第九章

常微分方程数值解法

- 微分方程是现代数学的一个重要分支，是人们解决各种实际问题的有效工具，它在几何、力学、物理、电子技术、航空航天、生命科学、经济领域等都有广泛的应用。

- 微分方程解决的主要问题：
  （1）描述对象特征随时间（空间）的演变过程；
  （2）分析对象特征的变化规律；
  （3）预报对象特征的未来性态；
  （4）研究控制对象特征的手段。

什么是微分方程：

含未知函数的导数或微分的方程叫做微分方程．

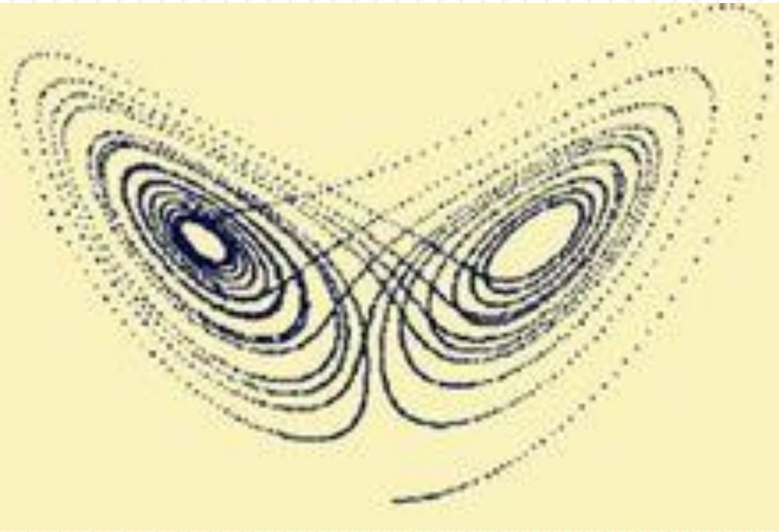
如果方程（组）只含有一个自变量（通常是时间t），则称为常微分方程；否则称为偏微分方程。

例：下列方程都是微分方程：

$$m\frac{du}{dx} - ku = mg\sin\theta, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x$$

例1. Lorenz模型

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -\beta x + yz \\
\dfrac{dy}{dt} = -\sigma(y - z) \\
\dfrac{dz}{dt} = -xy + \rho y - z
\end{cases}
$$



取 $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, $\sigma = 10$

求解区域: $0 \le t \le 80$

初始条件： $x(0)=0$, $y(0)= 0$, $z(0) = 0.0001$

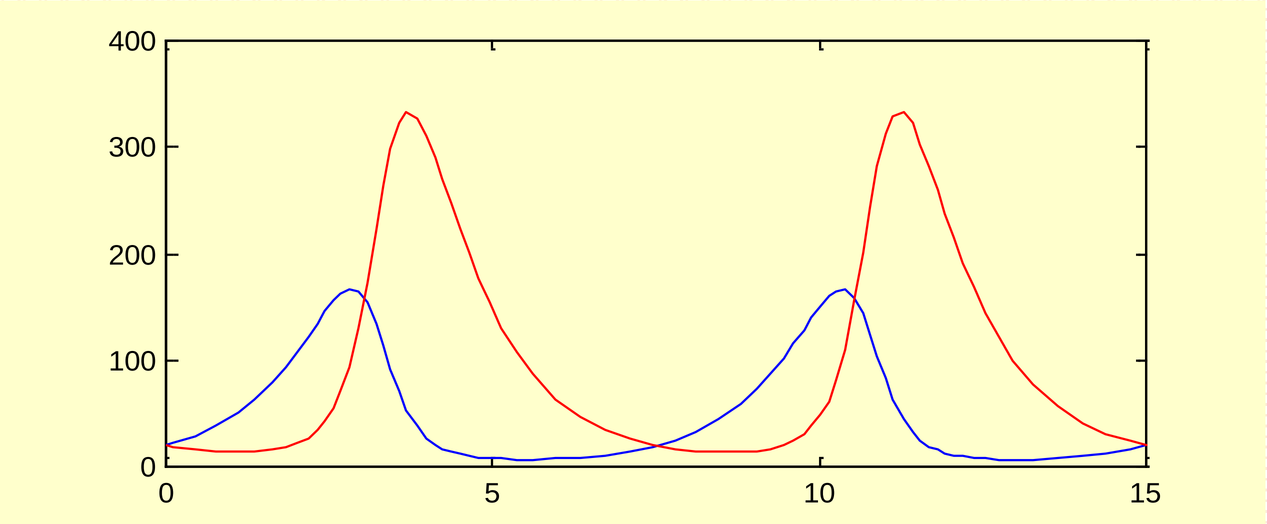
例2. Lotka-Volterra捕食者与被捕食者模型

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

取 a =1, b=0.01, c =1, d =0.02

求解区域：0≤ t ≤ 15

初始条件：$x(0)$=20, $y(0)$=20



---- x(t)

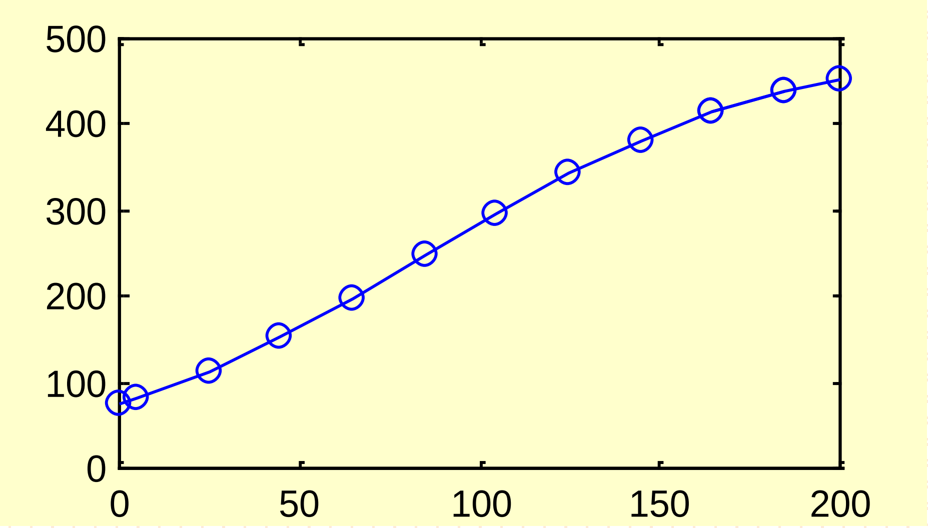
---- y(t)

例3. 人口模型(Logistic)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx(1 - \dfrac{x}{x_m}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

r 是增长率，$x(t)$ 是t时刻的人口数，x_m 是自然资源与环境条件所能容忍的最大人口数

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\dfrac{x_m}{x_0} - 1)e^{-r(t-t_0)}}$$



什么是微分方程：

含未知函数的导数或微分的方程叫做微分方程 .

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的阶.

一般地 ， n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ (n 阶显式微分方程)

微分方程的解是函数，对应一个变化过程。

常微分方程的解是随时间t变化的函数。

如：一辆汽车在公路上飞驰；一个球从空中落下等。

偏微分方程的解是多元函数，描述物体随时间变化发生位置的改变。

如：水的流动；烟雾的扩散；车流的涌动等。

通解与特解

定义 如果微分方程的解中含有任意常数，且所含的相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称这样的解为该方程的通解。

例如： $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x, c_1, c_2$为任意常数

是微分方程$y'' + y = 0$的通解.

n阶常微分方程通解的一般形式为

$$y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$$

其中$c_1, \cdots, c_n$为相互独立的任意常数.

定义 在通解中给任意常数以确定的值而得到的解称为方程的**特解**

例如 $y=\sin x, y=\cos x$都是方程$y''+y=0$的特解.

可在通解$y=c_1\sin x+c_2\cos x$中分别取

$c_1=1, c_2=0$, 得到： $y=\sin x$,

$c_1=0, c_2=1$, 得到： $y=\cos x$.

定解条件

为了从通解中得到合乎要求的特解, 必须根据实际问题给微分方程附加一定的条件, 称为定解条件。

求满足定解条件的求解问题称为定解问题。

常见的定解条件是初始条件, n阶微分方程的初始条件是指如下的n个条件:

$$当x = x_0时, y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$$

这里$x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$是给定的$n+1$个常数.

当定解条件是初始条件时, 相应的定解问题称为初值问题。

常微分方程求解的Matlab函数：

（1）**dsolve求精确解**

（2）**ode求数值解**

（1）dsolve求精确解

在 MATLAB 中，由函数 dsolve()解决常微分方程（组）的求解问题，其具体格式如下：

r = dsolve('eq1,eq2,...', 'cond1,cond2,...', 'v')

'eq1,eq2,...'为微分方程或微分方程组，'cond1,cond2,...',是初始条件或边界条件，'v'是独立变 量，默认的独立变量是't'。

dsolve函数用于求常微分方程组的精确解，也称为常微分方程的符号解。如果没有初始条件或边界条 件，则求出通解；如果有，则求出特解。

（1）dsolve求精确解

例1：求解微分方程 $y' = -2y + 2x^2 + 2x$，$y(0) = 1$。

解

```
clc, clear, syms y(x)
y=dsolve(diff(y)==-2*y+2*x^2+2*x, y(0)==1)
```

求得的符号解为 $y = e^{-2x} + x^2$.

（1）dsolve求精确解

例2：求解二阶线性微分方程$y''-2y'+y=e^x$，

$y(0)=1$，$y'(0)=-1$。

解

```
clc, clear, syms y(x)  % 定义符号函数y，自变量为x
dy=diff(y);  % 定义y的一阶导数，目的是下面赋初值
y=dsolve(diff(y,2)-2*diff(y)+y==exp(x), y(0)==1,
        dy(0)==-1)
```

求得二阶微分方程的解为 $y=e^x+\dfrac{x^2e^x}{2}-2xe^x$。

（1）dsolve求精确解

例3：已知输入信号为$u(t)=e^{-t}\cos(t)$，试求下面微分方程的解。

$$y^{(4)}(t)+10y^{(3)}(t)+35y''(t)+50y'(t)+24y(t)=u''(t).$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=-1,\quad y''(0)=1,\quad y'''(0)=1.$$

解

```
clc, clear, syms y(t)
dy=diff(y); d2y=diff(y,2); d3y=diff(y,3); %定义y的前3阶导数，是为了赋初值
u=exp(-t)*cos(t);
y=dsolve(diff(y,4)+10*diff(y,3)+35*diff(y,2)+50*diff(y)+…
  24*y==diff(u,2),y(0)==0,dy(0)==-1,d2y(0)==1,d3y(0)==1)
```

$$y=-\frac{7}{3}e^{-t}+\frac{9}{2}e^{-2t}-\frac{14}{5}e^{-3t}-\frac{e^{-t}\sin t}{5}+\frac{19}{30}e^{-4t}.$$

（1）dsolve求精确解

例4： 求解下列 Cauchy 问题 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = [1,1,1]^T. \end{cases}$

的解，其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$，$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

```
clc, clear
syms x(t) y(t) z(t)
[s1,s2,s3]=dsolve('Dx-3*x+y-z=0,Dy-2*x+z=0,Dz-x+y-2=0',…
'x(0)=1,y(0)=1,z(0)=1')
```

（1）dsolve求精确解

例4： 求解下列 Cauchy 问题 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = [1,1,1]^T. \end{cases}$

的解，其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$，$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

求得的解为

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

（1）dsolve求精确解

例5：　试求常微分方程组 $\begin{cases} f''+g=3 \\ g'+f'=1 \end{cases}$

在初边值条件 $f'(1)=0, f(0)=0, g(0)=0$ 时的解。

```
clc,clear, syms f(x) g(x)  %定义符号函数
df=diff(f);  %定义f的一阶导数
[s1,s2]=dsolve(diff(f,2)+g==3,
diff(g)+diff(f)==1, df(1)==0, f(0)==0, g(0)==0)
```

$$f(x)=x-\frac{e-3}{e^2+1}e^x+\frac{e(3e+1)}{e^2+1}e^{-x}-3,$$

$$g(x)=\frac{e-3}{e^2+1}e^x-\frac{3e^2+e}{e^2+1}e^{-x}+3.$$

（2）ode求数值解

对于常微分方程，只有一小部分可以求得解析解大部分常微分方程是无法求得解析解，只能求数值解

一阶微分方程或方程组的初值问题

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

其中y和f可以为向量.

（2） ode求数值解

寻求解$y(x)$在一系列离散节点

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

处的近似值

$$y_i \approx y(x_i)\ (i = 1, \ldots, n)$$

$y_1, \cdots, y_n$ 称为微分方程的数值解。

称节点间距 $h_i = x_{i+1} - x_i\ (i = 0, \ldots, n-1)$ 为步长，通常采用等距节点，即取 $h_i = h$ (常数)。这时节点为

$$x_n = x_0 + nh (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

（2） ode求数值解

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \qquad f(x_n, y_n)$$

$$\boxed{\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)} \quad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

（2） ode求数值解

Euler公式

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0), \ \ x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), (n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

预估—校正公式（改进的Euler公式）

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n); \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})\right] \ (k = 0,1,\cdots). \end{cases}$$

（2） ode求数值解

四阶龙格-库塔(RK)公式

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2) \\
K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)
\end{cases}
$$

（2） ode求数值解

Matlab 的工具箱提供了几个解常微分方程数值解的函数，如 **ode45**，**ode23**，**ode113**，其中 **ode45** 采用四五阶龙格库塔方法（以下简称 **RK** 方法），是解非刚性常微分方程的首选方法，**ode23** 采用二三阶 **RK** 方法，**ode113** 采用的是多步法，效率一般比 **ode45** 高。

（2） ode求数值解

函数ode45有如下两种调用格式：

[t,y]=ode45(fun,tspan,y0) 或

s=ode45(fun,tspan,y0)

其中 fun 是用 M 函数或匿名函数定义 $f(t,y)$ 的函数文件名或匿名函数返回值，tspan=[t_0,tfinal](这里t_0必须是初值条件中自变量的取值，tfinal 可以比t_0小)是求解区间，y0 是初值。返回值 t 是 MATLAB 自动离散化的区间[t_0,tfinal]上的点，y 的列是对应于 t 的函数值; 如果只有一个返回值 s, 则 s 是一个结构数组。

（2） ode求数值解

利用结构数组 s 和 MATLAB 函数 deval，我们可以计算区间 tspan 中任意点 x 的函数值，调用格式为

y=deval(s,x)，

其中 x 为标量或向量，返回值 y 的行是对应于 x 的数值解。

（2） ode求数值解

例1：求解微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 & , \quad x_1(0) = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 7(1 - x_1^{\ 2})x_2 - x_1, & x_2(0) = 0 \end{cases}$

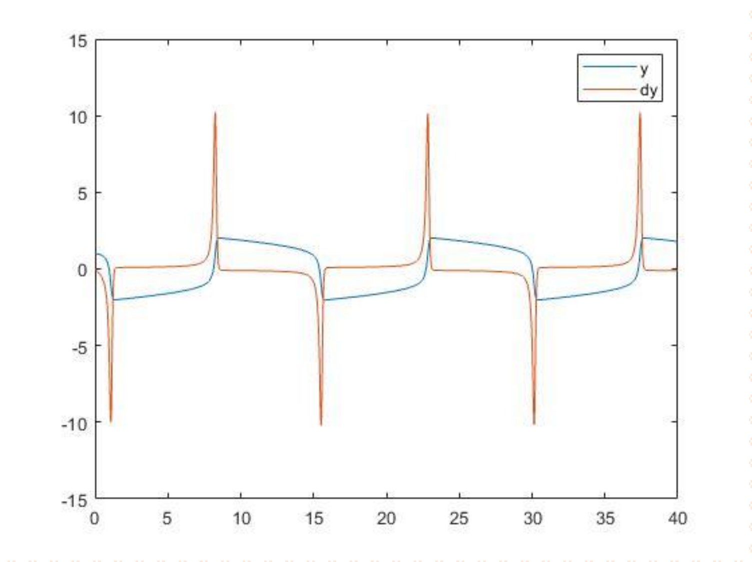
并画出解的图形。

解：建立函数

```
function [dfy]=mytt(t,fy)
dfy=[fy(2);7*(1-fy(1)^2)*fy(2)-fy(1)];
```

运行程序

```
clear; clc
[t,yy]=ode45('mytt',[0 40],[1;0]);
plot(t,yy)
legend('y','dy')
```



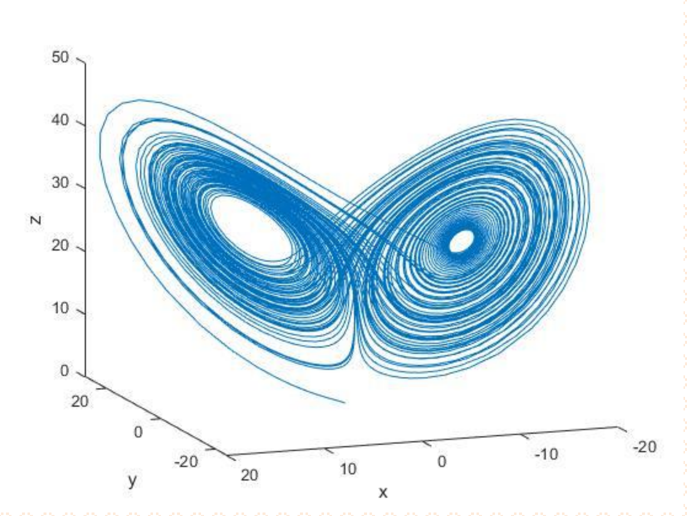
（2） ode求数值解

例2：Lorenz系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -\sigma(x-y) \\
\dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz \\
\dfrac{dz}{dt} = -bz + xy
\end{cases}
\qquad \sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}
$$

```
sigma=10; r=28; b=8/3;
odefun=@(t,x)[-sigma*(x(1)-x(2));
     r*x(1)-x(2)-x(1)*x(3);
     -b*x(3)+x(1)*x(2)];
x0=rand(3,1);
[~,x]=ode45(odefun,[0,100],x0);
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3))
view([-160,-15])
xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z')
```

绘制的相图为：



（2） ode求数值解

例3： 已知阿波罗卫星的运动轨迹(x,y)满足下面方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=2\dfrac{dy}{dt}+x-\dfrac{\lambda(x+\mu)}{r_1^3}-\dfrac{\mu(x-\lambda)}{r_2^3}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-2\dfrac{dx}{dt}+y-\dfrac{\lambda y}{r_1^3}-\dfrac{\mu y}{r_2^3}. \end{cases}$$

其中 $\mu=1/82.45$， $\lambda=1-\mu$， $r_1=\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}$， $r_2=\sqrt{(x+\lambda)^2+y^2}$，试在初值$x(0)=1.2$， $x'(0)=0$， $y(0)=0$， $y'(0)=-1.0494$下求解，并绘制阿波罗卫星轨迹图。

（2） ode求数值解

Matlab 无法直接求解高阶微分方程或方程组的数值解，必须化成一阶微分方程组，才能求数值解。

解　做变量替换，令$z_1 = x, z_2 = \frac{dx}{dt}, z_3 = y, z_4 = \frac{dy}{dt}$,

则原二阶微分方程组可以化为如下的一阶方程组

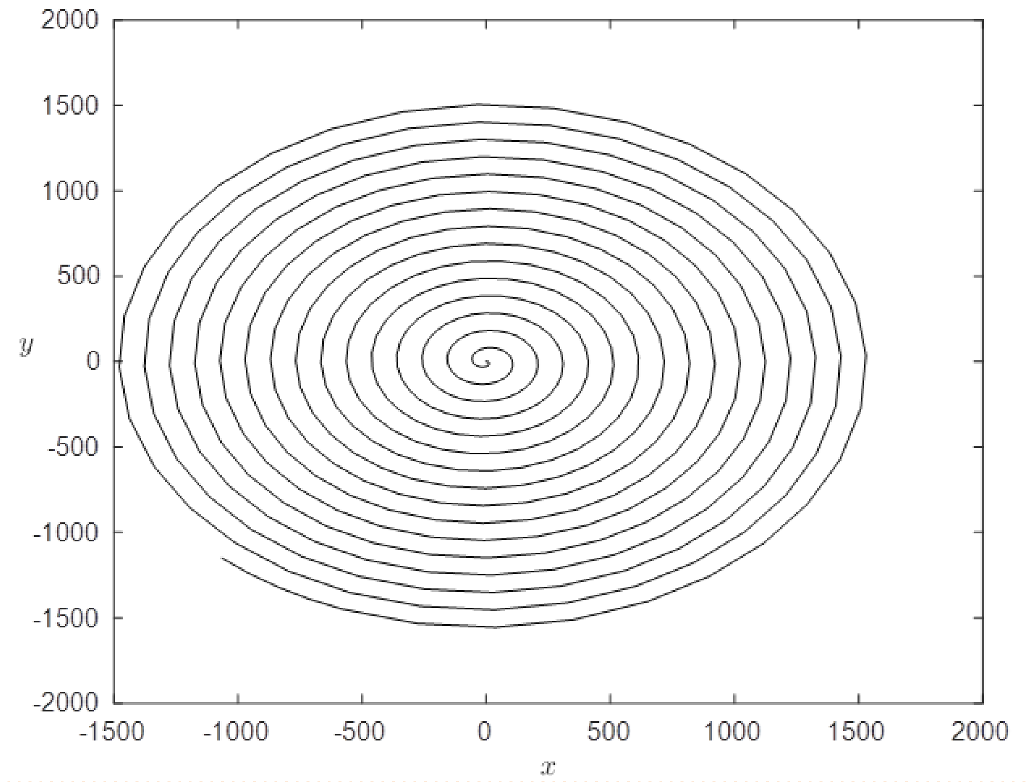
$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, & z_1(0) = 1.2, \\ \frac{dz_2}{dt} = 2z_4 + z_1 - \frac{\lambda(z_1+\mu)}{((z_1+\mu)^2 + z_3^2)^{3/2}} - \frac{\mu(z_1-\lambda)}{((z_1+\lambda)^2 + z_3^2)^{3/2}} & \\ \frac{dz_3}{dt} = z_4, & z_3(0) = 0, \\ \frac{dz_4}{dt} = -2z_2 + z_3 - \frac{\lambda z_3}{((z_1+\mu)^2 + z_3^2)^{3/2}} - \frac{\mu z_3}{((z_1+\lambda)^2 + z_3^2)^{3}} & \end{cases}$$

（2） ode求数值解

```
clc, clear, close all
mu=1/82.45; lamda=1-mu;
dz=@(t,z)[z(2);  2*z(4)+z(1)-
lamda*(z(1)+mu)/((z(1)+mu)^2+z(3)^2)^(3/2)-...
        mu*(z(1)-lamda)/((z(1)+lamda)^2+z(3)^2)^(3/2)
        z(4); -2*z(2)+z(3)-
lamda*z(3)/((z(1)+mu)^2+z(3)^2)^(3/2)-...
        mu*z(3)/((z(1)+lamda)^2+z(3)^2)^(3/2)];
[t,z]=ode45(dz,[0,100],[1.2 0 0 -1.0494])
plot(z(:,1), z(:,3), 'k')  %画轨迹图
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'Interpreter', 'latex', 'Rotation', 0)
```

（2） ode求数值解

所绘制的阿波罗卫星轨迹图



应用：物体冷却问题

Newon 冷却定律是温度高于周围环境的物体向周围媒质传递热量逐渐冷却时所遵循的规律：当物体表面与周围存在温度差时，单位时间从单位面积散失的热量与温度差成正比，比例系数称为热传递系数，记为$\boldsymbol{k}$。

基本模型为：

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-m)$$

应用：物体冷却问题

一个较热的物体置于室温为5℃的大房间内，设物体最初的温度是80℃，5分钟后降到55℃，问：

（1）物体的温度下降到30℃需要多少时间？

（2）20分钟后该物体的温度是多少？

解：温度下降的微分方程为：
$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-m) \\ T(0) = 80 \end{cases}$$

利用分离变量法得到该方程的通解为：$T = m + Ce^{-kt}$

已知 $m = 5$ ，由初始条件得 $C = 75, k = -\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}$

即有：$T = 5 + 75e^{\frac{t}{5}\ln\frac{2}{3}}$

应用：物体冷却问题

一个较热的物体置于室温为5ºC的大房间内，设物体最初的温度是80ºC，5分钟后降到55ºC，问：

（1）物体的温度下降到30ºC需要多少时间？

（2）20分钟后该物体的温度是多少？

Matlab求解

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T-m) \\ T(0) = 80 \end{cases}$$

%求特解*T*
syms x y k
dsolve('Dy=-k*(y-5)','y(0)=80','x')

%求参数k
solve('55=5+75*exp(-k*5)','k')

%温度下降30度需要的时间
t=solve('30=5+75*exp(1/5*log(2/3)*x)','x')
eval(t)

%20分钟后的温度
t=5+75*exp(1/5*log(2/3)*20)

请画出温度函数曲线图

实验练习题

1、求常微分方程的初值问题 $\dfrac{dy}{dx}+3y=8,\quad y(0)=2$ 的解。

2、求常微分方程组 $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+4x+\dfrac{dy}{dt}-y=e^t, & x|_{t=0}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0, & y|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的特解。

3、求解常微分方程 $y''-2(1-y^2)y'+y=0$，$0\le x\le 30,\quad y(0)=1,$ $y'(0)=0$ 的特解，并做出解函数的曲线图。

提示： 第2题方程改为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-3x+y, & x\big|_{t=0}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y+e^t, & y\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

第3题方程改为：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=u, & y(0)=1 \\ \dfrac{du}{dx}=2(1-y^2)u-y, & u(0)=0 \end{cases}$$

Q & A

- 有什么问题吗？