Υπολογιστική ρευστομηχανική
7^o εξάμηνο

Προαιρετικό θέμα 1

Προσομοίωση τυρβώδους ροής εντός αεροσύραγγας

Γεώργιος Νιδριώτης - mc18054
3 Φεβρουαρίου 2024

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Το παρόν θέμα περιλαμβάνει την προσομοίωση ροής εντός αεροσύραγγας. Η ροή είναι ασυμπίεστη, συνεκτική και τυρβώδης, και το πρόβλημα περιλαμβάνει δύο μέρη. Πρώτον, προσομοιώνουμε τη ροή εντός του αγωγού, χωρίς σώμα, όπως θα ήταν στο εσωτερικό κυλινδρικού αγωγού. Δεύτερον, εισάγουμε σε κάποια αξονική θέση και στο κέντρο ακτινικά της αεροσύραγγας τον δρομέα μιας ανεμογεννήτριας.

Επιπλέον, το πρόβλημα μοντελοποιείται ως αξονοσυμμετρικό και επομένως λύνεται ως διδιάστατο για τη μισή διάμετρο της αεροσύραγγας. Η ροή που μελετάται διέπεται απο τις εξισώσεις Navier-Stokes, διατυπωμένες για κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων για αξονοσυμμετρικό πεδίο ροής (εξ. 1).

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ruv)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \\
\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv^2)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v^2}{r}\right]
\end{gathered} \tag{1}$$

Οι εξισώσεις 1 είναι αδιαστατοποιημένες ως προς την ακτίνα του δρομέα και την ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής.

Η επίδραση του δρομέα της Α/Γ στην ροή μοντελοποιείται με τη μέθοδο δίσκου ορμής όπου στην εξίσωση ορμής κατά x (δεύτερη εξίσωση των 1) προσθέτουμε έναν επιπλέον όρο στον όρο πηγής που μπορεί να περιγραφεί απο μια καταβόθρα ορμής στη θέση που βρίσκεται ο δρομέας (x και r). Ο όρος που προστίθεται είναι η ποσότητα του φορτίου που ασκείται απο τον δρομέα στο ρευστό, και μετά τη διακριτοποίηση, ο όρος που προσθέτουμε σε ένα κελλί δίνεται στη σχέση 2.

$$dF = -\frac{1}{2}\rho C_t U_{ref}^2 dA \tag{2}$$

όπου,

- $\mathbf{U_{ref}}$ είναι η μέση ταχύτητα στην επιφάνεια του δίσκου για αδιατάρακτη ροή (απουσία δίσκου)
- $\mathbf{dA} = 2\pi r dr$, με r τη μέση ακτίνα του εκάστοτε κελλιού, και dr το ακτινικό εύρος του κελλιού

1 Κατασκευή πλέγματος

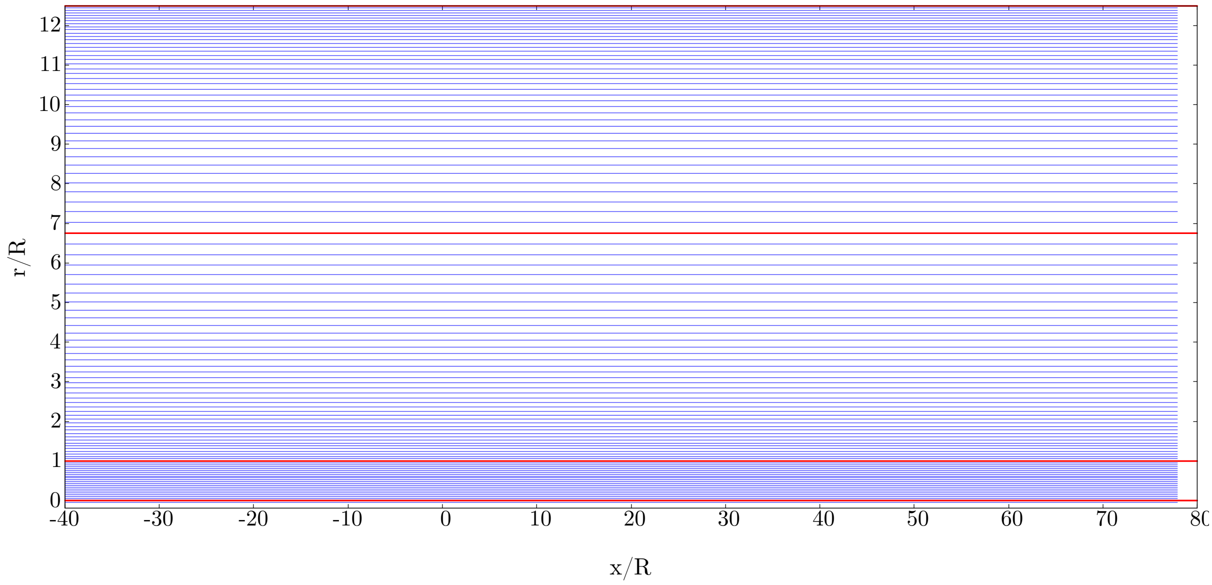
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το πρόβλημα μοντελοποιείται ως αξονοσυμμετρικό επιλύεται σε διδιάστατο πλέγμα. Για την αυξηση της ακρίβειας των αριθμητικών μεθόδων, εφαρμόσθηκε πύκνωση στις περιοχές όπου έχουμε υψηλές κλίσεις και συγκεκριμένα, στην περιοχή γύρω απο τον δρομέα, στο τοίχωμα της αεροσύραγγας, και κοντά στον άξονα συμμετρίας όπου αναπτύσσεται ο ομόρρου της ανεμογεννήτριας.

Η πύκνωση και η αραίωση του πλέγματος γίνεται με τη χρήση γεωμετρικής προόδου. Συμβολίζοντας με p τη θέση ενός κόμβου, dp την απόσταση μεταξύ δύο κόμβων, και r τον λόγο της γεωμετρικής προόδου, η γεωμετρική πρόοδος περιγράφεται απο τις σχέσεις 1.1.

$$\begin{gathered}
\frac{dp_{k+1}}{dp_k} = r \\
p_k = p_0 + dp_0\frac{r^k - 1}{r - 1}
\end{gathered} \tag{1.1}$$

1.1 Κατασκευή πλέγματος κατά την ακτινική διεύθυνση

Κατά την ακτινική διεύθυνση το πλέγμα χωρίστηκε σε τρείς περιοχές. Αρχικά στην περιοχή απο τον άξονα συμμετρίας έως την ακτίνα του δρομέα έχουμε ομοιόμορφο πλέγμα με μέγεθος dy_grid που εισάγεται απο τον χρήστη. Έπειτα, το υπόλοιπο ακτινικό χωρίο χωρίζεται στα δύο. Απο τη θέση y=1 (ακτίνα δρομέα) έως το μέσο του υπολοιπόμενου χωρίου, έχουμε σταδιακή αραίωση με γεωμετρική πρόοδο. Ενώ απο το μέσο του χωρίου έως το τοίχωμα έχουμε σταδιακή πύκνωση με τον ίδιο λόγο γεωμετρικής προόδου, επομένως έχουμε αντικατωπτρισμό του πλέγματος που δημιουργήθηκε στην δεύτερη περιοχή. Το πλέγμα σε αυτές τις περιοχές ελέγχεται απο τον χρήστη εισάγωντας τον αριθμό των κελλιών σε κάθε περιοχή και τον λόγο της γεωμετρικής προόδου. Οι τρεις περιοχές και το παραγόμενο πλέγμα φαίνονται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Κόμβοι πλέγματος κατά την ακτινική διεύθυνση

Όπως φαίνεται και στο τμήμα του κώδικα 2, με βάση τις εισόδους (αριθμός κελλιών) υπολογίζουμε μέσω της σχέσης 1.1 το μήκος του πρώτου κελλιού στην πρόοδο (του μικρότερου), και χρησιμοποιώντας την ίδια σχέση υπολογίζουμε τη θέση του κάθε κόμβου.

```
!--- Uniform grid in y-direction
    !From y=ymin to y=1 (disk radius)

! Second point is on symmetry line
y_grid(2)=ymin

do j=2,ngridy1-1
    y_grid(j+1)=y_grid(j) + dy_grid
enddo

! First point is symmetric to third
y_grid(1)=-y_grid(3)
```

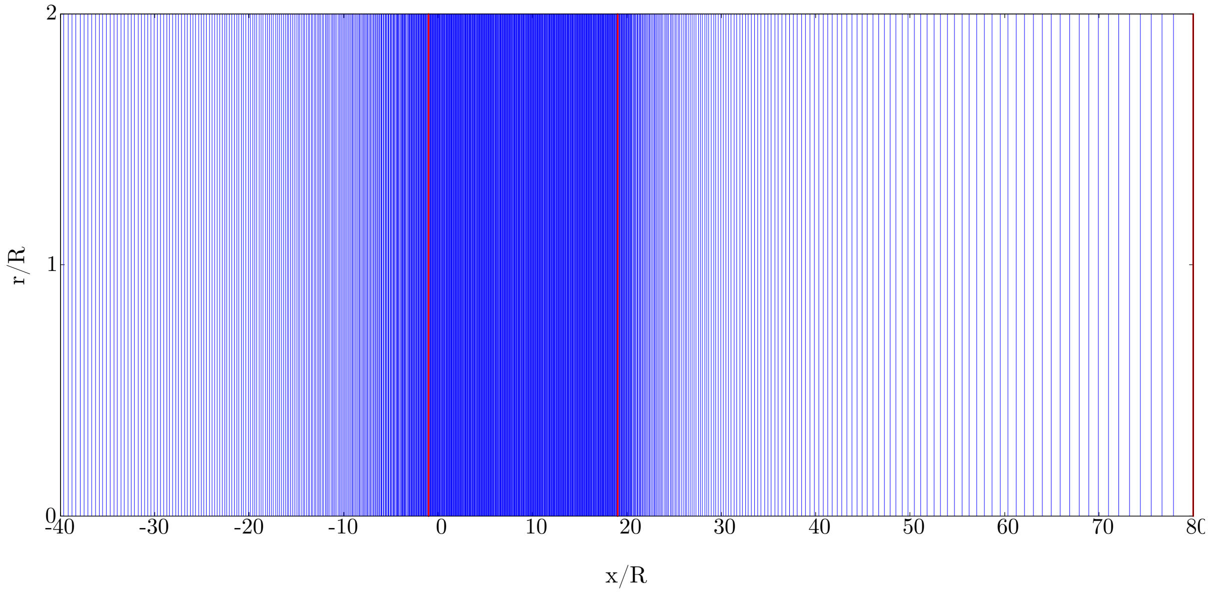
Τμήμα κώδικα 1: Κατασκευή ομοιόμορφου πλέγματος

```
!--- Non-uniform grid from ngridy1 to ngridy2
!--- From y=1 to y=y_mid

! Calculate length of first cell in coarsening region
! using the number of cells
dy_grid_first= ((y_mid-1.d0) / (raty**(dble(ngridy2)) -
    1.d0)) * (raty-1.d0)

do j=1,ngridy2
    y_grid(j+ngridy1)=y_grid(j+ngridy1-1) +
    dy_grid_first*raty**(j-1)
enddo
```

Τμήμα κώδικα 2: Αραίωση πλέγματος

```
!--- Non-uniform grid from ngridy1 to ngridy2
!--- From y=y_mid to y=ymax

do j=1,ngridy2
    ! Inverse raty to refine mesh
    y_grid(j+ngridy1+ngridy2)=y_grid(j+ngridy1+ngridy2
    -1) + dy_grid_first/raty**(j-1)*raty**(ngridy2-1)
enddo
```

Τμήμα κώδικα 3: Πύκνωση πλέγματος



Σχήμα 2: Κόμβοι πλέγματος κατά την αξονική διεύθυνση

1.2 Κατασκευή πλέγματος κατά την αξονική διεύθυνση

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, στην αξονική διεύθυνση έχουμε ομοιόμορφο πλέγμα κοντά στον δρομέα, και σταδιακή αραίωση ανάντι και κατάντι αυτού. Ξανά, το μήκος των κελλιών στην ομοιόμορφη περιοχή ορίζεται απο τον χρήστη και είναι ίσο με το μήκος των κελλιών κατά την ακτινική διεύθυνση στο ομοιόμορφο τμήμα. Η κατανομή των κόμβων κατά την αξονική διεύθυνση φαίνεται στο σχήμα 2.

Παρακάτω φαίνονται τα τμήματα του κώδικα που δημιουργούν το πλέγμα για τις τρείς περιοχές κατά την αξονική διεύθυνση.

```
!-- x-grid
write(*,*) "Target Uni Dx=", dx_uni_tar
! Correct uniform spacing to intersect x=-1 and x=0
dx_uni_cor = 10**(LOG10(1.d0)-LOG10(dble(ceiling(10**(LOG10(1.d0)-LOG10(dx_uni_tar))))))
! Calculate number of grid points
ngridx2 = ceiling(xuni / dx_uni_cor)
dx_grid2 = dx_uni_cor
dx_grid1 = dx_uni_cor
write(*,*) 'dx_grid1=', dx_grid1

ngridx1 = int(dlog(1.d0+xmin*(1.d0-ratx1)/dx_grid1)/dlog(ratx1))

ngridx3 = int(dlog(1.d0-(xmax-xuni)*(1.d0-ratx2)/dx_grid1)/dlog(ratx2))

ngridx=ngridx1+ngridx2+ngridx3
! Save the index of rotor axial position
x0ind = ngridx1+ngridx2/xuni
```

Τμήμα κώδικα 4: Υπολογισμός παραμέτρων πλέγματος στην αξονική διεύθυνση

```
! Upstream coarsening (x < -1) with ratx1 ratio
x_grid(ngridx1)=-1.d0
do i=1,ngridx1-1
    x_grid(ngridx1-i)=x_grid(ngridx1-i+1)-dx_grid1*ratx1**(i-1)
enddo
```

Τμήμα κώδικα 5: Αραίωση πλέγματος ανάντι δρομέα

```
    ! Uniform grid -1 < x < XUNI-1
```

```
    do i=1,ngridx2
        x_grid(ngridx1+i)=x_grid(ngridx1+i-1)+dx_grid2
    enddo
```

Τμήμα κώδικα 6: Ομοιόμορφο πλέγμα κοντά στον δρομέα

```
! Downstream coarsening (x > XUNI-1) with ratx2 ratio
do i=1,ngridx3
    x_grid(ngridx1+ngridx2+i)=x_grid(ngridx1+ngridx2+i
    -1)+dx_grid2*ratx2**(i-1)
enddo
```

Τμήμα κώδικα 7: Αραίωση πλέγματος κατάντι δρομέα

Όπως φαίνεται και στο τμήμα του κώδικα 4, το πλήθος των κόμβων για τα δύο τμήματα που αραιώνουμε, υπολογίζεται ώστε προσεγγιστικά να φτάνει το πλέγμα έως τα όρια που έχει ορίσει ο χρήστης. Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να εισάγουμε το πλήθος των κόμβων και να λύσουμε την εξίσωση 1.1 ωστε να καθορίσουμε το απαιτούμενο μήκος του πρώτου κελλιού. Ωστόσο, δεν μας ενδιαφέρει να πετύχουμε ακριβώς τη θέση εισόδου και εξόδου που ορίζει ο χρήστης, αφού απλά ενδιαφερόμαστε να έχουμε ικανοποιητικό μήκος ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε συνοριακές συνθήκες που δεν θα επηρεάζονται απο τις συνθήκες κοντά στον δρομέα, δηλαδή να έχουμε αποκατεστημένη ροή.

Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, είναι προτιμότερο να έχουμε ομαλή μετάβαση απο το τμήμα ομοιόμορφου πλέγματος στα τμήματα της αράιωσης διατηρώντας ίδιο μήκος κελλιού στο σύνορο των περιοχών.

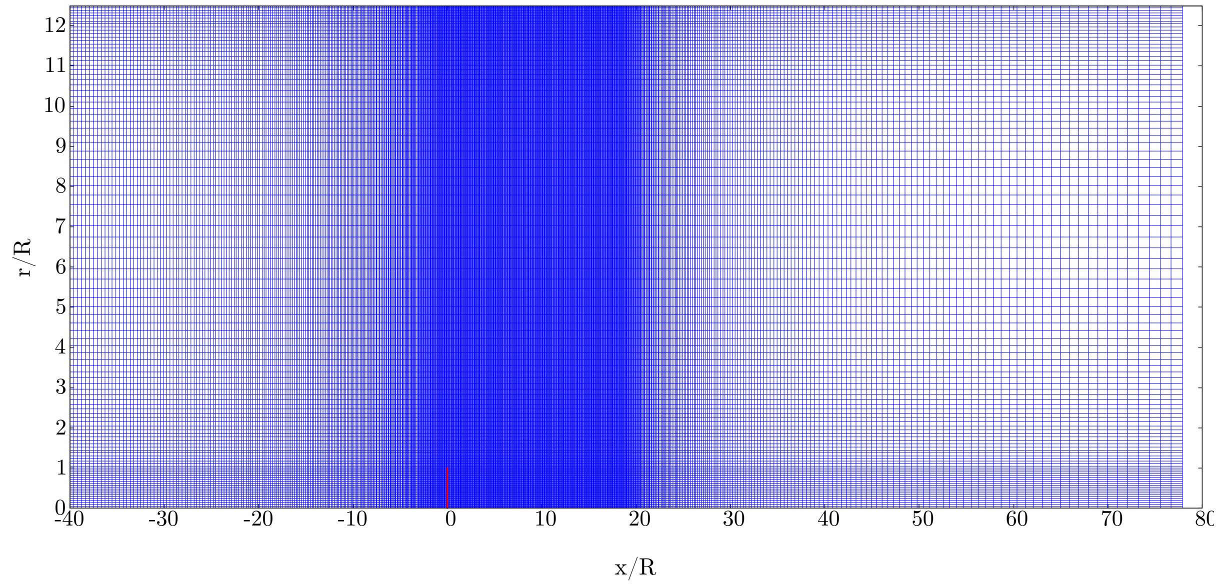
1.3 Παράμετροι & εικόνες πλέγματος

Οι τελικές γεωμετρικές παράμετροι και οι παράμετροι που αφορούν το πλέγμα και αναφέρθηκαν παραπάνω παρατίθενται στον πίνακα 1.

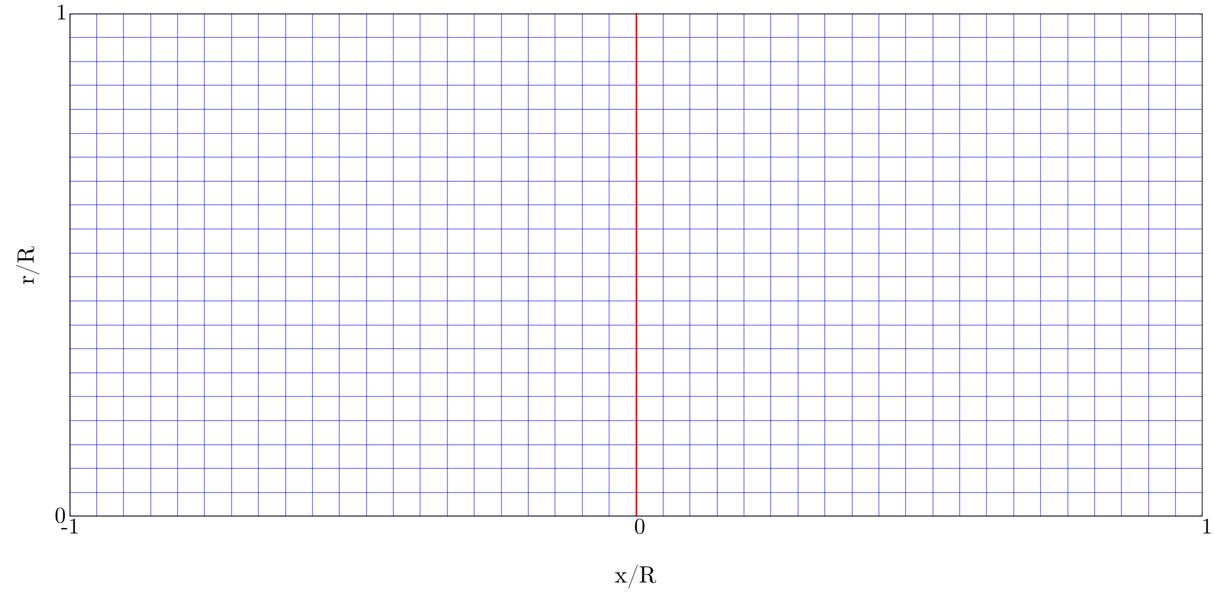
XMIN	-40	Αρχή υπολογιστικού χωρίου
XMAX	80	Τέλος υπολογιστικού χωρίου
XUNI	20	Μήκος τμήματος ομοιόμορφου πλέγματος
YMIN	0	Ελάχιστη ακτινική θέση
YMAX	12.5	Μέγιστη ακτινική θέση
NGRIDX1	91	Πλήθος κόμβων αραίωσης - αξονικά
NGRIDX	582	Συνολικό πλήθος κόμβων - αξονικά
NGRIDY1	41	Πλήθος κόμβων αραίωσης - ακτινικά
NGRIDY	102	Συνολικό πλήθος κόμβων - ακτινικά
dx_uni	0.05	Μέγεθος κελλιού - ομοιόμορφο πλέγμα
RATX1	1.01	Λόγος ΓΠ ανάντι
RATX2	1.02	Λόγος ΓΠ κατάντι
RATY	1.04	Λόγος ακτινικής πύκνωσης

Πίνακας 1: Τελικές γεωμετρικές παράμετροι και παράμετροι πλέγματος

Στα ακόλουθα διαγράμματα παρουσιάζεται η τελική μορφή του πλέγματος σε ολόκληρο το χωρίο και εστιασμένο στις περιοχές ενδιαφέροντος. Η θέση του δρομέα σημειώνεται με κόκκινη συμπαγή γραμμή.



Σχήμα 3: Συνολική εικόνα πλέγματος



Σχήμα 4: Περιοχή δρομέα - ομοιόμορφο πλέγμα

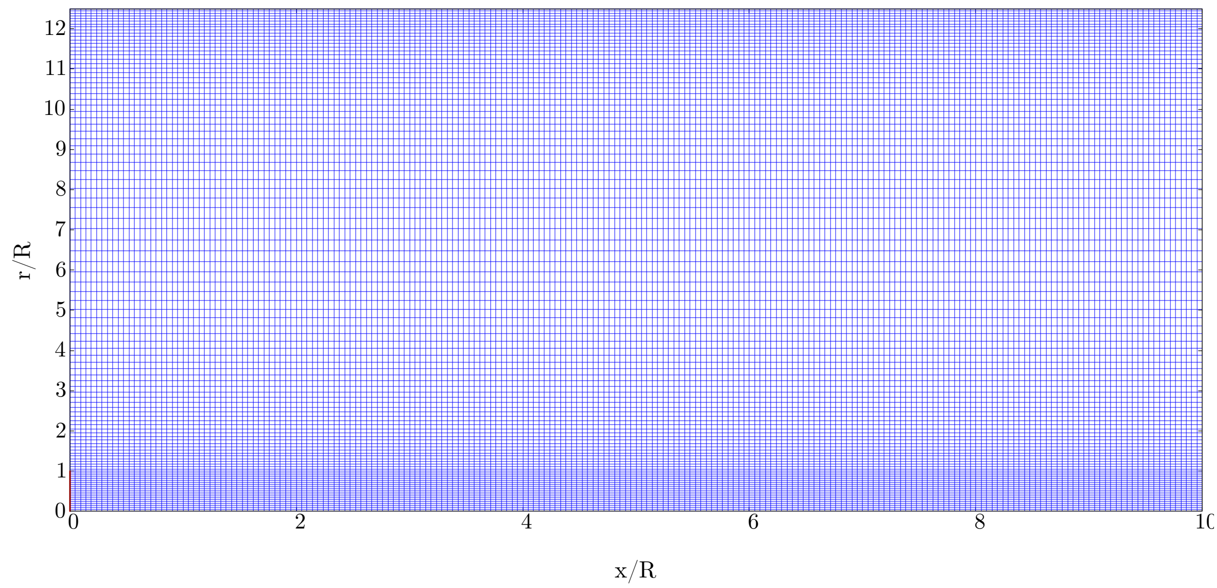
2 Ορισμός συνοριακών συνθηκών - μοντελοποίηση δίσκου ορμής

Για την κατάστρωση του γενικού συστήματος των εξισώσεων η διατύπωση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης για κάθε κελλί φαίνεται στην εξίσωση **??**.

$$\alpha_P u_P = \alpha_E u_E + \alpha_W u_W + \alpha_N u_N + \alpha_S u_S + S \tag{2.1}$$

Όπου:

- **u**: η τιμή του μεγέθους προς επίλυση (π.χ ταχύτητα, πίεση, κινητική ενέργεια τύρβης)
- α: ο συντελεστής συνεισφοράς του εν λόγω μεγέθους στην εξίσωση προς επίλυση
- **S**: όρος πηγής της εξίσωσης



Σχήμα 5: Περιοχή κατάντι δρομέα

Και οι δείκτες E,W,N,S αναφέρονται στα γειτονικά κελλιά απο αυτό που διατυπώνουμε την εξίσωση (ανατολικό, δυτικό κ.ο.κ), και ο δείκτης P αναφέρεται στην τιμή του μεγέθους που έχει το δεδομένο κελλί.

Οι τιμές των συντελεστών (α) προφανώς προκύπτουν αφού φέρουμε την γενική εξίσωση σε γραμμικοποιημένη μορφή.

2.1 Ορισμός συνοριακών συνθηκών

Οι οριακές συνθήκες που ορίζουμε σε κάθε περιοχή είναι οι εξής:

Είσοδος

- $u = 1$, αφού έχουμε αδιαστατοποιήσει με την ταχύτητα ελεύθερης ροής
- $v = 0$
- $k = 1.5(U^2 I^2)$, όπου k η κινητική ενέργεια της τύρβης, u το μέτρο της ταχύτητας, και I η ατμοσφαιρική ένταση της τύρβης

Έξοδος

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
- $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$
- $\dfrac{\partial k}{\partial x} = 0$

Άνω σύνορο

- $u = 0$
- $v = 0$
- $\dfrac{\partial k}{\partial r} = 0$

Άξονας συμμετρίας

- $v = 0$
- $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$
- $\dfrac{\partial v}{\partial r} = 0$
- $\dfrac{\partial k}{\partial r} = 0$

Έτσι, παρακάτω φαίνεται η υλοποίηση των οριακών συνθηκων ακολουθώντας τη γραμμικοποιημένη μορφή της ??. Σημειώνεται πως στον κώδικα BB συμβολίζεται ο όρος πηγής και οι οριακές συνθήκες της μορφής $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0$ υλοποιούνται εκφράζοντας πεπερασμένες διαφορές ως: $U_i - U_{i-1} = 0$.

```
    !--- Coefficient matrix initialization
    AE = 0.d0
    AW = 0.d0
    AN = 0.d0
    AS = 0.d0
    AP = 0.d0
    BB = 0.d0
    DU = 0.d0

    !====INFLOW BOUNDARY CONDITIONS
    do j=1,ngridy-1
        AP(1,j) = 1.d0
        BB(1,j) = 1.d0

        DU(1,j)=1.d0
    enddo

    !====OUTFLOW BOUNDARY CONDITIONS

    do j=2,ngridy-1
        AW(ngridx,j) = 1.d0
        AP(ngridx,j) = 1.d0

        DU(ngridx,j)=1.d0
    enddo

    !------ BOUNDARY CONDITIONS AT SYMMETRY AXIS

    do i=2,ngridx
        AP(i,1)=1.d0
        AN(i,1)=1.d0

        DU(i,1)=1.d0
    enddo

    !------ BOUNDARY CONDITIONS AT UPPER BOUNDARY
    do i=2,ngridx-1
        AP(i,ngridy-1)=1.d0
        BB(i,ngridy-1)=0.d0

        DU(i,ngridy-1)=1.d0
    end do
```

Τμήμα κώδικα 8: Οριακές συνθήκες ταχύτητας u

```
    !--- Coefficient matrix initialization
    AE = 0.d0
    AW = 0.d0
    AN = 0.d0
    AS = 0.d0
    AP = 0.d0
    BB = 0.d0
    DV = 0.d0

```

```
    !====INFLOW BOUNDARY CONDITIONS

    do j=1,ngridy
        AP(1,j)=1.d0
        BB(1,j)=0.d0

        DV(1,j)=1.d0
    enddo

    !====OUTFLOW BOUNDARY CONDITIONS
    do j=2,ngridy-1
        AP(ngridx,j)=1.d0
        AW(ngridx,j)=1.d0

        DV(ngridx,j)=1.d0
    end do

    !-----SYMMETRY AXIS
    do i=2,ngridx
        AP(i,2)=1.d0
        BB(i,2)=0.d0
        DV(i,2)=1.d0

        AP(i,1)=1.d0
        BB(i,1)=-VVEL(i,3)
        DV(i,1)=1.d0
    enddo

    !-----UPPER BOUNDARY CONDITIONS

    do i=2,ngridx
        AP(i,ngridy)=1.d0
        BB(i,ngridy)=0.d0
        DV(i,ngridy)=1.d0
    end do
```

Τμήμα κώδικα 9: Οριακές συνθήκες ταχύτητας v

```
    !--- Coefficient matrix initialization
    AE=0.d0
    AW=0.d0
    AN=0.d0
    AS=0.d0
    AP=0.d0
    BB=0.d0

    !====INFLOW BOUNDARY CONDITIONS
    do j=1,ngridy-2
        AP(1,j)=1.d0
        BB(1,j)=1.5d0*tiamb**2.d0
    enddo

    !====OUTFLOW BOUNDARY CONDITIONS

    do j=2,ngridy-2
        AP(ngridx-1,j)=1.d0
        AW(ngridx-1,j)=1.d0
    enddo

    !------ BOUNDARY CONDITIONS AT SYMMETRY AXIS

    do i=2,ngridx-1
        AP(i,1)=1.d0
        AN(i,1)=1.d0
    enddo

    !------ BOUNDARY CONDITIONS AT UPPER BOUNDARY
    do i=1,ngridx-1
        AP(i,ngridy-1)=1.d0
        AS(i,ngridy-1)=1.d0
    end do
```

Τμήμα κώδικα 10: Οριακές συνθήκες κινητικής ενέργειας τύρβης k

2.2 Μοντελοποίηση δρομέα με δίσκο ορμής

Όπως φαίνεται στο τμήμα 4 του κώδικα, αποθηκεύουμε τον δείκτη των κόμβων κατά x στον οποίο βρίσκεται ο δρομέας (x=0). Έτσι, στα κελλιά στη θέση x=0 για τις τιμές της ακτίνας απο 0 μέχρι 1 (ακτίνα δρομέα) προσθέτουμε τον όρο της εξίσωσης 2 στον όρο πηγής της εξίσωσης ορμής κατά x του κελλιού. Η τιμή της ταχύτητας αναφοράς (U_{ref}) λήφθηκε από το πρώτο τρέξιμο του κώδικα χωρίς τον δρομέα ως η μέση τιμή της οριζόντιας ταχύτητας στη θέση του δρομέα. Με βάση τη ταχύτητα αναφοράς από την εκφώνηση προσδιορίζουμε τον αντίστοιχο συντελεστή ώσης από τα δεδομένα της εκφώνησης. Και οι δύο παράμετροι, καθώς και η επιλογή προσομοίωσης με ή χωρίς τον δρομέα ελέγχονται από κατάλληλες παραμέτρους στο αρχείο εισόδου (??).

```
    !--- Add disc contribution
    if (disc.eq.1) then
        !--- Add source term to cells on x=0
        if (i.eq.x0ind) then
            !--- Add source term to cells from r=0 to r=R
            if(y_grid(j).le.1) then
                BB(i,j) = BB(i,j) - 0.5*ct*2*pi*yc*dygridstgu(j)*uref**2
            endif
        endif
    endif
```

Τμήμα κώδικα 11: Προσθήκη όρου πηγής - ορμή κατά x - δίσκος ορμής

3 Αρχείο παραμέτρων και τελικές τιμές

Για τη δική μου περίπτωση η ταχύτητα ελεύθερης ροής και η ακτίνα του δρομέα προκύπτουν ίσες με: $U = 14m/s$ και $R = 0.34m$. Μετά την πρώτη προσομοίωση, η ταχύτητα αναφοράς για την ώση και ο αντίστοιχος συντελεστής ώσης είναι ίσοι με: $U_{ref} = 17.67m/s$ και $C_t = 0.1266$.

```
   XMIN       XMAX       XUNI      YMIN     YMAX
   -40.       80.        20.       0.       12.5
 NGRIDX1     NGRIDY1    DX_UNI
    91       41         0.05d0
   RATX1      RATX2      RATY
   1.01       1.02       1.04
 DVISC        UINF
 1.5e-5       14.
 RADIUS       CT         UREF   !CT AND UREF for thrust calculation
   0.34d0     0.1266     17.67
 ITMAX        NSWP       NBACKUP
  30000       5          500
  EPS         TINY
 1d-6         1d-20
 URFU         URFV       URFP      URFTE     URFVIS
  0.40        0.40       0.350      0.40      0.450
 TIAMB
  0.10
IBACKUP     RUN_WITH_DISC ! (0 for free, 1 for rotor)
   0          1
```

Τμήμα κώδικα 12: Αρχείο εισόδου

Λόγω δυσκολιών στη σύγκλιση, οι συντελεστές υποχαλάρωσης μειώθηκαν συγκριτικά με τους προτεινόμενους με τον μικρότερο να χρησιμοποιείται στην πίεση. Οι ακριβείς συντελεστές υποχαλάρωσης φαίνονται στο αρχείο εισόδου (??). Για την προσεγγιστική ανάλυση σε τριδιαγώνια συστήματα έγιναν 5 σαρώσεις ανά κατεύθυνση.

4 Παρουσίαση αποτελεσμάτων