

# Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

## 7<sup>ο</sup> εξάμηνο

### Θέμα 2

#### Gradient Based Optimization



Ευθύμιος-Παναγιώτης Σπανόπουλος - mc20034

Γεώργιος Νιδριώτης - mc18054

16 Ιανουαρίου 2024

# Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Ορισμός μεταβλητών σχεδιασμού	1
2 Επίλυση πρωτεύοντος προβλήματος	1
2.1 Υλοποίηση υπολογισμών και αποτελέσματα	2
2.1.1 Ανάλυση ανεξαρτησίας κομβικών σημείων	3
3 Υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας με πεπερασμένες διαφορές	4
4 Υπολογισμός παραγώγων με τη διακριτή συζυγή μέθοδο	6
4.1 Υπολογισμός παραγώγων αντικειμενικής συνάρτησης	6
4.2 Υπολογισμός παραγώγων υπολοίπων	7
4.2.1 Ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού	7
4.2.2 Ως προς τις μεταβλητές κατάστασης	7
4.2.3 Συζυγές πεδίο	8
5 Συνεχής συζυγής μέθοδος	8
6 Υπολογισμός παραγώγων με τη συνεχή συζυγή μέθοδο	9
6.1 Επίλυση FAE με Runge Kutta 4ης τάξης	10
6.2 Ολοκλήρωση - Υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας	10
7 Σύγκριση αποτελεσμάτων FD, DA, CA	11
7.1 Σύγκριση τιμών παραγώγων	11
7.2 Σύγκριση υπολογιστικού κόστους	12
8 Βελτιστοποίηση με τη μέθοδο της απότομης καθόδου	13

## Εισαγωγή

Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για τους υπολογισμούς παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα. Τα φυσικά μεγέθη που επιλέχθηκαν (ιξώδες, πυκνότητα, κινηματική συνεκτικότητα) αφορούν τον αέρα σε θερμοκρασία 25°.

$U_{\infty}(\text{m/s})$	10
$\rho(\text{kg/m}^3)$	1.293
$\nu(\text{m}^2/\text{s})$	1.40E-05
$\mu(\text{Pa} \cdot \text{s})$	1.81E-05
$L(\text{m})$	1
$\delta_0(\text{m})$	0.001
$Q(\text{m}^3/\text{s})$	-0.05

## 1 Ορισμός μεταβλητών σχεδιασμού

Για το δεδομένο πρόβλημα, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι τέσσερις συντελεστές που ελέγχουν την κατανομή της κατακόρυφης ταχύτητας που εκχέεται ή απορροφάται από την πλάκα. Συγκεκριμένα, η κατανομή της κατακόρυφης ταχύτητας  $v_0$  ελέγχεται με βάση τη σχέση 1.1.

$$v_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.1)$$

Ωστόσο, έχουμε περιορισμό στην συνολική παροχή, τον οποίο πρέπει να τηρεί η κατανομή της ταχύτητας. Όπως αναφέραμε, ανά μονάδα μήκους η παροχή είναι:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^L (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx \\ Q &= \left[ \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + d \cdot x \right]_0^L \\ Q &= \frac{a}{4}L^4 + \frac{b}{3}L^3 + \frac{c}{2}L^2 + dL \end{aligned} \quad (1.2)$$

Επομένως, μια από τις τέσσερις μεταβλητές σχεδιασμού πρέπει να τεθεί ως εξαρτημένη και να τηρεί την παραπάνω σχέση ικανοποιώντας τον περιορισμό για σταθερή παροχή.

Έτσι, εκφράζουμε την τέταρτη μεταβλητή  $d$  ως:

$$d = \frac{Q - \left( \frac{a}{4}L^4 + \frac{b}{3}L^3 + \frac{c}{2}L^2 \right)}{L} \quad (1.3)$$

Επομένως, πλέον, οι μεταβλητές σχεδιασμού μας είναι οι συντελεστές  $a, b, c$  του πολωνύμου που εκφράζει την κατανομή της κατακόρυφης ταχύτητας  $v_0$  της ροής που εκχέει - απορροφά η πλάκα.

## 2 Επίλυση πρωτεύοντος προβλήματος

Η επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος απαιτεί την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης 2.1 για την εύρεση της τιμής του πάχους του οριακού στρώματος κατά το μήκος της πλάκας. Έπειτα, από την έκφραση 2.2 υπολογίζουμε την τιμή της δύναμης της τριβής στην πλάκα λόγω του εισερχόμενου ρεύματος αέρα.

$$\left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{U}{\nu} \delta(x) \frac{d\delta}{dx} + \frac{v_0(x)}{\nu} \delta(x) = \frac{\pi}{2} \quad (2.1)$$

$$F = \int_0^L \tau_w dx \quad (2.2)$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

όπου,

- $\tau_w$ , είναι η διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας,
- $u$ , είναι η τιμή της οριζόντιας ταχύτητας εντός του οριακού στρώματος

Μπορούμε να προσεγγίσουμε την κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας ( $u(y)$ ) με μια έκφραση που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$u(0) = 0 \text{ και } u(\delta) = U$$

Όπου  $U$  είναι η ταχύτητα της ελεύθερης ροής.

Προσεγγίζοντας την κατανομή της ταχύτητας ως  $u(y) = U \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$ , η διατμητική τάση στο επίπεδο της πλάκας εκφράζεται ως:

$$\tau_w = \frac{U\pi\mu}{2\delta(x)} \quad (2.3)$$

$$F = \int_0^L \frac{U\pi\mu}{2\delta(x)} dx \quad (2.4)$$

Η σ.δ.ε (εξίσωση 2.1) δεν έχει αναλυτική λύση. Έτσι, χρειάζεται να διακριτοποιήσουμε τη γεωμετρία (το μήκος) και να την επιλύσουμε αριθμητικά. Για την αριθμητική επίλυση χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Runge Kutta τέταρτης τάξης.

Αναδιαμορφώνουμε την εξίσωση 2.1 και έχουμε

$$f(x, \delta) = \frac{d\delta}{dx} = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{v_0(x)}{\nu} \delta(x) \right) \cdot \frac{1}{\left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{U}{\nu} \delta(x)} \quad (2.5)$$

Και το σχήμα της Runge Kutta υλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x f(x^i, \delta^i) \\ k_2 &= \Delta x f\left(x^i + \frac{\Delta x}{2}, \delta^i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= \Delta x f\left(x^i + \frac{\Delta x}{2}, \delta^i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= \Delta x f(x^{i+1}, \delta^i + k_3) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\delta^{i+1} = \delta^i + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

Επομένως, λαμβάνουμε έτσι τις κομβικές τιμές για το πάχος του οριακού στρώματος, και έτσι, μπορούμε να ολοκληρώσουμε αριθμητικά (με τη μέθοδο των τραπεζίων) την σχέση 2.4 και να λάβουμε την τιμή της αντιστοιχίας της συνάρτησης (της τριβής).

$$F = \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \left( \frac{U\pi\mu}{2\delta_i} + \frac{U\pi\mu}{2\delta_{i+1}} \right) \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right] \quad (2.7)$$

## 2.1 Υλοποίηση υπολογισμών και αποτελέσματα

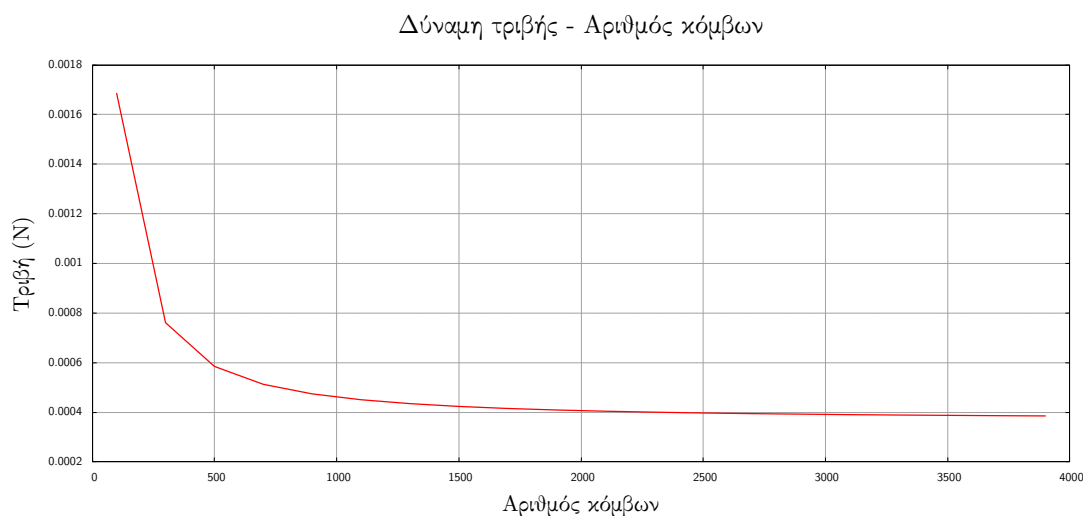
Για την ολοκλήρωση της εξίσωσης 2.1 απαιτείται μια οριακή συνθήκη. Για οριακή συνθήκη ορίζουμε το πάχος του οριακού στρώματος στην αρχή της πλάκας ( $x = 0$ ) να είναι μηδενικό ( $\delta(0) = 0$ ). Ωστόσο, όπως υποδεικνύεται και από την εκφώνηση και όπως παρατηρείται και από την έκφραση της 2.5, μια μηδενική τιμή απειρείζει η τιμή της παραγώγου, έτσι σε μια αριθμητική μέθοδο δεν μπορεί να βοηθηθεί για την εξέλιξη των υπολογισμών. Έτσι,

ορίζουμε μια μικρή τιμή, της τάξης των ( $10^{-6} - 10^{-3}$ ) ώστε να μην επηρεάσει τα αποτελέσματά μας, αλλά να επιτρέπει την επίλυση της σ.δ.ε.

Σημειώνεται πως έγινε δοκιμή για τοπική πύκνωση στους κόμβους στην αρχή (ή και στο τέλος) της πλάκας και βοήθησε στα αποτελέσματα για ίδιο αριθμό κόμβων, ωστόσο, στη συνέχεια της εργασίας, στον υπολογισμό των του συζυγούς πεδίου με τη συνεχή μέθοδο, έβλαψε τα αποτελέσματά της μεθόδου. Έτσι, υιοθετήσαμε μια μεγαλύτερη τιμή ίση με  $\delta(0) = 10^{-3}$ , και ομοιόμορφο πλέγμα.

### 2.1.1 Ανάλυση ανεξαρτησίας κομβικών σημείων

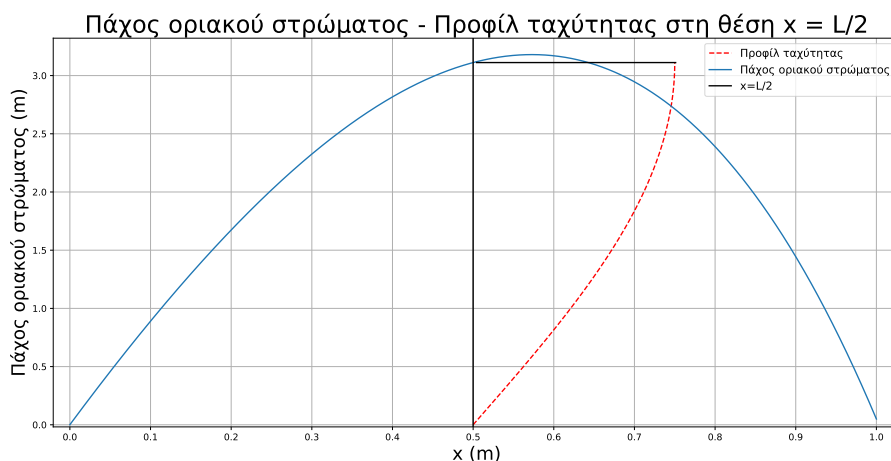
Για τον καθορισμό του αριθμού των κομβικών σημείων που οδηγούν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα της αντικειμενικής συνάρτησης, έγινε ανάλυση ανεξαρτησίας της τριβής ως προς τον αριθμό των κομβικών σημείων. Συγκεκριμένα, έγινε δοκιμή στο εύρος (100–2000) σημείων, με ομοιόμορφη απόσταση. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Δύναμη τριβής συναρτήσει του αριθμού των κόμβων

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αρχίζει να σταθεροποιείται περίπου στους 2000 κόμβους, επομένως, συνεχίζοντας, όλα τα μοντέλα θα έχουν τον ίδιο αριθμό κόμβων.

Παρακάτω, στο σχήμα 2 παρατίθεται το διάγραμμα της μεταβολής του πάχους του οριακού στρώματος ( $\delta(x)$ ) κατά το μήκος της πλάκας καθώς και το προφίλ της ταχύτητας εντός του οριακού στρώματος στο κέντρο της πλάκας ( $x = L/2$ ).



Σχήμα 2: Πάχος οριακού στρώματος και προφίλ ταχύτητας στη μέση της πλάκας

### 3 Υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας με πεπερασμένες διαφορές

Οι πεπερασμένες διαφορές αποτελούν την πιο απλή αλλά και υπολογιστική απαιτητική μέθοδο υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας. Για τον υπολογισμό των παραγώγων, χρησιμοποιούμε κεντρικές πεπερασμένες διαφορές. Μεταβάλλουμε την τιμή της υπο μελέτη μεταβλητής κατά μια μικρή ποσότητα  $\epsilon$  και υπολογίζουμε την μεταβολή που προκαλεί στην αντικειμενική συνάρτηση. Φύσικα, όπως και προηγουμένως, ο καθορισμός ενός ικανοποιητικού βήματος  $\epsilon$  απαιτεί μια ανάλυση ανεξαρτησίας των αποτελεσμάτων από την ποσότητα αυτή.

Η διαδικασία υπολογισμού των παραγώγων παρατίθεται στο σχήμα 3 μέσω ενός τμήματος του κώδικα.

```
// Μείωση μεταβλητής κατά  $\epsilon$ 
coeffs[0] -= step;
// Επαναυπολογισμός τέταρτης εξαρτημένης μεταβλητής
calcD();
// Επίλυση σ.δ.ε
solveRungeKutta4();
// Αποθήκευση υπολογισμένης τιμής τριβής
double F_a1 = getFriction();
// Αύξηση μεταβλητής κατά  $\epsilon$  (σε σχέση με την αρχική)
coeffs[0] += 2*step;
// Επαναυπολογισμός τέταρτης εξαρτημένης μεταβλητής
calcD();
// Επίλυση σ.δ.ε
solveRungeKutta4();
// Αποθήκευση υπολογισμένης τιμής τριβής
double F_a2 = getFriction();
// Επαναφορά μεταβλητής στην αρχική τιμή
coeffs[0] -= step;
// Υπολογισμός παραγώγου με πεπερασμένες διαφορές
der[0] = (F_a2 - F_a1) / (2 * step);

// Επανάληψη για τις άλλες 2 μεταβλητές
```

Σχήμα 3: Τυπική μεθοδολογία υπολογισμού παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές

Η εξάρτηση μίας εκ των τριών παραγώγων ευαισθησίας από το μέγεθος του βήματος φαίνεται στο σχήμα 4. Η συμπεριφορά των άλλων δυο παραγώγων είναι ανάλογη αυτής του σχήματος 4.



Σχήμα 4: Εξάρτηση της παραγώγου από το βήμα των πεπερασμένων διαφορών

Παρατηρούμε πως ξεκινώντας από βήμα της τάξης των  $10^{-1}$  και μειώνοντας το βήμα, η τιμή της παραγώγου σταθεροποιείται, διατηρώντας σχεδόν σταθερή τιμή για βήμα μικρότερο του  $10^{-2}$ . Ωστόσο παρατηρούμε πως για πολύ μικρό βήμα, της τάξης του  $10^{-8}$ , εμφανίζονται σφάλματα αποκοπής λόγω της αναπαράστασης των αριθμών και μεταβάλλονται τα αποτελέσματα. Έτσι, για βήμα της τάξης του  $10^{-3}$  μπορούμε να αποφανθούμε πως έχουμε αρκετά αξιόπιστο υπολογισμό των παραγώγων.

## 4 Υπολογισμός παραγώγων με τη διακριτή συζυγή μέθοδο

Οι παράγωγοι ευαισθησίας της  $F$  ορίζονται σε διακριτή μορφή απο την εξίσωση 4.1. Σε αυτή την περίπτωση,  $\vec{R}$  είναι το διάνυσμα των κομβικών υπολοίπων, που ορίζεται παρακάτω στην σχέση 4.2,  $\vec{U}$  είναι το διάνυσμα των κομβικών τιμών του πάχους του οριακού στρώματος, και  $\vec{b}$  το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού.

$$\frac{\delta F}{\delta \vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} (= 0) + \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \frac{\delta \vec{U}}{\delta \vec{b}} \quad (4.1)$$

Και ως υπόλοιπο ορίζουμε την παρακάτω ποσότητα.

$$R_i = \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{U}{v} \delta_i \frac{d\delta}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{\nu_0(x_i)}{v} \delta_i - \frac{\pi}{2} \quad (4.2)$$

Έτσι, ορίζουμε τις παραγώγους των κομβικών υπολοίπων ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού ως:

$$\frac{\delta \vec{R}}{\delta \vec{b}} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \frac{\delta \vec{U}}{\delta \vec{b}} = 0 \quad (4.3)$$

Πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα των παραγώγων των υπολοίπων με ένα διάνυσμα  $\vec{\Psi}^T$  και αφαιρώντας το απο την εξίσωση 4.1 προκύπτει η επαυξημένη μορφή της εξίσωσης 4.1:

$$\delta F_{aug} = \left( \frac{F}{\partial \vec{U}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \delta \vec{U} + \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \delta \vec{b} \quad (4.4)$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το σύστημα των εξισώσεων 4.5 και με το διάνυσμα του  $\vec{\Psi}^T$  που προκύπτει απο την επίλυση της 4.5, οι παράγωγοι ευαισθησίας δίνονται απο την 4.6.

$$\frac{F}{\partial \vec{U}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = 0 \quad (4.5)$$

$$\delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \delta \vec{b} \quad (4.6)$$

Για την επίλυση του 4.5 απαιτείται πρώτα ο υπολογισμός των παρακάτω ποσοτήτων:

- $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}}$ , διαστάσεων  $\kappa \times N$
- $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ , διαστάσεων  $\kappa \times \kappa$
- $\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}$ , διαστάσεων  $1 \times \kappa$

όπου,  $\kappa$  το πλήθος των κόμβων, και  $N$  το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού.

### 4.1 Υπολογισμός παραγώγων αντικειμενικής συνάρτησης

Ο υπολογισμός της ποσότητας  $\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}$  προκύπτει εύκολα απο διαφόριση της έκφρασης της αντικειμενικής συνάρτησης 2.4 ή συγκεκριμένα απο την έκφρασή της με τη μέθοδο των τραπεζίων 2.7.

Για τον πρώτο και τον τελευταίο κόμβο, η έκφραση της παραγώγου είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial U_0} &= \frac{(x_1 - x_0)}{2} \frac{\partial}{\partial U_0} \left( \frac{U \pi \mu}{2U_0} + \frac{U \pi \mu}{2U_1} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial U_0} &= - \frac{U \pi \mu (x_1 - x_0)}{4 U_0^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial U_\kappa} &= \frac{(x_\kappa - x_{\kappa-1})}{2} \frac{\partial}{\partial U_\kappa} \left( \frac{U \pi \mu}{2U_\kappa} + \frac{U \pi \mu}{2U_{\kappa-1}} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial U_\kappa} &= - \frac{U \pi \mu (x_\kappa - x_{\kappa-1})}{4 U_\kappa^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Και για τους ενδιάμεσους κόμβους, η τιμή της  $U$  η  $\delta$  συνεισφέρει σε δύο εμβαδά, έτσι είναι:

$$\frac{\partial F}{\partial U_i} = -\frac{U\pi\mu}{4} \frac{(x_i - x_{i-1})}{U_i^2} - \frac{U\pi\mu}{4} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{U_i^2} \quad (4.9)$$

Η για ομοιόμορφο πλέγμα με μέγεθος κελιών  $\Delta x$ , είναι:

$$\frac{\partial F}{\partial U_i} = -\frac{U\pi\mu}{2} \frac{\Delta x}{U_i^2}$$

Άρα απο τις εξισώσεις 4.7, 4.8, 4.9 έχουμε το διάνυσμα  $\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}$ .

## 4.2 Υπολογισμός παραγώγων υπολοίπων

### 4.2.1 Ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των υπολοίπων απο τη σχέση 4.2 και αντικαθιστώντας την έκφραση του τέταρτου συντελεστή απο την 1.3 έχουμε:

$$\frac{\partial R_i}{\partial b_n} = \frac{\partial}{\partial b_n} \left[ \left( ax^3 + bx^2 + cx - \frac{Q - \left( \frac{a}{4}L^4 + \frac{b}{3}L^3 + \frac{c}{2}L^2 \right)}{L} \right) \frac{\delta_i}{\nu} \right] \quad (4.10)$$

Έτσι, έχουμε:

$$\frac{\partial R_i}{\partial \vec{b}} = \frac{U_i}{\nu} \begin{bmatrix} x_i^3 - \frac{L^3}{4} & x_i^2 - \frac{L^2}{3} & x_i - \frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Εξαίρεση αποτελούν ωστόσο οι παράγωγοι του πρώτου κόμβου. Επειδή στον πρώτο κόμβο επιβάλλουμε την οριακή συνθήκη, το υπόλοιπο εκφράζεται ως  $R_0 = \delta_0 - \epsilon$ , επομένως έχει όλες τις παραγώγους  $\frac{\partial R_0}{\partial \vec{b}} = 0$ .

### 4.2.2 Ως προς τις μεταβλητές κατάστασης

Αναπτύσσοντας τη μερική παράγωγο των υπολοίπων σε κάποιο κόμβο  $i$  ως προς τη μεταβλητή κατάστασης σε κάποιο κόμβο  $m$  έχουμε:

$$\frac{\partial R_i}{\partial U_m} = \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{U_\infty}{\nu} \cdot \left[ \frac{\partial U_i}{\partial U_m} \frac{dU}{dx} \Big|_{x_i} + U_i \frac{\partial}{\partial U_m} \left( \frac{dU}{dx} \Big|_{x_i} \right) \right] + \frac{v_0(x_i)}{\nu} \frac{\partial U_i}{\partial U_m} \quad (4.12)$$

Εκφράζοντας την παράγωγο  $\frac{dU}{dx} \Big|_{x_i}$  με πεπερασμένες διαφορές η παραπάνω εξίσωση 4.12 γράφεται:

$$\frac{\partial R_i}{\partial U_m} = \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{U_\infty}{\nu} \cdot \left[ \frac{\partial U_i}{\partial U_m} \frac{dU}{dx} \Big|_{x_i} + U_i \frac{\partial}{\partial U_m} \left( \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} \right) \right] + \frac{v_0(x_i)}{\nu} \frac{\partial U_i}{\partial U_m} \quad (4.13)$$

Οπότε, οι τελικές παράγωγοι είναι:

- $m = i$

$$\frac{\partial R_i}{\partial U_i} = \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{U_\infty}{\nu} \cdot \left[ \frac{dU}{dx} \Big|_{x_i} + \frac{U_i}{\Delta x} \right] + \frac{v_0(x_i)}{\nu}$$

- $m = i - 1$

$$\frac{\partial R_i}{\partial U_{i-1}} = -\left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{U_\infty}{\nu} \cdot \frac{U_i}{\Delta x}$$



Ενώ όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, για το υπόλοιπο του πρώτου κόμβου είναι  $\frac{\partial R_0}{\partial U_0} = \frac{\partial}{\partial U_0} (U_0 - \epsilon) = 1$  με όσες τιμές δεν αναφέρθηκαν να είναι ίσες με μηδέν.

Έτσι καταλήγουμε σε ένα διδιαγώνιο μητρώο συντελεστών του συστήματος 4.5 από όπου προκύπτει το συζυγές πεδίο. Έπειτα, από την σχέση 4.6 υπολογίζουμε τις τελικές τιμές των παραγώγων ευαισθησίας.

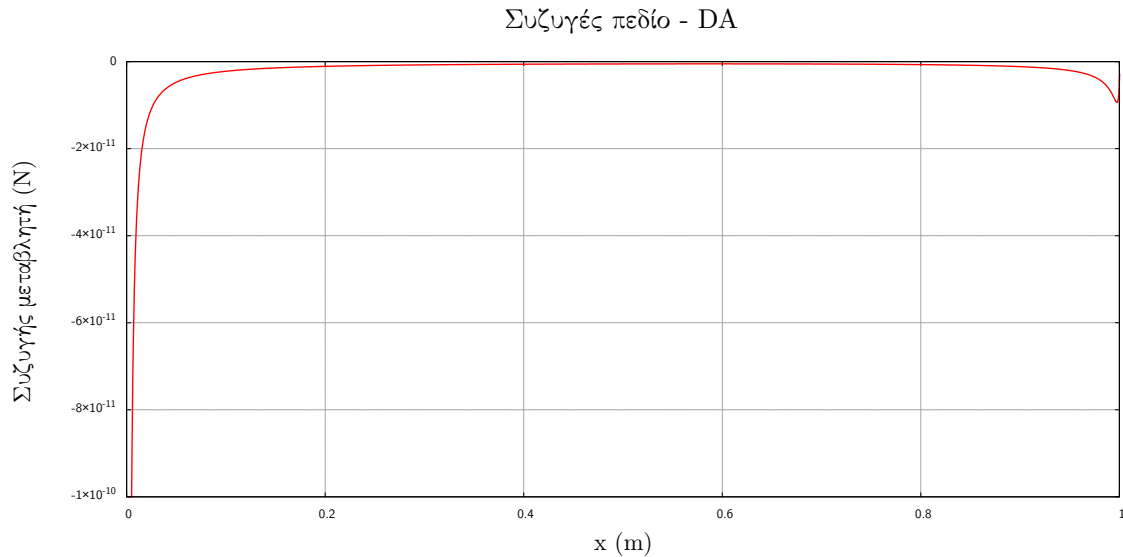
#### 4.2.3 Συζυγές πεδίο

Η συζυγής εξίσωση 4.5 μετασχηματίζεται στη γνωστή μορφή των γραμμικών συστημάτων ως:

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T \vec{\Psi} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \right]^T \quad (4.14)$$

Αν και δεν ασχοληθήκαμε σε βάθος με τον τρόπο επίλυσης του συστήματος της 4.14, αναφέρεται πως λύθηκε με τη μέθοδο ανάλυσης  $LU$ .

Το συζυγές πεδίο που προκύπτει από την επίλυση της 4.14 παρατίθεται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5: Συζυγές πεδίο με διακριτή συζυγή μέθοδο

## 5 Συνεχής συζυγής μέθοδος

Πριν ακόμα από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων, δημιουργούμε την επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση  $F_{aug}$  αφαιρώντας την έκφραση των υπολοίπων  $R$  πολλαπλασιασμένα με μια συνάρτηση  $\Psi$ . Σημειώνεται πως αφού τα υπόλοιπα θα είναι ίσα με μηδέν, μπορούμε αντίστοιχα να προσθέσουμε την παραπάνω ποσότητα, ωστόσο για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα συζυγή πεδία που προκύπτουν από τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο χρησιμοποιούμε το ίδιο πρόσημο (αφαιρούμε). Διαφορίζοντας την επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση έχουμε:

$$\delta F_{aug} = \int_0^L \delta \left( \frac{U_\infty \pi \mu}{2U(x)} \right) dx - \int_0^L \Psi \delta \left( \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{U_\infty}{\nu} U(x) \frac{dU}{dx} + \frac{v_0(x)}{\nu} U(x) - \frac{\pi}{2} \right) dx \quad (5.1)$$

Μετά από πράξεις, η σχέση 5.1 διαμορφώνεται ως:

$$\delta F_{aug} = \int_0^L \delta u \left( -\frac{U_\infty \pi \mu}{2u^2(x)} + \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{d\Psi}{dx} u(x) - \frac{\Psi}{\nu} v_0(x) \right) dx - \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) [\Psi u(x) \delta u]_0^L - \int_0^L \frac{\Psi}{\nu} \delta v_0(x) u(x) dx \quad (5.2)$$

Επομένως, πλέον απο την σχέση 5.2 μπορούμε να απαλείψουμε κατάλληλα τους δυο πρώτους όρους, και να υπολογίσουμε τις παραγώγους ευαισθησίας απο τον τρίτο όρο.

Αρχικά, για να απαλειφθεί ο πρώτος όρος, ορίζουμε την συνεχή συζυγή εξίσωση (Field Adjoint Equation) (5.3):

$$-\frac{U\pi\mu}{2u^2(x)} + \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{d\Psi}{dx} u(x) - \frac{\Psi}{\nu} v_0(x) = 0 \quad (5.3)$$

Επιπλέον, στον δεύτερο όρο της 5.2 έχουμε:

- $x = 0$ : Επειδή εφαρμόζουμε τις συνοριακές μας συνθήκες στη θέση  $x = 0$  τότε η τιμή της μεταβλητής κατάστασης είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού και  $\delta u = 0$
- $x = L$ : Για να εξασφαλίσουμε τον μηδενισμό του δεύτερου όρου, ορίζουμε ως συνοριακή συνθήκη της FAE (5.3)  $\Psi(L) = 0$

Επομένως, πλέον, οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης υπολογίζονται απο τον τρίτο όρο της 5.2.

$$\frac{\delta F}{\delta \vec{b}} = - \int_0^L \frac{\Psi}{\nu} \frac{\delta v_0(x)}{\delta \vec{b}} u(x) dx \quad (5.4)$$

Και όπως προέκυψε και απο τη σχέση 4.11, οι παράγωγοι  $\frac{\delta v_0(x)}{\delta \vec{b}}$  δίνονται απο τη σχέση 5.5.

$$\frac{\delta v_0(x)}{\delta \vec{b}} = \begin{bmatrix} x_i^3 - \frac{L^3}{4} & x_i^2 - \frac{L^2}{3} & x_i - \frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

## 6 Υπολογισμός παραγώγων με τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Όπως αναλύθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, δημιουργώντας την επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση μπορούμε επιλύοντας μονο τη συνεχή συζυγή εξίσωση (5.3), να λάβουμε την απλή έκφραση των παραγώγων μέσω της σχέσης 5.4.

Όπως και η primal εξίσωσή μας (2.1), και η συζυγής εξίσωση θα λυθεί αριθμητικά. Αν και ίσως διαθέτει αναλυτική λύση, τις τιμές της κύριας μεταβλητής  $\delta$  ή  $u$  τις έχουμε σε διακριτή μορφή στις θέσεις των κόμβων επομένως είναι ευκολότερο να την επιλύσουμε αριθμητικά ξανά με Runge Kutta 4ης τάξης ξεκινώντας απο τον τελευταίο κόμβο που ορίζουμε την συνοριακή συνθήκη. Έτσι, ξαναγράφουμε την εξίσωση 5.3 ως:

$$f(x, \Psi) = \frac{d\Psi}{dx} = \frac{U\pi\mu}{2Au^3(x)} + \frac{\Psi}{Avu(x)} v_0(x) \quad (6.1)$$

Με

$$A = \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$$

**Σημείωση:** Επειδή η επίλυση της 5.3 χρησιμοποιεί δεδομένα που προέκυψαν απο την πρώτη αριθμητική ολοκλήρωση, είναι επηρεπής σε συσσώρευση σφαλμάτων. Γι αυτό τον λόγο, για να βελτιώσουμε την ακρίβειά της χωρίς να αυξήσουμε πολύ τον αριθμό των κόμβων σε ολόκληρο το πρόβλημα, χρησιμοποιήσαμε διπλάσιο αριθμό κόμβων για την ολοκλήρωση της FAE και οι ενδιάμεσες τιμές λήφθηκαν με γραμμική παρεμβολή απο το πεδίο τους πάχους του οριακού στρώματος που προκύπτει απο την επίλυση της primal εξίσωσης. Η μεθοδολογία αναλύεται παρακάτω.

## 6.1 Επίλυση FAE με Runge Kutta 4ης τάξης

$$\Delta x' = -\Delta x/2$$

Κόμβοι συζυγούς πεδίου:  $N_j = 2N_i - 1$

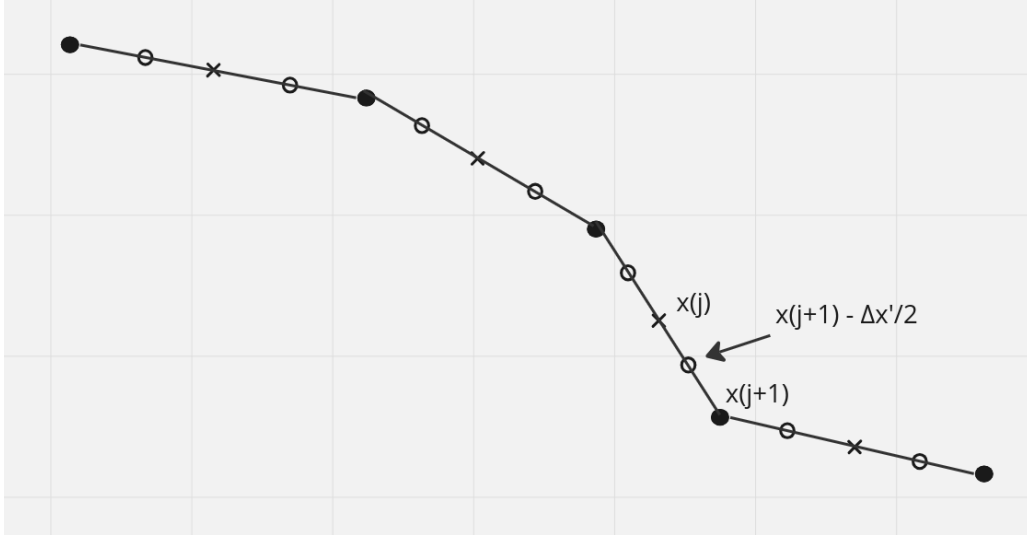
$$k^1 = \Delta x' f(x^{j+1}, \Psi^{j+1})$$

$$k^2 = \Delta x' f\left(x^{j+1} + \frac{\Delta x'}{2}, \Psi^{j+1} + \frac{k^1}{2}\right)$$

$$k^3 = \Delta x' f\left(x^{j+1} + \frac{\Delta x'}{2}, \Psi^{j+1} + \frac{k^2}{2}\right)$$

$$k_4 = \Delta x' f(x^j, \Psi^{j+1} + k_3)$$

$$y^j = y^{j+1} - \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$



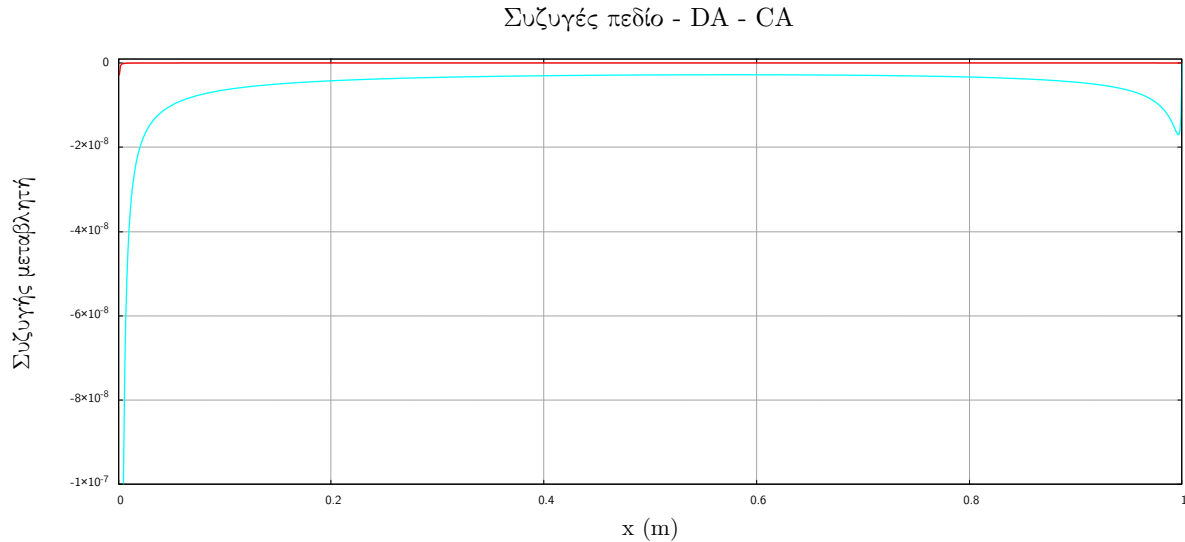
Σχήμα 6: Γραμμική παρεμβολή στις τιμές του  $\delta$

## 6.2 Ολοκλήρωση - Υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας

Οπότε πλέον μπορούμε να ολοκληρώσουμε την ποσότητα στο δεξί μέλος της σχέσης 5.4 για να υπολογίσουμε τις παραγώγους ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης. Αφού οι τιμές του ολοκληρώματος διατίθενται σε διακριτή μορφή, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με τη μέθοδο των τραπεζιών:

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = - \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \left( \frac{\Psi_i}{v} u_i \frac{\delta \nu_0}{\delta b_n} \Big|_i + \frac{\Psi_{i+1}}{v} u_{i+1} \frac{\delta \nu_0}{\delta b_n} \Big|_{i+1} \right) \frac{(x_{i+1} + x_i)}{2} \right] \quad (6.2)$$

Το συζυγές πεδίο που προκύπτει από τη συνεχή και τη διακριτή συζυγή μέθοδο παρατίθεται στο σχήμα 7.



Σχήμα 7: Σύγκριση συζυγούς πεδίου συνεχής και διακριτής μεθόδου

Παρατηρούμε μια έντονη διαφορά στην τάξη μεγέθους των αποτελεσμάτων των πεδίων ωστόσο συμφωνούν στη μορφή τους (συγκρίνοντας με το σχήμα 5). Αυτό είναι αναμενόμενο εν μέρει, διότι απο διαστατική ανάλυση της διακριτής συζυγής μεταβλητής και της συνεχής διακρίνουμε το εξής. Η διακριτή συζυγής μεταβλητή έχει μονάδες δύναμης (N), ενώ η συνεχής συζυγή μεταβλητή έχει  $N/m^2$ . Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής. Η διακριτή συζυγής μεταβλητή αφορά μια ποσότητα ανάλογη της δύναμης τριβής που συνεισφέρει ο κάθε κόμβος. Από την άλλη, η συνεχής συζυγής μεταβλητή μπορεί να αφορά μια ποσότητα ανάλογη της διατμητικής τάσης. Έτσι, οι τιμές του διακριτού συζυγούς πεδίου εξαρτώνται από το μέγεθος της διακριτοποίησης και τον αριθμό των κόμβων, ενώ η συνεχής, αφού αφορά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ανηγμένη σε μονάδα επιφάνειας, αναμένεται να είναι ανεξάρτητη του πλήθους των κόμβων. Δηλαδή, αναμένεται πως αν είχαμε μια διακριτοποίηση στην οποία η επιφάνεια κάθε κελιού ήταν ίση με  $1\text{ m}^2$ , και παράλληλα το πλήθος των κόμβων είναι ικανοποιητικό ως προς την ακρίβεια, θα βλέπαμε πολύ κοντινότερες καμπύλες των συζυγών πεδίων.

## 7 Σύγκριση αποτελεσμάτων FD, DA, CA

### 7.1 Σύγκριση τιμών παραγώγων

	FD	DA	CA
$\frac{\delta F}{\delta b_1}$	-9.3e-6	-6.9e-6	-1.4e-5
$\frac{\delta F}{\delta b_2}$	-1.1e-5	-8.1e-6	-7.8e-5
$\frac{\delta F}{\delta b_3}$	-1.3e-5	-9.9e-6	2.1e-6

Πίνακας 1: Σύγκριση παραγώγων από τις τρεις μεθόδους

Αρχικά παρατηρείται πως αν και με κάθε μέθοδο οι παράγωγοι που προκύπτουν είναι στην ίδια τάξη μεγέθους, υπάρχουν αισθητές διαφορές στις τιμές τους, μάλιστα, για την τρίτη παράγωγο, η συνεχής συζυγής μέθοδος οδηγεί σε λύση με αντίθετο πρόσημο σε σχέση με τις άλλες δυο μεθόδους.

Συγκεκριμένα, μπορούμε να αποφανθούμε πως οι τιμές των πεπερασμένων διαφορών και της διακριτής συζυγής μεθόδου είναι αρκετά κοντά, ωστόσο η συνεχής συζυγής μέθοδος απέχει περισσότερο από τις άλλες δυο. Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, αυτό πιθανότατα οφείλεται στην δεύτερη αριθμητική επίλυση της

FAE με δεδομένα που προκύπτουν απο την αριθμητική επίλυση της primal εξίσωσης. Έτσι, είναι πολύ επηρεπής στη συσσώρευση σφαλμάτων, οπότε ίσως ήταν σκόπιμο να επιχειρούσαμε την αναλυτική επίλυσή της ή την επίλυσή της με κάποια άλλη μέθοδο για τον περιορισμό των σφαλμάτων.

Αναφορικά με τις διαφορές στις τιμές των αποτελεσμάτων για τις πεπερασμένες διαφορές και τη διακριτή συζυγή μέθοδο, οι δύο μέθοδοι θα έπρεπε να οδηγούν σε πολύ κοντινότερα αποτελέσματα. Πιθανότατα, η διαφορά προκύπτει απο την έκφραση της παραγώγου ως πεπερασμένες διαφορές στην εξίσωση 4.13. Έγινε δοκιμή για αναπαράσταση ως κεντρικές διαφορές ωστόσο τα αποτελέσματα ήταν ελαφρώς χειρότερα. Στη διακριτή μέθοδο, οι άλλες δυο απαιτούμενες ποσότητες ( $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}}$ ) και ( $\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}$ ) ελέγχθηκαν συγκρίνοντας τις με τις αντίστοιχες παραγώγους που προκύπτουν απο πεπερασμένες διαφορές και οδηγούσαν σε ταυτόσημα αποτελέσματα.

## 7.2 Σύγκριση υπολογιστικού κόστους

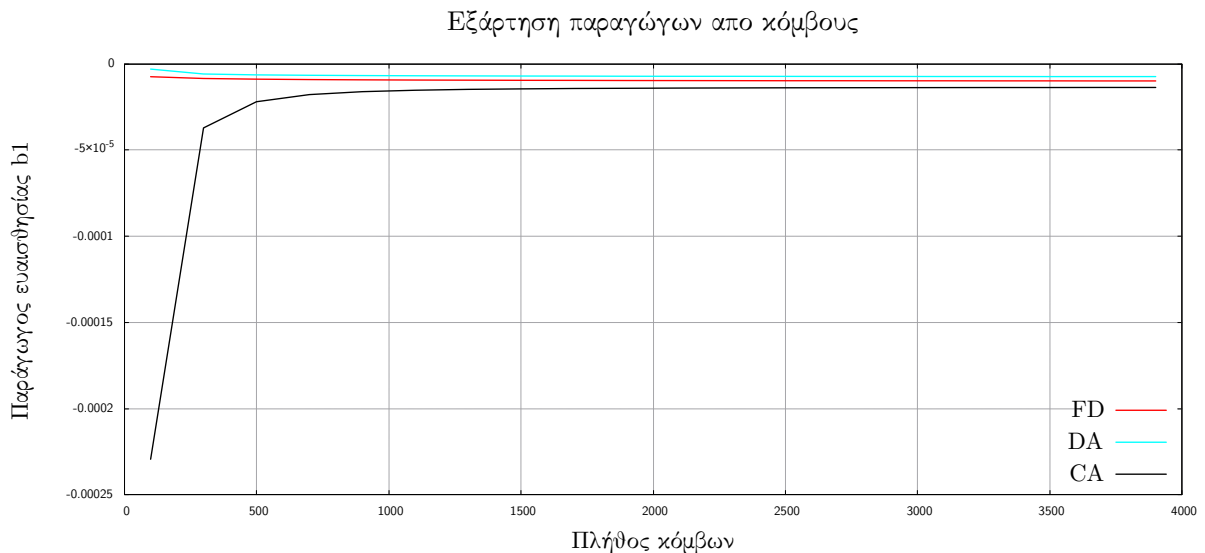
Εκτός απο τις τιμές των παραγώγων στον παρακάτω πίνακα (2) παρατίθενται τα υπολογιστικά κόστη κάθε μεθόδου συγκριτικά με το κόστος επίλυσης του primal προβλήματος (1 primal = 1 TU).

FD	6TU
DA	2TU
CA	2TU

Πίνακας 2: Σύγκριση υπολογιστικού κόστους των τριών μεθόδων

Φαίνεται λοιπόν, πως ο υπολογισμός με πεπερασμένες διαφορές (συγκεκριμένα με κεντρικές διαφορές) απαιτεί τριπλάσιο υπολογιστικό χρόνο συγκριτικά με τις άλλες δυο μεθόδους. Ωστόσο, εκφράζοντας τους υπολογιστικούς χρόνους απλά ως μονάδες χρόνου επίλυσης του primal προβλήματος δεν είναι τόσο ακριβής. Συγκεκριμένα, η DA απαιτεί την επίλυση γραμμικού συστήματος, που στην περίπτωση μας (επίλυση με LU) ο χρόνος επίλυσης είναι ανάλογος του ( $N^3$ ), ενώ μπορεί με άλλες μεθόδους συγκεκριμένα για τριδιαγώνια μορφή μητρώου συντελεστών να γίνει μέχρι και ανάλογος του ( $N$ ). Επομένως, αφού λύνουμε το primal πρόβλημα με ρητό σχήμα, παρατηρήσαμε πως η DA ήταν αισθητά πιο αργή συγκριτικά με τις άλλες δυο μεθόδους, που δεν απαιτούν την επίλυση γραμμικού συστήματος.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η εξάρτηση και των παραγώγων πλεον, απο το πλήθος των κόμβων.



Σχήμα 8: Εξάρτηση παραγώγων απο τον αριθμό των κόμβων

## 8 Βελτιστοποίηση με τη μέθοδο της απότομης καθόδου

Στη μέθοδο της απότομης καθόδου, για την ανανέωση του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού, χρησιμοποιείται η σχέση 8.1 χρησιμοποιώντας το τοπικό διάνυσμα κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως διεύθυνση ανίχνευσης.

$$\begin{aligned}\vec{b}^{k+1} &= \vec{b}^k + n^k \cdot \vec{p}^k \\ \vec{p}^k &= -\nabla F(x^k)\end{aligned}\quad (8.1)$$

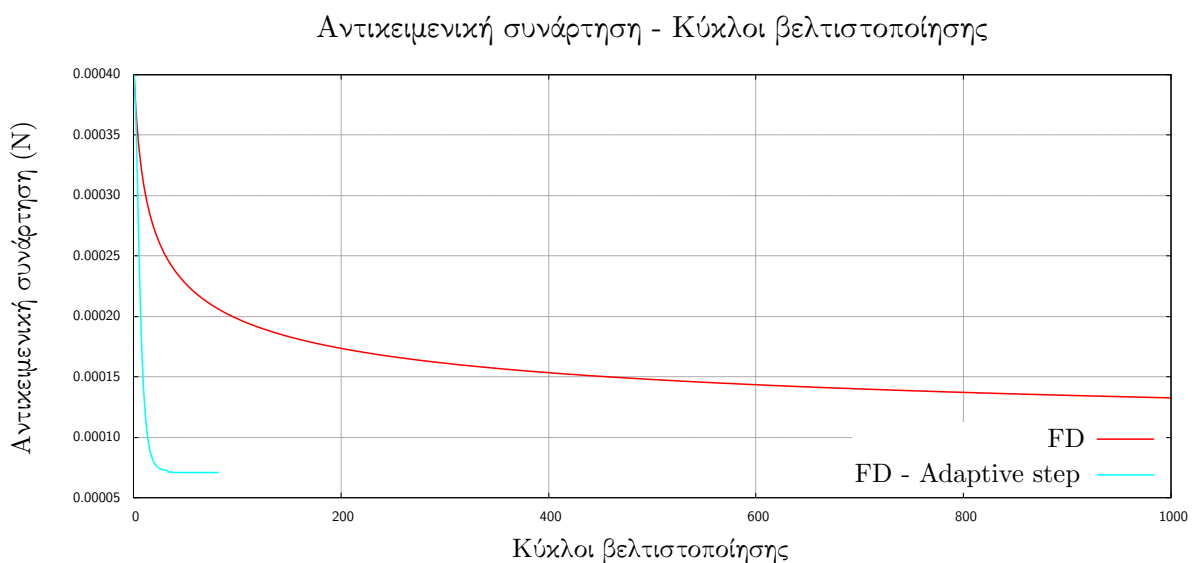
Η τιμή του συντελεστή  $n^k$  καθορίζει το βήμα ανίχνευσης στη διεύθυνση  $\vec{p}^k$  για το δεδομένη επανάληψη της διαδικασίας. Η τιμή του συντελεστή  $n^k$  μπορεί να επιλεγεί δυναμικά, δηλαδή με διαφορετική τιμή για κάθε επανάληψη, δημιουργώντας ένα νέο πρόβλημα βελτιστοποίησης, που αφορά την ελαχιστοποίηση τη νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο συγκεκριμένο βήμα, μεταβάλλοντας τον συντελεστή  $n^k$ . Αυτή η προσέγγιση δεν είναι πάντα η καλύτερη, και προφανώς είναι υπολογιστικά πολύ απαιτητική. Μια συχνή προσέγγιση για την επιλογή του  $n^k$  σε κάθε βήμα ακολουθεί την εξής λογική.

1. Αρχικοποίηση  $n^k$
2. Διπλασιασμός  $n^k$  σε κάθε βήμα
3. Έλεγχος νέας τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης
4. Αν η νέα τιμή δεν είναι μεγαλύτερη της προηγούμενης -> Βήμα 2
5. Εναλλακτικά, υποδιπλασιασμός  $n^k$

Στο βήμα 4, ο έλεγχος για μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μια απλή προσέγγιση, συχνά χρησιμοποιούνται οι συνθήκες το Wolfe για τον έλεγχο του βήματος. Στην περίπτωση μας, δοκιμάσαμε μεταβλητό βήμα όπως υποδεικνύεται από τη μέθοδο που παρουσιάζεται παραπάνω, και συγκρίναμε τη σύγκλιση της λύσης σε σχέση με την περίπτωση σταθερού βήματος. Η τιμή του σταθερού βήματος επιλέχθηκε μετά από δοκιμές για την τάξη μεγέθους που επιτρέπει μια αρκετά γρήγορη κάθοδο της αντικειμενικής συνάρτησης.

Επομένως, ακολουθώντας την σχέση 8.1 υλοποιήσαμε αλγόριθμο που επαναληπτικά υπολογίζει τις νέες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού υπολογίζοντας τις τιμές των παραγώγων ευαισθησίας με καθεμία από τις μεθόδους που αναλύθηκαν στα προηγούμενα ερωτήματα. Ως κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου, ορίσαμε την διατήρηση σταθερής τιμής αντικειμενικής συνάρτησης για παραπάνω από 30 επαναλήψεις (idle iterations). Επιπλέον, θέσαμε μέγιστο όριο επαναλήψεων ίσο με 1000.

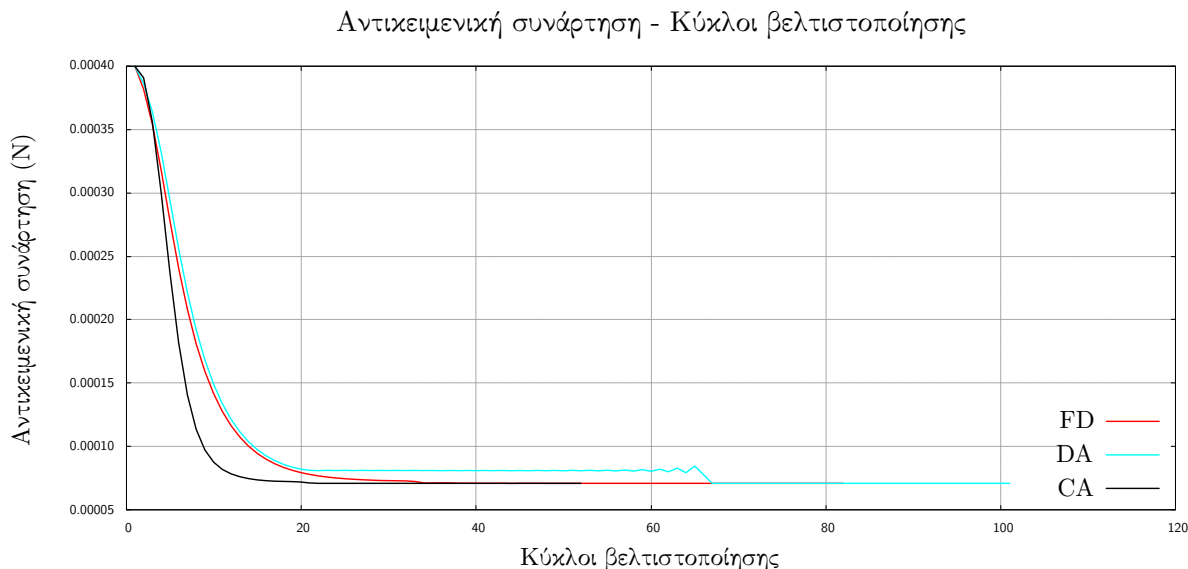
Στο σχήμα 9 παρατίθεται το διάγραμμα σύγκλισης για σταθερό και μεταβλητό βήμα με παραγώγους υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές.



Σχήμα 9: Σύγκριση σταθερού και μεταβλητού βήματος

Παρατηρείται πως στην περίπτωση του μεταβλητού βήματος, ο αλγόριθμος μεταβάλλει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πολύ πιο γρήγορα, ενώ ο αλγόριθμος σταματάει πολύ πιο νωρίς λόγω του περιορισμού των idle iterations.

Τα τελικά διαγράμματα σύγκλισης για κάθε μέθοδο παρατίθενται στο σχήμα 10 χρησιμοποιώντας μεταβλητό βήμα.



Σχήμα 10: Διάγραμμα σύγκλισης για διαφορετικές μεθόδους υπολογισμού παραγώγων

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενα ερωτήματα, παρατηρούμε πως ξεκινώντας με ίδιες αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού, δεν ακολουθούν όλες οι μέθοδοι την ίδια πορεία. Αυτό φυσικά σημαίνει πως υπάρχει διαφορά στις τιμές των παραγώγων που υπολογίζουν οι τρεις μέθοδοι και αποτελεί αίτιο προβληματισμού. Επιπλέον, φαίνεται πως υπάρχει κάποια ταλάντωση στην καμπύλη της διακριτής συζυγής μεθόδου που μπορεί να υποδεικνύει είτε αριθμητική αστάθεια στον υπολογισμό των παραγώγων είτε πολύ μεγάλο βήμα κοντά στο ελάχιστο. Ωστόσο, φαίνεται πως μέχρι το σημείο της αστάθειας, οι καμπύλες της DA, FD βαίνουν πολύ κοντά. Συμφωνώντας με το προηγούμενο ερώτημα, η CA φαίνεται να υπολογίζει αρκετά διαφορετικές παραγώγους αφού παρουσιάζει σημαντικά διαφορετική καμπύλη.

Σημειώνεται τέλος, πως η συγκεκριμένη αντικειμενική συνάρτηση δεν παρουσιάζει ελάχιστο και μειώνεται όσο αυξάνουμε τις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Ο περιορισμός στην παροχή αναγκάζει τις πρώτες τρεις μεταβλητές να αυξάνονται όσο η τέταρτη μειώνεται. Λόγω της σύμβασης του προσήμου για την παροχή, αυτό υποδεικνύει πως η τριβή ελαχιστοποιείται εκχέοντας μεγάλες ταχύτητες στην αρχή της πλάκας και απορροφώντας αντίστοιχα μεγάλες ποσότητες στο τέλος της.