ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ.

ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

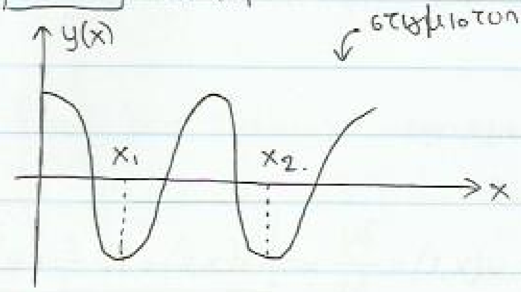
2/3/17

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad c^2=\frac{T}{\rho}}$$

Η γενικη λυση ειναι της μορφης $\underline{y = f_1(ct-x)+f_2(ct+x)}$

• Εστω $y=f_1(ct-x) = a\cdot\sin\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(ct-x)$ ← τρεχον κυμα προς τα δεξια.

$\boxed{t=t_0}$ σταθερο

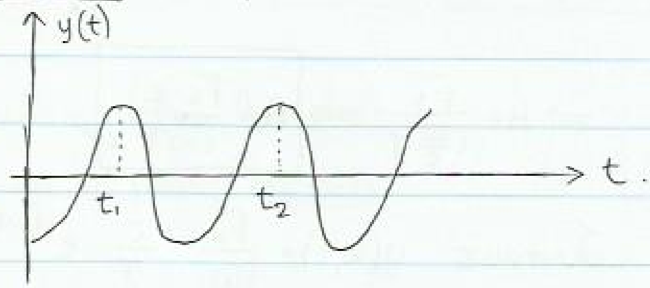


Για καποιο x_i εχω φαση

$\varphi(x)=\frac{2\pi}{\lambda}(ct_0-x)$

$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=2\pi \iff \boxed{x_2-x_1=\lambda}$

$\boxed{x=x_0}$ σταθερο



Για καποιο t_i εχω φαση

$\varphi(t)=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(ct-x_0)$

$\varphi(t_2)-\varphi(t_1)=2\pi \iff \boxed{t_2-t_1=\frac{\lambda}{c}=T}$

• $T=\frac{\lambda}{c}=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{\nu} \Longrightarrow \boxed{c=\lambda\cdot\nu}$

c: ταχυτητα διαδοσης
λ: μηκος κυματος
ν: συχνοτητα κυματος

Συνεπως ειναι $\omega=\frac{2\pi c}{\lambda}$ και $k\triangleq\frac{2\pi}{\lambda}$ (κυματικος αριθμος) $\Longrightarrow \omega=kc$

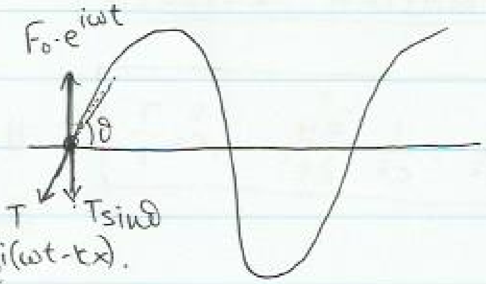
• Τοτε η κυματικη εξισωση γραφεται $y(ct-x)=y(x,t)=a\cdot\sin(\omega t-kx)$
οπου $a\cdot\sin(\omega t-kx)=\mathrm{Im}\left(a\cdot e^{i(\omega t-kx)}\right)$.

• $\varphi=\omega t-kx \Rightarrow d\varphi=\omega dt-kdx=0$ ← για να εχω κυμα που συμπεριφερεται καλα και να κοιμαμαι ησυχος το βραδυ.

$\Longrightarrow \omega dt-kdx=0 \Longrightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}=c$

Οριζουμε τη <u>φασικη ταχυτητα</u> $\boxed{v_\varphi\triangleq\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}=c}$, που ειναι η ταχυτητα με την οποια μεταδιδονται τα χαρακτηριστικα του κυματος

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ



$$F_0 e^{i\omega t} = -T\sin\vartheta \simeq -T\tan\vartheta = -T\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y(x,t) = a\cdot e^{i(\omega t - kx+\varphi)} = a\cdot e^{i\phi}\cdot e^{i(\omega t - kx)} = A\cdot e^{i(\omega t-kx)}.$$

Αρα $F_0\cdot e^{i\omega t} = -T\cdot \frac{\partial\left(A\cdot e^{i(\omega t-kx)}\right)}{\partial x} = -T\cdot A(-ik)e^{i(\omega t-kx)} \Rightarrow A = \frac{F_0}{ikT} \Rightarrow$

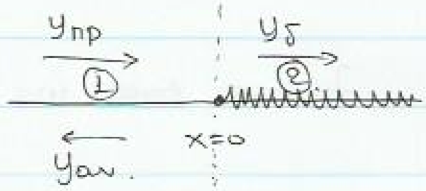
$\Rightarrow A=\frac{F_0}{i\frac{\omega}{c}T} \Rightarrow \boxed{A=\frac{F_0\cdot c}{i\omega T}}$ T: ταση νηματος.

Συνεπως $y(x,t) = \frac{F_0}{i\omega}\cdot\frac{c}{T}\cdot e^{i(\omega t-kx)} \Rightarrow u(x,t)=\frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow \boxed{u(x,t) = F_0\cdot\frac{c}{T}\cdot e^{i(\omega t-kx)}}$

Οριζουμε το μεγεθος "συνθετη αντισταση" $Z=\frac{F}{u}=\frac{F_0\cdot e^{i(\omega t-kx)}}{F_0\cdot\frac{c}{T}\cdot e^{i(\omega t-kx)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{Z=\frac{T}{c}}$ και αφου $c^2 = \frac{T}{\rho} \Rightarrow \frac{T}{c}=\rho c \Rightarrow \boxed{Z=\rho\cdot c}$

ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΜΕΣΟ



Εστω δυο διαφορετικες χορδες: $k_1\neq k_2$

Στελνουμε το $y_{\pi\rho}$. Ενα μερος του περνα στην περιοχη 2 (y_δ) ενω να αλλο ανακλαται ($y_{\alpha\nu}$).

Προφανως, $y_{\pi\rho}(0)+y_{\alpha\nu}(0)=y_\delta(0) \Rightarrow A_{\pi\rho}\cdot\cos(\omega t-0)+A_{\alpha\nu}\cos(\omega t+0)=A_\delta\cdot\cos(\omega t+$

Αντιλαμβανομαστε οτι κατα τη μεταβαση $\begin{cases}\text{δεν μεταβαλλεται το } \omega. \\ \text{μεταβαλλεται ο κυματικος αριθμο}\end{cases}$

Μπορω να υπολογισω τα πλατη?

· Απο την προηγουμενη εξισωση παιρνουμε $\boxed{A_{\pi\rho}+A_{\alpha\nu}=A_\delta}$ (1).

Θελουμε επισης: $\left(-T\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{\text{αριστερα}\\x=0}} = \left(-T\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{\text{δεξια}\\x=0}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(T\cdot\frac{\partial(y_{\pi\rho}+y_{\alpha\nu})}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = \left(T\cdot\frac{\partial y_\delta}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\cdot\left[-k_1\cdot A_{\pi\rho}\cdot(-\sin\omega t)+k_1\cdot A_{\alpha\nu}\cdot(-\sin\omega t)\right] = T\cdot(-k_2)\cdot A_\delta\cdot\sin\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -T\cdot k_1\cdot A_{\pi\rho}+T\cdot k_1\cdot A_{\alpha\nu} = -T\cdot k_2\cdot A_\delta \xrightarrow{k=\frac{\omega}{c}}$$

$$\Rightarrow -\frac{T}{c_1}\omega\cdot A_{\pi\rho}+\frac{T}{c_1}\omega\, A_{\alpha\nu} = -T\cdot\frac{\omega}{c_2}\cdot A_\delta \xrightarrow{\frac{T}{c}=Z} \boxed{Z_1\left(A_{\pi\rho}-A_{\alpha\nu}\right)=Z_2\cdot A_\delta} \quad (2)$$

Εχω δυο σχεσεις και τρεις αγνωστους ($A_{\pi\rho}, A_{\alpha\nu}, A_\delta$).
Δε μπορω να υπολογισω ολα τα πλατη, μονο λογους.

$$\boxed{\frac{A_{\alpha\nu}}{A_{\pi\rho}} = \frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} \equiv R}$$: συντελεστης ανακλασης.

$$\boxed{\frac{A_\delta}{A_{\pi\rho}} = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} \equiv T = 1+R}$$: συντελεστης διελευσης.

Διερευνηση:

(α). $Z_2=\infty \Rightarrow A_\delta=0$ και $A_{\pi\rho}=-A_{\alpha\nu}$

(β) $Z_2=0 \Rightarrow A_{\alpha\nu}=A_{\pi\rho}$ και $A_\delta=2A_{\pi\rho}$

(γ) $Z_2=Z_1 \Rightarrow A_{\alpha\nu}=0$ και $A_\delta=A_{\pi\rho}$.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΥΜΑΤΟΣ

$p = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = p\,dx \qquad dx = c\,dt$

Ενα στοιχειωδες dm εχει ενεργεια:

$$dE = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot U_{max}^2 = \frac{1}{2}(p\,dx)\cdot(\omega A)^2 = \frac{1}{2} p c\, dt\, \omega^2 A^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} p \cdot c \cdot \omega^2 A^2 \Longrightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \cdot Z \cdot \omega^2 A^2}$$

ρυθμος μεταφορας ενεργειας στη χορδη. εξαρταται αμεσα απο το Z.

Στο προηγουμενο παραδειγμα, φαινεται οτι η ενεργεια που φτανει (απο το Aπρ) ειναι ιση με την ενεργεια που φευγει (Aδ και Aαν).

- $\boxed{\frac{dE_{ερχομενο}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot Z_1 \cdot \omega^2 A_{πρ}^2}$

$\frac{dE_{απερχομενο}}{dt} = \boxed{\frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_{αν}^2 + \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 \cdot A_δ^2}$

αν αντικαταστησουμε τις σχεσεις ① και ② βγαινει πραγματι ισοι.

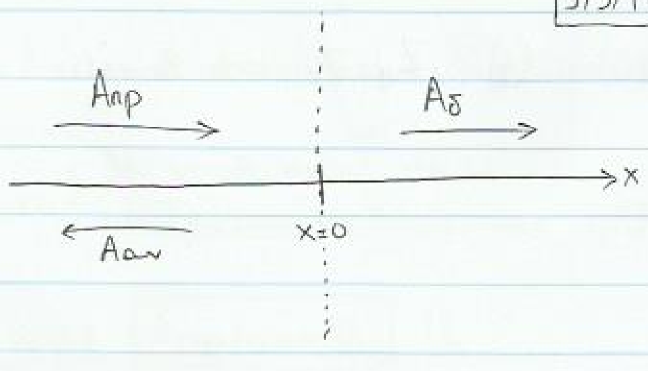
- $\frac{\text{Ανακλ. Ενεργεια}}{\text{Προσπ. Ενεργεια}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot Z_1 \cdot \omega^2 A_{αν}^2}{\frac{1}{2} \cdot Z_1 \cdot \omega^2 \cdot A_{πρ}^2} = \left(\frac{A_{αν}}{A_{πρ}}\right)^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$

- $\frac{\text{Μεταδιδ. Ενεργεια}}{\text{Προσπ. Ενεργεια}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot Z_2 \cdot \omega^2 \cdot A_δ^2}{\frac{1}{2} \cdot Z_1 \cdot \omega^2 \cdot A_{πρ}^2} = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \left(\frac{A_δ}{A_{πρ}}\right)^2 = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

9/3/17

$R = \frac{A_{αν}}{A_{πρ}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$



$T = \frac{A_δ}{A_{πρ}} = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2}$

Ρυθμος Μεταφορας Ενεργειας: $\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2}$