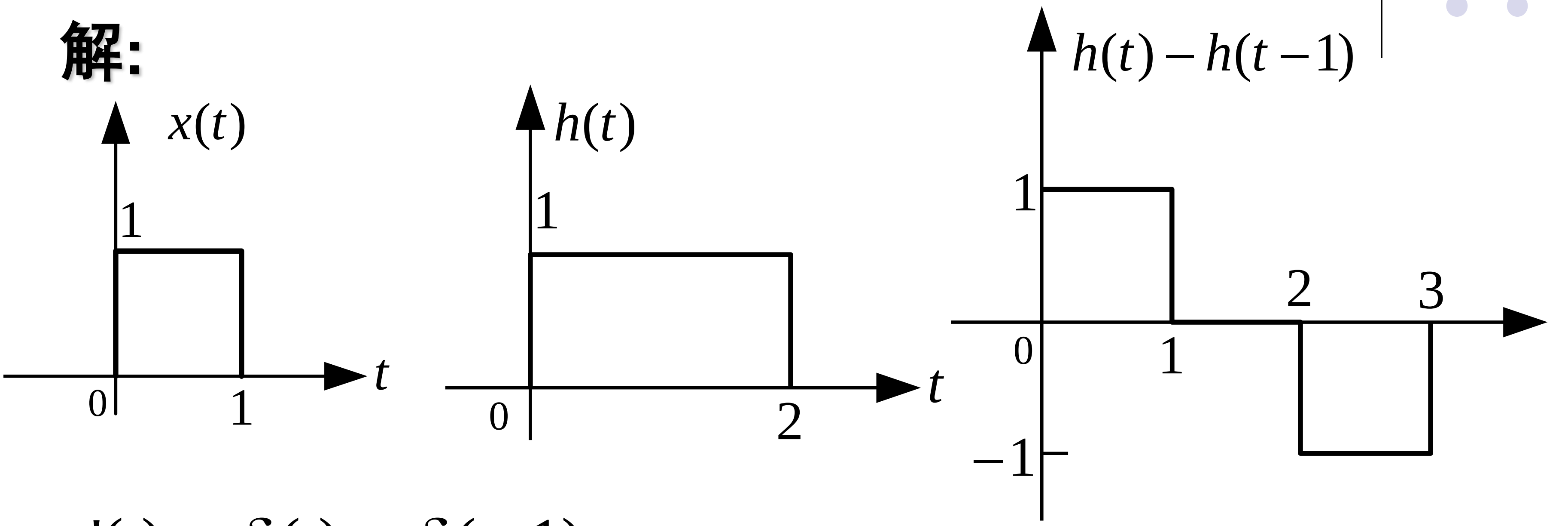
$$y(t) = x(t) * h(t) = [\ u(t) - u(t-1)\ ] * [\ u(t) - u(t-2)\ ]$$

$$= u(t)*u(t) - u(t-1)*u(t) - u(t)*u(t-2) + u(t-1)*u(t-2)$$

$$= r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)$$

[例] 利用等效特性，计算$y(t) = x(t) * h(t)$。

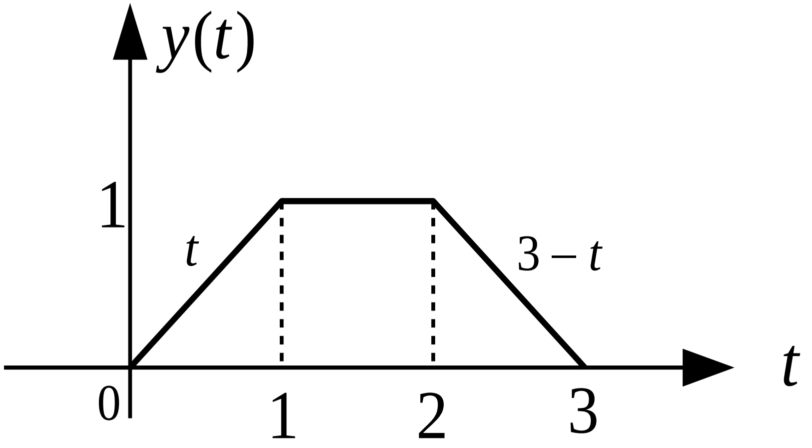
解:



$$x'(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

$$x'(t) * h(t) = h(t) - h(t-1)$$

$$y(t) = \int_0^t [h(t) - h(t-1)]\mathrm{d}t$$



[例] 计算下列卷积积分。

（1） $2e^{-2t}u(t)*3e^{-t}u(t)$

（2） $2e^{-2(t-1)}u(t-1)*3e^{-(t-2)}u(t-2)$

（3） $2e^{-2t}u(t-1)*3e^{-t}u(t-2)$

解: （1） $2e^{-2t}u(t)*3e^{-t}u(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}2e^{-2\tau}u(\tau)\cdot 3e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases}6\int_0^t e^{-2\tau}e^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=6(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

$$e^{\alpha t}u(t)*e^{\beta t}u(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}(e^{\beta t}-e^{\alpha t})u(t) & \alpha\neq\beta\\ te^{\alpha t}u(t) & \alpha=\beta\end{cases}$$

[例] 计算下列卷积积分。

（1） $2\mathrm{e}^{-2t}u(t) * 3\mathrm{e}^{-t}u(t)$

（2） $2\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1) * 3\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)$

（3） $2\mathrm{e}^{-2t}u(t-1) * 3\mathrm{e}^{-t}u(t-2)$

解: （2） 利用卷积的平移性质和题(1)的结论

$$2\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1) * 3\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)$$

$$= 6(\mathrm{e}^{-(t-3)} - \mathrm{e}^{-2(t-3)})u(t-3)$$

（3） $2\mathrm{e}^{-2t}u(t-1) * 3\mathrm{e}^{-t}u(t-2)$

$$= 2\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1) * 3\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)$$

$$= 2\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1) * 3\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2) \cdot \mathrm{e}^{-4}$$

$$= 6\mathrm{e}^{-4}(\mathrm{e}^{-(t-3)} - \mathrm{e}^{-2(t-3)})u(t-3)$$

[例] 已知某二阶线性时不变离散时间系统的差分方程

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2] = x[k]$$

初始条件$y[0] = 0$，$y[1] = -1$，输入信号$x[k] = 2^k u[k]$，求系统的完全响应$y[k]$。

解：

(1) 求齐次方程$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2] = 0$的齐次解$y_h[k]$

特征方程为 $$r^2-5r+6=0$$

特征根为 $$r_1=2, r_2=3$$

齐次解$y_h[k]$ $$y_h[k]=C_1 2^k + C_2 3^k$$

[例]已知某二阶线性时不变离散时间系统的差分方程

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2] = x[k]$$

初始条件$y[0] = 0$，$y[1] = -1$，输入信号 $x[k] = 2^k u[k]$，求系统的完全响应$y[k]$。

解：

(2) 求非齐次方程$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2] = x[k]$的特解$y_p[k]$

由输入$x[k]$的形式，设方程的特解为

$$y_p[k] = Ak2^k, \quad k \geq 0$$

将特解带入原差分方程即可求得常数$A= -2$。

[例] 已知某二阶线性时不变离散时间系统的差分方程

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2] = x[k]$$

初始条件$y[0] = 0$，$y[1] = -1$，输入信号

$x[k] = 2^k u[k]$，求系统的完全响应$y[k]$。

解：

(3) 求方程的全解，即系统的完全响应$y[k]$

$$y[k] = y_{\mathrm{h}}[k] + y_{\mathrm{p}}[k] = C_1 2^k + C_2 3^k - k2^{k+1}, \quad k \geq 0$$

$$y[0] = C_1 + C_2 = 0$$

$$y[1] = 2C_1 + 3C_2 - 2 = -1$$

解得 $C_1 = -1$，$C_2 = 1$

$$y[k] = -2^k + 3^k - k2^{k+1}, \quad k \geq 0$$

［例］已知某线性时不变系统的动态方程式为:

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

系统的初始状态为$y[-1]=0$， $y[-2]=1/2$，求系统的零输入响应$y_{zi}[k]$ 。

解： 系统的特征方程为 $r^2+3r+2=0$

系统的特征根为 $r_1=-1, r_2=-2$

$$y_{zi}[k]=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k$$

$$y[-1]=-C_1-\frac{1}{2}C_2=0$$

$$y[-2]=C_1+\frac{1}{4}C_2=\frac{1}{2}$$

解得 $C_1=1$， $C_2=-2$

$$y_{zi}[k]=(-1)^k-2(-2)^k \quad k\geq 0$$

[例] 已知某线性时不变系统的动态方程式为:

$$y[k]+4y[k-1]+4y[k-2]=x[k]$$

系统的初始状态为$y[-1]=0$， $y[-2]=-1$，求系统的零输入响应$y_{zi}[k]$ 。

解： 系统的特征方程为 $r^2+4r+4=0$

系统的特征根为 $r_1=r_2=-2$ （两相等实根）

$$y_{zi}[k]=C_1k(-2)^k+C_2(-2)^k$$

$$y[-1]=\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{2}=0$$

$$y[-2]=-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{4}=-1$$

解得 $C_1=4$, $C_2=4$

$$y_{zi}[k]=4k(-2)^k+4(-2)^k,\quad k\ge 0$$

［例］已知某线性时不变系统的动态方程式为:

$$y[k]-0.5y[k-1]+y[k-2]-0.5y[k-3]=x[k]$$

系统的初始状态为$y[-1]=2$，$y[-2]=-1$，$y[-3]=8$，

求系统的零输入响应$y_{zi}[k]$。

解： 系统的特征方程为 $r^3-0.5r^2+r-0.5=0$

系统的特征根为 $r_1=0.5,\ r_{2,3}=\pm j=e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

$$y_{zi}[k]=C_1(\frac{1}{2})^k+C_2\sin\frac{\pi}{2}k+C_3\cos\frac{\pi}{2}k$$

$$y[-1]=2C_1-C_2=2$$

$$y[-2]=4C_1-C_3=-1$$

$$y[-3]=8C_1+C_2=8$$

解得 $C_1=1$，$C_2=0$，$C_3=5$

$$y_{zi}[k]=(\frac{1}{2})^k+5\cos\frac{\pi}{2}k,\quad k\geq 0$$

[例] 若描述某离散系统的差分方程为:

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

已知 $x[k]=3(\frac{1}{2})^k u[k]$, $h[k]=[-(-1)^k+2(-2)^k]u[k]$

求系统的零状态响应$y_{zs}[k]$。

解:

$$y_{zs}[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3(\frac{1}{2})^n u[n]\cdot[-(-1)^{k-n}+2(-2)^{k-n}]u[k-n]$$

$$=\begin{cases}-3(-1)^k\sum_{n=0}^{k}(-\frac{1}{2})^n+6(-2)^k\sum_{n=0}^{k}(-\frac{1}{4})^n, & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

$$=[-2(-1)^k+\frac{24}{5}(-2)^k+\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^k]u[k]$$

例1 描述某离散因果LTI系统的差分方程为

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

求系统的单位脉冲响应$h[k]$。

解： $h[k]$满足方程 $h[k]+3h[k-1]+2h[k-2]=\delta[k]$

1） 求等效初始条件

对于因果系统有$h[-1] = h[-2] = 0$，代入上面方程可推出

$$h[0]=\delta[0]-3h[-1]-2h[-2]=1$$

$$h[1]=\delta[1]-3h[0]-2h[-1]=-3$$

可以选择$h[0]$和$h[1]$ 或$h[-1]$和$h[0]$作为初始条件

✓ 注意：选择初始条件的基本原则是必须将$\delta[k]$的作用体现在初始条件中。

例1 描述某离散因果LTI系统的差分方程为

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

求系统的单位脉冲响应$h[k]$。

解： $h[k]$满足方程 $h[k]+3h[k-1]+2h[k-2]=\delta[k]$

2）求差分方程的齐次解

特征方程为 $r^2+3r+2=0$

特征根为 $r_1=-1, r_2=-2$

齐次解的表达式为 $h[k]=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k, k\geq 0$

代入初始条件，有

$$h[-1]=-C_1-\frac{1}{2}C_2=0$$

$$h[0]=C_1+C_2=1$$

解得 $C_1=-1$，$C_2=2$

$$h[k]=[-(-1)^k+2(-2)^k]u[k]$$

例2 求例1所述系统的单位阶跃响应 $g[k]$。

例1 若描述某离散时间LTI系统的差分方程为

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

解： 例1 所述系统的单位脉冲响应为

$$h[k] = [\,-(-1)^k + 2(-2)^k\,]\,u[k]$$

利用$h[k]$与$g[k]$ 的关系，可得

$$g[k]=-\sum_{n=0}^{k}(-1)^n+2\sum_{n=0}^{k}(-2)^n$$

$$=[-\frac{1}{2}(-1)^k+\frac{4}{3}(-2)^k+\frac{1}{6}]u[k]$$

例3 计算 $x[k]=\{1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$ 与 $h[k]=\{1, \overset{\downarrow}{4}, 2, 3\}$ 的卷积和。

解:

		$x[-2]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$
		1	2	0	3	2
$h[-1]$	1	1	2	0	3	2
$h[0]$	4	4	8	0	12	8
$h[1]$	2	2	4	0	6	4
$h[2]$	3	3	6	0	9	6

利用卷积和的起点坐标等于待卷积两序列起点之和，确定卷积和的原点。

$$y[k]=\{1, 6, 10, \overset{\downarrow}{10}, 20, 14, 13, 6\}$$

例4 计算$x[k]=\alpha^k u[k]$与$h[k]=\beta^k u[k]$的卷积和。

解:

$$\alpha^k u[k] * \beta^k u[k]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n] \cdot \beta^{k-n} u[k-n]$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{k} \alpha^n \cdot \beta^{k-n} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}}{\beta - \alpha} u[k] & \alpha \neq \beta \\ (k+1)a^k u[k] & \alpha = \beta \end{cases}$$

$$e^{\alpha t} u(t) * e^{\beta t} u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} (e^{\beta t} - e^{\alpha t}) u(t) & \alpha \neq \beta \\ te^{at} u(t) & \alpha = \beta \end{cases}$$

例5 计算 $x[k]=\{1,0,\overset{\downarrow}{2},4\}$ 与 $h[k]=\{1,\overset{\downarrow}{4},5,3\}$ 的卷积和。

解:

$$x[k]=\delta[k+2]+2\delta[k]+4\delta[k-1]$$

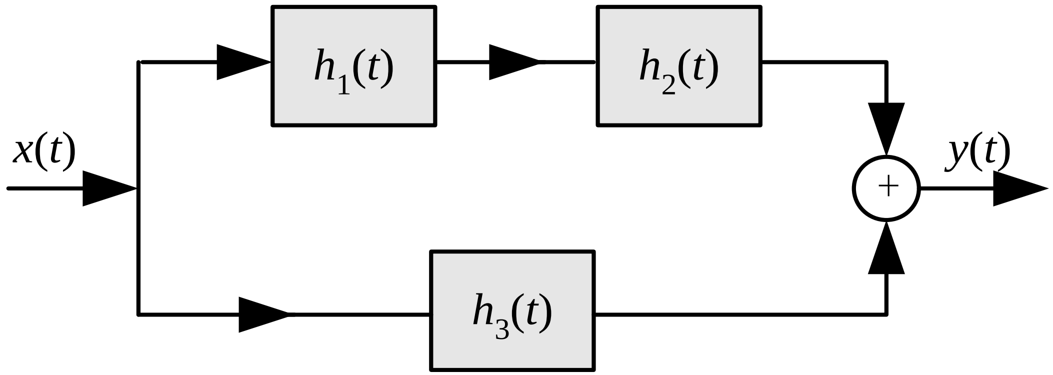
利用位移特性

$$x[k]*h[k]=\{\delta[k+2]+2\delta[k]+4\delta[k-1]\}*h[k]$$

$$=h[k+2]+2h[k]+4h[k-1]$$

$$y[k]=x[k]*h[k]=\{1,4,7,\overset{\downarrow}{15},26,26,12\}$$

例1 求图示系统的冲激响应，其中$h_1(t) = e^{-3t}u(t)$，$h_2(t) = \delta(t-1)$，$h_3(t) = u(t)$。



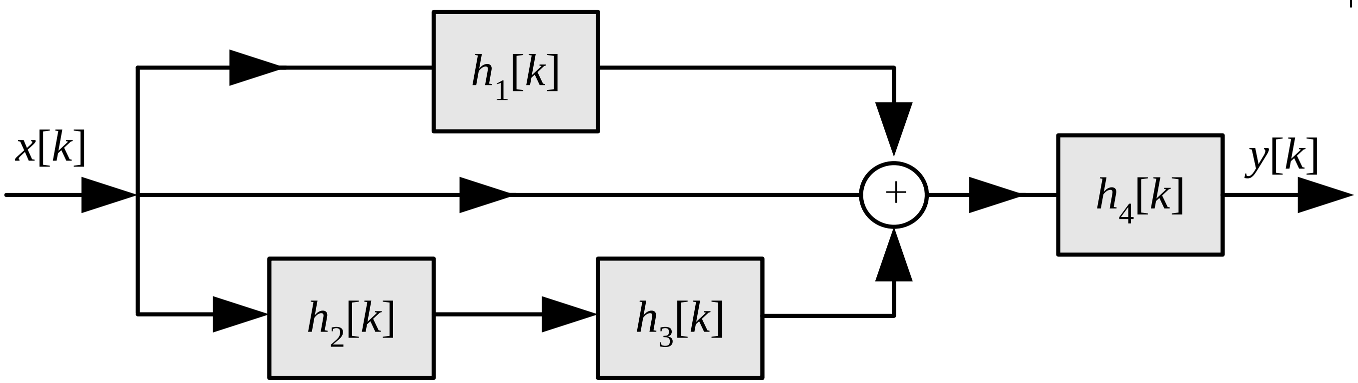
解:

子系统$h_1(t)$与$h_2(t)$级联，$h_3(t)$支路与$h_1(t)\ h_2(t)$级联支路并联。

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) + h_3(t)$$

$$= \delta(t-1) * e^{-3t}u(t) + u(t) = e^{-3(t-1)}u(t-1) + u(t)$$

例2 求图示系统的单位脉冲响应，其中$h_1[k]=2^k u[k]$，$h_2[k]=\delta[k-1]$，$h_3[k]=3^k u[k]$，$h_4[k]=u[k]$。



解：

子系统$h_2[k]$与$h_3[k]$ 级联，$h_1[k]$支路、全通支路与$h_2[k]$、$h_3[k]$级联支路并联，再与$h_4[k]$级联。

全通支路满足 $y[k]=x[k]*h[k]=x[k]$

全通离散系统的单位脉冲响应为单位脉冲序列$\delta[k]$

$$h[k]=\{h_1[k]+\delta[k]+h_2[k]*h_3[k]\}*h_4[k]$$

$$=2(2)^k u[k]+[0.5(3)^k-0.5]u[k-1]$$

例5 已知一因果LTI连续系统的冲激响应为

$h(t) = \mathrm{e}^{at}u(t)$，判断该系统是否稳定。

解： 由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{a\tau} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{a} \mathrm{e}^{a\tau} \Big|_{0}^{\infty}$$

✓ 当 $a<0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{a}$$ 系统稳定

✓ 当 $a \geq 0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \mathrm{d}\tau \to \infty$$ 系统不稳定

综合例题

1. 已知某连续因果LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=x(t) \qquad t>0$$

$$x(t)=u(t) \qquad y(0^-)=1 \qquad y'(0^-)=2$$

求:(1)零输入响应$y_{zi}(t)$ (2)冲激响应$h(t)$、零状态响应$y_{zs}(t)$

(3)完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、

强迫响应 (4)判断该系统是否稳定。

解: **(1)** 系统的特征方程为 $s^2+7s+12=0$

特征根为 $s_1=-3, \quad s_2=-4$（两不等实根）

零输入响应为 $y_{zi}(t)=Ae^{-3t}+Be^{-4t} \qquad t\ge 0^-$

代入初始状态$y(0^-)$, $y'(0^-)$

$$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=A+B=1$$

$$y'(0^-)=y_{zi}'(0^-)=-3A-4B=2$$

解得 $A=6$

$B=-5$

系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=6e^{-3t}-5e^{-4t}, t\ge 0$

综合例题

1. 已知某连续因果LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=x(t) \qquad t>0$$

$$x(t)=u(t) \qquad y(0^-)=1 \qquad y'(0^-)=2$$

求:(1)零输入响应$y_{zi}(t)$ (2)冲激响应$h(t)$、零状态响应$y_{zs}(t)$

(3)完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、

强迫响应 (4)判断该系统是否稳定。

解: (2) $$h(t)=C\mathrm{e}^{-3t}u(t)+D\mathrm{e}^{-4t}u(t)$$

利用冲激平衡法可求出 $C=1 \qquad D=-1$

系统的零状态响应

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=u(t)*(\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t})u(t)$$

$$=(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t})u(t)$$

综合例题

1. 已知某连续因果LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=x(t) \qquad t>0$$

$$x(t)=u(t) \qquad y(0^-)=1 \qquad y'(0^-)=2$$

求:(1)零输入响应$y_{zi}(t)$ (2)冲激响应$h(t)$、零状态响应$y_{zs}(t)$

(3)完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、强迫响应 (4)判断该系统是否稳定。

解: (3)

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{1}{12}+\frac{17}{3}e^{-3t}-\frac{19}{4}e^{-4t},t>0$$

系统的固有响应为 $y_h(t)=\frac{17}{3}e^{-3t}-\frac{19}{4}e^{-4t},t>0$

强迫响应为 $y_p(t)=\frac{1}{12},t>0$

系统的稳态响应为 $y_s(t)=\frac{1}{12},t>0$

暂态响应为 $y_t(t)=\frac{17}{3}e^{-3t}-\frac{19}{4}e^{-4t},t>0$

综合例题

1. 已知某连续因果LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=x(t) \qquad t>0$$

$$x(t)=u(t) \quad y(0^-)=1 \quad y'(0^-)=2$$

求: (1) 零输入响应$y_{zi}(t)$ (2) 冲激响应$h(t)$、零状态响应$y_{zs}(t)$

(3) 完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、

强迫响应 (4) 判断该系统是否稳定。

解: (4)

$$h(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)-\mathrm{e}^{-4t}u(t)$$

该系统为稳定系统

综合例题

2. 已知某离散因果LTI系统的差分方程为

$$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

$$x[k]=3^k u[k] \quad y[-1]=3 \quad y[-2]=1$$

求:（1）零输入响应$y_{zi}[k]$ （2）单位脉冲响应$h[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$ （3）完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、强迫响应 （4）判断该系统是否稳定。

解： **（1）** 系统的特征方程为 $r^2-3r+2=0$

特征根为 $r_1=1, \quad r_2=2$

零输入响应为 $y_{zi}[k]=A+B2^k \quad k\geq 0$

代入初始状态$y[-1]$, $y[-2]$

$$y[-1]=A+B/2=3 \qquad \text{解得} \quad A=-1$$

$$y[-2]=A+B/4=1 \qquad B=8$$

系统的零输入响应为 $y_{zi}[k]=-1+8\cdot 2^k \quad ,k\geq 0$

综合例题

2. 已知某离散因果LTI系统的差分方程为

$$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

$$x[k]=3^k u[k] \quad y[-1]=3 \quad y[-2]=1$$

求:(1)零输入响应$y_{zi}[k]$ (2)单位脉冲响应$h[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$ (3)完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、强迫响应 (4)判断该系统是否稳定。

解: (2)

$$h[k]=Cu[k]+D2^k u[k]$$

$$h[0]=C+D=1$$

$$h[1]=C+2D=3$$

解得 $C=-1 \quad D=2$

$$h[k]=-u[k]+2\cdot 2^k u[k]$$

综合例题

2. 已知某离散因果LTI系统的差分方程为

$$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

$$x[k]=3^k u[k] \quad y[-1]=3 \quad y[-2]=1$$

求: (1) 零输入响应$y_{zi}[k]$ (2) 单位脉冲响应$h[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$ (3) 完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、强迫响应 (4) 判断该系统是否稳定。

解： (2) 系统的零状态响应

$$y_{zs}[k]=x[k]*h[k]$$

$$=3^k u[k]*(2\cdot 2^k-1)u[k]$$

$$=(\frac{9}{2}3^k-4\cdot 2^k+\frac{1}{2})u[k]$$

综合例题

2. 已知某离散因果LTI系统的差分方程为

$$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

$$x[k]=3^k u[k] \quad y[-1]=3 \quad y[-2]=1$$

求: (1) 零输入响应$y_{zi}[k]$ (2) 单位脉冲响应$h[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$ (3) 完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、强迫响应 (4) 判断该系统是否稳定。

解: (3) $y[k]=y_{zi}[k]+y_{zs}[k]=\frac{9}{2}\cdot 3^k+4\cdot 2^k-\frac{1}{2}, k\geq 0$

系统的固有响应为$y_h[k]=4\cdot 2^k-1/2, \quad k\geq 0$

强迫响应为 $y_p[k]=\frac{9}{2}\cdot 3^k, \quad k\geq 0$

系统的稳态响应为 $y_s[k]=\frac{9}{2}\cdot 3^k+4\cdot 2^k-\frac{1}{2}, k\geq 0$

暂态响应为 $y_t[k]=0, k\geq 0$

综合例题

2. 已知某离散因果LTI系统的差分方程为

$$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]$$

$$x[k]=3^k u[k] \quad y[-1]=3 \quad y[-2]=1$$

求: (1) 零输入响应$y_{zi}[k]$ (2) 单位脉冲响应$h[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$ (3) 完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、强迫响应 (4) 判断该系统是否稳定。

解： (4)

$$h[k]=(2\cdot 2^k-1)u[k]$$

该系统为不稳定系统

例3 $\tilde{x}(t)=3\cos(\omega_0 t+4)$ 求 C_n。

解： $\tilde{x}(t)=3\cos(\omega_0 t+4)$

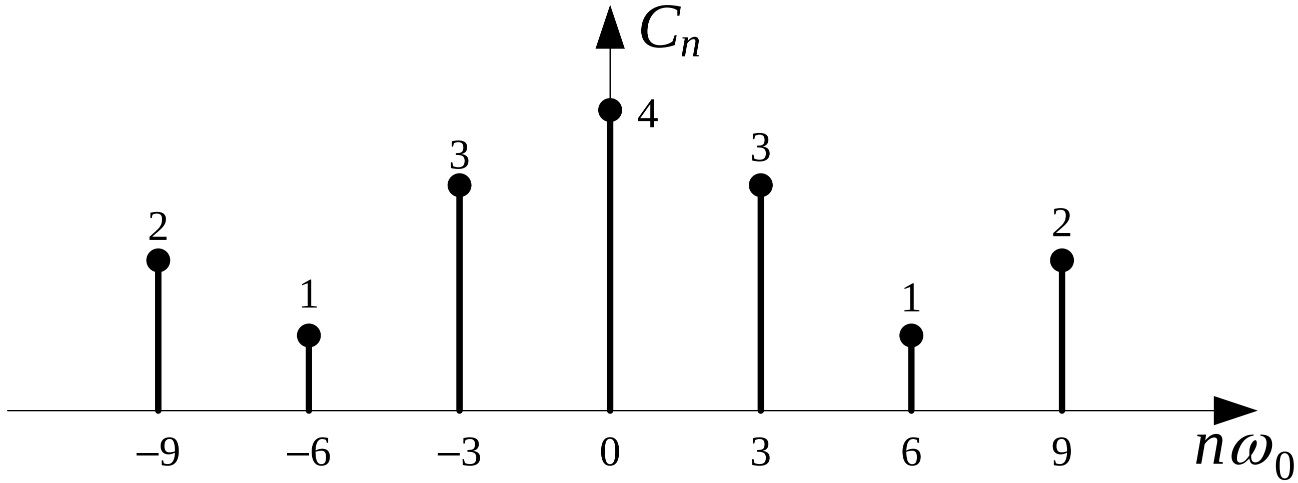
$$=3\times\frac{1}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+4)}+e^{-j(\omega_0 t+4)}\right]$$

$$=\frac{3}{2}e^{j4}e^{j\omega_0 t}+\frac{3}{2}e^{-j4}e^{-j\omega_0 t}$$

根据指数形式傅里叶级数的定义可得

$$C_1=\frac{3}{2}e^{j4},\quad C_{-1}=\frac{3}{2}e^{-j4}\qquad C_n=0,\quad n\neq\pm1$$

例2 已知连续周期信号的频谱如图，试写出信号的Fourier级数表示式 $(\omega_0 = 3)$。



解： 由图可知 $C_0 = 4 \quad C_{\pm 1} = 3 \quad C_{\pm 2} = 1 \quad C_{\pm 3} = 2$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$= 4 + 3(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + (e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}) + 2(e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t})$$

$$= 4 + 6\cos(\omega_0 t) + 2\cos(2\omega_0 t) + 4\cos(3\omega_0 t)$$

例2 $\tilde{x}(t)=2e^{-j2\omega_0 t}+3e^{-j\omega_0 t}+4+3e^{j\omega_0 t}+2e^{j2\omega_0 t}$

求其功率。

解： **1）** $$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left|\tilde{x}(t)\right|^2\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2$$

$$C_0=4\qquad C_{\pm1}=3\qquad C_{\pm2}=2$$

$$P=2^2+3^2+4^2+3^2+2^2=42$$

2） $$\tilde{x}(t)=4+6\cos\omega_0 t+4\cos 2\omega_0 t$$

$$P=4^2+\frac{1}{2}\times6^2+\frac{1}{2}\times4^2=42$$

例3 $\tilde{x}(t) = 2e^{-j2\omega_0 t} + 3e^{-j\omega_0 t} + 4 + 3e^{j\omega_0 t} + 2e^{j2\omega_0 t}$

求其功率。

解： 1）$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|\tilde{x}(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|C_n\right|^2$$

$$C_0 = 4 \qquad C_{\pm 1} = 3 \qquad C_{\pm 2} = 2$$

$$P = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 = 42$$

2）$$\tilde{x}(t) = 4 + 6\cos\omega_0 t + 4\cos 2\omega_0 t$$

$$P = 4^2 + \frac{1}{2}\times 6^2 + \frac{1}{2}\times 4^2 = 42$$

例1 已知实信号$x(t)$的最高频率为f_m (Hz)，试计算对各信号$x(2t)$， $x(t)*x(2t)$，$x(t)\cdot x(2t)$抽样不混叠的最小抽样频率。

解:

根据信号时域与频域的对应关系及抽样定理得:

对信号$x(2t)$抽样时，最小抽样频率为 $4f_m$(Hz);

对$x(t)*x(2t)$抽样时，最小抽样频率为 $2f_m$(Hz);

对$x(t)\cdot x(2t)$抽样时，最小抽样频率为 $6f_m$(Hz)。

例1 已知描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t),$$

求系统的频率响应$H(j\omega)$。

解： 利用Fourier变换的微分特性，微分方程的频域表示式为

$$(j\omega)^2 Y_{zs}(j\omega) + 3j\omega Y_{zs}(j\omega) + 2Y_{zs}(j\omega) = X(j\omega)$$

由定义可求得

$$H(j\omega) = \frac{Y_{zs}(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

例2 已知某LTI系统的冲激响应为$h(t) = (e^{-t}-e^{-2t})u(t)$，

求系统的频率响应$H(j\omega)$。

解： 利用$H(j\omega)$与$h(t)$的关系

$$H(j\omega) = F[h(t)] = \frac{1}{j\omega+1} - \frac{1}{j\omega+2}$$

$$= \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

例4 已知描述某LTI系统的微分方程为

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3x'(t)+4x(t)$，系统的输入激励 $x(t) = e^{-3t}u(t)$，求系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

解： 由于输入激励$x(t)$的频谱函数为 $X(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$

系统的频率响应由微分方程可得

$$H(j\omega)=\frac{3(j\omega)+4}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}=\frac{3(j\omega)+4}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

故系统的零状态响应$y_{zs}(t)$的频谱函数$Y_{zs}(j\omega)$为

$$Y_{zs}(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{3(j\omega)+4}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

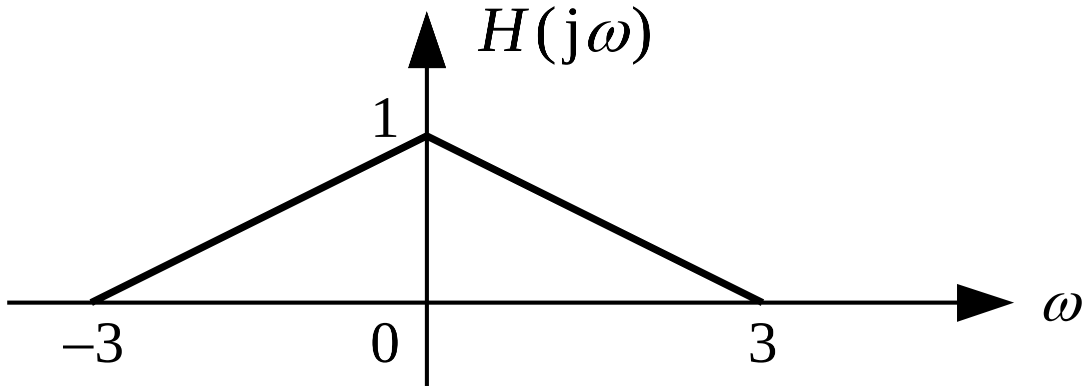
$$y_{zs}(t)=F^{-1}[Y_{zs}(j\omega)]=\left(\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{5}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

例5 已知一连续时间系统的频率响应如图所示，

输入信号$x(t)=5+3\cos 2t+\cos 4t, -\infty<t<\infty$

试求该系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

解：



利用余弦信号作用在系统上的零状态响应的特点，即

$$T\{\cos(\omega_0 t+\theta)\}=|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)+\theta]$$

可以求出信号$x(t)$作用在系统上的稳态响应为

$$T\{x(t)\}=5H(j0)+3H(j2)\cos 2t+H(j4)\cos 4t$$

$$=5+\cos 2t \qquad -\infty<t<\infty$$

例7 已知一LTI系统的频率响应为 $H(j\omega)=\dfrac{1-j\omega}{1+j\omega}$

（1） 求系统的幅度响应$|H(j\omega)|$和相位响应$\varphi(\omega)$，并判断系统是否为无失真传输系统。

（2）当输入为$x(t)=\sin t+\sin 3t$ $(-\infty<t<\infty)$ 时，求系统的零状态响应。

解：（1） 因为 $$H(j\omega)=e^{-j2\arctan(\omega)}$$

所以系统的幅度响应和相位响应分别为

$$|H(j\omega)|=1 \qquad \varphi(\omega)=-2\arctan(\omega)$$

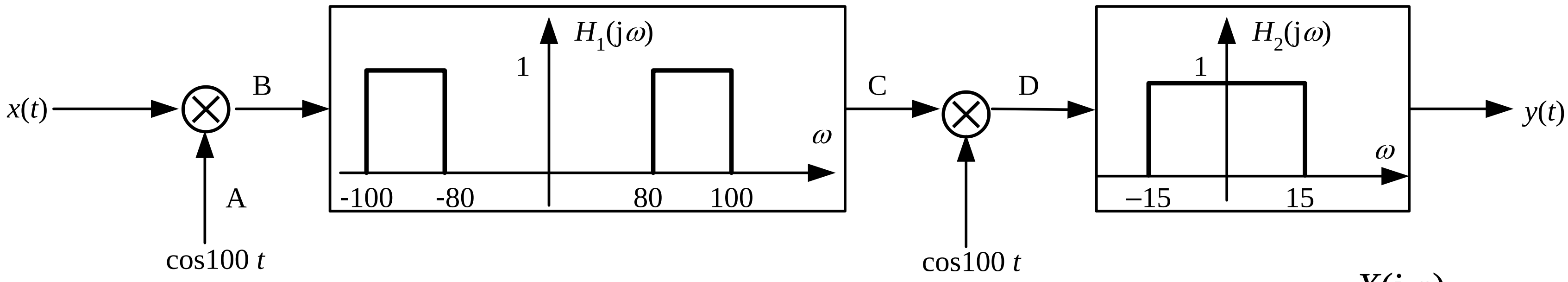
系统的幅度响应$|H(j\omega)|$为常数，但相位响应$\varphi(\omega)$

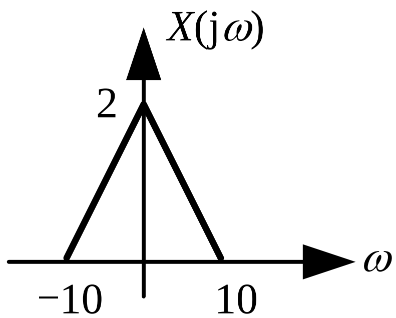
不是ω的线性函数，所以系统不是无失真传输系统。

（2）$$y_{zs}(t)=|H(j1)|\sin[t+\varphi(1)]+|H(j3)|\sin[3t+\varphi(3)]$$

$$=\sin(t-\pi/2)+\sin(3t-0.7952\pi)$$

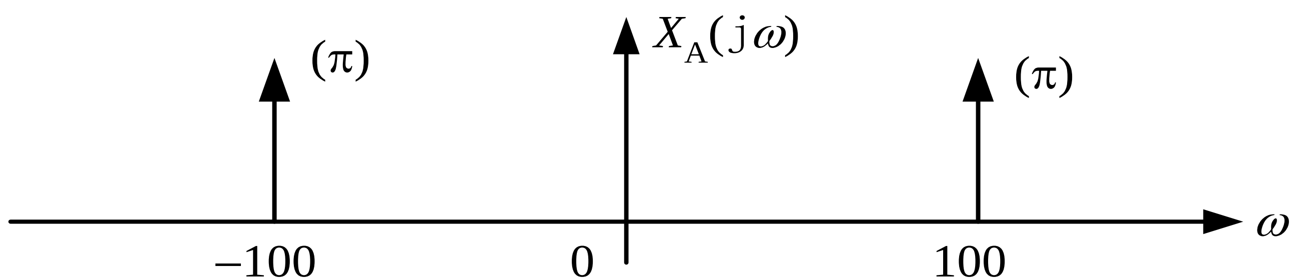
例9 如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系。



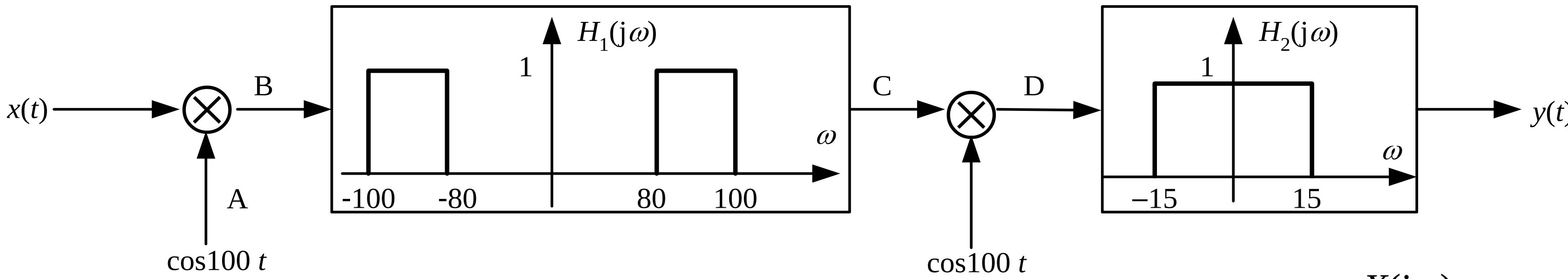


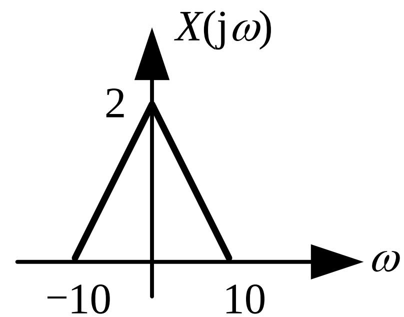
解： $X_A(j\omega)=F[\cos(100t)]$

$$=\pi[\delta(\omega-100)+\delta(\omega+100)]$$



例9　如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系。

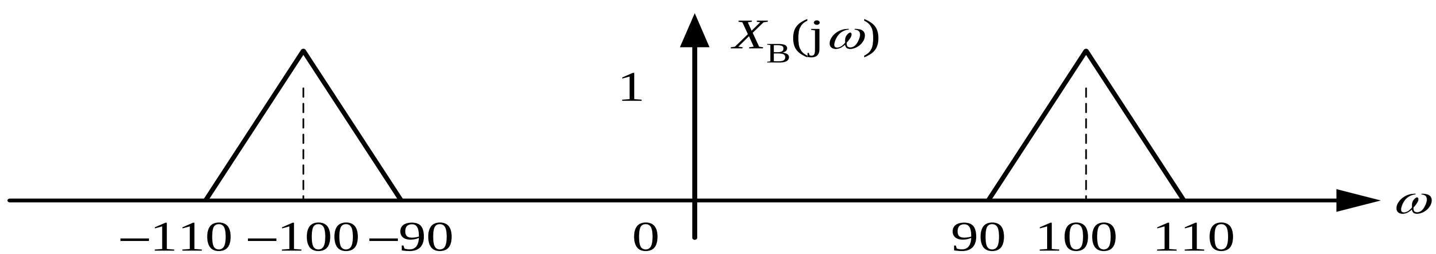




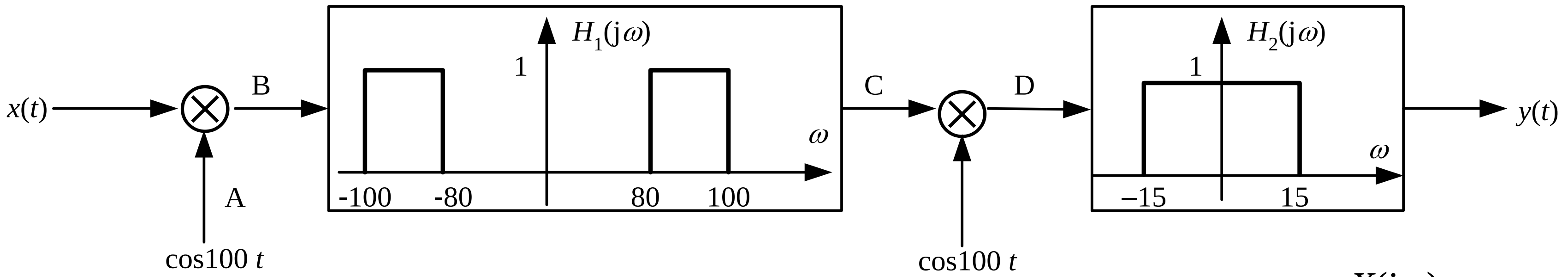
解：

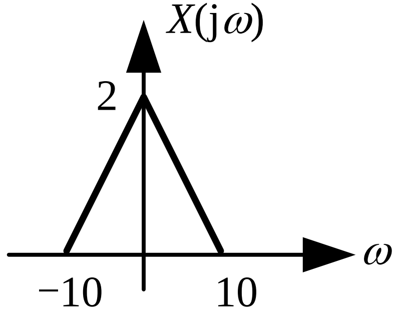
$$X_B(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*X_A(j\omega)$$

$$=\frac{1}{2}[X(\omega-100)+X(\omega+100)]$$



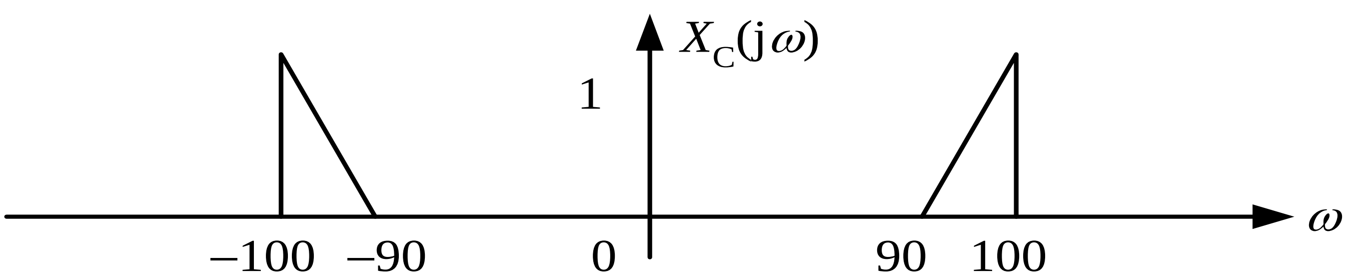
例9　如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系。



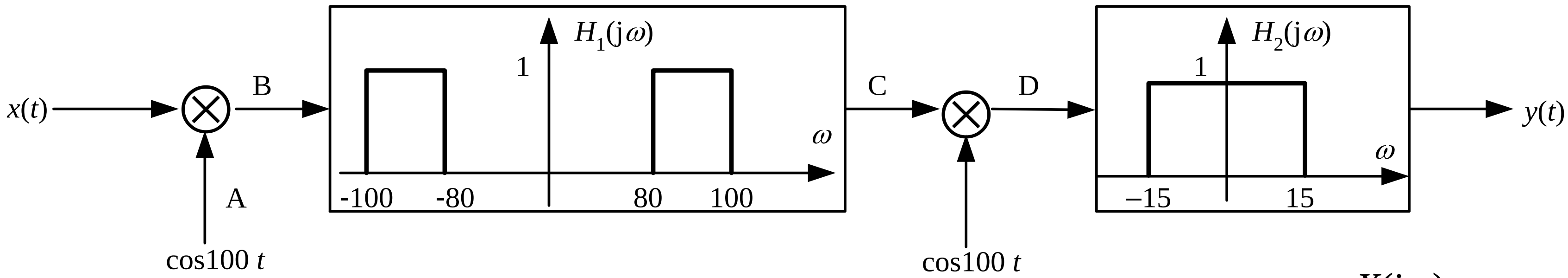


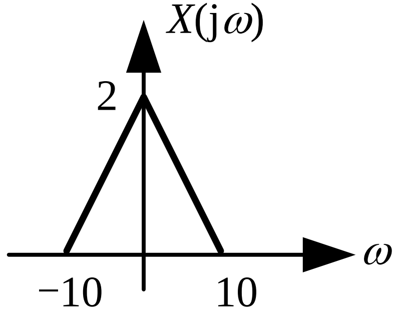
解：

$$X_C(j\omega)=X_B(j\omega)H_1(j\omega)$$



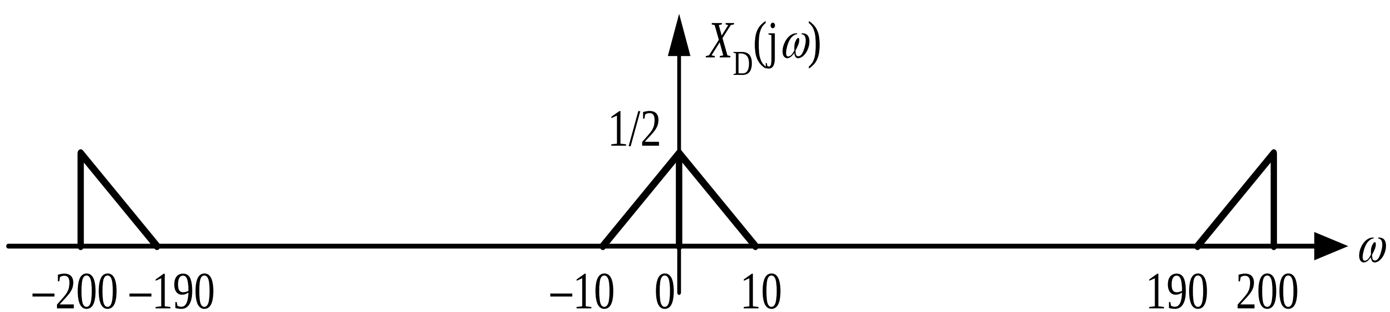
例9　如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系。



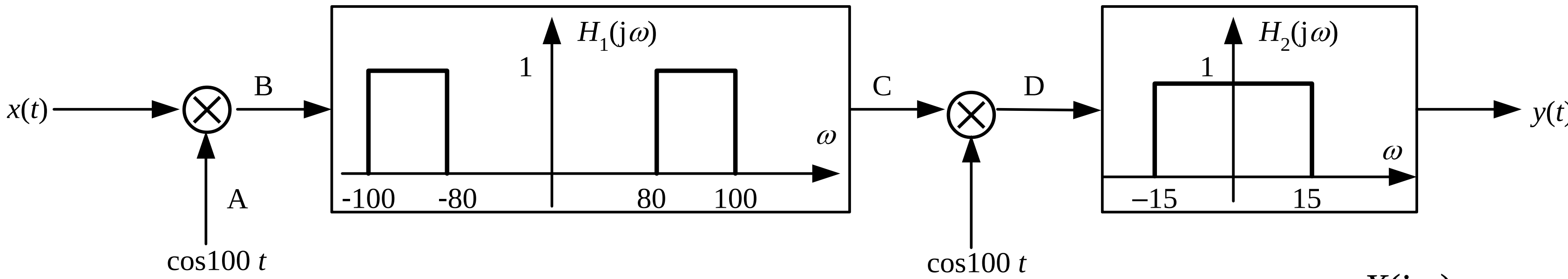


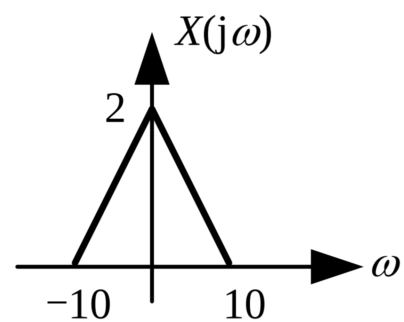
解：

$$X_D(j\omega)=\frac{1}{2}[X_C(\omega+100)+X_C(\omega-100)]$$



例9　如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系。



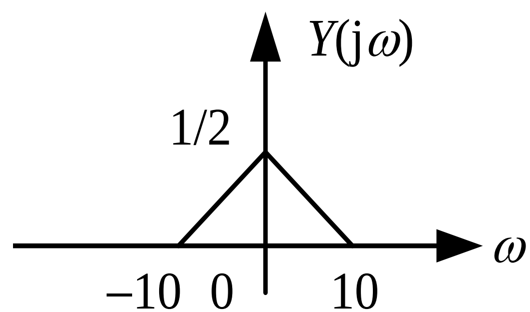


解：

$$Y(j\omega)=X_{\mathrm{D}}(j\omega)H_2(j\omega)$$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{4}X(j\omega)$$

$$y(t)=\frac{1}{4}x(t)$$



例5 采用部分分式展开法求*X*(*s*)的反变换。

$$X(s)=\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

解： *X*(*s*)为有理真分式，极点为一阶极点。

$$X(s)=\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+3}$$

将上式两端同时乘以s可得

$$sX(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}=k_1+\frac{sk_2}{s+1}+\frac{sk_3}{s+3}$$

令*s*=0，上式右端只有k_1项不等于零，所以

$$k_1=sX(s)\big|_{s=0}=\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=0}=\frac{2}{3}$$

例5 采用部分分式展开法求$X(s)$的反变换。

$$X(s)=\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

解： 同理可求出

$$k_2=(s+1)X(s)\big|_{s=-1}=\frac{s+2}{s(s+3)}\Big|_{s=-1}=-\frac{1}{2}$$

$$k_3=(s+3)X(s)\big|_{s=-3}=\frac{s+2}{s(s+1)}\Big|_{s=-3}=-\frac{1}{6}$$

由此可得

$$X(s)=\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}=\frac{2/3}{s}+\frac{-1/2}{s+1}+\frac{-1/6}{s+3}$$

对上式进行拉氏反变换可得

$$x(t)=\frac{2}{3}u(t)-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)-\frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$

例6 采用部分分式展开法求$X(s)$的反变换。

$$X(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

解： $X(s)$有1个3阶重极点

$$X(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{(s+1)^3}+\frac{k_3}{(s+1)^2}+\frac{k_4}{s+1}\qquad ①$$

$$k_1=sX(s)\big|_{s=0}=\frac{s-2}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0}=-2$$

将①式两端同时乘以$(s+1)^3$可得

$$(s+1)^3X(s)=\frac{k_1(s+1)^3}{s}+k_2+k_3(s+1)+k_4(s+1)^2\quad ②$$

令$s=-1$，②式右端只有k_2项不等于零，所以

$$k_2=(s+1)^3X(s)\big|_{s=-1}=\frac{s-2}{s}\bigg|_{s=-1}=3$$

例6　采用部分分式展开法求X(s)的反变换。

$$X(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

解： $$(s+1)^3X(s)=\frac{k_1(s+1)^3}{s}+k_2+k_3(s+1)+k_4(s+1)^2 \quad ②$$

对②式求一阶导数，再令**s= –1**可得

$$k_3=\frac{\mathrm{d}(s+1)^3X(s)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=-1}=\left(\frac{s-2}{s}\right)'\Big|_{s=-1}=2$$

对②式求二阶导数，再令**s= –1**可得

$$k_4=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2(s+1)^3X(s)}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{s-2}{s}\right)''\Big|_{s=-1}=2$$

$$X(s)=\frac{-2}{s}+\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+1}$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=\left(-2+\frac{3}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}\right)u(t)$$

例7　采用部分分式展开法求下列$X(s)$的反变换。

$$X(s)=\frac{s^4-13s^2-11s+2}{s^3+4s^2+3s}\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

解： $X(s)$为有理假分式，将其化为有理真分式

$$X(s)=s-4+\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}$$

利用例1计算结果，以及

$$\delta'(t)\xleftrightarrow{L}s,\quad \delta(t)\xleftrightarrow{L}1$$

可得

$$x(t)=\delta'(t)-4\delta(t)\ +\frac{2}{3}u(t)-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)-\frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$

例8　求下列X(s)的反变换。 $(1)\,X(s)=\dfrac{s^2+8}{(s+4)^2}$

$(2)\,X(s)=\dfrac{1}{3s^2(s^2+4)}$　　$(3)\,X(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$

解： **(1)X(s)不是真分式，且有1个2阶重极点**

$$X(s)=1+\frac{-8s-8}{(s+4)^2}=1+\frac{k_1}{(s+4)^2}+\frac{k_2}{s+4}$$

$$k_1=(s+4)^2X_1(s)\Big|_{s=-4}=(-8s-8)\Big|_{s=-4}=24$$

$$k_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s+4)^2X_1(s)\Big|_{s=-4}=(-8s-8)'\Big|_{s=-4}=-8$$

$$x(t)=\delta(t)+24te^{-4t}u(t)-8e^{-4t}u(t)$$

例4　求下列X(s)的反变换。 $(1)\, X(s)=\dfrac{s^2+8}{(s+4)^2}$

$$(2)\, X(s)=\frac{1}{3s^2(s^2+4)} \qquad (3)\, X(s)=\frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$$

解： **(2)*X*(*s*) 有1个2阶重极点和一对共轭极点，为计算简便**

令$s^2=q$,则 $$X(s)=\frac{1}{3q(q+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{k_1}{q}+\frac{k_2}{q+4}\right)$$

$$k_1=q\cdot\frac{1}{q(q+4)}\bigg|_{q=0}=\frac{1}{4}$$

$$k_2=(q+4)\cdot\frac{1}{q(q+4)}\bigg|_{q=-4}=-\frac{1}{4}$$

于是 $$X(s)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4s^2}-\frac{1}{4(s^2+4)}\right)$$

$$x(t)=\frac{1}{12}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)u(t)$$

例8 求下列$X(s)$的反变换。 (1) $X(s)=\dfrac{s^2+8}{(s+4)^2}$

(2) $X(s)=\dfrac{1}{3s^2(s^2+4)}$ (3) $X(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$

解： (3)$X(s)$不是有理分式，将其表示为

$$X(s)=\underbrace{\frac{1}{s(s^2+4)}}_{X_1(s)}-\underbrace{\frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)}}_{X_2(s)=X_1(s)e^{-2s}}$$

$$X_2(s)=X_1(s)e^{-2s}\xrightarrow{\text{时移特性}}x_2(t)=x_1(t-2)$$

将$X_1(s)$展开为 $$X_1(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2 s+k_3}{s^2+4}$$

k_2, k_3用待定系数法求

$$k_1=\frac{1}{4}\qquad k_2=-\frac{1}{4}\qquad k_3=0$$

$$x_1(t)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)u(t)\qquad x_2(t)=-\frac{1}{4}\left[1-\cos 2(t-2)\right]u(t-2)$$

例1 系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x'(t) + 8x(t)$$

激励 $x(t) = e^{-t}u(t)$，初始状态$y(0^-)=3$，$y'(0^-)=2$，求响应$y(t)$。

解： 对微分方程进行单边拉氏变换可得

$$s^2Y(s) - sy(0^-) + 5[sY(s) - y(0^-)] + 6Y(s) = 2sX(s) + 8X(s)$$

$$Y(s) = \frac{(s+5)y(0^-) + y'(0^-)}{(s^2+5s+6)} + \frac{2s+8}{s^2+5s+6}X(s)$$

$$= Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{3s+17}{s^2+5s+6} = \frac{11}{s+2} - \frac{8}{s+3}$$

$$y_{zi}(t) = L^{-1}\{Y_{zi}(s)\} = 11e^{-2t} - 8e^{-3t}, t \ge 0$$

例1 系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x'(t) + 8x(t)$$

激励 $x(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$，初始状态$y(0^-)=3$，$y'(0^-)=2$，求响应$y(t)$。

解：

$$Y_{zs}(s) = \frac{2s+8}{s^2+5s+6} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{2s+8}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$= \frac{3}{s+1} - \frac{4}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$y_{zs}(t) = L^{-1}\{Y_{zs}(s)\} = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t}) \cdot u(t)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = 3\mathrm{e}^{-t} + 7\mathrm{e}^{-2t} - 7\mathrm{e}^{-3t}, t \geq 0$$

例3 已知一LTI连续时间系统满足的微分方程为

$$y''(t)+y'(t)-2y(t)=3x(t)+2x'(t),\ \ t\geq 0$$

试求该系统的系统函数$H(s)$和单位冲激响应$h(t)$。

解： 对微分方程两边进行Laplace变换得

$$(s^2+s-2)Y_{zs}(s)=(2s+3)X(s)$$

根据系统函数的定义可得

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+3}{s^2+s-2}=\frac{\frac{5}{3}}{s-1}+\frac{\frac{1}{3}}{s+2}$$

进行Laplace反变换，可得

$$h(t)=(\frac{5}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{-2t})u(t)$$

例4 试求零初始状态的理想积分器和理想微分器的系统函数$H(s)$。

解： 1）具有零初始状态的理想积分器的输入输出关系为

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

两边取Laplace变换，可得

$$Y(s)=\frac{1}{s}X(s)$$

根据系统函数的定义可得

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s}$$

例4 试求零初始状态的理想积分器和理想微分器的系统函数$H(s)$。

解： 2）具有零初始状态的理想微分器的输入输出关系为

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

系统的冲激响应为

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$$

两边取Laplace变换，可得

$$H(s)=s-\delta(0^{-}) \quad =s$$

例6 判断下述系统是否稳定。

$$H_1(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \qquad H_2(s)=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

解： 1）极点为s=−1和s=–2，都在s左半平面。

若激励为有界输入$u(t)$，则其输出为

$$Y_1(s)=X(s)H_1(s)=\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}=\frac{3/2}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}$$

$$y_1(t)=L^{-1}[Y_1(s)]=\left(\frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

显然输出也有界，所以系统稳定。

例6 判断下述系统是否稳定。

$$H_1(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \qquad H_2(s)=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

解： 2）极点为$s=\pm j\omega_0$，是虚轴上的一对共轭极点。

若激励为有界输入$\sin(\omega_0 t)u(t)$，则其输出为

$$Y_2(s)=F(s)H_2(s)=\frac{\omega_0}{(s^2+\omega_0{}^2)}\cdot\frac{s}{(s^2+\omega_0{}^2)}=\frac{\omega_0 s}{(s^2+\omega_0{}^2)^2}$$

$$y_2(t)=L^{-1}[Y_2(s)]=\frac{1}{2}t\sin(\omega_0 t)u(t)$$

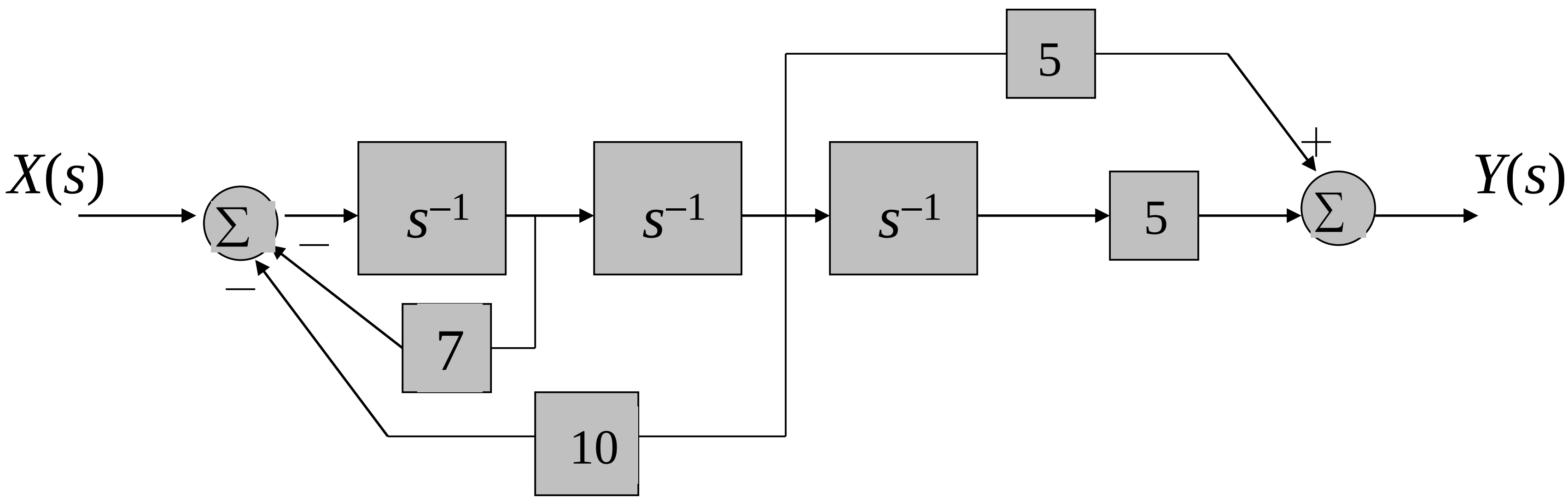
显然，输出不是有界信号，所以系统不稳定。

例 画出系统的模拟方框框图

$$H(s)=\frac{5s+5}{s^3+7s^2+10s}$$

解： 1）直接型框图

$$H(s)=\frac{5s^{-2}+5s^{-3}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}}$$



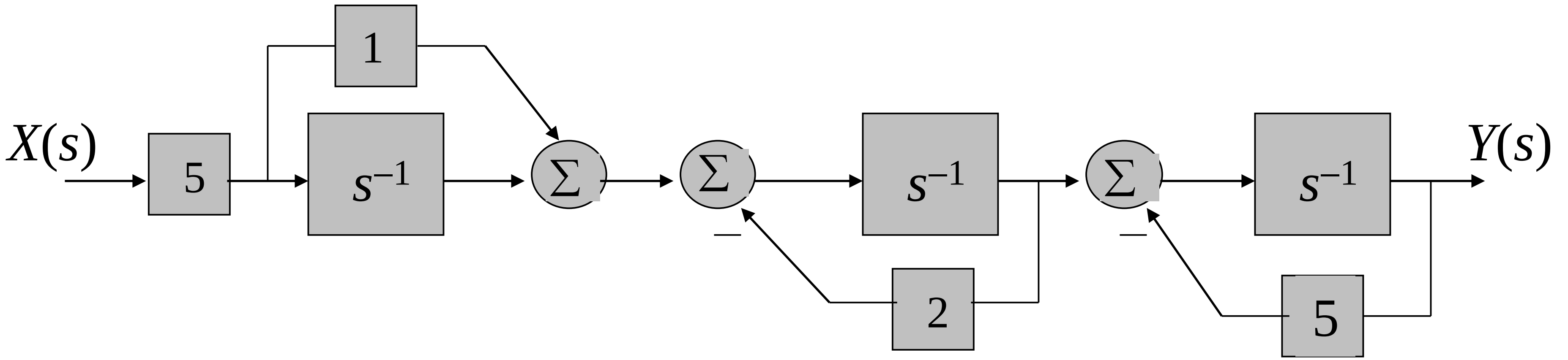
例 画出系统的模拟方框框图

$$H(s)=\frac{5s+5}{s^3+7s^2+10s}$$

解： 2）级联型

$$H(s)=\frac{5s+5}{s}\times\frac{1}{s+2}\times\frac{1}{s+5}$$

$$H(s)=(5+5s^{-1})\times\frac{s^{-1}}{1+2s^{-2}}\times\frac{s^{-1}}{1+5s^{-1}}$$



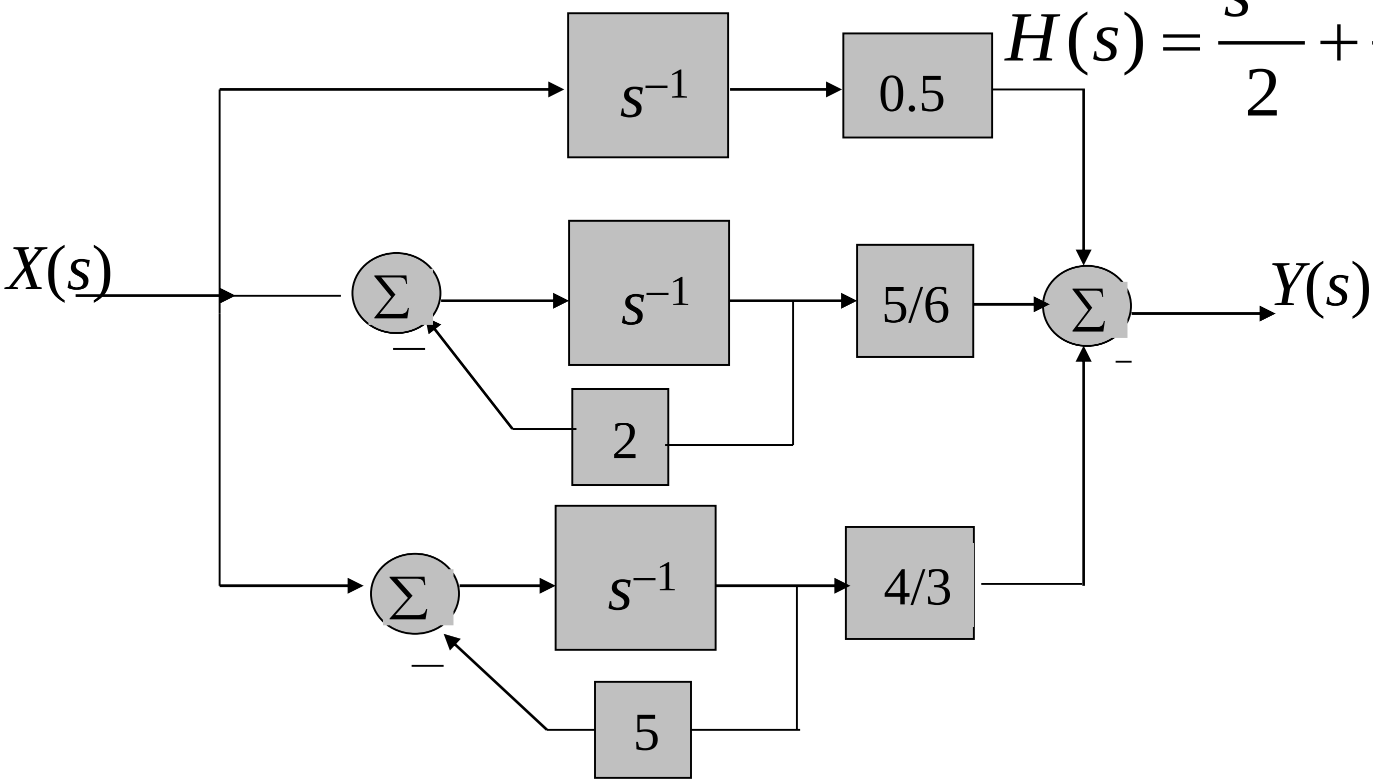
例　画出系统的模拟方框框图

$$H(s)=\frac{5s+5}{s^3+7s^2+10s}$$

解：　　3）并联型

$$H(s)=\frac{1}{2s}+\frac{5}{6s+12}-\frac{4}{3s+15}$$

$$H(s)=\frac{s^{-1}}{2}+\frac{(5/6)s^{-1}}{1+2s^{-1}}-\frac{(4/3)s^{-1}}{1+5s^{-1}}$$



综合题1： 一连续线性LTI因果系统的微分方程描述为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知$x(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$，由s域求解：

(1)零输入响应$y_{zi}(t)$，零状态响应$y_{zs}(t)$，完全响应$y(t)$。

(2)系统函数$H(s)$，单位冲激响应$h(t)$并判断系统是否稳定。

(3)画出系统的直接型模拟框图。

综合题1： 一连续线性LTI因果系统的微分方程描述为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知$x(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$，由s域求解：

(1)零输入响应$y_{zi}(t)$，零状态响应$y_{zs}(t)$，完全响应$y(t)$。

解： (1)对微分方程两边做单边拉普拉斯变换得

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+7sY(s)-7y(0^-)+10Y(s)=(2s+3)X(s)$$

$$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+7y(0^-)}{s^2+7s+10}+\frac{2s+3}{s^2+7s+10}X(s)$$

零输入响应的s域表达式为

$$Y_{zi}(s)=\frac{s+8}{s^2+7s+10}=\frac{2}{s+2}+\frac{-1}{s+5}$$

进行拉普拉斯反变换可得

$$y_{zi}(t)=L^{-1}\{Y_{zs}(s)\}=2e^{-2t}-e^{-5t},t\geq 0$$

综合题1： 一连续线性LTI因果系统的微分方程描述为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知$x(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$，由s域求解：

(1)零输入响应$y_{zi}(t)$，零状态响应$y_{zs}(t)$，完全响应$y(t)$。

解：

$$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+7y(0^-)}{s^2+7s+10}+\frac{2s+3}{s^2+7s+10}X(s)$$

零状态响应的s域表达式为

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+3}{(s^2+7s+10)(s+1)}=\frac{1/4}{s+1}+\frac{1/3}{s+2}+\frac{-7/12}{s+5}$$

进行拉普拉斯反变换可得

$$y_{zs}(t)=L^{-1}\{Y_{zs}(s)\}=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{7}{12}e^{-5t}\right)u(t)$$

完全响应为

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{3}e^{-2t}-\frac{19}{12}e^{-5t}, t>0$$

综合题1： 一连续线性LTI因果系统的微分方程描述为

$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知$x(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$，由s域求解：

(2)系统函数$H(s)$，单位冲激响应$h(t)$并判断系统是否稳定。

解： $$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+7y(0^-)}{s^2+7s+10}+\underbrace{\frac{2s+3}{s^2+7s+10}X(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

(2) 根据系统函数的定义，可得

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+3}{s^2+7s+10}=\frac{-1/3}{s+2}+\frac{7/3}{s+5}$$

进行拉普拉斯反变换即得

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{7}{3}e^{-5t}\right)u(t)$$

对于因果系统，由于系统函数的极点为–2,–5，在左半s平面，故系统稳定。

综合题1： 一连续线性LTI因果系统的微分方程描述为

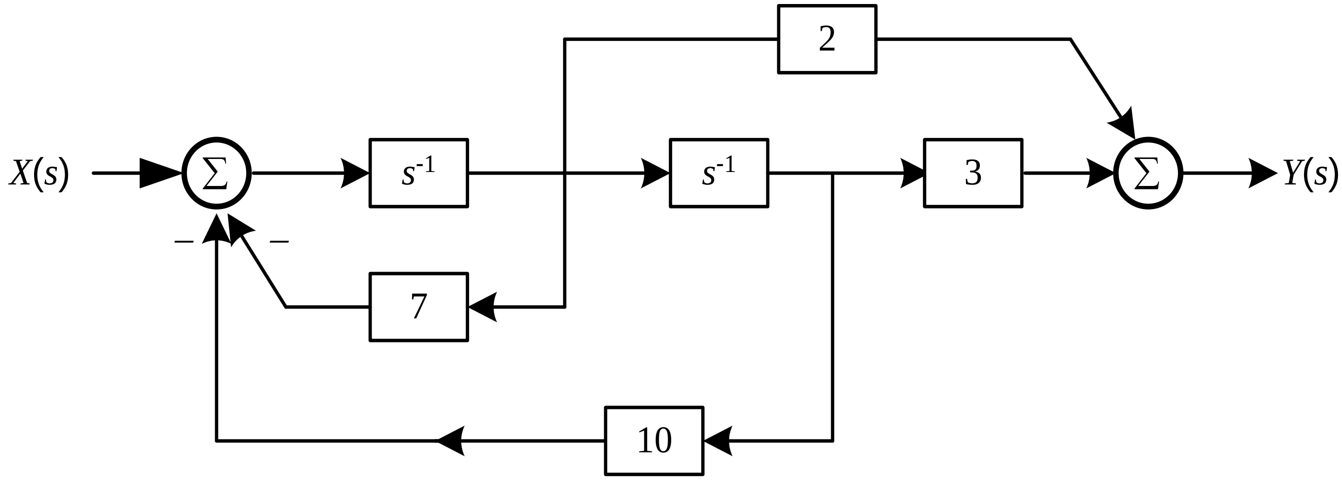
$$y''(t)+7y'(t)+10y(t)=2x'(t)+3x(t)$$

已知$x(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1, y'(0^-)=1$，由s域求解：

(3)画出系统的直接型模拟框图。

解： (3) 将系统函数改写为

$$H(s)=\frac{2s^{-1}+3s^{-2}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}}$$



综合题2： 已知一连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+e^{-t}-1.5e^{-2t})u(t)$,激励信号$x(t)=u(t)$,试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果稳定。

解：

零状态响应和激励信号的拉氏变换分别为

$$Y_{zs}(s)=\frac{0.5}{s}+\frac{1}{s+1}-\frac{1.5}{s+2}=\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)} \qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$X(s)=\frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

根据系统函数的定义，可得

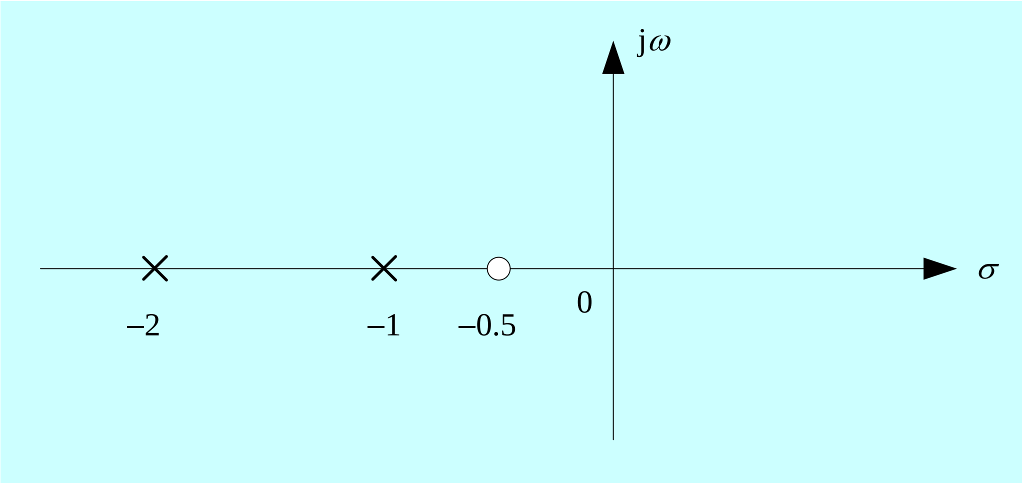
$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{2s+1}{s^2+3s+2} \qquad \mathrm{Re}(s)>-1 \quad ①$$

综合题2： 已知一连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+e^{-t}-1.5e^{-2t})u(t)$,激励信号$x(t)=u(t)$, 试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果稳定。

解：

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+1}{s^2+3s+2} \qquad \mathrm{Re}(s)>-1 \qquad ①$$

该系统的零点$z=-5$为，极点为$p_1=-1$, $p_1=-2$，



零极点分布图

综合题2： 已知一连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+e^{-t}-1.5e^{-2t})u(t)$，激励信号$x(t)=u(t)$，试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果稳定。

解：

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{2s+1}{s^2+3s+2}\qquad \mathrm{Re}(s)>-1 \qquad ①$$

由①式可得系统微分方程的s域表达式

$$(s^2+3s+2)Y_{zs}(s)=(2s+1)X(s)$$

两边进行拉氏反变换，可得描述系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2x'(t)+x(t)$$

综合题2： 已知一连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+e^{-t}-1.5e^{-2t})u(t)$,激励信号$x(t)=u(t)$, 试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果稳定。

解：

将系统函数进行部分分式展开，有

$$H(s)=\frac{2s+1}{s^2+3s+2}=\frac{-1}{s+1}+\frac{3}{s+2}$$

再进行拉氏反变换，可得系统冲激响应为

$$h(t)=(-e^{-t}+3e^{-2t})u(t)$$

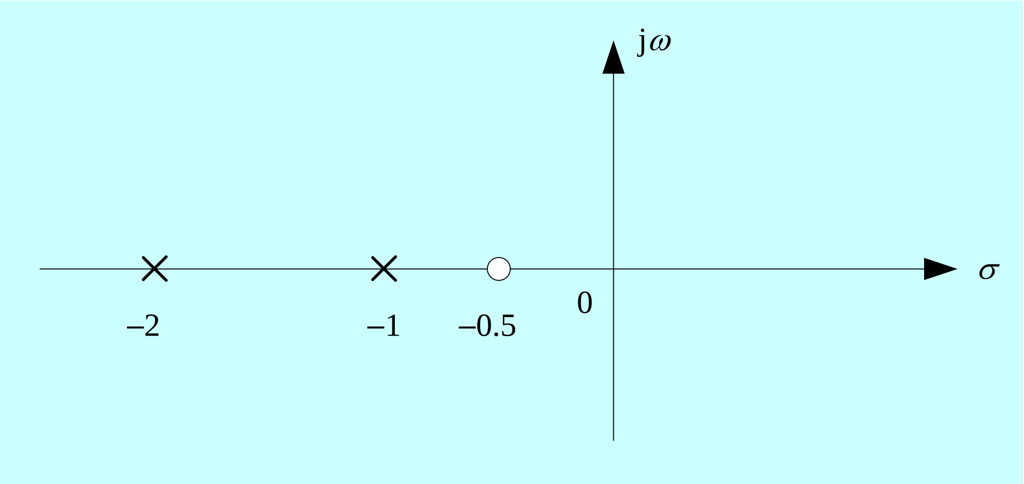
由于系统的冲激响应满足

$$h(t)=0, t<0$$

故该系统为因果系统

综合题2： 已知一连续时间LTI系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(0.5+e^{-t}-1.5e^{-2t})u(t)$,激励信号$x(t)=u(t)$,试求该系统的系统函数$H(s)$并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应$h(t)$、并判断系统是否因果稳定。

解：



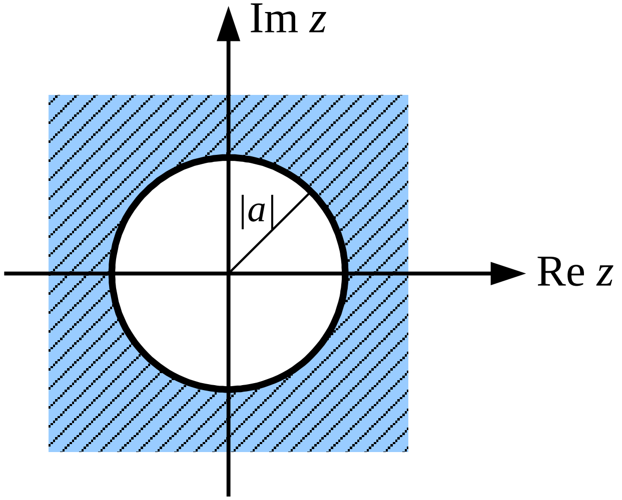
对因果系统，由零极点分布图可看出，系统的极点位于s左半平面，**故该系统稳定**。

例1 求以下序列的Z变换及收敛域。

$$(1)\quad x[k]=a^k u[k], a\neq 0 \qquad (2)\quad x[k]=\begin{cases}1 & 0\le k\le N-1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

解:

$$(1)\ X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$



$$\mathrm{ROC}: |z|>|a|$$

$$(2)\ X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}z^{-k}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad \mathrm{ROC}: |z|>0$$

有限长序列z变换的收敛域为|z|>0

例2 求$R_N[k]=u[k]-u[k-N]$的z变换及收敛域。

解：

$$u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1$$

利用因果序列的位移特性和线性特性，可得

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

由于$R_N[k]$为有限长序列，故其收敛域为

$|z|>0$ ROC扩大

线性加权后序列z变换的ROC可能比原序列z变换的ROC大

例3 求 $Z\left\{\sum_{n=0}^{k} x[n]\right\}$

解： $$\sum_{n=0}^{k} x[n] = x[k] * u[k]$$

设 $$x[k] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad |z| > R_x$$

利用z变换的卷积特性，以及

$$u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

可得

$$Z\left\{\sum_{n=0}^{k} x[n]\right\} = Z\{x[k]\} \cdot Z\{u[k]\} = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

$$|z| > \max(1, R_x)$$

例5 求$a^k\sin(\Omega_0 k)\, u[k]$ 的z变换及收敛域。

解：

$$\sin(\Omega_0 k)u[k] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{\sin\Omega_0 z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0 + z^{-2}} \qquad |z|>1$$

利用z变换的指数加权特性，可得

$$a^k\sin(\Omega_0 k)u[k] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{\sin\Omega_0 (z/a)^{-1}}{1-2(z/a)^{-1}\cos\Omega_0 + (z/a)^{-2}}$$

$$= \frac{a\sin\Omega_0 z^{-1}}{a^2-2a\,z^{-1}\cos\Omega_0 + z^{-2}} \quad |z|>|a|$$

例6 求$x[k]=(k+1)a^k u[k]$的z变换及收敛域。

解：

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

利用z域微分特性，可得

$$Z\{ka^k u[k]\} = -z\frac{\mathrm{d}\dfrac{1}{1-az^{-1}}}{\mathrm{d}z} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z|>|a|$$

利用z变换的线性特性，可得

$$(k+1)a^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, |z|>|a|$$

例7 已知$X(z) = 1/(1-a z^{-1})$, $|z| > |a|$，求$x[0]$，$x[1]$和 $x[\infty]$ 。

解:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-az^{-1}} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-a} = 1$$

根据位移特性有

$$x[k+1]u[k] \xleftrightarrow{z} z\{X(z) - x[0]\}$$

对上式应用初值定理，即得

$$x[1] = \lim_{z\to\infty} z\{X(z) - x[0]\} = \lim_{z\to\infty} \frac{az}{z-a} = a$$

例7 已知$X(z) = 1/(1-a z^{-1})$, $|z| >|a|$，求$x[0]$，$x[1]$和 $x[\infty]$ 。

解:

当$-1 < a \le 1$时，$(z-1)X(z)$的收敛域包含单位圆，由终值定理得

$$x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)}{z-a} = \begin{cases} 1 & a=1 \\ 0 & |a|<1 \end{cases}$$

当$|a|>1$或$a=-1$时，$(z-1)X(z)$的收敛域不包含单位圆，终值定理不适用。

例8 $X(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}\quad |z|>1$, 求$x[k]$。

解: 将$X(z)$化为z的负幂，可得

$$X(z)=\frac{2-0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}}=\frac{A}{1-z^{-1}}+\frac{B}{1+0.5z^{-1}}$$

$$A=(1-z^{-1})X(z)\Big|_{z=1}=\frac{2-0.5z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}\Big|_{z=1}=1$$

$$B=(1+0.5z^{-1})X(z)\Big|_{z=-0.5}=\frac{2-0.5z^{-1}}{1-z^{-1}}\Big|_{z=-0.5}=1$$

将$X(z)$进行z反变换，可得

$$x[k]=Z^{-1}\{X(z)\}=u[k]+(-0.5)^k u[k]$$

例9 $X(z)=\dfrac{3-8z^{-1}+20z^{-2}-16z^{-3}}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$，$|z|>4$, 求$x[k]$。

解： $m=n$，由多项式除法可得

$$X(z)=1+\underbrace{\frac{2}{\left(1-2z^{-1}\right)^2\left(1-4z^{-1}\right)}}_{G(z)}$$

$$G(z)=\frac{A}{(1-2z^{-1})^2}+\frac{B}{1-2z^{-1}}+\frac{C}{1-4z^{-1}}$$

$$A=(1-2z^{-1})^2G(z)\Big|_{z=2}=\frac{2}{1-4z^{-1}}=-2$$

$$B=\frac{1}{(-2)}\frac{\mathrm{d}[G(z)(1-2z^{-1})^2]}{\mathrm{d}z^{-1}}\Big|_{z=2}=-\frac{1}{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{-1}}\frac{2}{1-4z^{-1}}\Big|_{z=2}=-4$$

例9 $X(z)=\dfrac{3-8z^{-1}+20z^{-2}-16z^{-3}}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$, $|z|>4$, 求$x[k]$。

解: $$G(z)=\frac{A}{(1-2z^{-1})^2}+\frac{B}{1-2z^{-1}}+\frac{C}{1-4z^{-1}}$$

$$C=(1-4z^{-1})G(z)\Big|_{z=4}=8$$

所以

$$X(z)=1-\frac{2}{(1-2z^{-1})^2}-\frac{4}{1-2z^{-1}}+\frac{8}{1-4z^{-1}}$$

进行z反变换，得

$$x[k]=\delta[k]+[-2(k+1)2^k-4\cdot 2^k+8\cdot 4^k]u[k]$$

例10 $X(z)=\dfrac{z^2}{z^2+a^2},\left|z\right|>a$, 求$x[k]$。

解:

$X(z)$有一对共轭复根，可以直接利用

$$\cos(\Omega_0 k)u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}$$

$$X(z)=\frac{1}{1+(z/a)^{-2}}$$

$$X_1(z)=\frac{1}{1+z^{-2}} \Longrightarrow x_1[k]=\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)u[k]$$

由指数加权性质

$$x[k]=a^k\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)u[k]$$

例11 $X(z)=\dfrac{1}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2})}, |z|>0$，求$x[k]$。

解:

$$X(z)=\frac{A}{1+2z^{-1}}+\frac{Bz^{-1}+C}{1+z^{-1}+z^{-2}}$$

B, C用待定系数法求

$$1+z^{-1}+z^{-2}=1-2z^{-1}\cos\left(2\pi/3\right)+z^{-2}$$

$A=4/3$, $B=-2/3$, $C=-1/3$

$$x[k]=\left\{\frac{4}{3}(-2)^k-\frac{2\sin\left(2\pi k/3\right)}{3\sin(2\pi/3)}-\frac{\sin\left[2\pi\left(k+1\right)/3\right]}{3\sin(2\pi/3)}\right\}u[k]$$

例12 $X(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}, |z|>1$,用留数法求$x[k]$。

解:

$X(z)z^{k-1}$在$z=1$, $z=-0.5$有两个一阶极点，其留数为

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=1}=(z-1)X(z)z^{k-1}\Big|_{z=1}=\frac{2z-0.5}{z+0.5}\cdot z^k\Big|_{z=1}=1$$

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=0.5}=(z+0.5)X(z)z^{k-1}\Big|_{z=1}$$

$$=\frac{2z-0.5}{z-1}\cdot z^k\Big|_{z=-0.5}=(-0.5)^k$$

$$x[k]=\mathrm{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=1}+\mathrm{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=-0.5}=[1+(-0.5)^k]u[k]$$

例13 某离散LTI系统满足 $y[k]-4y[k-1]+4y[k-2] = 4x[k]$，已知$y[-1]=0$，$y[-2]=2$，$x[k]=(-3)^k u[k]$，由z域求$y_{zi}[k]$、$y_{zs}[k]$、$y[k]$。

解： 将差分方程两边进行单边z变换得

$$Y(z)-4\{z^{-1}Y(z)+y[-1]\}+4\{z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\}=4X(z)$$

求解此代数方程可得系统完全响应的z域表示式

$$Y(z)=\frac{4y[-1]-4z^{-1}y[-1]-4y[-2]}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}+\frac{4X(z)}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}$$

$Y_{zi}(z)$ $Y_{zs}(z)$

例13 某离散LTI系统满足 $y[k]-4y[k-1]+4y[k-2] = 4x[k]$， 已知$y[-1]=0$ ， $y[-2]=2$， $x[k]=(-3)^k u[k]$， 由z域求$y_{zi}[k]$、$y_{zs}[k]$、$y[k]$。

解： $$Y_{zi}(z)=\frac{4y[-1]-4z^{-1}y[-1]-4y[-2]}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}=\frac{-8}{(1-2z^{-1})^2}$$

$$y_{zi}[k]=Z^{-1}\{Y_{zi}(z)\}=-8k(2)^k-8(2)^k, k\geq 0$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{4}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}\frac{1}{1+3z^{-1}}=\frac{1.6}{(1-2z^{-1})^2}+\frac{0.96}{1-2z^{-1}}+\frac{1.44}{1+3z^{-1}}$$

$$y_{zs}[k]=Z^{-1}\{Y_{zs}(z)\}=[1.6(k+1)(2)^k+0.96(2)^k+1.44(-3)^k]u[k]$$

$$y[k]=y_{zi}[k]+y_{zs}[k] = -6.4k(2)^k-5.44(2)^k+1.44(-3)^k \quad k\geq 0$$

例14 已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[k+2]+3y[k+1]+y[k]=x[k+2]+x[k+1]-x[k] & k\geq 0 \\ y[-1]=2, y[-2]=-1, x[k]=u[k] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应。

解： 令$k=k-2$

$$2y[k]+3y[k-1]+y[k-2]=x[k]+x[k-1]-x[k-2]$$

对差分方程两边做z变换

$$2Y(z)+3\left\{z^{-1}Y(z)+y[-1]\right\}+\left\{z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\right\}$$

$$=(1+z^{-1}-z^{-2})X(z)$$

$$Y(z)=-\frac{3y[-1]+y[-1]z^{-1}+y[-2]}{2+3z^{-1}+z^{-2}}+\frac{1+z^{-1}-z^{-2}}{2+3z^{-1}+z^{-2}}X(z)$$

例14 已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[k+2]+3y[k+1]+y[k]=x[k+2]+x[k+1]-x[k] & k\ge 0 \\ y[-1]=2,\ y[-2]=-1,\ x[k]=u[k] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应。

解：

$$Y(z)=-\frac{3y[-1]+y[-1]z^{-1}+y[-2]}{2+3z^{-1}+z^{-2}}+\frac{1+z^{-1}-z^{-2}}{2+3z^{-1}+z^{-2}}X(z)$$

零输入响应为

$$Y_{zi}(z)=-\frac{3y[-1]+y[-1]z^{-1}+y[-2]}{2+3z^{-1}+z^{-2}}=-\frac{5+2z^{-1}}{2+3z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{-3}{1+z^{-1}}+\frac{0.5}{1+0.5z^{-1}}$$

$$y_{zi}[k]=Z^{-1}\{Y_{zi}(z)\}=[3(-1)^{k+1}-(-0.5)^{k+1}]u[k]$$

例14 已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[k+2]+3y[k+1]+y[k]=x[k+2]+x[k+1]-x[k] \quad k\geq 0 \\ y[-1]=2, y[-2]=-1, x[k]=u[k] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应。

解：

$$Y(z)=-\frac{3y[-1]+y[-1]z^{-1}+y[-2]}{2+3z^{-1}+z^{-2}}+\frac{1+z^{-1}-z^{-2}}{2+3z^{-1}+z^{-2}}F(z)$$

零状态响应为

$$Y_{zs}(z)=\frac{(1+z^{-1}-z^{-2})}{2+3z^{-1}+z^{-2}}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{1/6}{1-z^{-1}}+\frac{-0.5}{1+z^{-1}}+\frac{5/6}{1+0.5z^{-1}}$$

$$y_{zs}[k]=Z^{-1}\{Y_{zs}(z)\}=\{1/6-0.5(-1)^k+(5/6)(-0.5)^k\}u[k]$$

$$y[k]=y_{zi}[k]+y_{zs}[k]=\{1/6-3.5(-1)^k+(4/3)(-0.5)^k\}u[k]$$

例1 求单位延时器$y[k]=x[k-1]$的系统函数$H(z)$。

解：

$$x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

利用z变换的位移特性，有

$$x[k-1] \xleftrightarrow{z} z^{-1}X(z)$$

根据系统函数的定义，可得

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}X(z)}{X(z)}=z^{-1}$$

即单位延时器的系统函数$H(z)$ 为z^{-1} 。

例2 一LTI离散系统，其初始状态为$y[-1]=8$，$y[-2]=2$，当输入$x[k]=(0.5)^k u[k]$时，输出响应为

$y[k]=4(0.5)^k u[k]-0.5k(0.5)^{k-1}u[k-1]-(-0.5)^k u[k]$

求系统函数$H(z)$。

解：

$$y[k]=4(0.5)^k u[k]-k(0.5)^k u[k]-(-0.5)^k u[k]$$

$$Y(z)=\frac{4}{1-0.5z^{-1}}-\frac{0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2}-\frac{1}{1+0.5z^{-1}}$$

$$=\frac{3+0.5z^{-1}-1.5z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})^2(1+0.5z^{-1})}$$

例2 一LTI离散系统，其初始状态为$y[-1]=8$，$y[-2]=2$，当输入$x[k]=(0.5)^k u[k]$时，输出响应为

$y[k]=4(0.5)^k u[k]-0.5k(0.5)^{k-1}u[k-1]-(-0.5)^k u[k]$

求系统函数$H(z)$。

解： 对于初始状态为$y[-1]=8$, $y[-2]=2$的一般二阶系统

$$Y(z)=X(z)\underbrace{\boxed{\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}}}_{H(z)}+\frac{-8a_1-2a_2-8a_2z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$=\frac{3+0.5z^{-1}-1.5z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})^2(1+0.5z^{-1})}$$

$$H(z)=\frac{2.5-1.25z^{-1}-0.5z^{-2}}{1-0.25z^{-2}}$$

例3 试判断下面因果LTI离散系统的稳定性。

$$H(z)=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-1.5z^{-1})}$$

解：

- 从收敛域看

  该因果系统的收敛域为$|z|>1.5$

  收敛域不包含单位圆，故系统不稳定。

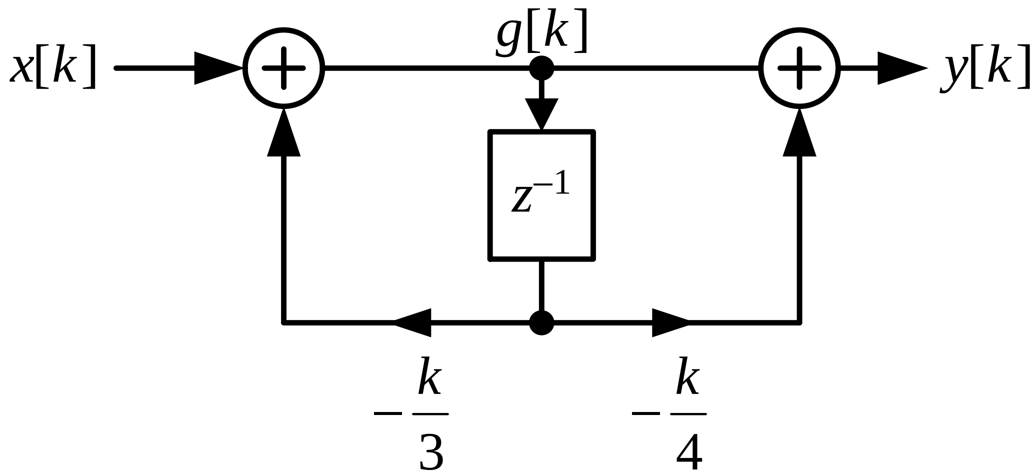
- 从极点看

  系统的极点为$z_1=0.5$，$z_2=1.5$

  极点$z_2=1.5$在单位圆外，故系统不稳定。

例4 一因果离散系统如图所示，

求 a) $H(z)$ b)系统稳定时k的范围。



解：

$$G(z) = z^{-1}(-k/3)G(z) + X(z)$$

$$Y(z) = G(z) + (-k/4)z^{-1}G(z)$$

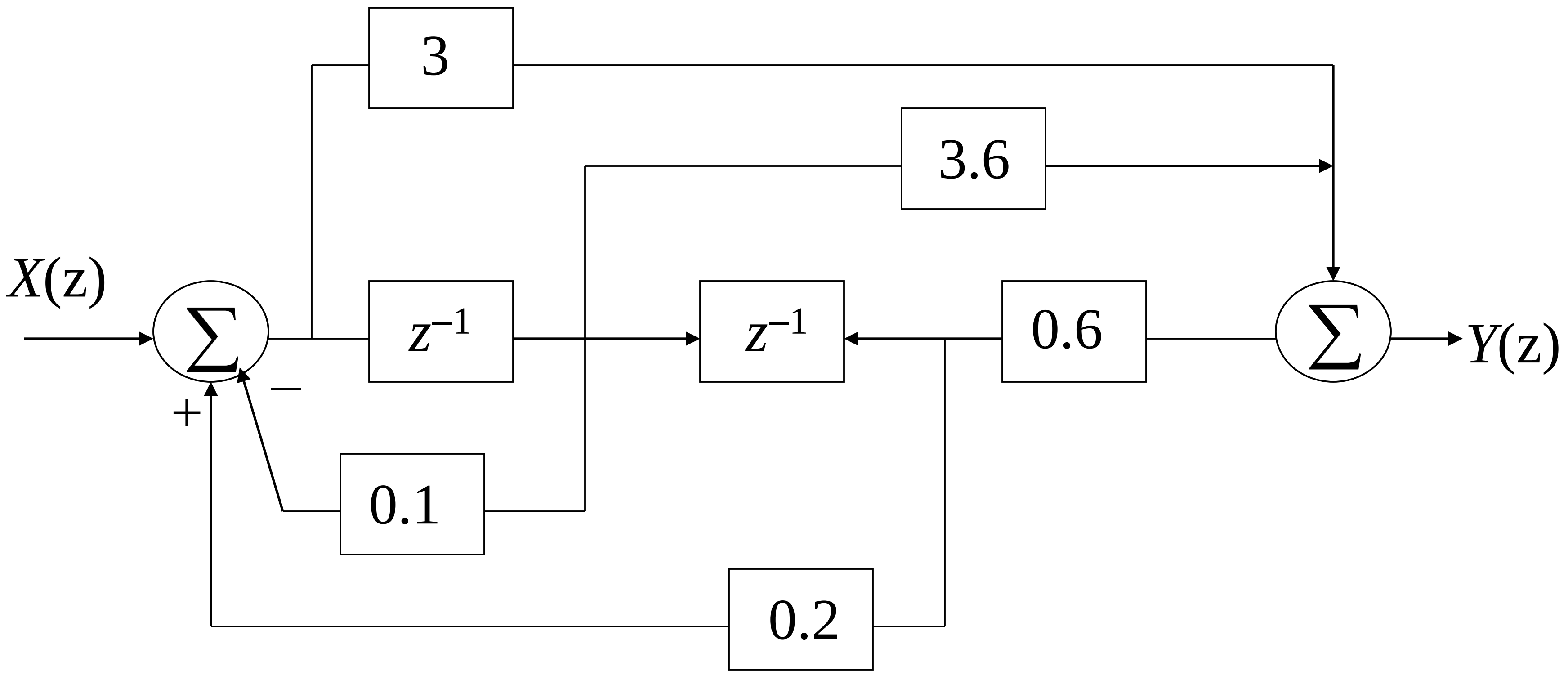
$$H(z) = \frac{1-(k/4)z^{-1}}{1+(k/3)z^{-1}}$$

$|k| < 3$ 系统稳定

例6 已知 $H(z)=\dfrac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$

试作其直接型，并联型及级联型的模拟框图。

解： 1）直接型

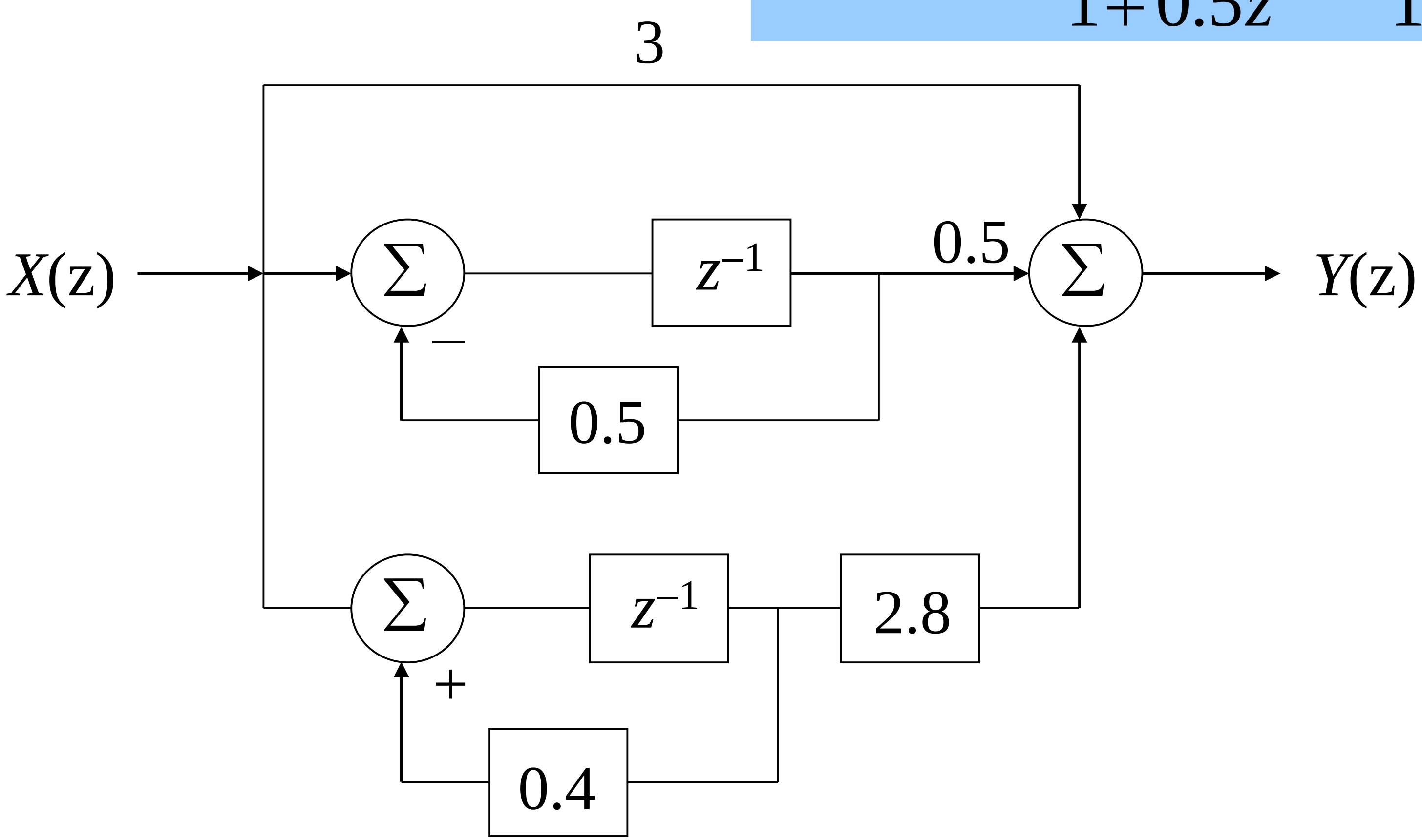


例6 已知 $H(z)=\dfrac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$

试作其直接型，并联型及级联型的模拟框图。

解： **2）并联型**

$$H(z)=3+\frac{0.5z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}+\frac{2.8z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$



例6 已知 $H(z)=\dfrac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$

试作其直接型，并联型及级联型的模拟框图。

解： **3）级联型**

$$H(z)=\frac{3+0.6z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$