交流电桥

马江岩

2022 年 3 月 27 日

摘要

交流电桥主要用来测量交流元件的电容、电感, 它是电感、电容测量中精确度很高的测量仪器. 与电感、电容有关的其他物理量如互感、电容率、Q 值、磁导率和电源频率等也可用交流电桥来测量, 用途十分广泛. 本实验通过几种常用的交流电桥电路来测量电感、电容等参量, 以加深了解交流电桥的平衡原理, 学习掌握调节交流电桥平衡的方法.

1 测电容

我们用电容桥测量一个纸质电容器及一个电解电容器的电容及损耗电阻, 并计算它的损耗, 电路如图 1 所示.

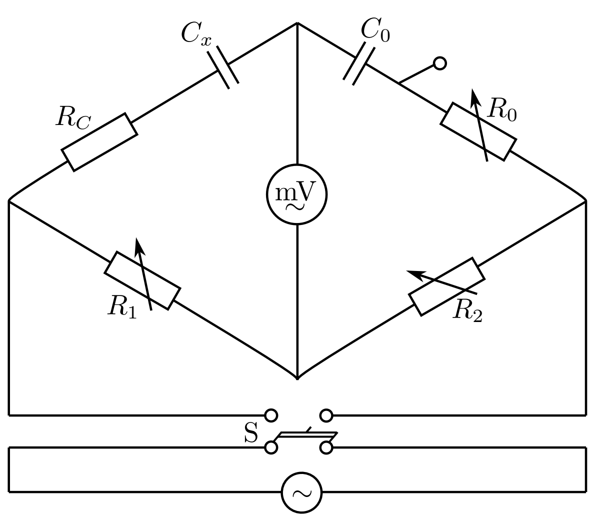

图 1: 电容桥.

电源电压有效值为 $4\,\mathrm{V}$, 频率为 $1\,\mathrm{kHz}$.

首先测量纸质电容器. 用多用电表测得纸质电容器的电容约为 $0.23\,\mu F$, 因此为了有效利用十进制电容箱的有效数字位数, 我们取 $R_1 = R_2 = 100.0\,\Omega$. 调节交流电桥平衡, 此时电压表读数为 $\Delta U = 0.07\,\mathrm{mV}$, $R_0 = 2.5\,\Omega$, $C_0 = 0.2230\,\mu F$. 由平衡条件可求出

$$C_x = \frac{R_2}{R_1} C_0 = 0.2230\,\mu F,$$
$$R_C = \frac{R_1}{R_2} R_0 = 2.50\,\Omega,$$
$$\tan\delta = R_0 C_0 \omega = 3.503 \times 10^{-3}.$$

下面进行误差分析. 实验所用 ZX-96 型电阻箱的允差为 $0.1\,\Omega$ 挡 2%, $1\,\Omega$ 挡 0.5%, $10\,\Omega$ 及以上挡 0.1%. 电容箱 100 nF 挡允差为 0.5%, 10 nF 挡 0.65%, 1 nF 挡 2%, 0.1 nF 挡 5%. 因此

$$e_{R_1} = e_{R_2} = 100\,\Omega \times 0.1\% = 0.1\,\Omega,$$
$$e_{C_0} = (0.2 \times 0.5\% + 0.02 \times 0.65\% + 0.003 \times 2\%)\,\mu F = 0.00119\,\mu F,$$
$$e_{R_0} = (2 \times 0.5\% + 0.5 \times 2\%)\,\Omega = 0.02\,\Omega.$$

故

$$\sigma_{C_x} = C_x \sqrt{\frac{\left(\frac{e_{R_2}}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{e_{C_0}}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_1}}{R_1}\right)^2}{3}} = 0.0007\,\mu F,$$
$$\sigma_{R_C} = R_C \sqrt{\frac{\left(\frac{e_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_0}}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_2}}{R_2}\right)^2}{3}} = 0.01\,\Omega,$$
$$\sigma_{\tan\delta} = \tan\delta \sqrt{\frac{\left(\frac{e_{R_0}}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{e_{C_0}}{C_0}\right)^2}{3}} = 0.019 \times 10^{-3}.$$

综上, 所测纸质电容器的电容、损耗电阻和损耗为

$$C_x = (0.2230 \pm 0.0007)\,\mu F,$$
$$R_C = (2.50 \pm 0.01)\,\Omega,$$
$$\tan\delta = (3.503 \pm 0.019) \times 10^{-3}.$$

然后测量电解电容器. 用多用电表测得纸质电容器的电容约为 $6.69\,\mu F$, 因此为了有效利用十进制电容箱的有效数字位数, 我们取 $R_1 = 50.0\,\Omega$, $R_2 = 400.0\,\Omega$. 调节交流电桥平衡, 此时电

压表读数为 $\Delta U = 0.00\,\mathrm{mV}$, $R_0 = 27.9\,\Omega$, $C_0 = 0.8363\,\mu\mathrm{F}$. 由平衡条件可求出

$$C_x = \frac{R_2}{R_1}C_0 = 6.6904\,\mu\mathrm{F},$$
$$R_C = \frac{R_1}{R_2}R_0 = 3.50\,\Omega,$$
$$\tan\delta = R_0C_0\omega = 0.1466.$$

下面进行误差分析. 各物理量的允差为

$$e_{R_1} = 50\,\Omega \times 0.1\% = 0.05\,\Omega,$$
$$e_{R_2} = 400\,\Omega \times 0.1\% = 0.4\,\Omega,$$
$$e_{C_0} = (0.8 \times 0.5\% + 0.03 \times 0.65\% + 0.006 \times 2\% + 0.0003 \times 5\%)\,\mu\mathrm{F} = 0.00433\,\mu\mathrm{F},$$
$$e_{R_0} = (20 \times 0.1\% + 7 \times 0.5\% + 0.9 \times 2\%)\,\Omega = 0.073\,\Omega.$$

故

$$\sigma_{C_x} = C_x\sqrt{\frac{\left(\frac{e_{R_2}}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{e_{C_0}}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_1}}{R_1}\right)^2}{3}} = 0.0207\,\mu\mathrm{F},$$
$$\sigma_{R_C} = R_C\sqrt{\frac{\left(\frac{e_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_0}}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_2}}{R_2}\right)^2}{3}} = 0.006\,\Omega,$$
$$\sigma_{\tan\delta} = \tan\delta\sqrt{\frac{\left(\frac{e_{R_0}}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{e_{C_0}}{C_0}\right)^2}{3}} = 0.0005.$$

综上, 所测电解电容器的电容、损耗电阻和损耗为

$$C_x = (6.6904 \pm 0.0207)\,\mu\mathrm{F},$$
$$R_C = (3.488 \pm 0.006)\,\Omega,$$
$$\tan\delta = 0.1466 \pm 0.0005.$$

2 测电感

首先用麦克斯韦-维恩电桥测量无铁芯电感器的电感 L_x 和损耗电阻 R_L, 并计算电感线圈的 Q 值, 电路如图 2 所示.

由电感器上的示数可知其电感约为 $10\,\mathrm{mH}$, 直流电阻约为 $100\,\Omega$, 因此为了有效利用十进制电容箱的有效数字位数, 我们取 $R_1 = 100.0\,\Omega$, $R_2 = 200.0\,\Omega$. 调节交流电桥平衡, 此时电压

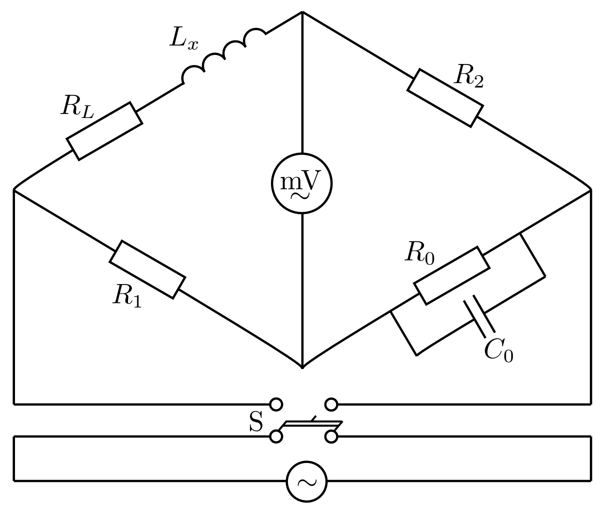

图 2: 麦克斯韦-维恩桥.

表读数为 $\Delta U = 0.10\,\mathrm{mV}$, $R_0 = 193.7\,\Omega$, $C_0 = 0.4953\,\mu\mathrm{F}$. 由平衡条件可求出

$$L_x = C_0 R_1 R_2 = 9.91\,\mathrm{mH},$$

$$R_L = \frac{R_1 R_2}{R_0} = 103.25\,\Omega,$$

$$Q = \omega C_0 R_0 = 0.603.$$

下面进行误差分析. 电容箱和电阻箱的允差数据在第 1 章已经给出, 实验所用电感箱的允差为 2%. 因此

$$e_{R_1} = 100\,\Omega \times 0.1\% = 0.1\,\Omega,$$

$$e_{R_2} = 200\,\Omega \times 0.1\% = 0.2\,\Omega,$$

$$e_{C_0} = (0.4 \times 0.5\% + 0.09 \times 0.65\% + 0.005 \times 2\% + 0.0003 \times 5\%)\,\mu\mathrm{F} = 0.0027\,\mu\mathrm{F},$$

$$e_{R_0} = (190 \times 0.1\% + 3 \times 0.5\% + 0.7 \times 2\%)\,\Omega = 0.219\,\Omega.$$

故

$$\sigma_{L_x}=L_x\sqrt{\frac{\left(\frac{e_{C_0}}{C_0}\right)^2+\left(\frac{e_{R_1}}{R_1}\right)^2+\left(\frac{e_{R_2}}{R_2}\right)^2}{3}}=0.03\,\mathrm{mH},$$

$$\sigma_{R_L}=R_L\sqrt{\frac{\left(\frac{e_{R_1}}{R_1}\right)^2+\left(\frac{e_{R_2}}{R_2}\right)^2+\left(\frac{e_{R_0}}{R_0}\right)^2}{3}}=0.11\,\Omega,$$

$$\sigma_Q=Q\sqrt{\frac{\left(\frac{e_{C_0}}{C_0}\right)^2+\left(\frac{e_{R_0}}{R_0}\right)^2}{3}}=0.002.$$

综上, 所测无铁芯电感器的电感和损耗电阻为

$$L_x=(9.91\pm0.03)\,\mathrm{mH},$$
$$R_L=(103.25\pm0.11)\,\Omega,$$
$$Q=0.603\pm0.002.$$

然后用麦克斯韦桥测量无铁芯电感器的电感 L_x 和损耗电阻 R_L, 并计算电感线圈的 Q 值, 电路如图 3 所示.

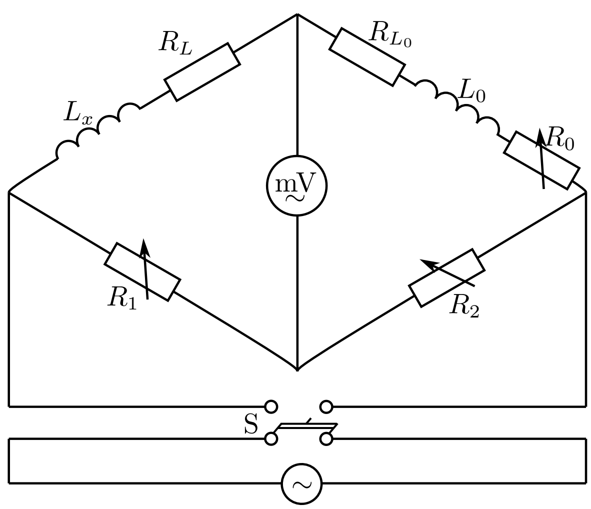

图 3: 麦克斯韦桥.

我们取 $R_1=4000.0\,\Omega$, $L_0=10\,\mathrm{mH}$. 调节交流电桥平衡, 此时电压表读数为 $\Delta U=0.46\,\mathrm{mV}$, $R_0=97.2\,\Omega$, $R_2=4051.0\,\Omega$. 电感箱 10 mH 挡的直流电阻为 $R_{L_0}=7.14\,\Omega$. 由平衡

条件可求出

$$L_x = L_0 \frac{R_1}{R_2} = 9.87\,\mathrm{mH},$$
$$R_L = (R_0 + R_{L_0}) \frac{R_1}{R_2} = 103.03\,\Omega,$$
$$Q = \frac{\omega L_0}{R_0 + R_{L_0}} = 0.60.$$

下面进行误差分析. 各物理量的允差为

$$e_{R_1} = 4000\,\Omega \times 0.1\% = 4\,\Omega,$$
$$e_{R_2} = 4051\,\Omega \times 0.1\% = 4.051\,\Omega,$$
$$e_{L_0} = 10\,\mathrm{mH} \times 2\% = 0.2\,\mathrm{mH},$$
$$e_{R_0} = (90 \times 0.1\% + 7 \times 0.5\% + 0.2 \times 2\%)\,\Omega = 0.129\,\Omega.$$

故

$$\sigma_{L_x} = L_x \sqrt{\frac{\left(\frac{e_{L_0}}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_2}}{R_2}\right)^2}{3}} = 0.11\,\mathrm{mH},$$
$$\sigma_{R_L} = R_L \sqrt{\frac{\left(\frac{e_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_2}}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_0}}{R_0 + R_{L_0}}\right)^2}{3}} = 0.11\,\Omega,$$
$$\sigma_Q = Q \sqrt{\frac{\left(\frac{e_{L_0}}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{e_{R_0}}{R_0 + R_{L_0}}\right)^2}{3}} = 0.07.$$

综上, 所测无铁芯电感器的电感和损耗电阻为

$$L_x = (9.87 \pm 0.11)\,\mathrm{mH},$$
$$R_L = (103.03 \pm 0.11)\,\Omega,$$
$$Q = 0.60 \pm 0.07.$$

使用麦克斯韦-维恩电桥的调节次数小于使用麦克斯韦桥的调节次数, 因此本次实验中前者的收敛性好于后者.

3 思考题

试画出麦克斯韦-维恩电桥测电感 L_x 时, 电桥达到平衡时的过程图.

麦克斯韦-维恩电桥 4 个桥臂的阻抗分别为

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= R_1,\\
Z_2 &= \frac{R_0}{1+\mathrm{j}\omega R_0 C_0},\\
Z_3 &= R_L + \mathrm{j}\omega L_x,\\
Z_4 &= R_2.
\end{aligned}
$$

如果不考虑交流毫伏表的内阻, 则毫伏表的电压为

$$
u_{\mathrm{AB}} = u\left|\frac{Z_2Z_3 - Z_1Z_4}{(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)}\right|.
$$

近似认为分母不变, 则麦克斯韦-维恩电桥的平衡条件为

$$
Z_1Z_4 = Z_2Z_3,
$$

即

$$
Z_2 = \frac{Z_1Z_4}{Z_3}.
$$

令

$$
\begin{aligned}
A = Z_2 &= \frac{R_0}{1+\omega^2R_0^2C_0^2} - \mathrm{j}\frac{\omega R_0^2C_0}{1+\omega^2R_0^2C_0^2},\\
B = \frac{Z_1Z_4}{Z_3} &= \frac{R_1R_2R_L}{R_L^2+\omega^2L_x^2} - \mathrm{j}\frac{\omega L_x}{R_L^2+\omega^2L_x^2},
\end{aligned}
$$

则在调节过程中 B 是一个常数. 设 A 的实部和虚部分别为

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{R_0}{1+\omega^2R_0^2C_0^2},\\
y &= -\frac{\omega R_0^2C_0}{1+\omega^2R_0^2C_0^2}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

从 (1) 式中消去 R_0, 得

$$
x^2 + \left(y + \frac{1}{2\omega C_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\omega C_0}\right)^2,
$$

因此控制 C_0 不变、调节 R_0 时, A 在复平面上所对应的点在一个圆上运动. 同理, 从 (1) 式中消去 C_0, 得

$$
\left(x - \frac{R_0}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R_0^2}{4},
$$

因此控制 R_0 不变、调节 C_0 时, A 在复平面上所对应的点也在一个圆上运动. 并且由平衡条件可知, 在适当的 R_0 和 C_0 下, 两个圆可以相交于 B 点. 因此只要反复交替调节 R_0 和 C_0, 使得每次 A 点与 B 点相距最近, 最终 A 将会收敛于 B, 如图 4 所示.

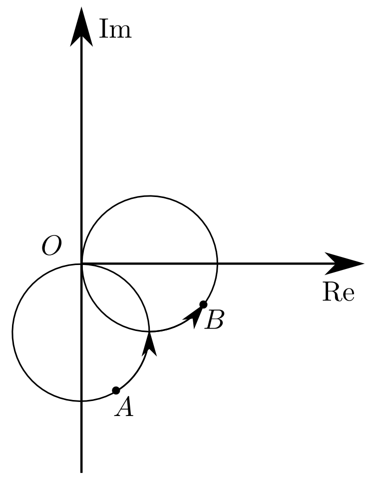

图 4: 麦克斯韦-维恩电桥的平衡过程示意图.

4 分析与讨论

1. **实验中元件参数的选择对测量结果的精度有什么影响?**
   如果元件参数选择不合理的话, 有可能造成电容箱的有效数字位数没有被全部利用, 影响测量精度; 也可能使平衡值超出实验仪器的调节范围, 从而无法达到平衡. 因此实验前我们应先根据所测物理量的估计值, 设定合理的元件参数.
2. **你的实验中两种电桥测量电感的收敛性差别是否很大, 与什么因素有关?**
   我的实验中感觉麦克斯韦桥的收敛性要明显差于麦克斯韦-维恩桥的收敛性, 调节麦克斯韦桥花费了我很多的时间. 这与两种电桥的参数选择有关, 麦克斯韦-维恩桥的两个参数 C_0 和 R_0 独立且连续变化, 因此可以很快调节平衡; 而麦克斯韦桥的两个平衡条件都含有 R_2, 因此 R_2 的每一次改变对两个平衡条件都有影响, 互相牵制, 必须反复调节.

5 收获与感想

这次实验让我体会到了交流电桥和直流电桥的不同之处. 直流电桥不用考虑相角的问题, 只有一个独立参量, 可以很快调节平衡; 而交流电桥需要调节两个参量, 这就涉及到了收敛性的问题. 教材中分析收敛性的方法也让我感到新奇, 我们可以在复平面上把需要调节相等的两个复数画出来, 分析改变不同参量时复数点的运动轨迹, 从而分析收敛性, 这与我之前分析电路灵敏度的数值计算方法不同, 为我提供了一种分析电路的新思路.

参考文献

[1] 吕斯骅, 段家忯, 张朝晖. 新编基础物理实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.