测定介质中的声速

马江岩

2021 年 10 月 31 日

摘要

如果介质中的一个平面状声源沿与平面垂直的方向做简谐振动, 就会形成一列沿该方向的纵波. 若这一纵波遇到一个垂直于其传播方向的刚性平面, 就会反射回来, 与入射声波发生干涉而形成驻波. 利用这一驻波产生的物理现象, 我们就可以测定介质中的声速. 例如, 在空气中这一驻波会产生振幅随位置而变化的声压, 我们可以利用声压的振幅和相位来确定空气中的声速; 在水中这一驻波会使水不同位置的折射率发生不同的变化, 我们将水槽看作光栅, 便可以利用光的光栅衍射现象测定水中的声速.

1 极值法测定空气中的声速

若空气中声源发出的一个沿 x 方向传播的、振幅为 a 的纵波, 在传播方向上遇到一个刚性平面而反射, 就会与入射波发生干涉而形成驻波. 在驻波场中坐标为 x 的空气质点, 其位移可表示为

$$\zeta = \frac{a\sin[k(l-x)]}{\sin kl}\cos\omega t,$$

其中 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{\omega}{v}$ 为波数, l 为声源与刚性平面之间的距离. 这一驻波无法被我们直接观察到, 但它会影响空气中的压强, 产生声压. 将上式代入

$$p = -\rho_0 v^2\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \tag{1}$$

其中 ρ_0 为空气的静态密度. 于是声压驻波可表示为

$$p = \rho_0\omega v a\frac{\sin\left[k(l-x)+\frac{\pi}{2}\right]}{\sin kl}\cos\omega t.$$

在刚性平面处, 声压振幅为

$$|p(l)| = \frac{\rho_0\omega v a}{|\sin kl|},$$

其周期为 $\frac{\lambda}{2}$, 即当 l 改变 $\frac{\lambda}{2}$ 时, $|p(l)|$ 复原. 故我们可以根据这一现象测量声波的半波长, 再通过

$$v = f\lambda$$

求出空气中的声速.

首先我们按图 1 接好线路, 调节两换能器端面平行, 然后锁定.

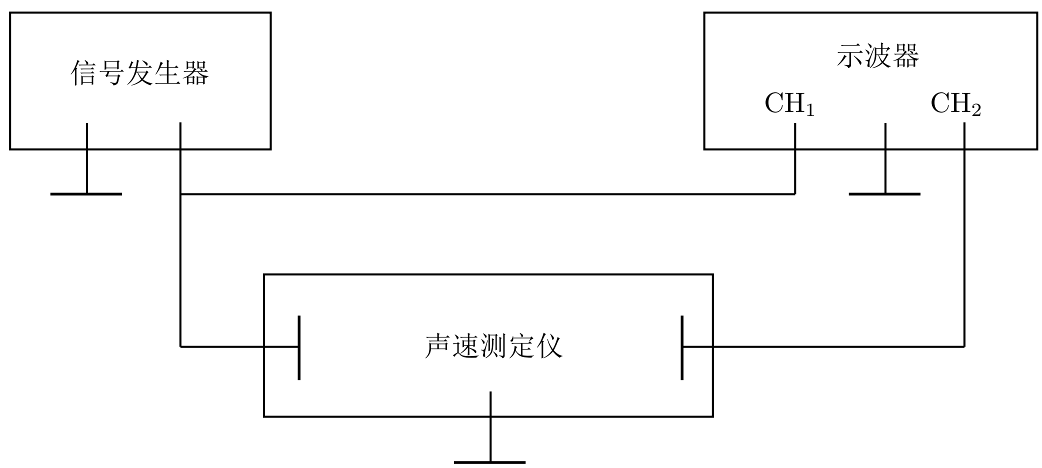

图 1: 实验装置接线图.

为了提高测量的灵敏度, 我们希望正弦波有最大振幅, 即换能器工作在谐振状态. 改变信号发生器的频率, 并略微改变接收端的位置, 使正弦波有最大振幅, 此时信号的频率即换能器的谐振频率 f_0. 实验中 $f_0 = 40.10\,\mathrm{kHz}$, 正弦信号电压峰峰值为 $15\,\mathrm{V_{PP}}$, 室温为 $\theta = 25.1\,^\circ\mathrm{C}$.

将两换能器的间距 l 从大约 $30\,\mathrm{cm}$ 开始, 缓慢地增加, 记录下荧光屏上依次出现正弦波振幅极大值时标尺上的示数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 及接收端电压峰峰值 U_{PP}, 如表 1 所示.

表 1: 极值法测定空气中声速实验数据, l 依次增大.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x(mm)	31.472	35.865	40.112	44.530	49.101	53.172	58.079	62.110	66.573	71.020
U_{PP}(V)	64.0	56.0	50.0	47.0	43.0	40.0	38.0	36.0	32.0	30.0

注意在移动换能器接收端的时候要始终向一个方向移动, 以减少回程差的影响. 若实验过程中不得不将换能器向反方向移动, 应至少先反向移动一个周期, 再转回原来的位置.

然后缓慢地减小间距 l, 记录下依次出现正弦波振幅极大值时标尺上的示数 $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ 及接收端电压峰峰值 U_{PP}, 如表 2 所示.

表 2: 极值法测定空气中声速实验数据, l 依次减小.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x'(mm)	31.210	35.456	39.910	44.371	48.996	53.128	57.510	61.885	66.857	71.234
U_{PP}(V)	65.0	56.0	52.0	48.0	44.0	40.0	37.0	35.0	31.0	29.0

我们可以用逐差法测出相邻两个波腹间的间距 $\overline{\Delta x}$, 公式如下:

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{5} (x_{i+5} - x_i).$$

将上面的两组数据分别代入上式, 得到两组波腹间距分别为

$$\overline{\Delta x_1} = 4.395\,\mathrm{mm},$$
$$\overline{\Delta x_2} = 4.427\,\mathrm{mm}.$$

将它们分别乘以 2 即可得到两组数据测定的声波波长, 它们为 $\lambda_1 = 8.790\,\mathrm{mm}$, $\lambda_2 = 8.854\,\mathrm{mm}$. 代入 $v = \lambda f$, 即可得到两组声速的测量值,

$$v_1 = 352.5\,\mathrm{m/s},$$
$$v_2 = 355.0\,\mathrm{m/s}.$$

下面我们进行误差分析. 记

$$a_i := x_{i+5} - x_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$$

为逐差法相减得到的 5 个数据, 将它们除以 2.5 即为这 5 组数据分别测出的声波波长. a_i 依次为 21.700, 22.214, 21.998, 22.043, 21.919, 故所测波长平均值的不确定度为

$$\sigma_{\overline{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{4} \left(\frac{a_i}{2.5} - \frac{\overline{a}}{2.5}\right)^2}{5 \times (5-1)}} = 0.034\,\mathrm{mm}.$$

将测量仪器按游标卡尺看待, 其允差为 $e = 0.004\,\mathrm{mm}$, 故波长的平均值的不确定度为

$$\sigma_{\lambda_1} = \sqrt{\sigma_{\overline{\lambda_1}}^2 + \frac{e^2}{3}} = 0.034\,\mathrm{mm}.$$

本实验所用的信号发生器的频率误差为 50 ppm, 一个 ppm 为百万分之一, 结合 $f = 40.10\,\mathrm{kHz}$ 可以得到频率的不确定度为

$$\sigma_f = 40.10 \times 50 \times 10^{-6}\,\mathrm{kHz} = 0.002\,\mathrm{kHz}.$$

故由 $v = \lambda f$, 得到第一组数据声速的不确定度为

$$\sigma_{v_1} = \sqrt{(\lambda_1 \sigma_f)^2 + (f\sigma_{\lambda_1})^2} = 1.4\,\mathrm{m/s}.$$

同理, 记

$$b_i := x'_{i+5} - x'_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$$

为逐差法相减得到的 5 个数据, 将它们除以 2.5 即为这 5 组数据分别测出的声波波长. b_i 依次为 21.918, 22.054, 21.975, 22.486, 22.238, 故所测波长平均值的不确定度为

$$\sigma_{\overline{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{b_i}{2.5} - \frac{\bar{b}}{2.5}\right)^2}{5 \times (5-1)}} = 0.041\,\mathrm{mm}.$$

波长的平均值的不确定度为

$$\sigma_{\lambda_2} = \sqrt{\sigma_{\overline{\lambda_2}}^2 + \frac{e^2}{3}} = 0.041\,\mathrm{mm}.$$

得到第二组数据声速的不确定度为

$$\sigma_{v_2} = \sqrt{(\lambda_2 \sigma_f)^2 + (f\sigma_{\lambda_2})^2} = 1.7\,\mathrm{m/s}.$$

最终, 用极值法测定声速得到的两组结果分别为

$$v_1 = (352.5 \pm 1.4)\,\mathrm{m/s},$$
$$v_2 = (355.0 \pm 1.7)\,\mathrm{m/s}.$$

可以看出, 用极值法测出的声速的误差和不确定度都是比较大的, 其原因我将在分析与讨论一节中给出解释.

我们还可以画出接收端电压峰峰值 U_{PP} 随距离 x 的变化曲线, 如图 2 所示. 由图我们很容易猜测 U_{PP} 随 x 以负指数函数的规律变化, 即 $U_{\mathrm{PP}} = A\mathrm{e}^{-bx}$. 利用软件进行拟合, 结果为

$$U_{\mathrm{PP1}}(\mathrm{V}) = 110.4 \cdot \mathrm{e}^{-0.0187x(\mathrm{mm})},$$
$$U_{\mathrm{PP2}}(\mathrm{V}) = 116.8 \cdot \mathrm{e}^{-0.0199x(\mathrm{mm})}.$$

可以猜测, U_{PP} 随 x 以指数规律递减.

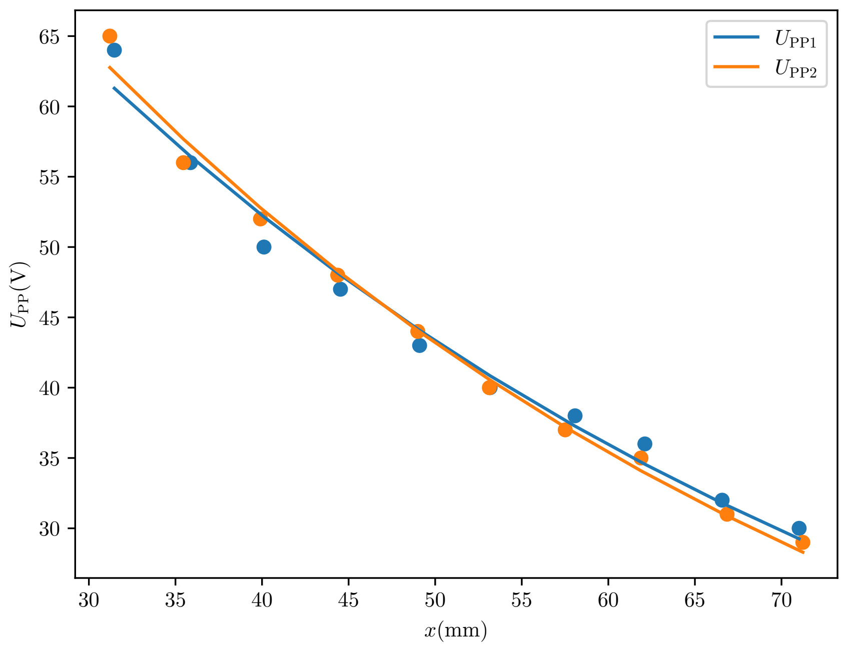

图 2: 接收端电压峰峰值 U_{PP} 随间距 x 的变化规律.

2 相位法测定空气中的声速

设声源发射的平面行波 (用空气质点的位移来表示) 为

$$\zeta = a\cos(\omega t - kx).$$

由 (1) 式有

$$p(0) = -\rho_0 v\omega a \sin\omega t,$$
$$p(l) = -\rho_0 v\omega a \sin(\omega t - kl),$$

即 $p(l)$ 的相位比 $p(0)$ 落后 kl. 分别将声源和接收器两处的电压信号接示波器的两个通道 CH_1 和 CH_2, 并选择 X–Y 显示模式, 将会在荧光屏上看到李萨如图形. 随着反射面位置的变化, 图形在椭圆与直线间周期地变化. 当 l 的改变量为一个波长 λ 时, 图形便恢复原状. 根据这一原理, 便可测出声波波长 λ.

仍按图 1 接好线路, 选择 X–Y 显示模式. 将两换能器的间距 l 从大约 30 cm 开始, 缓慢地增加, 记录下荧光屏上依次出现相同直线时标尺上的示数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 如表 3 所示.

注意在移动换能器接收端的时候要始终向一个方向移动, 以减少回程差的影响. 若实验过程中不得不将换能器向反方向移动, 应至少先反向移动一个周期, 再转回原来的位置.

表 3: 相位法测定空气中声速实验数据, l 依次增大.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x(mm)	31.219	40.035	48.846	57.569	66.329	75.034	83.587	92.292	101.099	109.632

然后缓慢地减小间距 l, 记录下依次出现相同直线时标尺上的示数 $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, 如表 4 所示.

表 4: 相位法测定空气中声速实验数据, l 依次减小.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x'(mm)	31.196	40.011	48.781	57.541	66.358	75.033	83.571	92.300	101.029	109.673

由于李萨如图形随 x 变换的周期为一个波长 λ, 故我们可以利用最小二乘法拟合直线, 直线的斜率就是声波的波长 λ.

拟合后的直线如图 3 所示.

设拟合直线为 $x = ki + b$. 最小二乘法的斜率公式为

$$k = \frac{\sum_{k=0}^{9}(i_k - \bar{i})(x_k - \overline{x})}{\sum_{k=0}^{9}(i_k - \bar{i})^2}.$$

分别将两组数据代入上式, 解得

$$\lambda_3 = 8.710\,\mathrm{mm},$$
$$\lambda_4 = 8.714\,\mathrm{mm}.$$

再由 $v = \lambda f$, f 仍与上一节相同, 解得

$$v_3 = 349.3\,\mathrm{m/s},$$
$$v_4 = 349.4\,\mathrm{m/s}.$$

下面进行误差分析. 最小二乘法斜率的不确定度为

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{k=0}^{9}(i_k - \bar{i})^2}}. \tag{2}$$

对第一组数据, x_i 的剩余方差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{9}(x_i - b_1 - k_1 i_k)^2}{n-2}} = 0.10\,\mathrm{mm}.$$

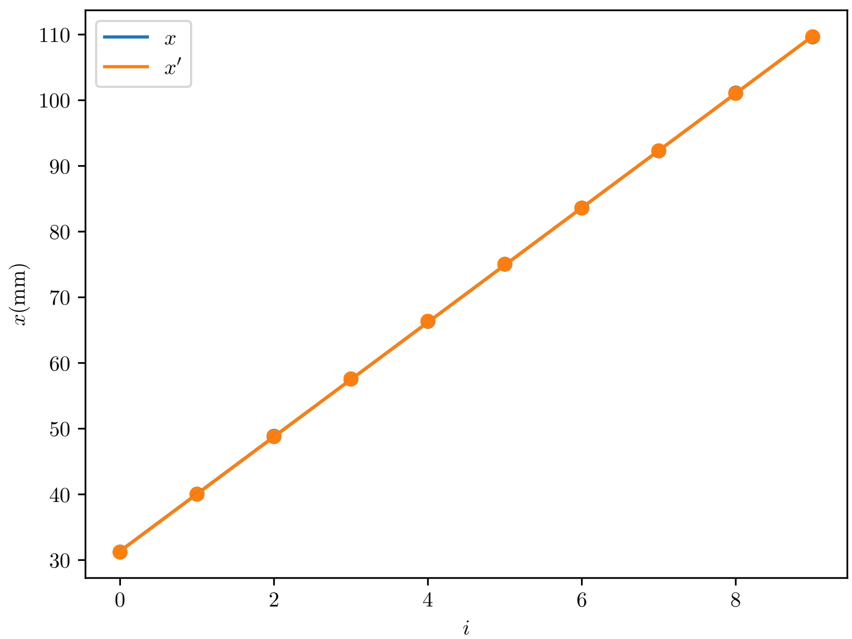

图 3: 相位法测空气中的声速的拟合直线. 图中两条直线几乎完全重合.

代入式 (2), 得到

$$\sigma_{\lambda_3} = 0.011\,\text{mm}.$$

本实验所用的信号发生器的频率误差为 50 ppm, 一个 ppm 为百万分之一, 结合 $f = 40.10\,\text{kHz}$ 可以得到频率的不确定度为

$$\sigma_f = 40.10 \times 50 \times 10^{-6}\,\text{kHz} = 0.002\,\text{kHz}.$$

故由 $v = \lambda f$, 得到第一组数据声速的不确定度为

$$\sigma_{v_3} = \sqrt{(\lambda_3 \sigma_f)^2 + (f \sigma_{\lambda_3})^2} = 0.4\,\text{m/s}.$$

同理, 对第二组数据, x_i' 的剩余方差为

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{9}(x_i' - b_2 - k_2 i_k)^2}{n-2}} = 0.10\,\text{mm}.$$

代入式 (2), 得到

$$\sigma_{\lambda_4} = 0.011\,\text{mm}.$$

故由 $v=\lambda f$, 得到第二组数据声速的不确定度为

$$\sigma_{v_4}=\sqrt{(\lambda_4\sigma_f)^2+(f\sigma_{\lambda_4})^2}=0.4\,\mathrm{m/s}.$$

综上, 相位法测定空气中声速的两组结果为

$$v_3=(349.3\pm 0.4)\,\mathrm{m/s},$$
$$v_4=(349.4\pm 0.4)\,\mathrm{m/s}.$$

3 由气体参量计算出空气中声速

通过声波在理想气体中传播速度与气体状态参量的关系, 也可以计算出声速. 令 θ 为以摄氏温度计量的气体温度, $T_0=273.15\,\mathrm{K}$, 同时考虑空气中水蒸气的影响, 可以证明空气中声速的公式为

$$v(\mathrm{m/s})=331.45\sqrt{\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)\left(1+\frac{0.3192p_{\mathrm{w}}}{p}\right)},\tag{3}$$

其中 p_{w} 为水蒸气的分压强, p 为大气压强. 而 $p_{\mathrm{w}}=p_{\mathrm{s}}H$, 其中 p_{s} 为测量温度下空气中水蒸气的饱和蒸气压, 可通过查表得出, H 为相对湿度, 可从干湿球温度计上读出.

实验条件下测出的相关数据如表 5 所示.

表 5: 实验条件下的相关气体参量数据.

	θ(°C)	p_{s}(Pa)	H(%)	p(mmHg)
最小分度	1	/	2	0.05
数据	25.1	3187.0	60.5	785.20

其中 θ 是室温, H 是相对湿度, p 是大气压强, p_{s} 是查表得到的饱和蒸气压. 由于表中没有 25.1 °C 时的饱和蒸气压, 我的数据是用 25 °C 和 26 °C 时的饱和蒸气压线性插值得到的.

将 p 的单位换为 Pa:

$$p=785.20\,\mathrm{mmHg}\approx 1.047\times 10^5\,\mathrm{Pa},$$

同时算出 p_{w}:

$$p_{\mathrm{w}}=p_{\mathrm{s}}H=1928.135\,\mathrm{Pa}.$$

将上述数据代入 (3) 式, 得到

$$v_5=347.4\,\mathrm{m/s}.$$

下面进行误差分析. 取最小分度值为不确定度, 即 $\sigma_\theta = 1\,°\mathrm{C}$, $\sigma_{p_\mathrm{w}} = 0.02 \times 3187.0\,\mathrm{Pa}$, $\sigma_p = 0.05 \times 133.3224\,\mathrm{Pa}$(因为 $1\,\mathrm{mmHg} = 133.3224\,\mathrm{Pa}$). 由相对不确定度的计算公式,

$$\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_\theta}{T_0+\theta}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{0.3192\sigma_{p_\mathrm{w}}}{p}\right)^2 + \left(\frac{0.3192 p_\mathrm{w}\sigma_p}{p^2}\right)^2}{\left(1+\frac{0.3192p_\mathrm{w}}{p}\right)^2}.$$

代入数据, 解得

$$\sigma_{v_5} = 0.6\,\mathrm{m/s}.$$

故所测结果为

$$v_5 = (347.4 \pm 0.6)\,\mathrm{m/s}.$$

4 光声光栅法测定水中声速

超声波作为一种纵波在媒质中传播时, 其声压使媒质密度产生周期性变化, 则使其折射率呈周期性改变, 形成疏密波. 当一束光射入这种媒质时, 就会因这种折射率的周期性变化而发生衍射, 即产生声光效应. 现有一准直激光束沿垂直于超声波传播方向通过声场, 设光波波长为 λ, 光束直径为 D, 超声波波长为 Λ, 声束宽度 (光在媒质中的传播距离, 即声光相互作用范围) 为 l, 当 $D > \Lambda$, 且 $\lambda l < \Lambda^2$ 时, 光束将发生 Ramann-Nath 衍射, 该现象相当于一个相位型光栅而引起的光束衍射, 故称这一作用为超声光栅.

实验中, 我们所用的激光的波长为 $\lambda = 633\,\mathrm{nm}$, 水温 $\theta_\mathrm{w} = 27.0\,°\mathrm{C}$, 接收屏到水槽中心的距离 $L = 591\,\mathrm{cm}$. 让超声波发生器在水槽中产生超声光栅, 让激光发出的光束通过透镜组后形成平行光, 再打到后面的接收屏上. 当超声波的频率适宜时, 接收屏上便会显示出衍射光斑. 为减少误差, 我们调整超声波频率使得屏上的光斑不少于 6 个, 测量最左端至最右端的光斑的距离, 除以间距总数, 即得到光斑的间距 $\overline{\Delta x}$. 由夫琅和费衍射公式,

$$\sin\frac{\overline{\Delta x}}{L} = \frac{\lambda}{\Lambda},$$

代入 $v = f\Lambda$, 整理得

$$f = \frac{v}{\lambda}\sin\frac{\overline{\Delta x}}{L},$$

故我们可以通过最小二乘法来求声速. 实验所测数据如表 6 所示.

拟合直线如图 4 所示.

拟合直线的斜率即为所测水中声速, 为

$$v = 1495.0\,\mathrm{m/s}.$$

表 6: 光声光栅法测定水中声速的实验数据.

f(MHz)	9.50	10.00	10.50	11.00	11.50	12.00
x(cm)	2.38	2.52	2.66	2.77	2.89	3.01
$\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\overline{\Delta x}}{L}(\mu\mathrm{m}^{-1})$	0.0064	0.0067	0.0071	0.0074	0.0077	0.0080

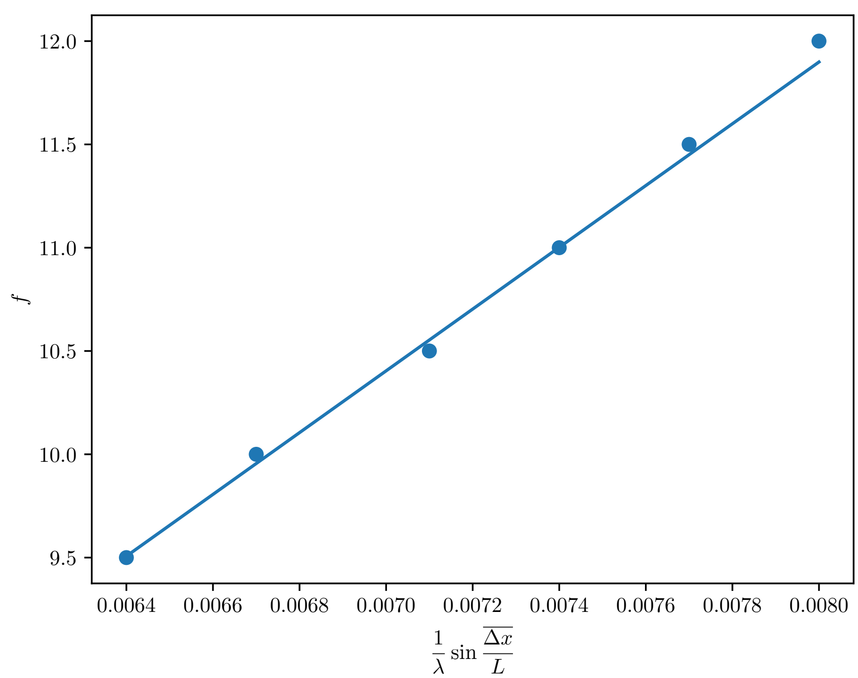

图 4: 光声光栅法测定水中声速的拟合直线图.

5 分析与讨论

为了达到减小误差的目的, 在极值法中我们采用了逐差法处理数据, 在相位法和光声光栅法中我们采用了最小二乘法处理数据, 不确定度的计算方法都是利用其相应的不确定度公式代入数据计算. 这两种方法各有优劣, 逐差法计算简单, 计算量少, 充分利用了测量数据, 得到的结果误差较小; 最小二乘法则更为精确, 其不确定度最小, 更为直观, 拟合直线可用于内插和外推, 但计算量大. 我们应根据情况选择适宜的方法, 计算资源充足、时间充足、拟合直线的斜率和截距易于计算时, 可选用最小二乘法; 若时间不充足, 计算资源不充分, 也可用逐差法, 减小计算量. 另外, 当需要对数据进行内插和外推时, 也应采用最小二乘法.

我们测定空气中声速的 5 个结果如下所示:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (352.5 \pm 1.4)\,\mathrm{m/s},\\
v_2 &= (355.0 \pm 1.7)\,\mathrm{m/s},\\
v_3 &= (349.3 \pm 0.4)\,\mathrm{m/s},\\
v_4 &= (349.4 \pm 0.4)\,\mathrm{m/s},\\
v_5 &= (347.4 \pm 0.6)\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

以气体参量法 (即 v_5) 所测数据作为真实值, 我们可以发现: 极值法所测数据误差较大、不确定度较高, 而相位法所测数据误差较小、不确定度较低. 这是为什么呢? 我总结的原因有以下几点.

- 极值法测定空气中的声速时, 我们需要判断接收端电压振幅在何处取得极大值, 并且尽量朝一个方向调整接收端位置. 这就会带来较大的误差, 首先电压振幅取极大值的位置便很难准确判断, 因为接收端声压振幅的表达式为
$$|p(l)| = \frac{\rho_0 \omega v a}{|\sin kl|},$$
其在极大值点的位置导数为 0. 也就是说, 极大值点附近一段长度内接收端声压振幅的变化都不大, 很难准确判断极大值点的位置. 其次, 我们在调整接收端位置时只向一个方向调整, 很难判断振幅是否已经取到了极大值; 而反复来回调节, 又可能带来回程差. 故极值法的实验中误差较大.
- 极值法的实验采用逐差法处理数据, 如前所述, 逐差法的准确性不如最小二乘法, 这或许也是后者的实验结果更准确的原因.
- 相位法测定空气中的声速时, 通过观察李萨如图形来记录位置, 当李萨如图形由椭圆变为相同的直线时, 记录接收端位置. 在示波器的显示屏上, 我们只需要观察椭圆的上下两部分曲线, 当它们合并为一条相同直线时, 即为所求位置. 而这是比较容易准确判断的, 也不需要反复来回调节接收端位置, 故较为准确.

- 相位法的实验采用最小二乘法处理数据, 不确定度较小, 也是原因之一.

6 思考题

1. **能用人耳可听到的声波作为发射波吗?**
   不可以. 人耳可听到的声波频率较小, 约为 20 – 20000 Hz, 这也意味着其波长较大. 即使以 20000 Hz 计, 其波长也达到了 17 mm. 而我们实验所用仪器的测量长度是有限的, 波长越大, 我们每次移动接收端的距离也越大, 会超过仪器的测量范围, 所能测到的数据点就较少, 误差较大.
2. **如何手动调整示波器方便极值和图像读取?**
   例如, 我们可以将"显示"设置中的"持续"调整为"无限", 这样之前示波器上显示过的波形就会以较浅的颜色停留在屏幕上, 方便我们判断极值和相位.
3. **如何估算和测量回程差大小?**
   在极值法和相位法中, 我们均将接收端向两个方向移动测量了数据. 在同一个取极大值或特定相位的位置, 计算两个方向所测的位置之差, 即为回程差.
4. **驻波和行波两个原理为什么可以共用?**
   实际上在发射器和接收器之间存在的是驻波和行波的叠加. 行波的振幅为定值, 故极值法中可以只考虑驻波; 而驻波在 $x = l$(即接收器位置) 处恒为波腹, 且随距离增大而衰减, 故相位法中可以只考虑行波.
5. **极值出现的位置和相位法中的相位差有什么关系? 实际测量时是否符合预期?**
   极值法中, 当
   $$|p(l)| = \frac{\rho_0 \omega v a}{\sin kl}$$
   取极大值时记录位置, 而相位法中, 当
   $$p(l) = -\rho_0 v \omega a \sin(\omega t - kl)$$
   的相位为 ωt 时记录位置. 由公式可知, 极值法中的位置要么和相位法中的位置重合, 要么在两个相位法的位置中间. 由表 1、3 或表 2、4 观察, 确实如此.
6. **极值法中多极值出现的原因是什么?**
   由接收端的声压公式
   $$|p(l)| = \frac{\rho_0 \omega v a}{\sin kl}$$
   知, $|p(l)|$ 随 l 变化的周期为 $\dfrac{\lambda}{2}$, 即
   $$\left| p\left(l \pm \frac{\lambda}{2}\right) \right| = |p(l)|,$$

故每当 l 变化 $\frac{\lambda}{2}$, 接收端电压振幅即取得极值.

7 收获与感想

声波的速度是无法直接测量的, 本次实验让我学到了如何更准确地进行间接测量, 以及测量之后如何处理数据, 使得不确定度尽可能地小. 通过极值法和相位法的误差对比, 我也认识到测量某个物理量可能有多种方案, 每种方案在理论上都是准确的, 但实际操作过程中的误差却不尽相同. 例如, 极值法中, 理论上只需记录接收端电压取得极大值的位置即可准确测量声速, 但判断极大值是否取到、在何处取到是十分困难的, 这就带来了误差. 我们在设计实验方案时不仅要考虑理论, 也要联系实际情况, 减小人为因素带来的误差.

参考文献

[1] 吕斯骅, 段家忯, 张朝晖. 新编基础物理实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 钟锡华. 现代光学基础[M]. 北京大学出版社, 2012.