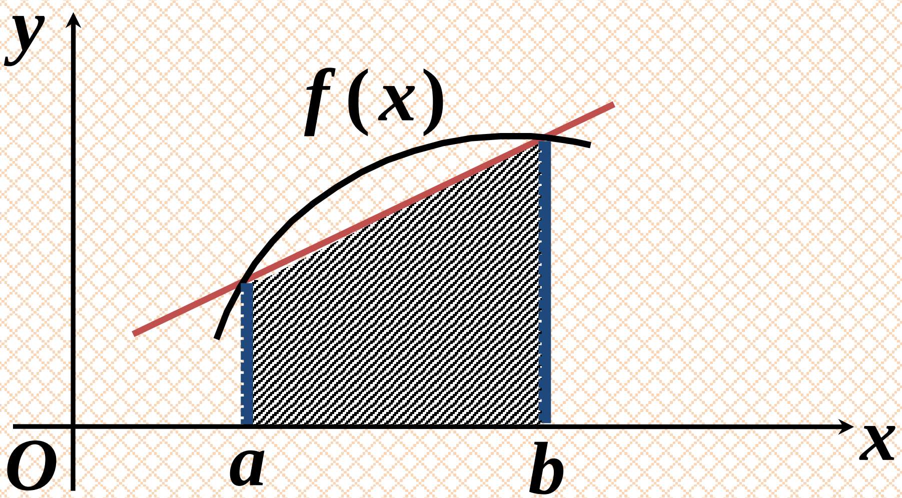
第五章 数值积分与数值微分



5.1 数值积分

一、数值积分的必要性

讨论如下形式的一元函数积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

在微积分里，按**Newton-Leibniz公式**求定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

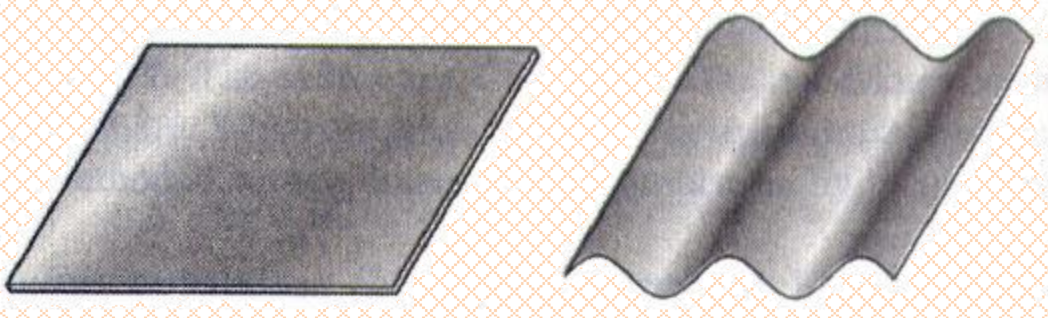
要求被积函数 $F(x)$

☞ 有解析表达式;

☞ $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 为初等函数.

1. $f(x)$的原函数$F(x)$不能用初等函数表示

考虑一个实际问题: 建筑上用的一种铝制波纹瓦是用一种机器将一块平整的铝板压制而成的.



假若要求波纹瓦长**4**英尺, 每个波纹的高度**(**从中心线**)**为**1**英寸, 且每个波纹以近似 2π 英寸为一个周期. 求制做一块波纹瓦所需铝板的长度**L.**

这个问题就是要求由函数 $f(x)=\sin x$ 给定的曲线，

从 $x=0$ 到 $x=48$ 英寸间的**弧长L**.

由微积分学我们知道,所求的弧长可表示为:

$$L=\int_0^{48}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_0^{48}\sqrt{1+(\cos x)^2}dx$$

上述积分称为**第二类椭圆积分**。

原函数不存在

类似的，下列函数也不存在由初等函数表示的原函数:

$$\sin x^2,\quad \cos x^2,\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{1}{\ln x},\quad \sqrt{1+x^3}$$

2. 有些被积函数其原函数虽然可以用初等函数表示成有限形式,但表达式相当复杂,计算极不方便.

例如函数: $x^2\sqrt{2x^2+3}$

并不复杂, 但它的原函数却十分复杂:

$$\frac{1}{4}x^2\sqrt{2x^2+3}+\frac{3}{16}x\sqrt{2x^2+3}-\frac{9}{16\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+3})$$

3. $f(x)$没有解析表达式，只有数表形式:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	4.5	6	8	8.5

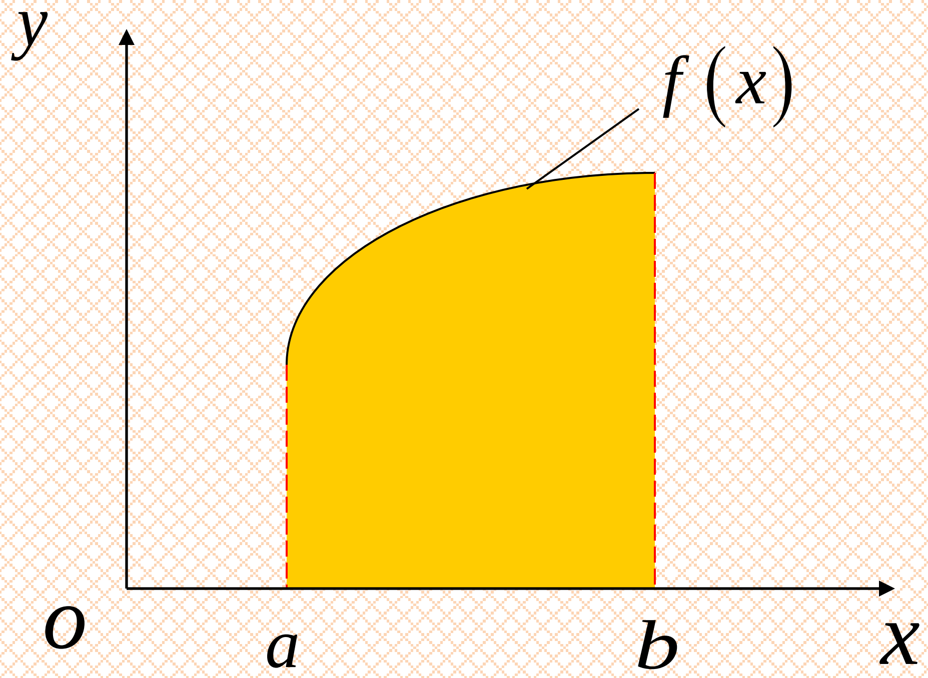
原来通过原函数来计算积分有它的局限性。那……

怎么办呢？

二、数值积分的基本思想

1、定积分的几何意义

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$



2、数值积分的理论依据

依据积分中值定理，对于连续函数 $f(x)$，在 $[a,b]$ 内存在一点 ξ ,使得

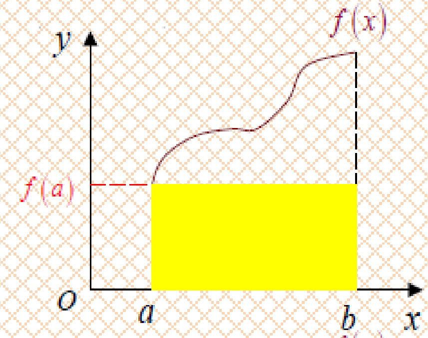
$f(\xi)=?$

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$$

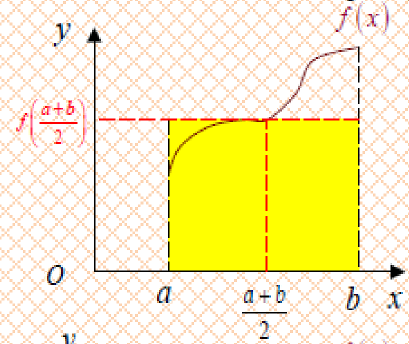
称 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均高度.

3、求积公式的构造

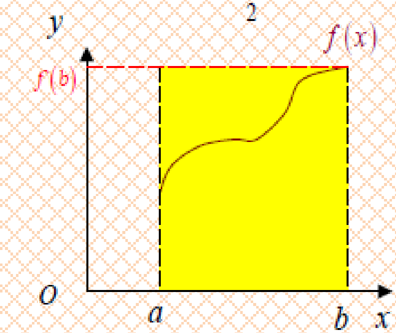
➢ 若简单选取区间端点或中点的函数值作为平均高度，则可得一点求积公式如下：



左矩形公式：$$I(f)\approx f(a)(b-a)$$



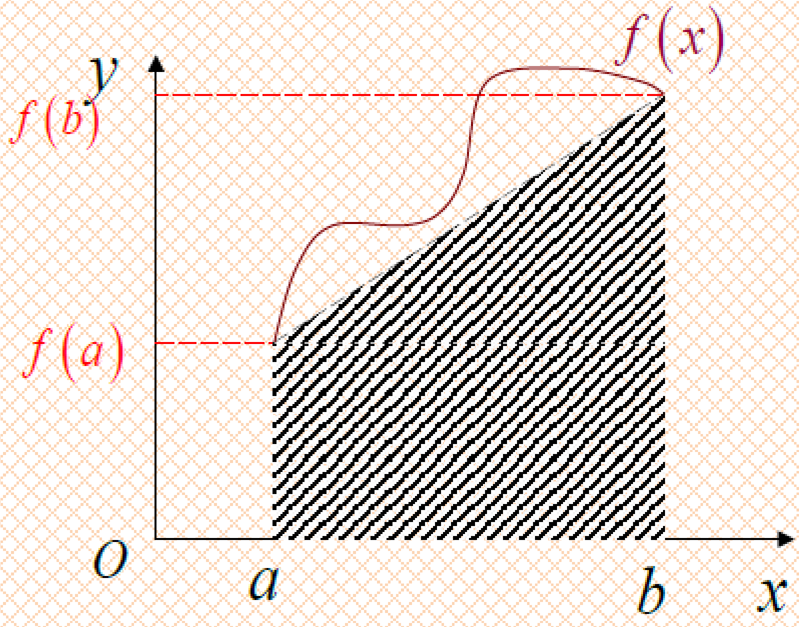
中矩形公式：$$I(f)\approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$



右矩形公式：$$I(f)\approx f(b)(b-a)$$

➢ 若取 a,b 两点，并令 $f(\xi)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$，则可得梯形公式（两点求积公式）

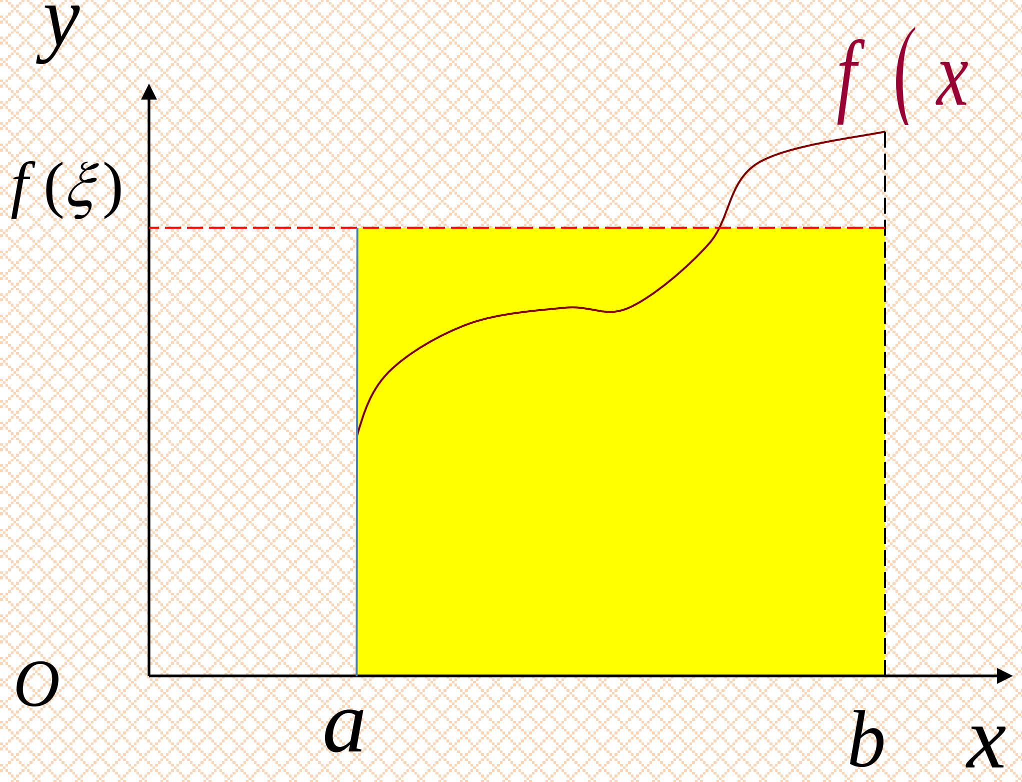
$$I(f)\approx\frac{\left(f(a)+f(b)\right)}{2}(b-a)$$



➢ 若取三点，$a,b,c=\frac{a+b}{2}$ 并令 $f(\xi)=\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right]\big/6$

则可得**Simpson公式(三点求积公式)**

$$I(f)\approx(b-a)\cdot\frac{\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right]}{6}$$



- 一般地，取区间 $[a,b]$ 内 $n+1$ 个点 $\{x_i\},(i=0,1,2,\ldots,n)$

处的高度 $\{f(x_i)\},(i=0,1,\ldots,n)$

通过加权平均的方法近似地得出平均高度 $f(\xi)$

这类求积方法称为机械求积:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

或写成:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Newton-Cotes公式

定义:

Cotes系数

记 $$C_j^{(n)} = \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!n}\int_0^n \left[\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(t-k)\right]dt$$

则 $$A_j = (b-a)C_j^{(n)}, \quad j = 0,1,2,\cdots,n$$

求积公式变为

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{j=0}^{n} C_j^{(n)} f(x_j)$$

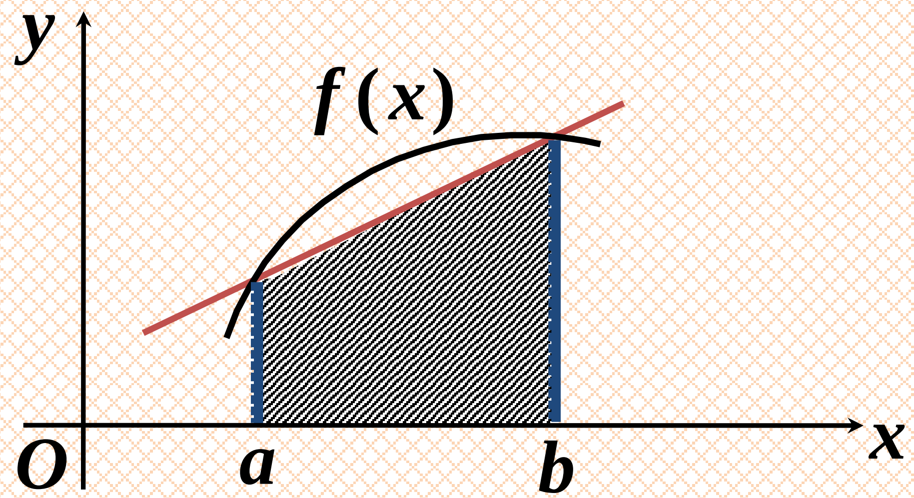
称上式为n阶闭型Newton-Cotes求积公式。

n	$c_k^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{750}{17280}$		
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{283\ 50}$	$\frac{-45440}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

梯形公式：$n=1$的Newton-Cotes求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

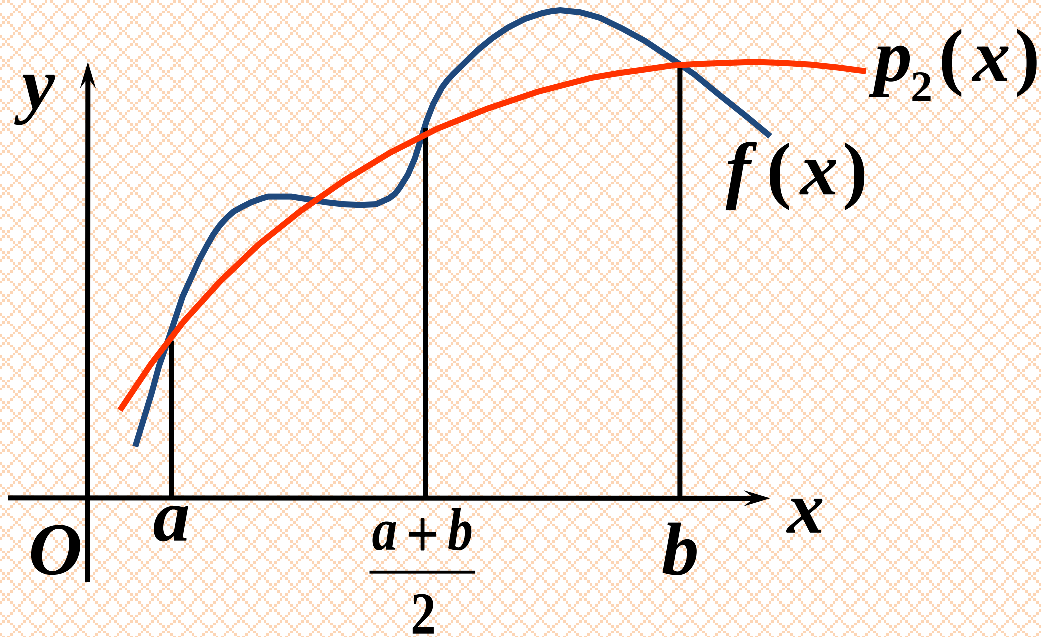
称为梯形公式。



Simpson公式：$n=2$的Newton-Cotes求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

称为Simpson(辛普生)公式，又叫抛物线公式。



Simpson3/8公式：n=3的 Newton-Cotes 求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{8}[f(a)+3f(\frac{2a+b}{3})+3f(\frac{a+2b}{3})+f(b)]$$

称为**Simpson3/8**公式。

Cotes公式 n=4的Newton-Cotes求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{\mathrm{b-a}}{90}[7f(a)+32f(\frac{3a+b}{4})+12f(\frac{a+b}{2})+$$
$$32f(\frac{a+3b}{4})+7f(b)]$$

称为**Cotes**公式。

例. 用n=2和n=3的Newton-Cotes公式

求 $\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx$ 的近似值。

解：1.n=2时

$$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx \approx \frac{2}{6}(e^{-\frac{1}{2}} + 4e^{-\frac{2}{2}} + e^{-\frac{3}{2}}) = 0.766575505$$

2.n=3时

$$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx \approx \frac{2}{8}(e^{-\frac{1}{2}} + 3e^{-\frac{5}{6}} + 3e^{-\frac{7}{6}} + e^{-\frac{3}{2}})$$

$$= 0.766916279$$

（$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx$ 的真实值为**0.7668010**）

求积分的MATLAB命令

int(s,v) %对符号表达式 s 中指定的符号变量 v 计算不定积分. 表达式 R 只是表达式函数 s 的一个原函数, 后面没有带任意常数 C.

int(s) %对符号表达式 s 中确定的符号变量计算计算不定积分.

int(s,a,b) %符号表达式 s 的定积分，a,b 分别为积分的上、下限

int(s,x,a,b) %符号表达式 s 关于变量 x 的定积分，a,b 分别为积分的上、下限

trapz(x,y) %梯形积分法，x 表示积分区间的离散化向量，y 是与 x 同维数的向量

quad('fun',a,b,tol) %采用 Simpson 法计算积分，精度较高，常用，tol 是积分精度

quad8('fun',a,b,tol) %采用 8 样条 Newton-Cotes 公式求数值积分，精度高，最常用

dblquad('fun',a,b,c,d) 矩形区域二重数值积分，fun 表示被积函数的 M 函数名，a,b 分别为 x 的上、下限，c,d 分别为 y 的上、下限

diff(f) %函数f 对符号变量x 或字母表上最接近字母x 的符号变量求导数

diff(f,t) %函数f 对符号变量t 求导数

例1 求定积分：

$$f(x)=e^{-0.5x}\sin(x+\frac{\pi}{6}),\quad S=\int_0^{3\pi}f(x)dx$$

(1) 建立被积函数文件fesin.m。

- function f=fesin(x)
- f=exp(-0.5*x).*sin(x+pi/6);

(2) 调用数值积分函数quad求定积分。

- [S,n]=quad('fesin',0,3*pi)

S =

0.9008

n =

77

也可不建立关于被积函数的函数文件，而使用匿名求解，

命令如下：

- g=@(x)(exp(-0.5*x).*sin(x+pi/6));
- %定义语句函数
- [S,n]=quad(g,0,3*pi)
- %不用加引号' '

S =

0.9008

n =

77

被积函数由一个表格定义—梯形积分法

在MATLAB中，对由表格形式定义的函数关系的求定积分问题用**trapz(X,Y)**函数。其中向量**X,Y**定义函数关系**Y=f(X)**。

例4 用trapz函数计算定积分。

命令如下：

```
clc,clear
X=1:0.01:2.5;
Y=exp(-X);        %生成函数关系数据向量
trapz(X,Y)
```

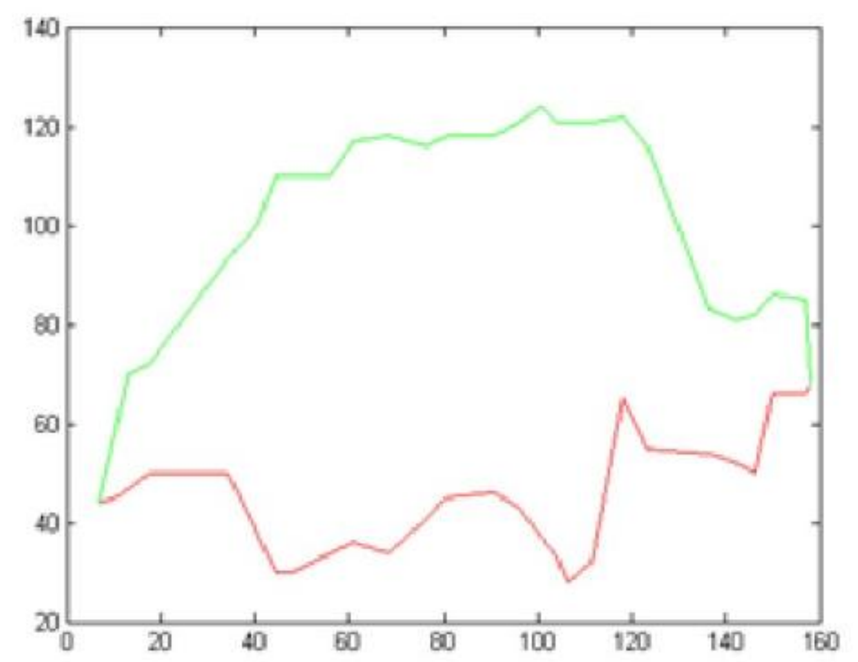
ans = 0.28579682416393

例2：

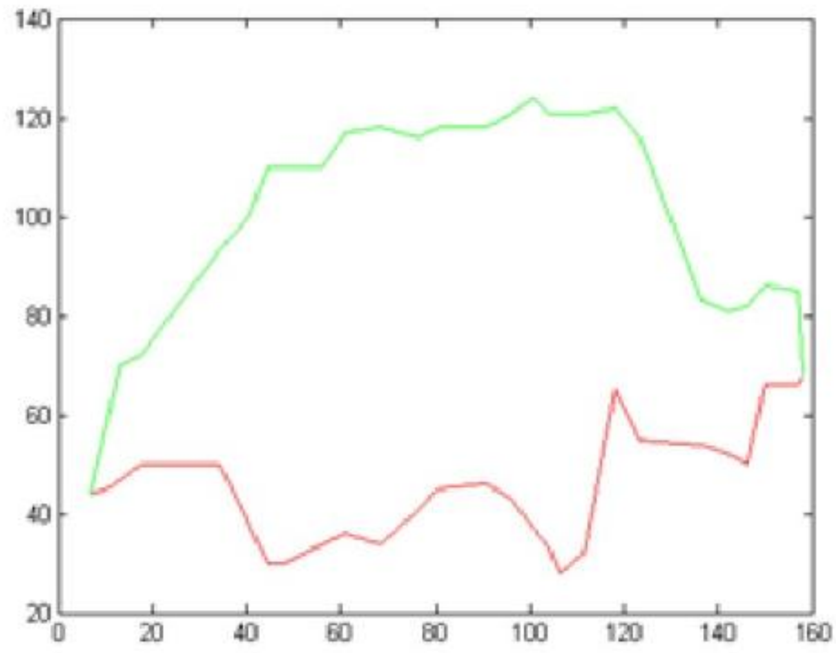
- 现要根据瑞士地图计算其国土面积。于是对地图作如下的测量：以西东方向为横轴，以南北方向为纵轴。（选适当的点为原点）将国土最西到最东边界在x轴上的区间划取足够多的分点x_i，在每个分点处可测出南北边界点的对应坐标y_1，y_2。用这样的方法得到下表
- 根据地图比例知18mm相当于40km，试由上表计算瑞士国土的近似面积。（精确值为41288km^2）。

x	7.0	10.5	13.0	17.5	34.0	40.5	44.5	48.0	56.0
y_1	44	45	47	50	50	38	30	30	34
y_2	44	59	70	72	93	100	110	110	110
x	61.0	68.5	76.5	80.5	91.0	96.0	101.0	104.0	106.5
y_1	36	34	41	45	46	43	37	33	28
y_2	117	118	116	118	118	121	124	121	121
x	111.5	118.0	123.5	136.5	142.0	146.0	150.0	157.0	158.0
y_1	32	65	55	54	52	50	66	66	68
y_2	121	122	116	83	81	82	86	85	68

- x=[7.0,10.5,13.0,17.5,34.0,40.5,44.5,48.0,56.0,61.0,68.5,76.5,80.5,91.0,96,101,104,106.5,111.5,118,123.5,136.5,142,146,150,157,158];
- y1=[44,45,47,50,50,38,30,30,34,36,34,41,45,46,43,37,33,28,32,65,55,54,52,50,66,66,68];
- y2=[44,59,70,72,93,100,110,110,110,117,118,116,118,118,121,124,121,121,121,122,116,83,81,82,86,85,68];
- plot(x,y1,'r',x,y2,'g')



- z1=trapz(x,y1);
- z2=trapz(x,y2);
- z=z2-z1;
- area=(z/(18*18))*40*40



二重和三重积分

矩形域上计算二重积分的命令：

```
dblquad(@fun,xmin,xmax,ymin,ymax,tol)
```

长方体上计算三重积分的命令：

```
triplequad(@fun,xmin,xmax,ymin,ymax, zmin,zmax,tol)
```

计算二重定积分 $I=\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} e^{-x^2/x}\sin(x^2+y)dxdy$

(1) 建立一个函数文件fxy.m：

- function f=fxy(x,y)
- f=exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y);

(2) 调用dblquad函数求解

- I=dblquad('fxy',-2,2,-1,1)

I =1.57449318974494

计算二重定积分 $I=\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} e^{-x^2/x}\sin(x^2+y)dxdy$

- f=@(x,y)(exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y));
- I=dblquad(f,-2,2,-1,1)

- **f=inline('exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y)','x','y');**
- **y=dblquad(f,-2,2,-1,1)**

y =

1.57449318974494

例6 计算三重定积分

命令如下：

```
fxyz=@(x,y,z)(4*x.*z.*exp(-z.*z.*y-x.*x));
triplequad(fxyz,0,pi,0,pi,0,1,1e-7)
ans=
    1.7328
```

实验题1

1．计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx$;

(3) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x} dx$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$;

(6) $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x} dx$;

2、计算积分 $I=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$，精度为 10^{-6}。

3、已知某火车行驶的速度随时间的变化关系如表 5.1 所示，计算从静止开始 20 分钟内火车行驶过的路程。（提示：火车从静止开始 20 分钟内行驶的路程为 $s=\int_0^{20} v(t)dt$）

表 5.1 火车的速度与时间

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

5.2　数值微分

数值差分与差商

任意函数f(x)在x点的导数是通过极限定义的：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h/2)-f(x-h/2)}{h}$$

如果去掉上述等式右端的h→0的极限过程，并引进记号：

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$$

分别称为函数在x点处以h(h>0)为步长的向前差分、向后差分和中心差分。

当步长h充分小时，有

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{\nabla f(x)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{\delta f(x)}{h}$$

分别称为函数在x点处以h(h>0)为步长的向前差商、向后差商和中心差商。当步长h(h>0)充分小时，函数f在点x的微分接近于函数在该点的任意一种差分，而f在点x的导数接近于函数在该点的任意一种差商。

在MATLAB中，没有直接提供求数值导数的函数，只有计算向前差分的函数diff，其调用格式为：

DX=diff(X)：计算向量X的向前差分

DX(i)=X(i+1)-X(i)，i=1,2,…,n-1。

DX=diff(X,n)：计算X的n阶向前差分

例如，diff(X,2)=diff(diff(X))。

DX=diff(A,n,dim)：计算矩阵A的n阶差分

dim=1时(缺省状态)，按列计算差分(相邻两行相减)；dim=2，按行计算差分。

(1)DX=diff(X)：计算向量X的<u>向前差分</u>，

DX(i)=X(i+1)-X(i)，i=1,2,…,n-1。

```
>> X=1:5
X =
    1    2    3    4    5
>> DX=diff(X)
DX =
    1    1    1    1
```

(2)DX=diff(X,n)：计算X的<u>n阶向前差分</u>。例如，

diff(X,2)=diff(diff(X))。

```
>> DX=diff(X,2)
DX =
    0    0    0
```

(3)DX=diff(A,n,dim)： 计算矩阵A的n阶差分，

dim=1时(缺省状态)，按列计算差分；

dim=2，按行计算差分。

```
>> A=fix(10*rand(3))
A =
    8     0     6
    7     8     7
    4     4     9
>> DX=diff(A)
DX =
   -1     8     1
   -3    -4     2
```

例3： $f(x)=\sqrt{x^3+2x^2-x+12}+\sqrt[6]{x+5}+5x+2$

求函数的数值导数，并画出 $f'(x)$ 的图像。

用两种方法：

1、直接求f(x)在假设点的数值导数；

2、求出g(x)=f '(x)的表达式

$$f'(x)=\frac{3x^2+4x-1}{2\sqrt{x^3+2x^2-x+12}}+\frac{1}{6\sqrt[6]{(x+5)^5}}+5$$

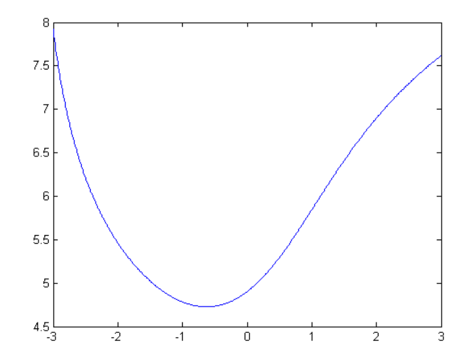
然后求f ' (x)在假设点的数值导数。

例3：$f(x)=\sqrt{x^3+2x^2-x+12}+\sqrt[6]{x+5}+5x+2$

求函数的数值导数，并画出 $f'(x)$ 的图像。

程序如下：

```
f=@(x)(sqrt(x.^3+2*x.^2-x+12)+(x+5).^(1/6)+5*x+2);
g=@(x)((3*x.^2+4*x-1)./sqrt(x.^3+2*x.^2-
  x+12)/2+1/6./(x+5).^(5/6)+5);
x=-3:0.01:3;
dx=diff(f([x,3.01]))/0.01;  %直接对f(x)求数值导数
gx=g(x);              %求函数f的导函数g在假设点的导数
plot(x,dx,'.',x,gx,'-');  %作图
```



Q & A

- 有什么问题吗？