光栅特性及测定光波波长

马江岩

2022 年 4 月 5 日

摘要

光栅和棱镜一样, 是重要的分光元件, 它可以把入射光中不同波长的光分开. 利用光栅分光制成的单色仪和光谱仪已被广泛应用. 本实验通过测定透射光栅的光栅常量, 测定未知光波波长及角色散率, 并探究分辨本领与光栅有效面积中的刻线数目的关系.

1 测定光栅常量

根据教材所述方法调好光路. 以水银灯为光源, 整体移动分光计, 对准光源, 使水银灯大体位于平行光管的光轴上. 测出 $k = \pm 1$ 级, 波长 $\lambda = 546.07\,\mathrm{nm}$ 绿光的衍射角 ϕ_{+1} 和 ϕ_{-1}. 重复测量 3 次, 求平均值 $\bar{\phi}_1$, 然后代入 $d \sin\phi = k\lambda$ 中求 d. 用同样的方法测出 $k = \pm 2$ 级的衍射角 $\bar{\phi}_2$, 求 d 值. 然后求该光栅的空间频率. 实验数据如表 1 所示.

表 1: 测定光栅常量实验数据.

#	θ_0	θ_0'	θ_1	θ_1'	θ_{-1}	θ_{-1}'	θ_2	θ_2'	θ_{-2}	θ_{-2}'	ϕ_1	ϕ_{-1}	ϕ_2	ϕ_{-2}
1	$166°22'$	$346°20'$	$147°14'$	$327°12'$	$185°30'$	$5°28'$	$125°24'$	$305°22'$	$207°18'$	$27°17'$	$19°8'$	$19°8'$	$40°58'$	$40°56'30''$
2	$166°22'$	$346°20'$	$147°15'$	$327°12'$	$185°30'$	$5°29'$	$125°28'$	$305°24'$	$207°18'$	$27°18'$	$19°7'30''$	$19°8'30''$	$40°55'$	$40°57'$
3	$166°22'$	$346°20'$	$147°14'$	$327°12'$	$185°30'$	$5°28'$	$125°27'$	$305°24'$	$207°18'$	$27°18'$	$19°8'$	$19°8'$	$40°55'30''$	$40°56'30''$

根据表 1 数据可以算出 ± 1 级衍射角的平均值分别为

$$\bar{\phi}_{+1} = \frac{19°8' + 19°7'30'' + 19°8'}{3} = 19°7'50'',$$
$$\bar{\phi}_{-1} = \frac{19°8' + 19°8'30'' + 19°8'}{3} = 19°8'10''.$$

它们的平均值为

$$\bar{\phi}_1 = \frac{\bar{\phi}_{+1} + \bar{\phi}_{-1}}{2} = 19°8'.$$

同理, ±2 级衍射角的平均值分别为

$$\bar{\phi}_{+2}=\frac{40°58'+40°55'+40°55'30''}{3}=40°56'10'',$$
$$\bar{\phi}_{-2}=\frac{40°56'30''+40°57'+40°56'30''}{3}=40°56'40''.$$

它们的平均值为

$$\bar{\phi}_2=\frac{\bar{\phi}_{+2}+\bar{\phi}_{-2}}{2}=40°56'25''.$$

根据公式 $d\sin\phi=k\lambda$, 由 ±1 级和 ±2 级衍射角分别算出的光栅缝距为

$$d_1=\frac{\lambda}{\sin\bar{\phi}_1}=1666.0\,\mathrm{nm},$$
$$d_2=\frac{\lambda}{\sin\bar{\phi}_2}=1666.7\,\mathrm{nm}.$$

故由 ±1 级和 ±2 级衍射角分别算出的空间频率为

$$f_1=\frac{1}{d_1}=6.002\times 10^5\,/\mathrm{m},$$
$$f_2=\frac{1}{d_2}=6.000\times 10^5\,/\mathrm{m}.$$

下面进行误差分析. 对于 $\bar{\phi}_1$, 平均值的不确定度为

$$\sigma_{\bar{\phi}_1}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}\left(\phi_{1i}-\bar{\phi}_1\right)^2+\sum_{i=1}^{3}\left(\phi_{-1i}-\bar{\phi}_1\right)^2}{6\times 5}}=7.75'',$$

其中 ϕ_{1i} 是 ϕ_1 的第 i 个测量值, ϕ_{-1i} 是 ϕ_{-1} 的第 i 个测量值, 如表 1 所示. 又因为分光计的允差为 $e=1'$, 故总的不确定度为

$$\sigma_{\phi_1}=\sqrt{\sigma_{\bar{\phi}_1}^2+\frac{e^2}{3}}=35.50''.$$

同理, 对于 $\bar{\phi}_2$, 平均值的不确定度为

$$\sigma_{\bar{\phi}_2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}\left(\phi_{2i}-\bar{\phi}_2\right)^2+\sum_{i=1}^{3}\left(\phi_{-2i}-\bar{\phi}_2\right)^2}{6\times 5}}=26.17'',$$

其中 ϕ_{2i} 是 ϕ_2 的第 i 个测量值, ϕ_{-2i} 是 ϕ_{-2} 的第 i 个测量值, 如表 1 所示. 故总的不确定度为

$$\sigma_{\phi_2}=\sqrt{\sigma_{\bar{\phi}_2}^2+\frac{e^2}{3}}=43.42''.$$

故 $\bar{\phi}_1$ 和 $\bar{\phi}_2$ 的测量值为

$$\bar{\phi}_1 = 19°8'0'' \pm 36'',$$
$$\bar{\phi}_2 = 40°56'25'' \pm 43''.$$

缝距的不确定度分别为

$$\sigma_{d_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial d_1}{\partial \bar{\phi}_1}\sigma_{\phi_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 \bar{\phi}_1}{\sin^4 \bar{\phi}_1}\lambda^2\sigma_{\phi_1}^2} = 0.8\,\mathrm{nm},$$
$$\sigma_{d_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial d_2}{\partial \bar{\phi}_2}\sigma_{\phi_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 \bar{\phi}_2}{\sin^4 \bar{\phi}_2}4\lambda^2\sigma_{\phi_2}^2} = 0.4\,\mathrm{nm},$$

故由 ±1 级和 ±2 级衍射角分别算出的光栅缝距的测量值为

$$d_1 = (1666.0 \pm 0.8)\,\mathrm{nm},$$
$$d_2 = (1666.7 \pm 0.4)\,\mathrm{nm}.$$

空间频率的不确定度分别为

$$\sigma_{f_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{\phi}_1}\sigma_{\phi_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 \bar{\phi}_1}{\lambda^2}\sigma_{\phi_1}^2} = 0.003 \times 10^5\,/\mathrm{m},$$
$$\sigma_{f_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{\phi}_2}\sigma_{\phi_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 \bar{\phi}_2}{4\lambda^2}\sigma_{\phi_2}^2} = 0.001 \times 10^5\,/\mathrm{m}.$$

综上, 由 ±1 级和 ±2 级衍射角分别算出的空间频率的测量值为

$$f_1 = (6.002 \pm 0.003) \times 10^5\,/\mathrm{m},$$
$$f_2 = (6.000 \pm 0.001) \times 10^5\,/\mathrm{m}.$$

2 测定未知光波波长及角色散率

在第 1 章中, 我们已经测出了光栅的缝距, 我们取不确定度较小的 $d_2 = (1666.7 \pm 0.4)\,\mathrm{nm}$ 作为我们的测量结果. 利用这一光栅缝距, 我们可以测量未知光波的波长及角色散率.

用同样的方法, 在 $k = \pm1$ 级时, 测出水银灯的两条黄线 (黄$_1$) 及 (黄$_2$) 的衍射角 $\bar{\phi}_1$(黄$_1$) 和 $\bar{\phi}_2$(黄$_2$), 分别代入 $d\sin\phi = k\lambda$, 即可求出它们的波长 λ_1(黄$_1$) 及 λ_2(黄$_2$). 计算波长差 $\Delta\lambda$ 值. 再由公式

$$D = \frac{\Delta\phi}{\Delta\lambda}, \tag{1}$$
$$D = \frac{k}{d\cos\phi}, \tag{2}$$

可分别计算光栅的角色散. 实验数据如表 2 所示.

表 2: 测定未知光波波长及角色散率实验数据.

θ_0	θ_0'	θ_1	θ_1'	θ_{-1}	θ_{-1}'	θ_2	θ_2'	θ_{-2}	θ_{-2}'	ϕ_1	ϕ_{-1}	ϕ_2	ϕ_{-2}
$166°20'$	$346°16'$	$146°5'$	$326°3'$	$186°35'$	$6°32'$	$146°0'$	$325°59'$	$186°41'$	$6°40'$	$20°14'$	$20°15'30''$	$20°18'30''$	$20°22'30''$

两条黄线的衍射角分别为

$$\bar{\phi}_1 = \frac{20°14' + 20°15'30''}{2} = 20°14'45'',$$
$$\bar{\phi}_2 = \frac{20°18'30'' + 20°22'30''}{2} = 20°20'30'',$$

波长分别为

$$\lambda_1 = d\sin\bar{\phi}_1 = 576.8\,\mathrm{nm},$$
$$\lambda_2 = d\sin\bar{\phi}_2 = 579.4\,\mathrm{nm},$$

与参考值 $\lambda_1 = 576.96\,\mathrm{nm}, \lambda_2 = 579.07\,\mathrm{nm}$ 基本吻合. 衍射角差和波长差为

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 5'45'',$$
$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2.6\,\mathrm{nm}.$$

由式 (1) 算得角色散率为

$$D_1 = \frac{\Delta\phi}{\Delta\lambda} = 131.95''/\mathrm{nm},$$

由式 (2) 算得角色散率为

$$D_2 = \frac{1}{d\cos\phi} = 131.95''/\mathrm{nm},$$

其中取 ϕ 为 $\bar{\phi}_1$ 和 $\bar{\phi}_2$ 的平均值. 可以看出, 由式 (1) 和式 (2) 算出的角色散率基本相等.

下面进行误差分析. 对于 $\bar{\phi}_1$, 平均值的不确定度为

$$\sigma_{\bar{\phi}_1} = \sqrt{\frac{\left(\phi_1 - \bar{\phi}_1\right)^2 + \left(\phi_{-1} - \bar{\phi}_1\right)^2}{2\times 1}} = 45'',$$

与仪器允差合成, 得总的不确定度为

$$\sigma_{\phi_1} = \sqrt{\sigma_{\bar{\phi}_1}^2 + \frac{e^2}{3}} = 57''.$$

同理, 对于 $\bar{\phi}_2$, 平均值的不确定度为

$$\sigma_{\bar{\phi}_2} = \sqrt{\frac{\left(\phi_2 - \bar{\phi}_2\right)^2 + \left(\phi_{-2} - \bar{\phi}_2\right)^2}{2\times 1}} = 2'0'',$$

与仪器允差合成, 得总的不确定度为

$$\sigma_{\phi_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{\phi}_2}^2 + \frac{e^2}{3}} = 2'5''.$$

于是 $\Delta\phi$ 的不确定度为

$$\sigma_{\Delta\phi} = \sqrt{\sigma_{\phi_1}^2 + \sigma_{\phi_2}^2} = 2'17''.$$

波长的不确定度分别为

$$\sigma_{\lambda_1} = \sqrt{\left(\sin\bar{\phi}_1\sigma_d\right)^2 + \left(d\cos\bar{\phi}_1\sigma_{\phi_1}\right)^2} = 0.5\,\mathrm{nm},$$
$$\sigma_{\lambda_2} = \sqrt{\left(\sin\bar{\phi}_2\sigma_d\right)^2 + \left(d\cos\bar{\phi}_2\sigma_{\phi_2}\right)^2} = 1.0\,\mathrm{nm},$$

故两条黄线的波长的测量值为

$$\lambda_1 = (576.8 \pm 0.5)\,\mathrm{nm},$$
$$\lambda_2 = (579.4 \pm 1.0)\,\mathrm{nm}.$$

$\Delta\lambda$ 的不确定度为

$$\sigma_{\Delta\lambda} = \sqrt{\sigma_{\lambda_1}^2 + \sigma_{\lambda_2}^2} = 1.1\,\mathrm{nm}.$$

故 D_1 的不确定度为

$$\sigma_{D_1} = D_1\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta\phi}}{\Delta\phi}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta\lambda}}{\Delta\lambda}\right)^2} = 75''/\mathrm{nm}.$$

D_2 的不确定度为

$$\sigma_{D_2} = D_2\sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + (\tan\phi\sigma_\phi)^2} = D_2\sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\tan\phi\frac{\sigma_{\Delta\phi}}{2}\right)^2} = 0.04''/\mathrm{nm}.$$

综上, 用式 (1) 和式 (2) 测得的角色散率分别为

$$D_1 = (132 \pm 75)''/\mathrm{nm},$$
$$D_2 = (131.95 \pm 0.04)''/\mathrm{nm}.$$

我们发现 D_1 的不确定度要明显大于 D_2 的不确定度, 这是因为 D_1 的计算需要用到 $\Delta\phi$ 和 $\Delta\lambda$, 它们都是两个相近的量相减的形式, 因此相对不确定度会很大, 从而 D_1 的相对不确定度也会很大.

3 观察分辨本领与刻线数目的关系

首先计算分辨本领的理论值. 钠黄双线的波长分别为 $\lambda_1 = 589.0\,\mathrm{nm}$ 和 $\lambda_2 = 589.6\,\mathrm{nm}$, 故光栅分辨本领为

$$R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda} = 982.17. \tag{3}$$

接下来对光栅分辨本领进行测量. 用钠光灯代替水银灯. 把平行光管的狭缝调窄, 直到在望远镜中能看到钠的两条 1 级黄色谱线. 整体移动分光计, 对准光源, 使黄线最亮. 用一可变的狭缝光阑, 套在平行光管的物镜上, 适当调节这个狭缝光阑的宽度, 挡住光栅的一部分, 即减小它有效面积内刻痕的数目 N, 观察钠光两条黄色谱线随 N 的减少而发生的变化, 记录观察的结果. 继续变化光阑宽度, 使两条黄色谱线刚好能分辨, 取下狭缝光阑, 用读数显微镜测出两条钠黄谱线刚好能分辨时的狭缝光阑宽度 l. 测量 3 次, 结果分别为 $1.780\,\mathrm{mm}$, $1.781\,\mathrm{mm}$, $1.790\,\mathrm{mm}$, 故

$$\bar{l} = \frac{1.780 + 1.781 + 1.790}{3}\,\mathrm{mm} \approx 1.7837\,\mathrm{mm}.$$

于是光栅分辨本领为

$$R = N = \frac{\bar{l}}{d} = 1070.61. \tag{4}$$

比较式 (3) 与式 (4), 发现两者还是有一定差距的. 其中主要原因在于对两条黄色谱线刚好能分辨的判断具有较强的主观性, 造成了较大的实验误差.

4 分析与讨论

1. **使用公式 $d\sin\phi = k\lambda$ 应保证什么条件? 实验中是如何保证的? 如何检查条件是否满足?**
   使用公式 $d\sin\phi = k\lambda$ 应保证是夫琅禾费衍射, 入射光为平行光, 垂直地投射到光栅平面上. 实验中通过调节分光计保证这些条件, 用自准直法调节 b_1, b_2, 直到从光栅平面反射回来的亮 "+" 字像与分划板 MN 线重合, 此时光栅平面与望远镜光轴垂直; 再调节平行光管狭缝像与 "+" 字像重合, 使光栅平面与平行光管光轴垂直.
2. **光栅调节中, 放置光栅要求光栅平面垂直平分 b_1b_2 连线, 这是为什么? 如果光栅平面仅仅与 b_1b_2 连线垂直, 但并不平分 b_1b_2 连线, 是否可以? 为什么?**
   放置光栅要求光栅平面垂直平分 b_1b_2 连线, 是为了使光栅的俯仰只由 b_1 和 b_2 控制, 光栅条纹的取向只由 b_3 控制. 不可以. 如果光栅平面不平分 b_1b_2 连线, 则光栅俯仰和角度的调节不相互独立, 调节其中一个的同时也会影响另一个, 导致难以调节到理想位置.
3. **实验中如果两边光谱线不等高, 对测量结果有何影响?**
   实验中两边光谱线不等高, 说明光栅条纹的取向与转轴不平行, 衍射角不在水平面内. 这样直接读数的话, 读出的衍射角就会存在一定误差.

4. **试说明光栅分光与三棱镜分光的光谱有何区别?**
   (a) 三棱镜分光只有一组光谱, 光栅分光则产生多组光谱.
   (b) 光栅分光是利用衍射原理, 利用不同颜色的光波长不同, 通过光栅后产生衍射图样的亮线位置分布不同产生分光效果. 棱镜分光是利用折射原理, 利用不同颜色的光在同一介质中的折射率不同.
   (c) 一般说来, 光栅的光谱更精细, 分辨率更高.
5. **两条很靠近的谱线若用光栅不能分辨开来, 问是否可以使它们经光栅后, 再用放大系统将它们分开?**
   不可以. 两条很靠近的谱线用光栅不能分辨开来, 说明它们不满足瑞利判据, 一条谱线的极强落在另一条谱线的极弱以内. 这是谱线展宽的问题, 不是分辨率的问题, 即使用放大系统将它们放大, 也不能将其分开.
6. **公式 (1) 与式 (2) 有何区别与联系? 公式 (3) 与式 (4) 有何区别与联系?**
   公式 (1) 与式 (3) 是光栅角色散率与分辨本领的定义式, 而公式 (2) 与式 (4) 是光栅角色散率与分辨本领关于光栅参数的决定式, 后者是由前者所导出的.

5 收获与感想

本次实验令我受益匪浅. 由于我本学期也在同时学习原子物理的课程, 因此能够实际看到课本上的原子光谱, 令我感到非常新奇. 这次实验也巩固了我上学期所学的光学内容, 是对光学理论知识的一个补充. 同时这次实验也使我对分光计的使用更为熟练, 使我认识到分光计确实是一个非常实用的光学仪器.

参考文献

[1] 吕斯骅, 段家忯, 张朝晖. 新编基础物理实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 钟锡华. 现代光学基础[M]. 北京大学出版社, 2012.