测定金属的杨氏模量

马江岩

2021 年 11 月 20 日

摘要

杨氏模量是反映材料弹性性质的参量之一, 是设计各种工程结构时选用材料的主要依据之一. 本实验我利用伸长法测量了金属丝的杨氏模量, 并用逐差法和最小二乘法两种方法进行了数据处理, 对两种数据处理的方法进行了比较.

1 CCD 成像系统测定杨氏模量

1.1 实验原理

根据胡克定律, 材料在弹性限度内, 正应力的大小 σ 与应变 ε 成正比, 即

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1}$$

式中的比例系数 E 称为弹性模量, 又称杨氏模量, 其单位为 Pa(帕斯卡), $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$. 对于长为 L、截面积为 S 的均匀金属丝, 在沿长度方向的外力 F 作用下伸长 δL, 有 $\sigma = F/S$, $\varepsilon = \delta L/L$, 代入式(1), 则有

$$E = \frac{FL}{S\delta L}. \tag{2}$$

设实验中金属丝的直径为 d, 金属丝下悬挂的砝码总质量为 m, 则 $F = mg$, $S = \pi d^2/4$, 代入式(2), 得

$$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \delta L}. \tag{3}$$

我们逐次增加金属丝悬挂的砝码的数量, 并测出金属丝的伸长量, 利用(3)式即可求出金属丝的杨氏模量.

用 CCD 成像系统测杨氏模量装置如图 1 所示.

图 1 中, S 为金属丝的支架, 高约 110 cm. 支架顶端设有金属丝悬挂装置, 金属丝下端连接一小圆柱, 圆柱中部的方形窗中有细横线供读数用. 小圆柱下端附有砝码托. 显微镜 M 用来观测金属丝下端小圆柱中部的方形窗中细横线位置及其变化情况, 显微镜目镜前方装有分划

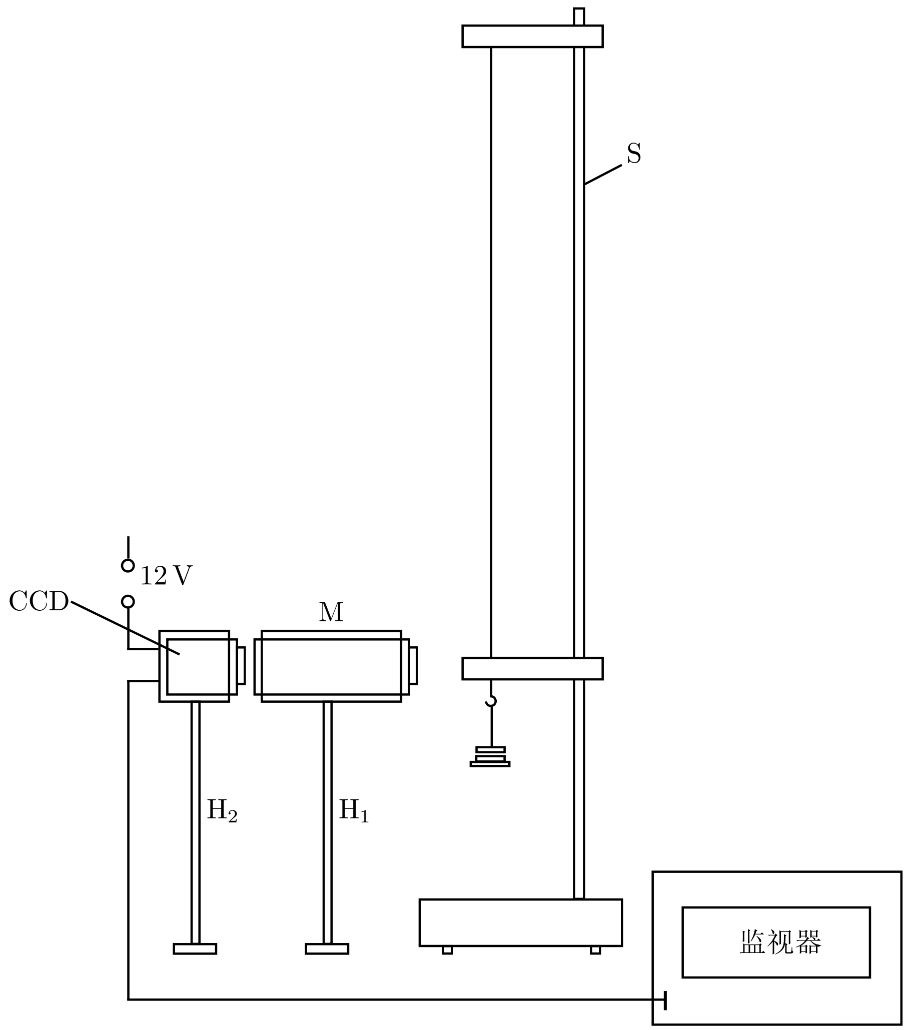

图 1: CCD 系统测定杨氏模量示意图.

板, 其刻度范围为 $0 \sim 6.5\,\mathrm{mm}$, 分度值为 $0.05\,\mathrm{mm}$. H_1 为显微镜支架, H_2 为 CCD 摄像机支架. 以上显微镜及 CCD 成像显示系统的总放大率为 62.5.

1.2 实验过程

调支架 S 竖直 (用底脚螺丝调节), 使金属丝下端的小圆柱与钳形平台间无摩擦地上下自由移动, 旋转金属丝上端夹具, 使圆柱两侧刻槽对准钳形平台两侧限制圆柱转动的小螺丝; 两侧同时对称地将限转螺丝旋入圆柱刻槽中部, 并注意调整后将摩擦减至最小.

用具有两个卡口的米尺测量金属丝的有效长度 (一次测量), 结果为

$$L = 78.48\,\mathrm{cm}.$$

取米尺的分度值为其极限误差, 则 $e_L = 0.1\,\mathrm{cm}$, $\sigma_L = 0.06\,\mathrm{cm}$. 故金属丝长度测量结果为

$$L = (78.48 \pm 0.06)\,\mathrm{cm}.$$

用螺旋测微器测量金属丝不同部位的直径, 共测 10 次, 数据如表 1 所示.

表 1: 测量金属丝直径数据表.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d(mm)	0.321	0.320	0.320	0.316	0.321	0.319	0.320	0.321	0.322	0.320

金属丝直径的平均值为

$$\overline{d} = 0.3200\,\mathrm{mm},$$

多保留一位是因为所测直径的数据较为集中, 平均值的不确定度小. $\overline{d}$ 的不确定度为

$$\sigma_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(d_i - \overline{d})^2}{10 \times (10-1)}} = 0.0005\,\mathrm{mm}.$$

由教材上的资料, 千分尺的允差为 $e_d = 0.004\,\mathrm{mm}$. 将其与 $\sigma_{\overline{d}}$ 合成, 得 d 的不确定度为

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{\overline{d}}^2 + \frac{e_d^2}{3}} = 0.002\,\mathrm{mm}.$$

减去千分尺的零点读数 $d_0 = -0.002\,\mathrm{mm}$, 得到金属丝直径的测量结果为

$$d = (0.322 \pm 0.002)\,\mathrm{mm}.$$

这里就不多保留一位了, 因为千分尺的仪器允差较大, 在金属丝直径的不确定度中起主要作用.

表 2: 测量砝码质量数据表.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m(g)	200.30	199.45	199.93	199.81	199.99	199.89	199.82	200.33	200.11

将 9 个砝码从 1 到 9 依次编号, 用数字天平测量它们的质量, 如表 2 所示.

砝码质量的平均值为

$$\overline{m} = 199.96\,\mathrm{g},$$

$\overline{m}$ 的不确定度为

$$\sigma_{\overline{m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}(m_i - \overline{m})^2}{9\times(9-1)}} = 0.09\,\mathrm{g}.$$

取数字天平的最小分度值为其极限误差, 则 $e_m = 0.01\,\mathrm{g}$. 将其与 $\sigma_{\overline{m}}$ 合成, 得 m 的不确定度为

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_{\overline{m}}^2 + \frac{e_m^2}{3}} = 0.09\,\mathrm{g}.$$

可见, $\sigma_{\overline{m}}$ 在 m 的不确定度中起主要作用. 故砝码平均质量的测量结果为

$$m = (199.96 \pm 0.09)\,\mathrm{g}.$$

先调显微镜目镜, 用眼睛看到清晰的分划板像, 再调物镜对小圆柱中部方形窗内细横刻线聚焦. 仔细调整 CCD 位置以及镜头光圈和焦距, 直到在监视器屏幕上看到清晰的图像, 如图 2 所示.

按编号从 1 到 9 的顺序, 在砝码托盘上逐次加砝码, 金属丝伸长后, 对应的读数为 $r_i(i = 0,1,2,\ldots,9)$. 再按编号从 9 到 1 的顺序将所加砝码逐个取下, 记下对应的读数为 $r_i'(i = 0,1,2,\ldots,9)$, 数据如表 3 所示.

根据相关资料, 北京地区的重力加速度为 $g = 9.801\,\mathrm{m/s^2}$.

1.3 用逐差法处理数据

由逐差法, δL 的平均值为

$$\overline{\delta L} = \frac{1}{25}\times\sum_{i=0}^{4}(\delta L)_i = 0.116\,\mathrm{mm},$$

平均值的不确定度为

$$\sigma_{\overline{\delta L}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{4}\left((\delta L)_i/5 - \overline{\delta L}\right)^2}{5\times(5-1)}} = 0.004\,\mathrm{mm}.$$

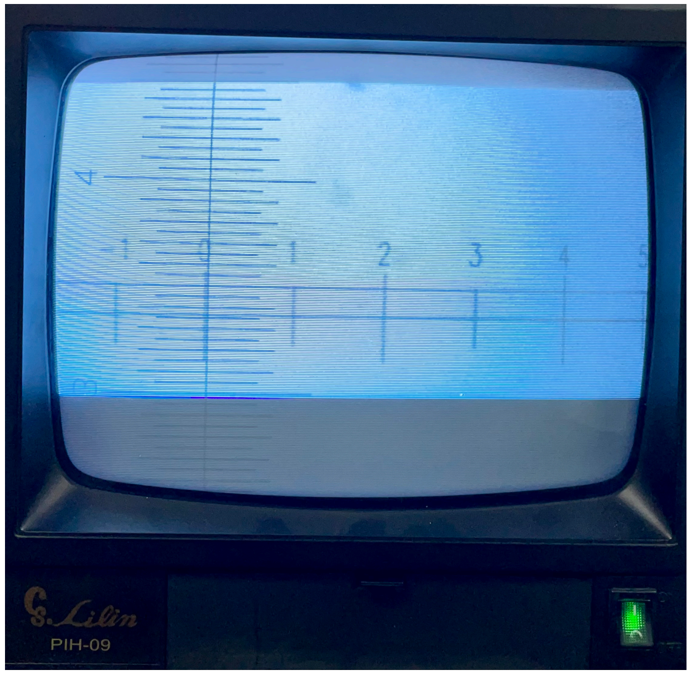

图 2: 监视器屏幕上的图像. 由于监视器屏幕的刷新率与手机摄像头的刷新率不一致, 拍摄出的屏幕中有一部分看起来是黑色的.

表 3: 测量金属丝受外力拉伸后的伸展变化数据表.

i	m_i/g	r_i/mm	r'_i/mm	$\bar{r}$/mm	$\delta L = (\bar{r}_{i+5} - \bar{r}_i)$ /mm
0	0.00	3.35	3.34	3.345	0.650
1	200.30	3.51	3.50	3.505	0.595
2	399.75	3.65	3.65	3.650	0.560
3	599.68	3.75	3.78	3.765	0.570
4	799.49	3.89	3.90	3.895	0.535
5	999.48	4.00	3.99	3.995	/
6	1199.37	4.10	4.10	4.100	/
7	1399.19	4.20	4.22	4.210	/
8	1599.52	4.34	4.33	4.335	/
9	1799.63	4.44	4.42	4.430	/

取目镜分划线的最小分度值为极限误差, 则 $e_{\delta L} = 0.05\,\mathrm{mm}$. 由于逐差法是逐 5 个数据求差, 故误差合成时我们应将其除以 5. 将 $e_{\delta L}$ 与 $\sigma_{\overline{\delta L}}$ 合成, 得 δL 的不确定度为

$$\sigma_{\delta L} = \sqrt{\sigma_{\overline{\delta L}}^2 + \frac{(e_{\delta L}/5)^2}{3}} = 0.007\,\mathrm{mm}.$$

故

$$\delta L = (0.116 \pm 0.007)\,\mathrm{mm}.$$

将相关物理量代入(3)式, 得

$$E = 1.62 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa},$$

其不确定度为

$$\sigma_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\delta L}}{\delta L}\right)^2} = 0.10 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

故金属丝杨氏模量的测量结果为

$$E = (1.62 \pm 0.10) \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

1.4 用最小二乘法处理数据

由于 m 的相对误差较小, 因此我们将 m 作为自变量, 将 $\overline{r}$ 作为因变量, 拟合直线如图 3 所示.

经计算, 拟合直线的斜率为

$$k = 0.59\,\mathrm{mm/kg},$$

$\overline{r}$ 与 m 的相关系数为

$$r = 0.998.$$

若不考虑 $\overline{r}$ 的误差, 斜率 k 的不确定度为

$$\sigma_{k1} = k\sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}} = 0.014\,\mathrm{mm/kg}.$$

但实际上因变量 $\overline{r}$ 的测量也存在误差. 取其极限误差为显微镜目镜分划线的最小分度值 $e_{\overline{r}} = 0.05\,\mathrm{mm}$, 则

$$\sigma_{\overline{r}} = \frac{e_{\overline{r}}}{\sqrt{3}} = 0.029\,\mathrm{mm}.$$

故由 $\overline{r}$ 的测量引起的 k 的误差为

$$\sigma_{k2} = \frac{\sigma_{\overline{r}}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{9} (m_i - \overline{m})^2}} = 0.016\,\mathrm{mm/kg}.$$

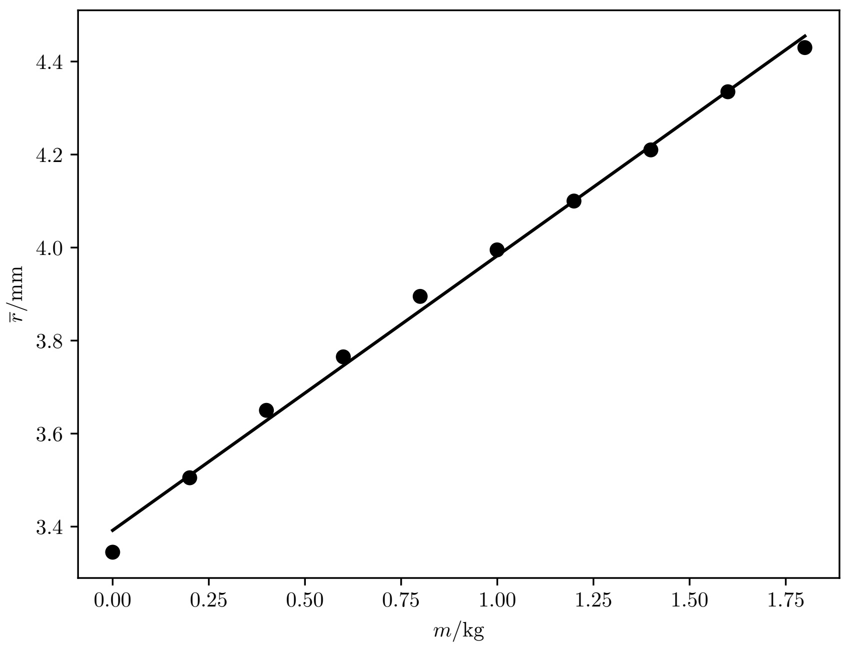

图 3: $\bar{r} - m$ 图拟合直线.

将 σ_{k1} 与 σ_{k2} 合成, 得到 k 的不确定度为

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_{k1}^2 + \sigma_{k2}^2} = 0.02\,\mathrm{mm/kg}.$$

因此拟合直线的斜率

$$k = (0.59 \pm 0.02)\,\mathrm{mm/kg}.$$

将其代入

$$E = \frac{4Lg}{\pi d^2 k},$$

得金属丝的杨氏模量

$$E = 1.60 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

其不确定度为

$$\sigma_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2} = 0.06 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

综上, 金属丝杨氏模量的测量结果为

$$E = (1.60 \pm 0.06) \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

2 两种数据处理方法的比较

在用逐差法处理数据时, 我们求得的金属丝杨氏模量为

$$E_1 = (1.62 \pm 0.10) \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

在用最小二乘法处理数据时, 我们将 m 作为自变量, 忽略了 m 的不确定度的影响. 但事实上, m 的不确定度对 E 的不确定度也是有影响的, 我们不能用上一节得到的数据直接与逐差法的数据相比较. 为了保证比较的公平性, 我们应当用放砝码的个数 $i(i = 0, 1, 2, \ldots, 9)$ 作为自变量, 去拟合 $\overline{r} - i$ 直线, 这样就能把 m 的不确定度也纳入考虑的范围内. 拟合直线如图 4 所示.

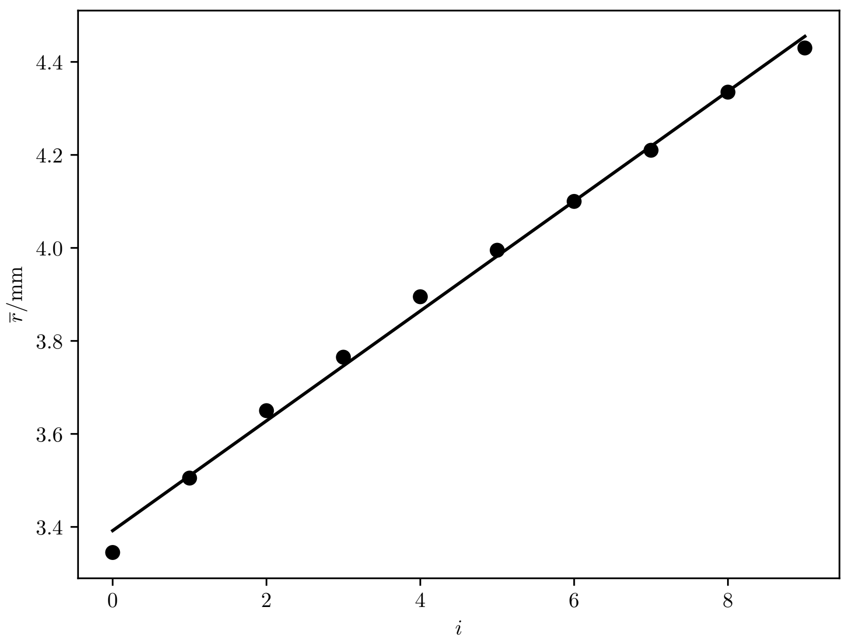

图 4: $\overline{r} - i$ 图拟合直线.

经计算, 拟合直线的斜率为

$$k = 0.118\,\mathrm{mm},$$

$\overline{r}$ 与 i 的相关系数为

$$r = 0.998.$$

若不考虑 $\overline{r}$ 的误差, 斜率 k 的不确定度为

$$\sigma_{k1} = k\sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n - 2}} = 0.003\,\mathrm{mm}.$$

但实际上因变量 $\bar{r}$ 的测量也存在误差. 取其极限误差为显微镜目镜分划线的最小分度值 $e_{\bar{r}} = 0.05\,\mathrm{mm}$, 则

$$\sigma_{\bar{r}} = \frac{e_{\bar{r}}}{\sqrt{3}} = 0.029\,\mathrm{mm}.$$

故由 $\bar{r}$ 的测量引起的 k 的误差为

$$\sigma_{k2} = \frac{\sigma_{\bar{r}}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{9}\left(i_k - \bar{i}\right)^2}} = 0.003\,\mathrm{mm}.$$

将 σ_{k1} 与 σ_{k2} 合成, 得到 k 的不确定度为

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_{k1}^2 + \sigma_{k2}^2} = 0.004\,\mathrm{mm}.$$

因此拟合直线的斜率

$$k = (0.118 \pm 0.004)\,\mathrm{mm}.$$

将其代入

$$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 k},$$

得金属丝的杨氏模量

$$E_2 = 1.60 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

其不确定度为

$$\sigma_{E_2} = E_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2} = 0.06 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

综上, 用最小二乘法测量金属丝杨氏模量的结果为

$$E_2 = (1.60 \pm 0.06) \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

我们将用逐差法和最小二乘法得到的杨氏模量的测量结果一起列出:

$$E_1 = (1.62 \pm 0.10) \times 10^{11}\,\mathrm{Pa},$$
$$E_2 = (1.60 \pm 0.06) \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

可以看出, 两种方法算出的杨氏模量的值相近, 但最小二乘法得到的不确定度更小. 这与我们的经验是一致的, 最小二乘法往往误差更小, 所得结果更准确. 逐差法的优势在于计算量小, 例如本次实验中, 我们用逐差法便以较少的计算量得到了与最小二乘法相近的结果.

3 分析与讨论

1. **在用 CCD 法测定金属丝杨氏模量的实验中，对出现的下列两种情况分别分析可能的原因：一是开始加第一、二个砝码时 r 的变化量大于正常的变化量；二是在上述情况下 r 的变化量小于正常的变化量.**

   r 的变化量偏大, 可能是由于金属丝本身存在弯折, 实验中未加本底砝码将金属丝拉直, 或所加本底砝码的质量不足以将金属丝完全拉直. r 的变化量偏小, 可能是由于在将支架 S 上钳形平台上的限转螺丝旋入金属丝下端圆柱刻槽中部时, 螺丝拧得太紧或调节不到位, 使得金属丝下端小圆柱与螺丝之间的摩擦太大.

4 收获与感想

本次实验我的收获主要有两个. 一是物理实验的精密性. 初学物理实验时我总是抱着“差不多就行了”的思想, 测量数据或调节仪器时的微小误差我都不放在心上. 但本次实验中我发现, 对于需要测量金属丝形变这样微小的量的实验, 即使看上去不起眼的误差也可能使实验结果有很大的出入. 例如支架的竖直、限转螺丝与金属丝下端小圆柱的贴合紧密程度, 调节不当的话, 都将影响测量结果. 虽然我们无法克服仪器的允差, 但我们应该细心做好实验, 将可以避免的人为误差降到最小. 此外我还体会到数据处理和实验本身一样, 都是物理实验的重要组成部分. 物理实验仅仅是收集数据, 但数据还需要人的解读、处理, 才能发挥出它的价值. 甚至, 处理数据的工作量可能比实验本身还要大. 我们要认真对待处理数据的过程, 实事求是地给出真实的数据和合理的不确定度.

参考文献

[1] 吕斯骅, 段家忯, 张朝晖. 新编基础物理实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.