

Trabalho 2- EE400

No amplo mundo da matemática, existem infinitas funções de diversos tipos. Algumas delas, como os polinômios, são bem conhecidas e fáceis de estudar (fáceis de calcular derivadas, raízes e integrais, por exemplo). Outras delas são mais peculiares e requerem muitos cálculos para serem estudadas, podendo até mesmo ter descontinuidades ou não possuir derivadas em determinados pontos. Por meio de séries, vimos em aula que podemos aproximar funções mais complexas por um somatório de funções mais fáceis de se trabalhar, como é o caso da série de Fourier (que aproxima funções periódicas, contínuas ou descontínuas, por soma de senos e cossenos) e da série de Taylor (que aproxima funções contínuas por uma soma de polinômios).

Vamos estudar a função periódica $x(t)$ tal que

$x(t) = t^2, 0 \leq t \leq 2\pi$ em que $x(t)$ se repete fora desse período.

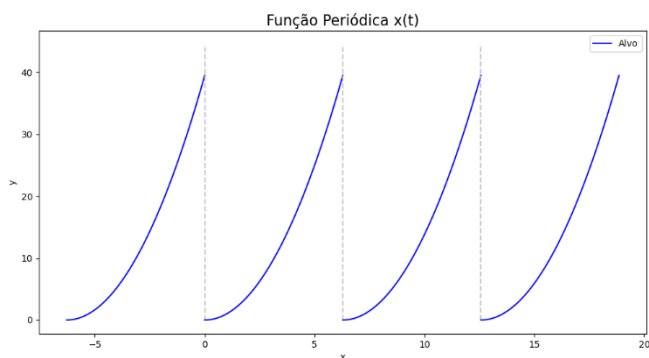


Figura 1 – Função periódica $x(t)$

Como podemos ver na Figura 1, $x(t)$ apresenta descontinuidades entre cada período. Por esse motivo, e pelo fato de a função ser periódica, a série de Fourier a modela muito bem. De acordo com o que foi visto em aula, assumindo um truncamento em $n = N$ (para poder ser representada em gráficos), calculei a série como segue na Equação 1.

$$F(t, N) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{Equação 1}$$

Sendo que a_n pode ser calculado como segue na Equação 2 (em que j é a unidade imaginária).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \oint x(t) e^{-j\omega n t} dt \quad \text{Equação 2}$$

Como o período $T = 2\pi$, podemos calcular ω como segue na Equação 3.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad \text{Equação 3}$$

Sendo assim, podemos reescrever as Equações 1 e 2 como sendo, respectivamente, as Equações 4 e 5.

$$F(t, N) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nt + \varphi_n) \quad \text{Equação 4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \oint x(t) e^{-jnt} dt \quad \text{Equação 5}$$

A partir disso, calculei uma expressão para o a_n partindo da Equação 5 para a Equação 6.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \oint x(t) e^{-jnt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-jnt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 e^{-jnt} dt \quad \text{Equação 6}$$

Para resolver essa integral, é preciso lembrar da estratégia de integração por partes, que segue como explicitado na Equação 7.

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt \quad \text{Equação 7}$$

Dessa forma, eu desenvolvi a Equação 6 com integração por partes para encontrar a fórmula fechada para o a_n .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 e^{-jnt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)g(t)dt, \quad \text{em que } f'(t) = e^{-jnt} \text{ e } g(t) = t^2$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)g(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\int e^{-jnt} dt * t^2 \right] \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t * \left(\int e^{-jnt'} dt' \right) dt \right) \quad \text{Equação 8} \end{aligned}$$

Para resolver a Equação 8, eu calculei a integral $\int e^{-jnt} dt$ como segue na Equação 9.

$$\int e^{-jnt} dt = \frac{-1}{jn} e^{-jnt} \quad \text{Equação 9}$$

A partir da Equação 8 e da Equação 9, obtive a Equação 10.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f'(t)g(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-1}{jn} e^{-jnt} * t^2 \right] \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t * \left(\frac{-1}{jn} e^{-jnt} \right) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{jn} [(2\pi)^2 (e^{-jn2\pi}) - (0 * 1)] - \int_0^{2\pi} 2t * \frac{1}{jn} [-e^{-jnt}] dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-4\pi^2}{jn} [e^{-jn2\pi}] + \frac{2}{jn} \int_0^{2\pi} t * e^{-jnt} dt \right) \quad \text{Equação 10} \end{aligned}$$

Novamente, é necessário realizar integração por partes. Dessa vez $f'(t) = e^{-jnt}$ e $g(t) = t$ e, a partir da Equação 10, obtive a Equação 11.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-4\pi^2}{jn} [e^{-jn2\pi}] + \frac{2}{jn} \int_0^{2\pi} t * e^{-jnt} dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-4\pi^2}{jn} [e^{-jn2\pi}] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{jn} \left[\frac{-1}{jn} e^{-jnt} * t \right]_0^{2\pi} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \frac{-1}{jn} e^{-jnt} dt \right) \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-4\pi^2}{jn} [e^{-jn2\pi}] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{jn} \left(\frac{-1}{jn} [2\pi * e^{-jn2\pi} - 0 * e^0] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{-1}{jn} \frac{-1}{jn} [e^{-jn2\pi} - 1] \right) \right) \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-4\pi^2}{jn} [e^{-jn2\pi}] + \frac{2}{jn} \left(\frac{-2\pi}{jn} [e^{-jn2\pi}] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{j^2 n^2} [e^{-jn2\pi} - 1] \right) \right) \text{Equação 11}
 \end{aligned}$$

Para passarmos para o domínio real, da equação de Euler sabemos que $e^{-ja} = \cos(a) - j\sin(a)$.

Logo, $e^{-jn2\pi} = \cos(2n\pi) - j\sin(2n\pi)$. Como estamos interessados somente na solução real, para serem aplicados na série de Fourier, podemos assumir que $e^{-jn2\pi} = \cos(2n\pi)$. A partir disso, obtive a Equação 12

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-4\pi^2}{jn} [e^{-jn2\pi}] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{jn} \left(\frac{-2\pi}{jn} [e^{-jn2\pi}] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{j^2 n^2} [e^{-jn2\pi} - 1] \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-4\pi^2}{jn} [\cos(2n\pi)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{jn} \left(\frac{-2\pi}{jn} [\cos(2n\pi)] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{j^2 n^2} [\cos(2n\pi) - 1] \right) \right) \\
 &= \frac{-4\pi}{jn} \cos(2n\pi) + \frac{4}{n^2} \cos(2n\pi) \\
 &\quad + \frac{2}{jn^3} [\cos(2n\pi) - 1] \\
 &= \frac{1}{j} \left(\cos(2n\pi) \left[\frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} \right] - \frac{2}{\pi n^3} \right) + \frac{4}{n^2} \cos(2n\pi)
 \end{aligned}$$

Podemos reescrever $\frac{1}{j} = j^{-1} = (0 + j)^{-1}$

$= (\cos(\frac{\pi}{2}) + j \cdot \sin(\frac{\pi}{2}))^{-1} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{-1} = e^{-\frac{j\pi}{2}}$, ficando com

$$\begin{aligned}
 a_n &= e^{-\frac{j\pi}{2}} \left(\cos(2n\pi) \left[\frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} \right] - \frac{2}{\pi n^3} \right) \\
 &\quad + \frac{4}{n^2} \cos(2n\pi) \text{Equação 12}
 \end{aligned}$$

Adicionalmente, para representarmos corretamente a função periódica pela série de Fourier, precisamos adicionar um valor constante a_0 que é dado pelo valor médio de $x(t)$ durante um período. Encontrei esse valor como segue na equação 13.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{6\pi} \\
 &= \frac{4\pi^2}{3} \text{Equação 13}
 \end{aligned}$$

Sendo assim, a partir das Equações 4, 12 e 13, eu representei a função periódica como segue na Equação 14.

$$\begin{aligned}
 F(t, N) &= \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^N \left\{ e^{-\frac{j\pi}{2}} \left(\cos(2n\pi) \left[\frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2}{\pi n^3} \right) + \frac{4}{n^2} \cos(2n\pi) \right\} * (\cos(nt)) \\
 &\text{Equação 14}
 \end{aligned}$$

Por fim, como $e^{-\frac{j\pi}{2}} \cos(nt) = e^{-\frac{j\pi}{2}} e^{jnt} = e^{j(\frac{-\pi}{2} + nt)} = \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right)$, eu reescrevi a Equação 14 como segue na Equação 15, obtendo a representação final da função periódica aproximada pela série de Fourier.

$$\begin{aligned}
 F(t, N) &= \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\cos(2n\pi) \left[\frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2}{\pi n^3} \right) * \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{n^2} \cos(2n\pi) * (\cos(nt)) \right\} \\
 &\text{Equação 15}
 \end{aligned}$$

A partir dessa aproximação e de um código em Python que eu fiz, construí gráficos para visualizar essa aproximação para 4 valores de N: 4, 10, 40, 150. Esses gráficos estão representados nas Figuras 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

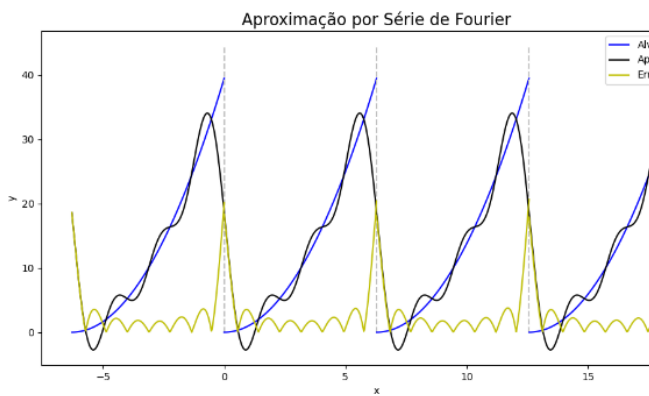


Figura 2 – Aproximação por série de Fourier para N = 4

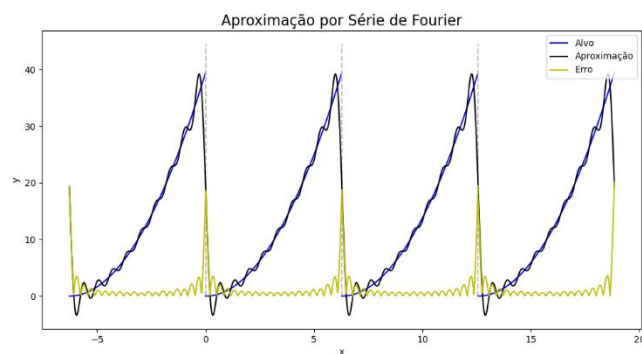


Figura 3 – Aproximação por série de Fourier para N = 10

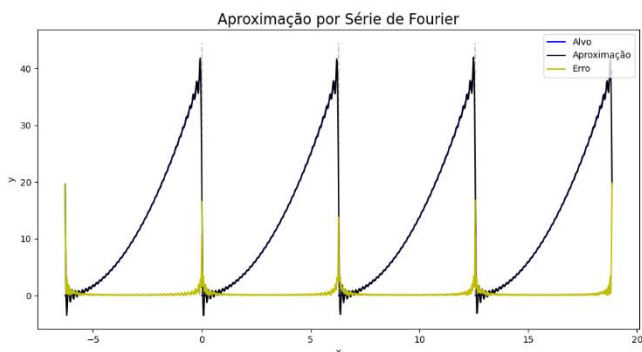


Figura 4 – Aproximação por série de Fourier para N = 40

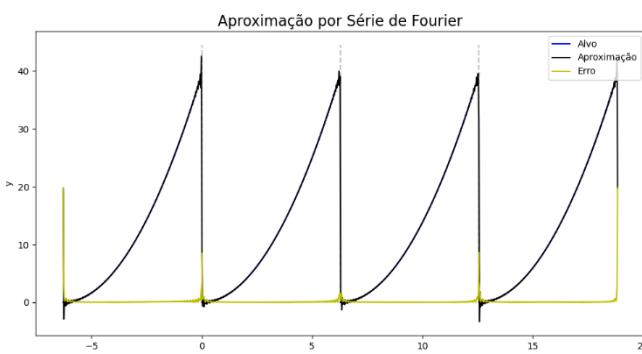


Figura 5 – Aproximação por série de Fourier para N = 150

Como podemos ver, nas figuras 2, 3, 4 e 5 fica bem nítido que o erro (diferença entre aproximação e função original) tende a 0 conforme aumenta o número de coeficientes (valor de N). Porém, independente do valor de N, é possível notar picos e vales nas regiões de

descontinuidade (fenômeno conhecido por fenômeno de Gibbs). Tal fenômeno é intrínseco à série de Fourier, e torna a aproximação ruim para os valores em que t está na região de descontinuidade. Porém, a aproximação funciona muito bem para os outros valores de t e fica quase perfeita para N = 150.

Diante disso, podemos nos indagar se a série de Taylor funcionaria melhor para aproximar essa função. Para visualizar essa aproximação, calculei a série de Taylor como segue na Equação 16, assumindo $t_0 = 0$ para estudar a aproximação ao redor desse ponto.

$$L(t, N) = \sum_{n=0}^N a_n (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^N a_n t^n \quad \text{Equação 16}$$

Sendo que os coeficientes a_n são calculados como segue na Equação 17.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{Equação 17}$$

Em $t = t_0$, $x(t) = t^2$. Portanto, temos que $f^{(0)}(0) = t_0^2 = 0$, $f^{(1)}(0) = 2 * t_0 = 2 * 0 = 0$, $f^{(2)}(0) = 2$ e, para valores de n maiores que 2, $f^{(n)}(0) = 0$.

Logo, o único coeficiente que não será nulo é o a_2 , cujo cálculo foi realizado como segue na Equação 18.

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{Equação 18}$$

Sendo assim, a representação final da série de Taylor ficou como segue na Equação 19.

$$L(t, N) = a_2 t^2 = 1 t^2 = t^2 \quad \text{Equação 19}$$

Como pôde-se notar ao longo desse desenvolvimento, a aproximação da série de Taylor para essa função independe de N (desde que $N \geq 2$), pois todos os coeficientes são nulos, com exceção de a_2 . Portanto, o erro da aproximação não muda conforme aumentamos o número de coeficientes.

Para visualizar essa aproximação, fiz um código em Python que gerou a Figura 6.

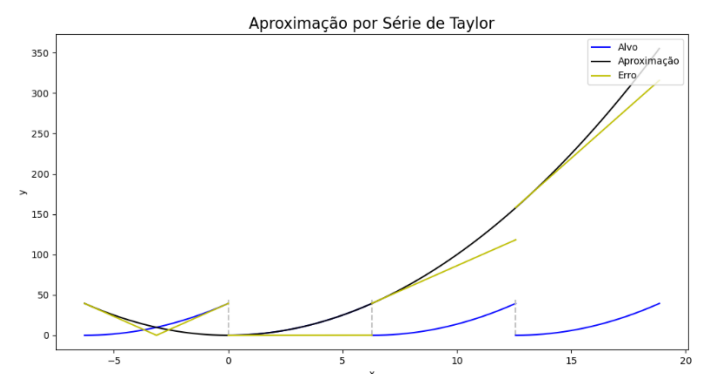


Figura 6 – Aproximação por série de Taylor

A partir da Figura 6, fica bem evidente que a série de Taylor não funciona fora do período $0 \leq t \leq 2\pi$, por conta das descontinuidades. Apesar disso, a aproximação modela perfeitamente a função para os valores de t dentro do período mencionado, obtendo erro nulo. Além disso, não existe nenhum ponto dentro do período para qual a aproximação sofra algum fenômeno de distorção.

Em suma, a aproximação por série de Fourier funciona melhor de um modo geral, porque ela admite descontinuidades (apesar do fenômeno de Gibbs que torna a aproximação ruim, com erro grande, para alguns pontos). Já a aproximação por série de Taylor é melhor apenas dentro de um período, mas é muito ruim fora dele, possuindo um erro bem gritante.

De maneira geral, a série de Taylor tende a ser melhor (em termos de minimização de erro) para qualquer função que seja contínua, em torno de t_0 (podendo ter erros maiores longe desse ponto). Por outro lado, a série de Fourier é uma alternativa muito melhor para funções que possuem descontinuidades. Pensando nisso, podemos nos indagar se uma mistura das duas séries poderia produzir um erro menor. Para verificar se isso gera uma aproximação com menos erro, utilizei a aproximação da função periódica por série de Fourier ($F(t, N)$) e aproximei-a por série de Taylor pela função $L(F(t, N), M)$, como segue na Equação 20.

$$L(F(t, N), M) = \sum_{m=0}^M b_m (t - t_0)^m \quad \text{Equação 20}$$

Para isso, calculei os coeficientes b_m como segue na Equação 21.

$$b_m = \frac{F^{(m)}(t_0, N)}{m!} \quad \text{Equação 21}$$

Considerando as constantes A e B , tal que

$$A = \frac{4}{n^2} \cos(2n\pi) \text{ e } B = \cos(2n\pi) \left[\frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} \right] - \frac{2}{\pi n^3},$$

$$\text{e que } \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(nt) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) +$$

$\sin(nt) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \sin(nt) = \sin(nt)$, podemos reescrever a série de Fourier (Equação 15) como segue na Equação 22.

$$F(t, N) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^N [A \cdot \cos(nt) + B \cdot \sin(nt)] \quad \text{Equação 22}$$

É interessante notar que o termo constante $\frac{4\pi^2}{3}$ só faz parte do coeficiente b_0 , pois, ao derivar, o termo some por não ser dependente de t . Seguindo isso, calculei b_0 como segue na Equação 23.

$$b_0 = \frac{\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^N [A \cdot \cos(nt) + B \cdot \sin(nt)]}{0!}$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^N [A \cdot \cos(nt) + B \cdot \sin(nt)] \quad \text{Equação 23}$$

Para os demais coeficientes, notei um padrão que me permitiu calcular os coeficientes facilmente: os termos que dependem de t são funções seno e cosseno. Uma propriedade dessas funções é que as derivadas são cíclicas (como mostrado nas equações 24, 25, 26 e 27) e são previsíveis com base no resto da divisão de m por 4.

$$\frac{d(\cos(nt))}{dt} = -\sin(t) \cdot n \quad \text{Equação 24}$$

$$\frac{d^2(\cos(nt))}{dt^2} = -\cos(t) \cdot n^2 \quad \text{Equação 25}$$

$$\frac{d^3(\cos(nt))}{dt^3} = \sin(t) \cdot n^3 \quad \text{Equação 26}$$

$$\frac{d^4(\cos(nt))}{dt^4} = \cos(t) \cdot n^4 \quad \text{Equação 27}$$

Aproveitando dessa propriedade (e da propriedade aditiva da derivação), as m -ésimas derivadas dos termos da série de Fourier são previsíveis e $F^{(m)}(t, N)$ será igual à Equação 28, se $m \bmod 4 = 0$, igual à Equação 29, se $m \bmod 4 = 1$, igual à Equação 30, se $m \bmod 4 = 2$ ou igual à Equação 31, se $m \bmod 4 = 3$.

$$F^{(m)}(t_0, N) = \sum_{n=1}^N (A \cdot \cos(nt_0) \cdot n^m + B \cdot \sin(nt_0) \cdot n^m) \quad \text{Equação 28}$$

$$F^{(m)}(t_0, N) = \sum_{n=1}^N (-A \cdot \sin(nt_0) \cdot n^m + B \cdot \cos(nt_0) \cdot n^m) \quad \text{Equação 29}$$

$$F^{(m)}(t_0, N) = \sum_{n=1}^N (-A \cdot \cos(nt_0) \cdot n^m - B \cdot \sin(nt_0) \cdot n^m) \quad \text{Equação 30}$$

$$F^{(m)}(t_0, N) = \sum_{n=1}^N (A \cdot \sin(nt_0) \cdot n^m - B \cdot \cos(nt_0) \cdot n^m) \quad \text{Equação 31}$$

Portanto, com base nas equações 28, 29, 30 e 31, eu reescrevi b_m de forma que b_n será igual à Equação 32, se $m \bmod 4 = 0$, igual à Equação 33, se $m \bmod 4 = 1$, igual à Equação 34, se $m \bmod 4 = 2$ ou igual à Equação 35, se $m \bmod 4 = 3$.

$$b_m = \frac{\sum_{n=1}^N (A \cdot \cos(nt_0) \cdot n^m + B \cdot \sin(nt_0) \cdot n^m)}{m!}$$

$$\text{Equação 32}$$

$$b_m = \frac{\sum_{n=1}^N (-A \cdot \sin(nt_0) \cdot n^m + B \cdot \cos(nt_0) \cdot n^m)}{m!}$$

Equação 33

$$b_m = \frac{\sum_{n=1}^N (-A \cdot \cos(nt_0) \cdot n^m - B \cdot \sin(nt_0) \cdot n^m)}{m!}$$

Equação 34

$$b_m = \frac{\sum_{n=1}^N (A \cdot \sin(nt_0) \cdot n^m - B \cdot \cos(nt_0) \cdot n^m)}{m!}$$

Equação 35

Dessa forma, utilizei os resultados das Equações 23, 32, 33, 34 e 35 na Equação 20 para calcular a aproximação $L(F(t, N), M)$. Diante disso, utilizei esses resultados para montar um código em Python que fizesse um gráfico com essa aproximação, juntamente com a função periódica original e o erro. A partir desse código, variei os valores de N e M para verificar como a aproximação se comporta em função deles. Com N=15, fiz o gráfico para M=100 (Figura 7) e M=10 (Figura 8). Com N=40, fiz o gráfico para M=100 (Figura 9) e M=10 (Figura 10). Com N=150, fiz o gráfico para M=100 (Figura 11) e M=10 (Figura 12). Para comparar melhor as aproximações, utilizei $t_0 = 0$, que é um ponto próximo de uma região de descontinuidade e, portanto, é uma região que nenhuma das séries aproxima sem distorção. Uma limitação computacional enfrentada é que o Python não permite aumentar muito o valor de M por conta de overflow.

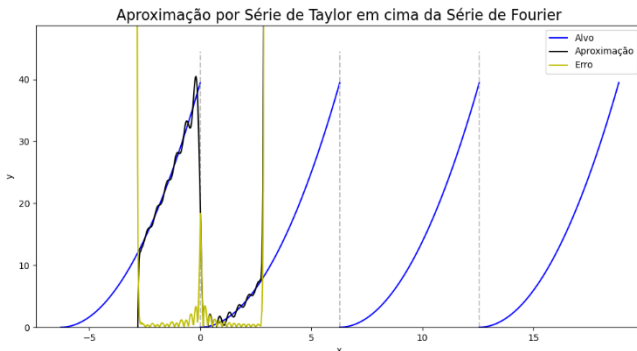


Figura 7 – Aproximação da série de Fourier por série de Taylor para N=15 e M=100

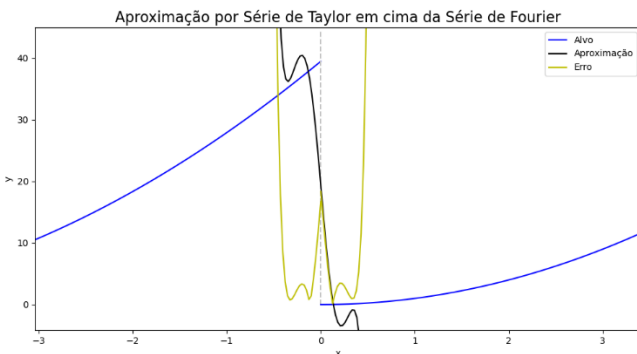


Figura 8 – Aproximação da série de Fourier por série de Taylor para N=15 e M=10 (com zoom)

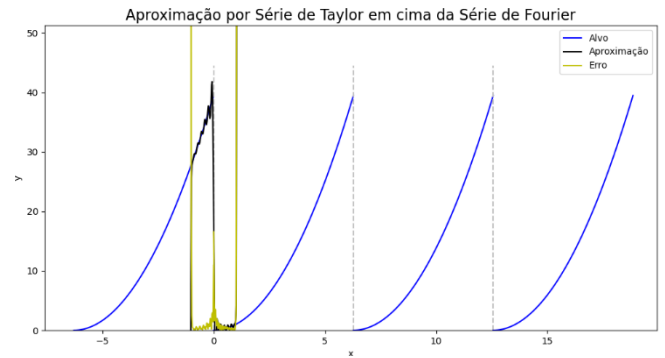


Figura 9 – Aproximação da série de Fourier por série de Taylor para N=40 e M=100

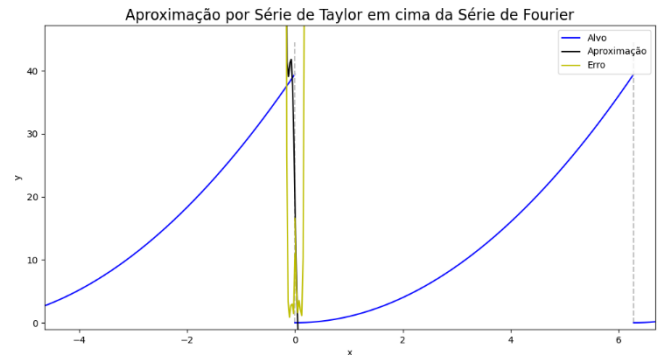


Figura 10 – Aproximação da série de Fourier por série de Taylor para N=40 e M=10 (com zoom)

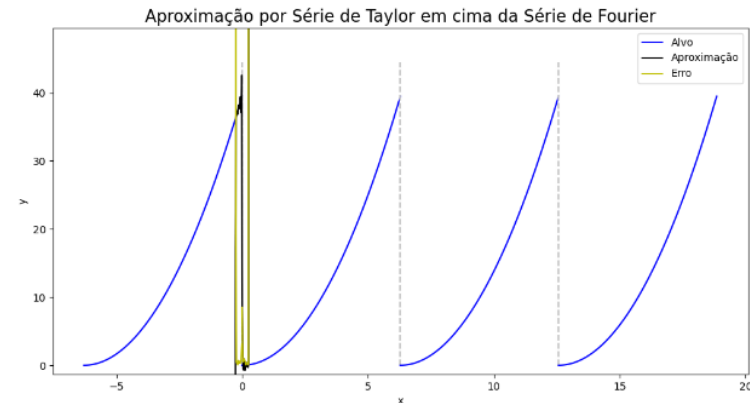


Figura 11 – Aproximação da série de Fourier por série de Taylor para N=150 e M=100

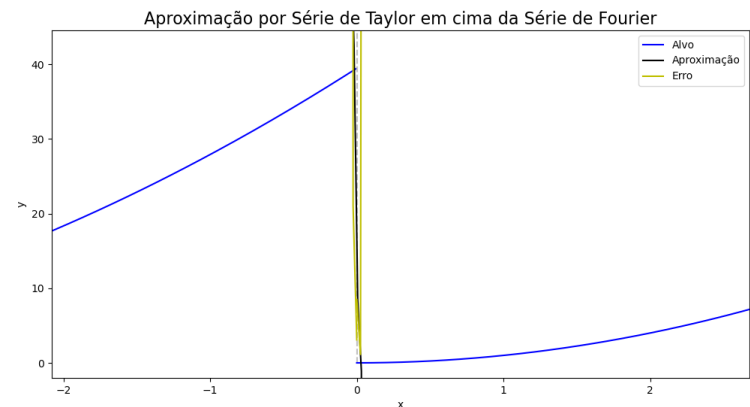


Figura 12 – Aproximação da série de Fourier por série de Taylor para $N=150$ e $M=10$ (com zoom)

A partir das figuras geradas (Figuras 7, 8, 9, 10, 11 e 12), percebemos que a aproximação funciona apenas em um intervalo ao redor de t_0 e que a função cresce muito rapidamente fora desse intervalo. Nesse quesito, em se tratar de erro absoluto, a aproximação pela série de Fourier era melhor e a da série de Taylor também era melhor em alguns casos (nos casos em que esse intervalo é menor que 2π). Isso ocorre porque a série de Taylor visa minimizar o erro em torno de t_0 e, com um número finito de coeficientes (M), sempre haverá um erro que estará próximo ou longe de t_0 (dependendo de M).

Além disso, podemos perceber algumas tendências em função de N e de M . Comparando a Figura 7 com a Figura 8, a Figura 9 com a Figura 10 e a Figura 11 com a Figura 12, é fácil notar que o tamanho do intervalo para o qual a aproximação é próxima da função original é maior quando M é maior. Isso acontece porque o polinômio de grau 100 tem 10 vezes o grau de liberdade do polinômio de grau 10, o que possibilita que o polinômio de grau 100 oscile mais vezes, acomodando melhor a curva para a função original.

Uma outra tendência, observada ao comparar as Figuras 7, 9 e 11, é que, ao passo que a aproximação exibe um erro menor no intervalo ao redor de t_0 quanto maior for N , esse intervalo diminui conforme o N aumenta. Essa tendência ocorre porque, quanto maior for N , maior o número de senóides adicionadas à série e, conseqüentemente, maior o valor do coeficiente b_m que multiplica $(t - t_0)^m$ e mais rápido o polinômio cresce.

Por um lado, essa aproximação é melhor do que a aproximação por série de Taylor, porque é possível obtê-la em regiões de descontinuidades, o que é um grande diferencial. Por outro lado, a aproximação por série de Taylor cobre melhor o intervalo contínuo, com erro nulo dentro dele.

Já em relação à série de Fourier, comparando as Figuras 5 e 11, podemos perceber uma leve diminuição no fenômeno de Gibbs. Na figura 11, parece que o pico de transição entre períodos ocorre apenas no próprio ponto de descontinuidade, enquanto na figura 5 existem alguns picos um pouco antes. Porém, a aproximação pela série de Fourier consegue cobrir todo o domínio com erro bastante baixo (com exceção dos limites de descontinuidade), enquanto a aproximação da série de Fourier pela série de Taylor cobre apenas um pequeno intervalo.

De modo geral, um ponto positivo dessa aproximação é que ela reduz o intervalo em que ocorre fenômeno de Gibbs, que é a principal desvantagem da série de

Fourier. Porém, isso ocorre a custo de limitar muito o intervalo para o qual a aproximação é válida, o que é uma grande desvantagem dessa abordagem.

Com base no que foi desenvolvido até aqui, direciono o foco à pergunta que inspirou esse trabalho: “seria interessante aproximar $x(t)$, que tem várias descontinuidades, por sua série de Fourier, e então aproximar a série de Fourier através da série de Taylor? Em que aspectos teríamos ganhos? Em que aspectos teríamos perdas?”. Após todos esses cálculos, raciocínios e as interpretações dos gráficos, concluo que essa aproximação pode ser interessante dependendo do que a pessoa está buscando com a aproximação. Se o objetivo é estudar a função ao longo de um grande intervalo, eu diria que essa aproximação não é nada interessante, pois ela gera um erro muito maior do que a aproximação de Fourier tradicional. Porém, se o objetivo da pessoa é estudar a função em um intervalo curto e próximo à região de descontinuidade, essa aproximação pode ser muito interessante, pois ela atenua o fenômeno de Gibbs e aproxima muito bem a função dentro de um intervalo pequeno.