

# Αεροελαστικότητα & Αεροακουστική 9<sup>ο</sup> εξάμηνο

## Προεραϊτικό θέμα Αεροελαστικότητας

Χρονική απόκριση ταλάντωσης αεροτομής σε συνθήκες μόνιμης  
και μη-μόνιμης αεροδυναμικής



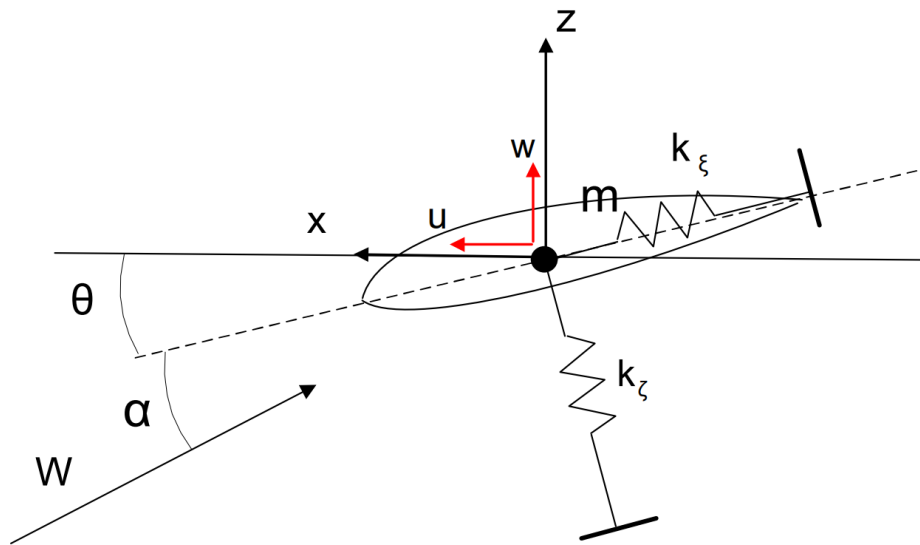
Γεώργιος Νιδριώτης - mc18054  
4 Μαρτίου 2024

# Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Μοντελοποίηση - ορισμός αεροελαστικών εξισώσεων	1
1.1 Αεροελαστικές εξισώσεις μόνιμης ροής . . . . .	2
1.2 Αεροελαστικές εξισώσεις μη-μόνιμης ροής . . . . .	5
2 Ιδιοανυσματική ανάλυση συστήματος	7
2.1 Υπολογισμός ιδιοτιμών συστήματος . . . . .	7
2.2 Υπολογισμός απόσβεσης συναρτήσει της γωνίας προσβολής . . . . .	7

## Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αφορά τον προσδιορισμό της αεροελαστικής συμπεριφοράς διδιάστατης αεροτομής. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό της αεροδυναμικής απόσβεσης και τη χρονική απόκριση της αεροτομής σε ελεύθερο πεδίο ροής. Η αεροδυναμική μοντελοποίηση της αεροτομής θα γίνει με δύο διαφορετικές μεθόδους, θεωρώντας μόνιμη και αποκατεστημένη ροή, και χρησιμοποιώντας μη-μόνιμο μοντέλο που λαμβάνει υπόψη και μεταβατικά φαινόμενα, ωστόσο περεταίρω εξήγηση δίνεται στις παρακάτω παραγράφους. Αναφορικά με την ελαστική στήριξη της αεροτομής, θεωρούμε τμήμα (μοναδιαίου μήκους) μιας πτέρυγας, και η ελαστική στήριξη αφορά την ανηγμένη δυσκαμψία σε κάμψη της πτέρυγας, στη θέση του τμήματος που μελετάμε. Επιπλέον, θεωρούμε μηδενική δομική απόσβεση (structural damping) και πως οι κύριοι άξονες του μητρώου ακαμψίας της διατομής είναι προσανατολισμένοι παράλληλα, και κάθετα στην χορδή της αεροτομής (σε μηδενική γωνία δεν έχουμε ελαστική σύζευξη). Ένα απλοποιημένο σχήμα του μοντέλου φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου αεροτομής

## 1 Μοντελοποίηση - ορισμός αεροελαστικών εξισώσεων

Με το μοντέλο που περιγράφηκε παραπάνω, θα εξάγουμε τις αεροελαστικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της αεροτομής. Οι εξισώσεις διατυπώνονται για τη γενική περίπτωση που έχουμε ελαστική σύζευξη, που ισχύει όταν έχουμε μη-μηδενική γωνία  $\theta$ . Θεωρώντας δεδομένα την ελαστικότητα (σταθερές ελατηρίων), τη γωνία της αεροτομής, και τη γωνία προσβολής του ανέμου, εφαρμόζοντας την ενεργειακή μέθοδο Lagrange, οι ελαστικές εξισώσεις προκύπτουν ως:

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + (\cos^2\theta \cdot k_x + \sin^2\theta \cdot k_z) \cdot u + \sin\theta\cos\theta \cdot (k_z - k_x) \cdot w &= F_x \\ m\ddot{w} + \sin\theta\cos\theta(k_z - k_x) \cdot u + (\sin^2\theta \cdot k_x + \cos^2\theta \cdot k_z) \cdot w &= F_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

Η μητρικά,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{\ddot{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos^2\theta \cdot k_x + \sin^2\theta \cdot k_z & \sin\theta\cos\theta \cdot (k_z - k_x) \\ \sin\theta\cos\theta \cdot (k_z - k_x) & \sin^2\theta \cdot k_x + \cos^2\theta \cdot k_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} \quad (1.2)$$

Με βάση την εξίσωση 1.2, σημειώνονται τα εξής. Το μητρώο  $\mathbf{K}$  αφορά το μετασχηματισμένο μητρώο δυσκαμψίας της αεροτομής από το τοπικό της σύστημα στο γενικό. Επίσης, οι εξισώσεις 1.1, 1.2 βρίσκονται στην πρωτογενή τους μορφή. Δηλαδή, δεν μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε την επίδραση της αεροδυναμικής στην απόσβεση από την εξίσωση 1.2.

Αν γραμμικοποιήσουμε την εξίσωση 1.2 γύρω από μια θέση (έστω τη θέση ισορροπίας), τότε παίρνει την παρακάτω μορφή (εξ. 1.3).

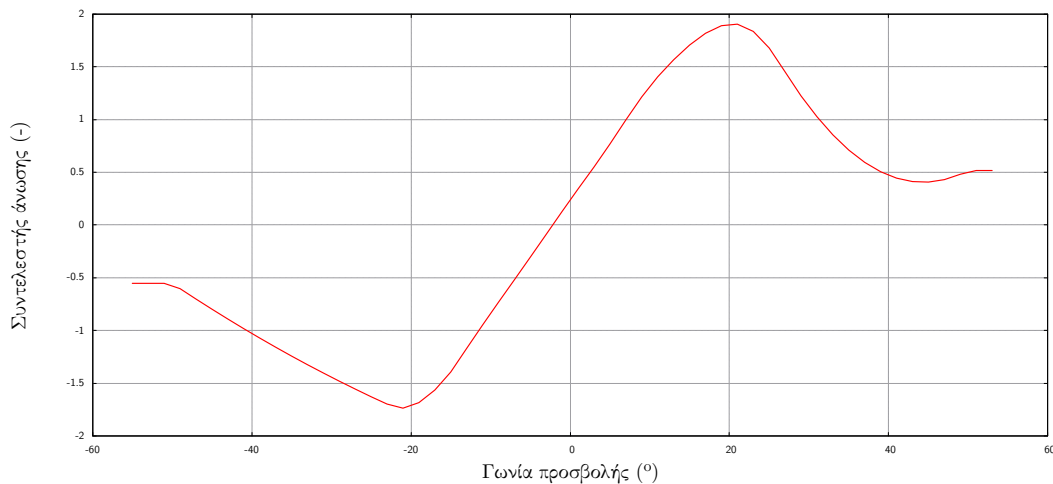
$$[\mathbf{M}]\delta\ddot{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{u}} & -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial \dot{u}} & -\frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}\delta\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\delta\mathbf{u} = \mathbf{F}_0 - [\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}}_0 - [\mathbf{K}]\mathbf{u}_0 \quad (1.3)$$

Η μορφή της εξίσωσης 1.3 είναι πολύ χρήσιμη στην ιδιοανυσματική ανάλυση, από όπου μπορούμε να εξάγουμε πληροφορίες για την ευστάθεια της αεροτομής μέσω του λόγου απόσβεσης. Φυσικά, η εξίσωση 1.3 μας παρέχει πληροφορία για την ευστάθεια στο σημείο γραμμικοποίησης, δηλαδή, αν γραμμικοποιήσουμε σε σημείο κοντά αλλά πριν την αντιστροφή της κλίσης του διαγράμματος  $Cl - \alpha$  (βλ. σχήμα 2), η αεροτομή θα φανεί πιθανότατα ευσταθής, παρ'όλο που κατά την ταλάντωσή της μπορεί να βρεθεί σε σημείο όπου έχουμε αρνητική απόσβεση, και σε αυτό θα αναφερθούμε σε επόμενες παραγράφους.

Οπότε, πλέον, με αφετηρία την εξίσωση 1.1 ή 1.2, μπορούμε να καθορίσουμε τις αεροελαστικές εξισώσεις για μόνιμη και μη-μόνιμη ροή.

## 1.1 Αεροελαστικές εξισώσεις μόνιμης ροής

Σε αυτή την περίπτωση, θα υπολογίσουμε την άνωση και την αντίσταση χρησιμοποιώντας δεδομένα για αεροτομή που προκύπτουν από μόνιμη πλήρως ανεπτυγμένη ροή. Για την υλοποίηση της εργασίας, χρησιμοποιήσαμε αεροτομή NACA 2412, και προσεγγίσαμε τις καμπύλες  $Cl - \alpha$ ,  $Cd - \alpha$  χρησιμοποιώντας προσομοίωση με συνεκτική ροή στο XFOIL. Στο λογισμικό που αναπτύχθηκε, έγινε προεκβολή για τιμές εκτός του εύρους της προσομοίωσης, με ανάπτυγμα Taylor χρησιμοποιώντας όρους δεύτερης τάξης, και θέσαμε όριο στις  $\pm 50^\circ$  για να αποφύγουμε την αύξηση του σφάλματος για μεγάλες τιμές της γωνίας προσβολής. Για γωνίες μεταξύ αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων, οι τιμές των  $Cl$ ,  $Cd$  λαμβάνονται με γραμμική παρεμβολή. Τέλος, οι τιμές της κλίσης, λαμβάνονται με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές. Οι καμπύλες  $Cl$ ,  $Cd$  που προκύπτουν φαίνονται στα διαγράμματα 2, 3.

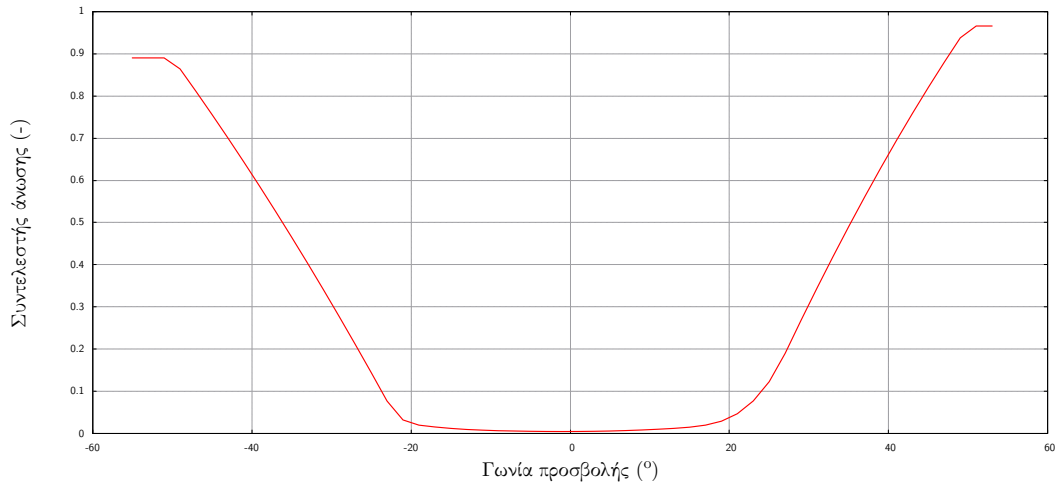


Σχήμα 2: Διάγραμμα συντελεστή άνωσης

Με δεδομένες καμπύλες των αεροδυναμικών συντελεστών, μπορούμε να υπολογίσουμε τα αεροδυναμικά φορτία. Αρχικά, πρέπει να ορίσουμε τη φαινομενική ταχύτητα της ροής και τη φαινομενική γωνία προσβολής και η έκφρασή τους λαμβάνοντας υπόψη την κίνηση της αεροτομής δίνεται παρακάτω.

$$W_{eff} = \sqrt{(-W \cos(\theta + \alpha) - \dot{u})^2 + (W \sin(\theta + \alpha) - \dot{w})^2} \quad (1.4)$$

$$\alpha_{eff} = -\text{atan}\left(\frac{W \sin(\alpha + \theta) - \dot{w}}{-W \cos(\alpha + \theta) - \dot{u}}\right) - \theta \quad (1.5)$$



Σχήμα 3: Διάγραμμα συντελεστή αντίστασης

Και επομένως, κατά τα γνωστά, η δύναμη αντίστασης και άνωσης δίνονται απο τη σχέση 1.6, και μετασχηματισμένες στο γενικό σύστημα απο τη σχέση 1.7.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho \cdot c \cdot C_L(\alpha_{eff}) \cdot W_{eff}^2 \\ D &= \frac{1}{2} \rho \cdot c \cdot C_D(\alpha_{eff}) \cdot W_{eff}^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} F_x &= L \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) - D \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) \\ F_z &= L \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) + D \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Επομένως, πλέον, παραγωγίζοντας τις σχέσεις 1.7 μπορούμε να λάβουμε το μητρώο της αεροδυναμικής απόσβεσης, όπως προκύπτει απο την εξίσωση 1.3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{u}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) + L \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \\ &\quad - \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) + D \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) + L \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} \\ &\quad - \frac{\partial D}{\partial \dot{w}} \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) + D \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Και αντίστοιχα για την  $F_z$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial \dot{u}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) - L \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \\ &\quad + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) + D \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) - L \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} \\ &+ \frac{\partial D}{\partial \dot{w}} \cdot \sin(\alpha_{eff} + \theta) + D \cdot \cos(\alpha_{eff} + \theta) \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Για τον υπολογισμό των παραγώγων από τις εξισώσεις (1.8)–(1.11), χρειαζόμαστε τις εκφράσεις των  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}}$ ,  $\frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{u}}}$ ,  $\frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}$ . Θεωρώντας πως  $W_{eff} \approx W$ , οι παραπάνω παράγωγοι είναι.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} &= \frac{\partial C_L}{\partial \dot{u}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c \cdot W_{eff}^2 = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_{eff}} \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c \cdot W_{eff}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} &= \frac{\partial C_L}{\partial \dot{w}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c \cdot W_{eff}^2 = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_{eff}} \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c \cdot W_{eff}^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} &= \frac{\partial C_D}{\partial \dot{u}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c \cdot W_{eff}^2 = \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_{eff}} \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c \cdot W_{eff}^2 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{w}} &= \frac{\partial C_D}{\partial \dot{w}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c \cdot W_{eff}^2 = \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_{eff}} \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c \cdot W_{eff}^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Και από την εξίσωση (1.5) η παράγωγοι  $\frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}$  είναι.

$$\frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} = \frac{-(W \sin(\alpha + \theta) - \dot{w})}{W^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2 \cdot W \cdot \dot{u} \cos(\alpha + \theta) - 2 \cdot W \cdot \dot{w} \cdot \sin(\alpha + \theta)} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} = \frac{-(W \cdot \cos(\alpha + \theta) + \dot{u})}{W^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2 \cdot W \cdot \dot{u} \cos(\alpha + \theta) - 2 \cdot W \cdot \dot{w} \cdot \sin(\alpha + \theta)} \quad (1.15)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.12)–(1.15) στις εξισώσεις (1.8)–(1.11), προκύπτουν οι τελικές εκφράσεις του μητρώου αεροδυναμικής απόσβεσης.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{u}} &= \frac{\rho}{2} \cdot W^2 \cdot c \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \cdot \left[ \sin(\alpha_{eff} + \theta) \left( \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_{eff}} + C_D \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\alpha_{eff} + \theta) \left( C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_{eff}} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} &= \frac{\rho}{2} \cdot W^2 \cdot c \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} \cdot \left[ \sin(\alpha_{eff} + \theta) \left( \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_{eff}} + C_D \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\alpha_{eff} + \theta) \left( C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_{eff}} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial \dot{u}} &= \frac{\rho}{2} \cdot W^2 \cdot c \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \cdot \left[ \sin(\alpha_{eff} + \theta) \left( \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_{eff}} + C_L \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\alpha_{eff} + \theta) \left( C_D - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_{eff}} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}} = \frac{\rho}{2} \cdot W^2 \cdot c \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} \cdot \left[ \sin(\alpha_{eff} + \theta) \left( \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_{eff}} + C_L \right) + \cos(\alpha_{eff} + \theta) \left( C_D - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_{eff}} \right) \right] \quad (1.19)$$

Και τελικά

$$[C] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{u}} & -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial \dot{u}} & -\frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

## 1.2 Αεροελαστικές εξισώσεις μη-μόνιμης ροής

Για τη διατύπωση των αεροελαστικών εξισώσεων μη-μόνιμης ροής, χρησιμοποιούμε τη διατύπωση των αεροδυναμικών φορτίων που παρέχουν οι εξισώσεις του Theodorsen για προσκολλημένη ροή. Οι εξισώσεις του Theodorsen, προσεγγίζουν την αεροτομή ως μια διδιάστατη επιφάνεια (επίπεδη πλάκα χωρίς πάχος), και θεωρούν πως η αεροδυναμική συμπεριφορά της αεροτομής κυριαρχείται από την κίνησή της κάθετα στην χορδή της. Στην τελική διατύπωση τους, οι εξισώσεις του Theodorsen λαμβάνουν υπόψη την επίδραση του ομόρρου στο οριακό στρώμα της πτέρυγας και επιπλέον συνυπολογίζουν την προστιθέμενη μάζα που προκύπτει από το ρευστό λόγω της επιτάχυνσης της πτέρυγας (κάθετα στην χορδή). Οι εξισώσεις του Theodorsen στην αρχική τους μορφή, θεωρούν και στρωφικό βαθμό ελευθερίας της πτέρυγας, ωστόσο ακολουθώντας τις αρχικές θεωρήσεις μας, όλοι οι αντίστοιχοι όροι έχουν μηδενισθεί. Η έκφραση του συντελεστή άνωσης από τις εξισώσεις του Theodorsen παρουσιάζεται στην εξίσωση (1.21).

$$C_L = 2\pi(\alpha_E(t) - \alpha_0) - \underbrace{\frac{\pi \cdot c \cdot \ddot{h}}{2 \cdot W_{eff}^2}}_{\text{Όρος προστιθέμενης μάζας}} \quad (1.21)$$

Όπου  $\ddot{h} = \ddot{w} \cos \theta + \ddot{u} \sin \theta$  η επιτάχυνση της πτέρυγας κάθετα στη χορδή. Σημειώνεται πως για αύξηση της ακρίβειας, ο συντελεστής  $2\pi$  μπορεί να αντικατασταθεί από την κλίση της καμπύλης  $C_L$ - $\alpha$  στη γραμμική περιοχή, δηλαδή  $\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\text{γραμμ}}$

Επιπλέον, λόγω της φαινόμενης γωνίας προσβολής, επάγεται αντίσταση στο σύστημα παράλληλο με τη χορδή, και ο συντελεστής αντίστασης είναι

$$C_D = C_{D, \mu\sigma\nu}(\alpha_E) + C_L \cdot (\alpha_{eff} - \alpha_E) \quad (1.22)$$

Η φαινόμενη γωνία προσβολής ( $\alpha_E$ ) είναι ο όρος που λαμβάνει υπόψη την επίδραση του ομόρρου στο οριακό στρώμα της αεροτομής και συχνά καλείται όρος ανακυκλοφορίας. Αναπτύσσοντας την ποσότητα  $\alpha_E$  έχουμε:

$$\alpha_E = C(k) \alpha_{eff} \quad (1.23)$$

Με

$$\alpha_{eff} = \alpha - \theta - \frac{\dot{h}}{W_{eff}} \quad (1.24)$$

Όπου,  $C(k)$  αποκαλούμε τη συνάρτηση Theodorsen, που συσχετίζει την ταλάντωση του πεδίου ροής στον ομόρρου με την πίεση στην επιφάνεια της αεροτομής, δηλαδή ποσοτικοποιεί την επίδραση της ταλάντωσης στον ομόρρου στον συντελεστή άνωσης.

Καθώς ο υπολογισμός της συνάρτησης Theodorsen είναι αρκετά επίπονος, θα υπολογίσουμε την φαινόμενη γωνία προσβολής  $\alpha_E$  από την εξίσωση (1.25), όπου  $y_1, y_2$  δύο επιπλέον αεροδυναμικοί βαθμοί ελευθερίας, που προκύπτουν από τη λύση του συστήματος Σ.Δ.Ε 1.26.

$$\alpha_E = \alpha_{eff} \cdot (1 - A_1 - A_2) + y_1 + y_2 \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + b_1 \frac{2W_{eff}}{c} y_1 - b_1 A_1 \frac{2W_{eff}}{c} \alpha_{eff} &= 0 \\ \dot{y}_2 + b_2 \frac{2W_{eff}}{c} y_2 - b_2 A_2 \frac{2W_{eff}}{c} \alpha_{eff} &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Με  $A_1 = 0.165$ ,  $A_2 = 0.335$ ,  $b_1 = 0.0455$ ,  $b_2 = 0.3000$ .

Ως οριακές συνθήκες των εξισώσεων 1.26 ορίζουμε πως για  $t = 0$  έχουμε  $\alpha_E = \alpha_{eff}$  οπότε προκύπτει  $y_1(0) = A_1 \alpha_{eff}$  και  $y_2(0) = A_2 \alpha_{eff}$ . Οι εξισώσεις 1.26 διακριτοποιούνται με πεπερασμένες διαφορές και υπολογίζουμε τις τιμές των  $y_1, y_2$  πριν τον υπολογισμό των εξωτερικών φορτίων από την εξίσωση (1.7).

Για να υπολογίσουμε πλέον, τις παραγώγους των αεροδυναμικών φορτίων και συνεπώς το μητρώο αεροδυναμικής απόσβεσης διαφορίζουμε τις Δ.Ε 1.26.

$$\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left( \frac{dy_1}{dt} \right) + b_1 \frac{2W_{eff}}{c} \frac{\partial y_1}{\partial \dot{u}} - b_1 A_1 \frac{2W_{eff}}{c} \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} = 0 \quad (1.27)$$

Θεωρώντας τον όρο δεύτερης τάξης  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left( \frac{dy_1}{dt} \right) \approx 0$  προκύπτει:

$$\frac{\partial y_1}{\partial \dot{u}} = A_1 \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial \dot{u}} = A_2 \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \quad (1.29)$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial \alpha_E}{\partial \dot{u}} = (1 - A_1 - A_2) \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial y_1}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial y_2}{\partial \dot{u}} \quad (1.30)$$

Και αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.28)–(1.29), προκύπτει:

$$\frac{\partial \alpha_E}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \quad (1.31)$$

Ενώ από την εξίσωση (1.24) είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} &= -\sin(\theta) \\ \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{w}} &= -\cos(\theta) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Επομένως, τελικά έχουμε

$$\frac{\partial C_L}{\partial \dot{u}} = \frac{dC_L}{d\alpha} \bigg|_{\gamma_{\text{γραμμ}}} \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} \quad (1.33)$$

Και για τον συντελεστή αντίστασης

$$\frac{\partial C_D}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha_{eff}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial C_L}{\partial \dot{u}} \cdot (\alpha_{eff} - \alpha_E) \quad (1.34)$$

Και οι τελικές τιμές των παραγώγων των αεροδυναμικών φορτίων υπολογίζονται από τις εξισώσεις (1.8)–(1.13). Σημειώνεται ωστόσο, πως η θεώρηση του όρου  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left( \frac{dy_1}{dt} \right) \approx 0$  αγνοεί την επιρροή του ομόρρου στην αεροδυναμική απόσβεση της αεροτομής και αποτελεί μια παραδοχή για απλοποίηση των υπολογισμών και την αποφυγή της επίλυσης μιας ακόμη Σ.Δ.Ε. Ωστόσο, όπως θα δούμε και σε επόμενη παράγραφο, αν δεν λύσουμε την γραμμικοποιημένη εξίσωση για τον προσδιορισμό της χρονοσειράς των αποκρίσεων, αλλά χρησιμοποιήσουμε την αρχική έκφραση, αυτή η απλοποίηση δεν αποτελεί αίτιο προβληματισμού. Ωστόσο, αν θέλαμε να συγκρίνουμε τις τιμές της απόσβεσης που δίνουν οι εκφράσεις των μόνιμων και μη-μόνιμων μοντέλων, θα ήταν αναγκαίο να συμπεριλάβουμε και τον όρο δεύτερης τάξης.



## 2 Ιδιοανυσματική ανάλυση συστήματος

### 2.1 Υπολογισμός ιδιοτιμών συστήματος

Για την αναγνώριση των ιδιοσυχνοτήτων και της απόσβεσης του συστήματος πραγματοποιούμε ιδιοανυσματική ανάλυση.

Αρχικά, μετασχηματίζουμε τις αεροελαστικές εξισώσεις σε μορφή κατάστασης-χώρου (state space transformation).

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Επομένως το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Και εναλλακτικά

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad (2.3)$$

Αναλύοντας το ομογενές σύστημα, οι ιδιοσυχνότητες και η απόσβεση δίνονται από τις ιδιοτιμές του μητρώου  $\mathbf{A}$ . Για τους δυο βαθμούς ελευθερίας του φυσικού μας προβλήματος, το μητρώο  $\mathbf{A}$  έχει διαστάσεις  $4 \times 4$  και συνεπώς δίνει τέσσερις ιδιοτιμές – δύο ζεύγη μιγαδικών συζυγών ιδιοτιμών από την λύση της εξίσωσης (2.4).

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0 \quad (2.4)$$

Σημειώνεται πως στην πράξη, για μητρώα μεγαλύτερα του  $2 \times 2$  οι ιδιοτιμές δεν βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση (2.4) αλλά βρίσκονται αριθμητικά από το μητρώο  $\mathbf{A}$ .

Κάθε ζεύγος συζυγών ιδιοτιμών πλέον έχει την παρακάτω μορφή (εξίσωση (2.5)).

$$\lambda_i, \lambda_i^c = -\zeta \pm i \underbrace{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}_{\omega_d} \quad (2.5)$$

Επομένως, το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής μας πληροφορεί για την απόσβεση του συστήματος για συχνότητα ταλάντωσης  $\omega_d$  και το φανταστικό μέρος μας δίνει την ιδιοσυχνότητα του συστήματος για κάθε ιδιοτιμή.

Επιπλέον, από την εξίσωση (2.6) για κάθε ιδιοτιμή μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη ιδιομορφή, που μας πληροφορεί για το πλάτος της ταλάντωσης των βαθμών ελευθερίας όταν το σύστημα ταλαντώνεται με την αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα. Στη δική μας περίπτωση για κάθε ιδιοτιμή μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη ιδιομορφή, που μας πληροφορεί για τη συσχέτιση των βαθμών ελευθερίας όταν το σύστημα ταλαντώνεται με την αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα. Κάθε ιδιομορφή συνήθως περιγράφει την κίνηση του συστήματος όπως κυριαρχείται από την ταλάντωση ενός βαθμού ελευθερίας. Σε προβλήματα περισσότερων βαθμών ελευθερίας, και ειδικά σε προβλήματα συνεχούς μέσου, υψηλότερες ιδιοτιμές περιγράφουν και πεπλεγμένες μορφές.

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \phi_i = 0 \quad (2.6)$$

### 2.2 Υπολογισμός απόσβεσης συναρτήσει της γωνίας προσβολής

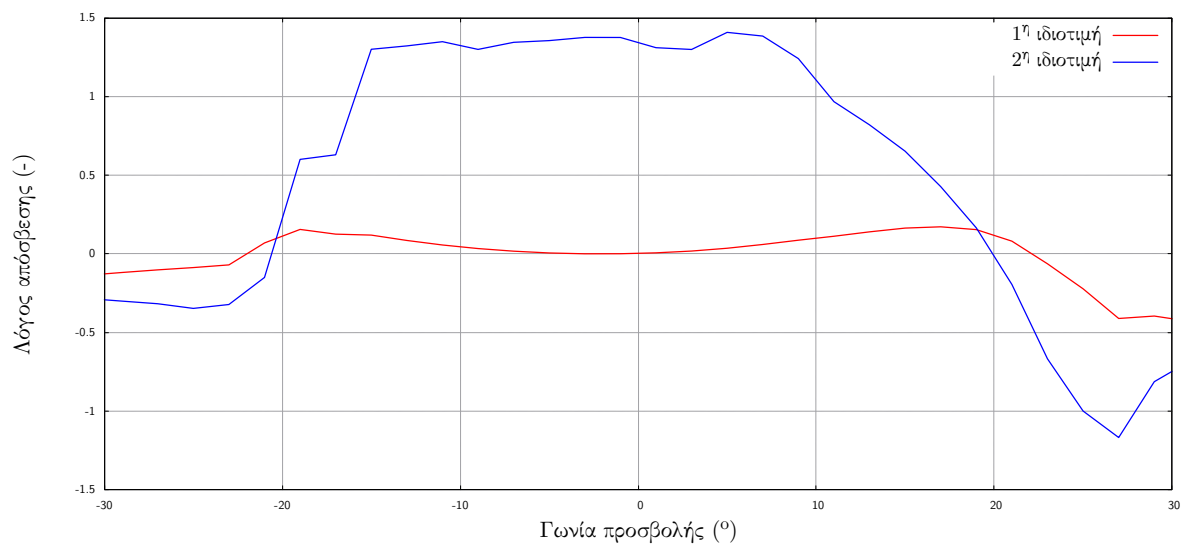
Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, οι ιδιοτιμές του συστήματος υπολογίζονται από το μητρώο  $\mathbf{A}$  της εξίσωσης (2.3). Προφανώς, το μητρώο της απόσβεσης αφορά τη θέση αναφοράς γύρω από την οποία γραμμικοποιήσαμε, και επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις μόνιμης ροής (που δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα ταλάντωσης) γραμμικοποιώντας γύρω από το σημείο ισορροπίας ( $\dot{u}, \dot{w} = 0$ ).

Τα διαγράμματα μεταβολής της απόσβεσης για τους δυο βαθμούς ελευθερίας συναρτήσει της γωνίας προσβολής παρατίθενται στο σχήμα 4 ενώ τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για το μοντέλο παρατίθενται στον πίνακα 1.

Η απόσβεση του συστήματος γίνεται αρνητική, δηλαδή το σύστημα γίνεται ασταθές, όταν ένας εκ των δύο λόγους απόσβεσης γίνει αρνητικός, διότι αυτό υποδηλώνει πως προσφέρεται ενέργεια στην αεροτομή από το ρευστό. Στο σχήμα 4, όπως υποδηλώνει και η εξίσωση (2.5) βλέπουμε το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής και φαίνεται να γίνεται αρνητικό για γωνία προσβολής περίπου  $20^\circ$  και  $\approx -21^\circ$  όταν η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στον Β.Ε πτερύγησης

Γραμμική μάζα	<b>m</b>	165	$kg/m$
Ελαστικότητα $\parallel$ χορδής	<b>k<sub>x</sub></b>	15791	$N/m$
Ελαστικότητα $\perp$ χορδής	<b>k<sub>z</sub></b>	3948	$N/m$
Ταχύτητα ελεύθερης ροής	<b>U<sub>inf</sub></b>	80	$m/s$
Γωνία στήριξης	<b><math>\theta</math></b>	2	$^\circ$
Γωνία προσβολής	<b><math>\alpha</math></b>	4	$^\circ$
Μήκος χορδής	<b>c</b>	1.5	$m$
Αριθμός Reynolds	<b>Re</b>	$8 \cdot 10^6$	—

Πίνακας 1: Δεδομένα μοντέλου



Σχήμα 4: Μεταβολή του λόγου απόσβεσης συναρτήσει της γωνίας προσβολής

γίνεται αρνητική. Παρατηρούμε επίσης, πως το μεγαλύτερο μέρος της απόσβεσης παρέχεται από τον Β.Ε πτερύγησης (flapwise), ενώ για την chordwise κίνηση έχουμε μικρές αλλά θετικές τιμές απόσβεσης.