George Gigilas Junior – 216741

Trabalho 1 – EE400

Como visto em aula, pode-se calcular áreas através de integrais duplas sobre uma determinada região. Porém, para calcular a área de polígonos irregulares de muitos lados, pode ficar muito difícil montar e/ou resolver a integral dupla, por conta do formato das regiões. Além disso, seria necessário montar uma integral dupla diferente para cada polígono.

Para facilitar esses casos, foi visto que se pode aplicar o Teorema de Green para calcular áreas, que consiste em transformar uma integral dupla em uma integral de linha, como segue na equação 1:

$$Área = \iint_R \ 1dxdy = \frac{1}{2}\oint_C \ xdy - y\,dx \quad (1)$$

Portanto, para calcular a área de um polígono, basta resolver a integral de linha. Como o polígono é formado por N vértices conhecidos, ele possui N arestas e é contínuo por partes (cada parte é uma aresta, que é um segmento de reta). Conhecidos 2 vértices e sabendo que eles se conectam por uma aresta, pode-se particionar e calcular a integral de linha como explicado na equação 2:

$$\oint_C \ xdy - ydx = \int_{A1}(xdy - ydx) + \int_{A2}(xdy - ydx) + \cdots + \int_{An}(xdy - ydx) \quad (2)$$

Para uma aresta i arbitrária, tem-se 2 vértices A = (xa, ya) e B = (xb, yb). Como a aresta é uma linha reta, pode-se parametrizar em t, de tal forma que $0 \leq t \leq 1$, x(t) = C.t + D, y(t) = E.t + F. A partir disso, obtive as equações 3 e 4:

$$x(t) = (xb - xa).t + xa \quad (3)$$
$$y(t) = (yb - ya).t + ya \quad (4)$$

Assim, para cada aresta A, a integral fica como na equação 5:

$$\int_A \ xdy - ydx =$$

$$\int_0^1 \{[(xb - xa).t + xa].(yb - ya) - [(yb - ya.t + ya].(xb - xa)\}dt = xa.yb - xb.ya \quad (5)$$

Dessa forma, repetindo para cada aresta, obtive a fórmula fechada descrita na equação 7 (o módulo garante que a área seja positiva):

$$Área = \iint_R \ 1dxdy = \frac{1}{2}\oint_C \ xdy - ydx = \frac{1}{2}|x1y2 - x2y1 + x2y3 - x3y2 + \cdots + xny1 - x1yn\ | \quad (6)$$

Para calcular o fluxo do campo vetorial através do polígono, como visto em aula, resolvi a integral descrita na equação 7 (lembrando da definição de produto escalar que <u, v> = |u||v|.cos(θ), sendo θ o ângulo entre u e v):

$$Fluxo = \ \iint_S \ \vec{F}.\hat{n}\ ds = \iint_S \ |\vec{F}|.1.\cos(\theta)\ ds \quad (7)$$

Como o campo vetorial é constante e o cosseno não varia em ds, podemos colocá-los de fora da integral. Além disso, assumindo o polígono em rotação, o ângulo entre o campo vetorial e o vetor normal ao polígono, em função do tempo, é dado por $\theta(T) = \theta_0 + \omega.T$, sendo θ_0 o ângulo inicial entre eles, e ω uma velocidade angular constante. Essa função θ(t) é obtida pela fórmula de posição em função do tempo para um corpo em movimento uniforme. O fluxo fica como segue na equação 8.

$$Fluxo = \ |\vec{F}|\cos(\theta_0 \ + \ \omega T)\iint_S \ ds \quad (8)$$

Como visto anteriormente, esta integral representa a área da superfície S, logo, o fluxo pode ser calculado como segue na equação 9:

$$Fluxo = \ |\vec{F}|\cos(\theta_0 \ + \ \omega T)\,.Área \quad (9)$$

Com base nesse desenvolvimento, tome um polígono de 23 lados de tal forma que seus vértices sejam: [[0,0], [1,2], [4,4], [5,5], [7,6], [8,7], [9,9], [11,10], [14,13], [15,14], [16,15], [18,17], [19,18], [22,19], [23,20], [26,18], [26,15], [22,14], [17,11], [14,7], [11,5], [7,3], [4,2]]. Suponha um campo vetorial uniforme $\vec{F}$ = (1,2,3). A partir disso, o polígono atravessado pelo campo fica como ilustrado na Figura 1:

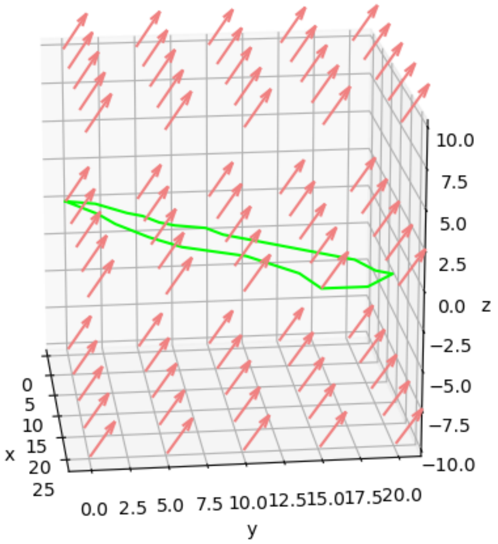

Figura 1 – Campo vetorial atravessando o captador

Calculando a norma do campo vetorial, a área, o ângulo inicial, e assumindo $\omega = \pi$ rad/s, obtive uma função do fluxo em função do tempo, e plotei a função através de um programa que fiz em Python. A variação do fluxo com o tempo fica como mostrado na Figura 2:

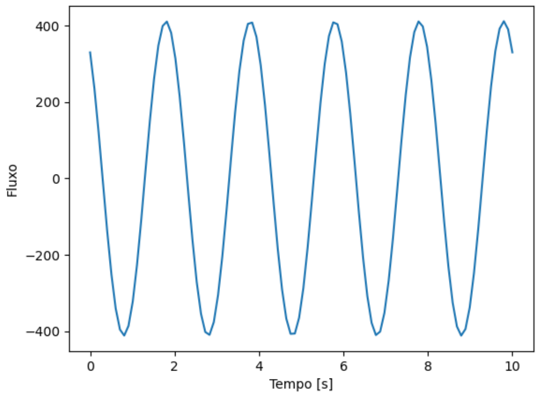

Figura 2 – Variação do fluxo do campo ao longo do tempo, através do polígono