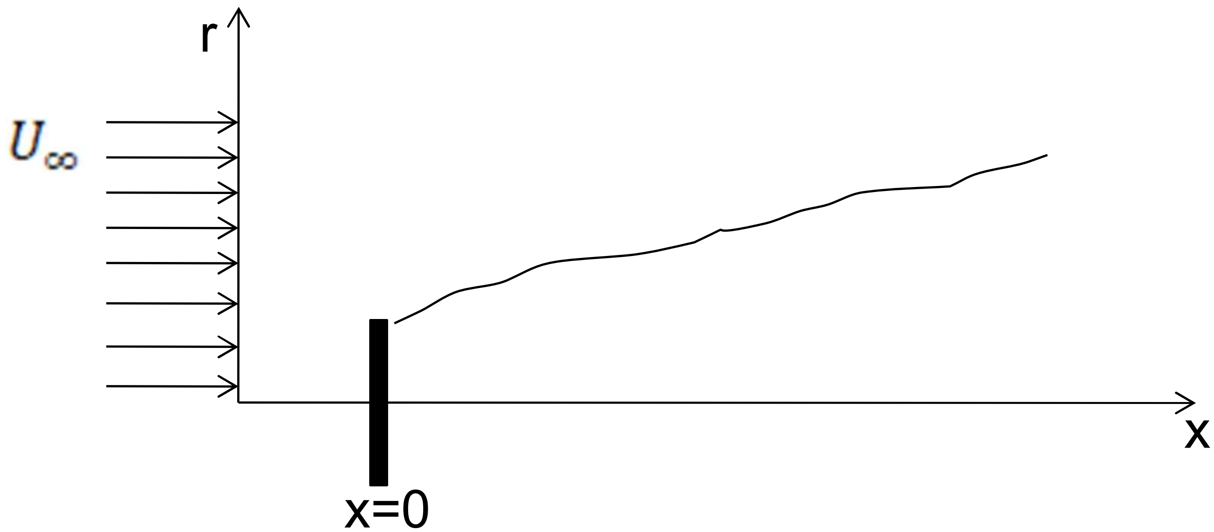
Υπολογιστική Ρευστομηχανική
1ο Προαιρετικό Θέμα

Προσομοίωση τυρβώδους πεδίου ροής στον ομόρρου Α/Γ

Γιάννης Προσπαθόπουλος
Ε.Μ.Π., Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

- Παραδοχές:
  - Ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα U_∞ προσπίπτει σε δρομέα ανεμογεννήτριας
  - Θεωρείται μόνιμο αξονοσυμμετρικό πεδίο ροής
  - Η ανεμογεννήτρια προσομοιώνεται ως δίσκος ορμής
  - Αγνοείται η περιφερειακή συνιστώσα της ταχύτητας
- Ζητείται η προσομοίωση του τυρβώδους πεδίου ροής που αναπτύσσεται στον ομόρρου της ανεμογεννήτριας



- Το πρόβλημα διέπεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων για αξονοσυμμετρικό πεδίο ροής (συντηρητική μορφή)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{εξίσωση συνέχειας}$$

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ruv)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \quad \text{εξίσωση ορμής κατά } x$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv^2)}{\partial r} - \cancel{\frac{w^2}{r}} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v^2}{r}\right] \quad \text{εξίσωση ορμής κατά } y$$

- Οι εξισώσεις έχουν αδιαστατοποιηθεί με την ακτίνα του δρομέα και με την ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής

$$x^* = x/R, \quad r^* = r/R \qquad p^* = \frac{p - p_\infty}{\rho U_\infty^2} \qquad Re = \frac{U_\infty R}{\nu}$$

$$u^* = u/U_\infty, \quad v^* = v/U_\infty$$

- Για την προσομοίωση τυρβώδους πεδίου ροής επιλύονται οι εξισώσεις RANS → εισάγονται οι τυρβώδεις τάσεις (Reynolds)
- Υπόθεση Boussinesq → ο τανυστής Reynolds προσομοιώνεται μέσω της τυρβώδους συνεκτικότητας
- Οι ταχύτητες αναφέρονται στις μέσες τιμές, η τυρβώδης συνεκτικότητα προστίθεται στην κινηματική συνεκτικότητα
- Σε αδιάστατη μορφή:

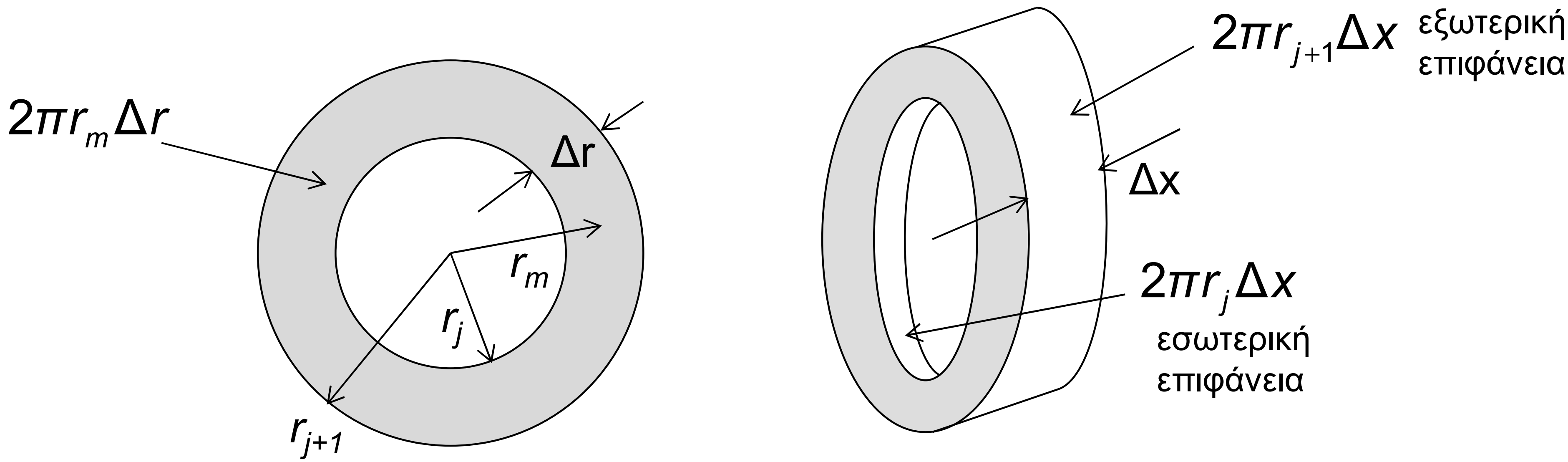
$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \rightarrow \frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{\nu_t}{U_\infty R}$$

- Η προσομοίωση του δρομέα γίνεται με τη θεωρία δίσκου ορμής:

$$dF = 0.5\rho C_t U_\infty^2 dA, \quad dA = 2\pi r dr$$

Ε.Μ.Π. *Στοιχειώδεις επιφάνειες – πεπερασμένος όγκος*

- Στοιχειώδεις διακριτοποιημένες επιφάνειες:



- Στοιχειώδης πεπερασμένος όγκος: $2\pi r_m \Delta r\ \Delta x$
- Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται στους πεπερασμένους όγκους (κυλινδρικοί δακτύλιοι)

- Εξίσωση ορμής κατά x, 1ος όρος συναγωγής

$$\int \frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x} 2\pi r\,dr\,dx = 2\pi r_m \Delta r\left[\left(u^2\right)_e - \left(u^2\right)_w\right] = 2\pi r_m \Delta r\left[u_e u_e^* - u_w u_w^*\right]$$

$$\int \frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x} 2\pi r\,dr\,dx = 2\pi r_m \Delta r u_e^* u_e - 2\pi r_m \Delta r u_w^* u_w$$

$$\int \frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x} 2\pi r\,dr\,dx = F_e u_e - F_w u_w, \quad F_e = u_e^* 2\pi r_m \Delta r, \quad F_w = u_w^* 2\pi r_m \Delta r$$

- Οι τιμές της ταχύτητας στις επιφάνειες (ανακατασκευή) υπολογίζονται με το υβριδικό σχήμα

- Συνεισφέρουν στους συντελεστές α_E, α_W της τελικής εξίσωσης

$$\alpha_P u_P = \alpha_E u_E + \alpha_W u_W + \alpha_N u_N + \alpha_S u_S + S$$

- Εξίσωση ορμής κατά x, 2ος όρος συναγωγής

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial(ruv)}{\partial r}2\pi r\,dr\,dx = 2\pi\Delta x\left[(ruv)_n - (ruv)_s\right] = 2\pi\Delta x\left(r_n u_n v_n^* - r_s u_s v_s^*\right)$$

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial(ruv)}{\partial r}2\pi r\,dr\,dx = F_n u_n - F_s u_s, \quad F_n = 2\pi r_{j+1}\Delta x\, v_n^*, \quad F_s = 2\pi r_j \Delta x\, v_s^*$$

- Η συνεισφορά είναι στους συντελεστές α_N, α_S της τελικής εξίσωσης

- Ομοίως για τους όρους διάχυσης. Τελικά, σύμφωνα με το υβριδικό σχήμα προκύπτει:

$$\alpha_E = D_e + \max\{-F_e, 0\}, \quad \alpha_W = D_w + \max\{F_w, 0\}$$

$$\alpha_N = D_n + \max\{-F_n, 0\}, \quad \alpha_S = D_s + \max\{F_s, 0\}$$

- Εξίσωση ορμής κατά x, 1ος όρος διάχυσης:

$$\int \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]2\pi r\,dr\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}+\frac{\nu_t}{U_\infty R}\right)\Delta x\left[\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_n-\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s\right]$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]2\pi r\,dr\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}+\frac{\nu_t}{U_\infty R}\right)\Delta x\left[r_{j+1}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{j+1}-r_j\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{j}\right]$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]2\pi r\,dr\,dx = D_n\left(\Delta u\right)_n - D_s\left(\Delta u\right)_s$$

$$D_n = 2\pi\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}+\frac{\nu_t}{U_\infty R}\right)\frac{\Delta x}{\Delta y}r_{j+1}, \quad D_s = 2\pi\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}+\frac{\nu_t}{U_\infty R}\right)\frac{\Delta x}{\Delta y}r_j$$

Όροι πηγής της εξίσωσης ορμής κατά x

➢Η συνεισφορά της διαφοράς πίεσης καταχωρείται στον όρο πηγής και αντιστοιχεί στη δύναμη που ασκείται στον πεπερασμένο όγκο

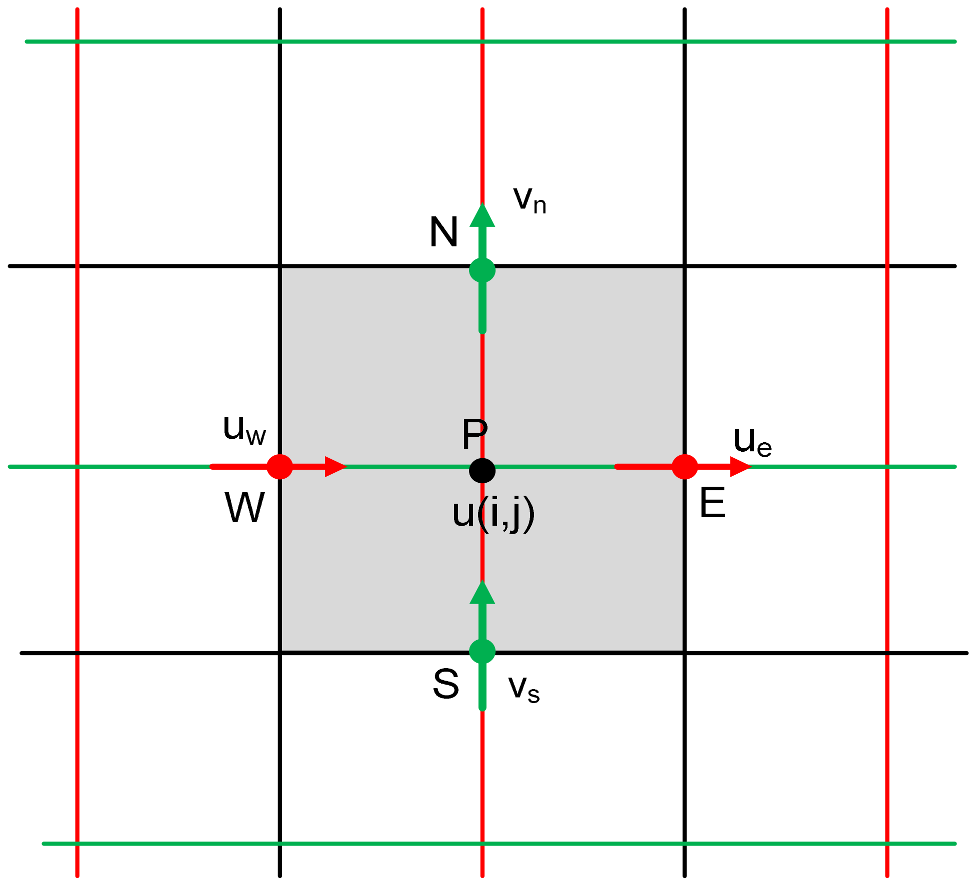
$$\int \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r\, dr\, dx = \Delta p\, 2\pi r\, \Delta x$$

➢ Στον όρο πηγής της εξίσωσης ορμής κατά x προστίθεται και η δύναμη που ασκείται από την Α/Γ (δίσκος ορμής) στο ρευστό με αρνητικό πρόσημο

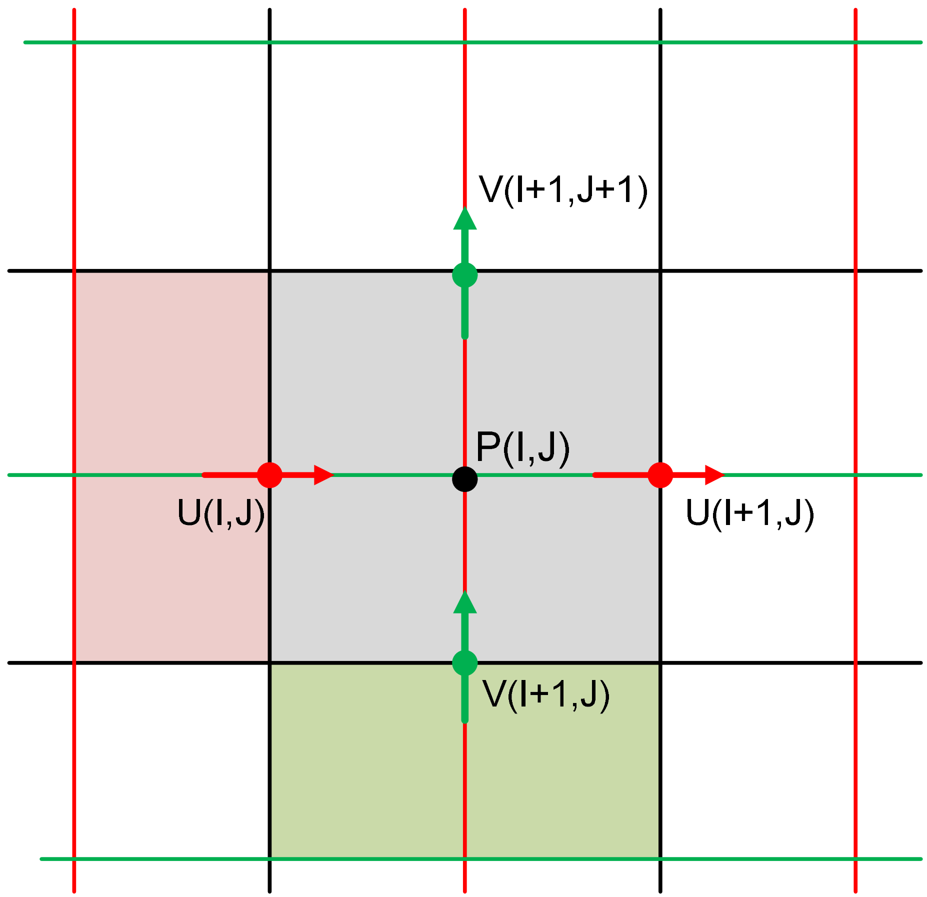
$$\Delta F = -0.5 \rho C_t U_\infty^2 \Delta A, \quad \Delta \mathrm{A} = 2\pi r \Delta r$$

➢ Στο αξονοσυμμετρικό πεδίο ροής επιλύεται μόνο μια τομή στο επίπεδο *xr* → δισδιάστατο υπολογιστικό χωρίο, εξοικονόμηση υπολογιστικού κόστους

- Υπολογιστική κυψέλη για την εξίσωση ορμής κατά x



➢ Ακολουθείται η μέθοδος των μετατοπισμένων πλεγμάτων → οι ταχύτητες u, v υπολογίζονται σε διαφορετικά σημεία → κατασκευάζονται 3 πλέγματα (αρχικό → p, μετατοπισμένα → u, v)



Εξίσωση μεταφοράς της ΤΚΕ

- Προσομοίωση τύρβης
  - Επίλυση εξίσωσης τυρβώδους κινητικής ενέργειας *k*
  - Υπολογισμός τυρβώδους συνεκτικότητας ν_t
  - Τα μεγέθη *k*, ν_t υπολογίζονται στο αρχικό πλέγμα (όπως η πίεση)
- Εξίσωση μεταφοράς για το *k*

$$\frac{\partial\left(kU_j\right)}{\partial x_j} = \sigma_{ij}^R \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_D \frac{k^{3/2}}{L} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \nu_t / \sigma_\kappa\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]$$

- Όροι μεταφοράς και διάχυσης: όπως στις εξισώσεις ορμής
- Όρος παραγωγής τυρβώδους κινητικής ενέργειας και όρος καταστροφής κινητικής ενέργειας → όροι πηγής
- Κλίμακα τύρβης: Διάμετρος δρομέα

Όροι σε κυλινδρικές συντεταγμένες

- Κυλινδρικές συντεταγμένες
- Όρος συναγωγής

$$\frac{\partial(ku)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rkv)}{\partial r}$$

- Όρος διάχυσης

$$(v+v_t/\sigma_\kappa)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial k}{\partial r}\right)\right]+(v+v_t/\sigma_\kappa)\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}\right)$$

- Όρος παραγωγής *k*

$$\sigma_{xx}^R\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_{xr}^R\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\sigma_{rr}^R\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\sigma_{xx}^R=-\frac{2}{3}k+2v_t\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{rr}^R=-\frac{2}{3}k+2v_t\frac{\partial v}{\partial r}$$

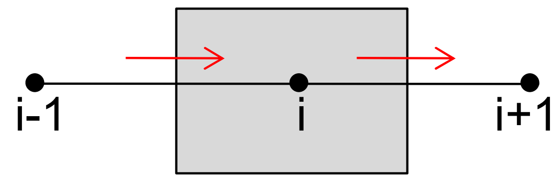
$$\sigma_{xy}^R=v_t\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Όρος παραγωγής TKE

- Όρος παραγωγής κινητικής ενέργειας τύρβης
  - Υπολογίζονται οι χωρικές παράγωγοι των ταχυτήτων και οι τάσεις Reynolds

$$\iint \sigma_{ij}^{R} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} 2\pi r\, dr\, dx = \overline{P}\, 2\pi r\, \Delta x\, \Delta r$$

$$\overline{P} = \sigma_{ij}^{R} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{U_1(i+1,j) - U_1(i,j)}{\Delta x}$$



$$\sigma_{ij}^{R} = \nu_t(i,j)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \boxed{\frac{2}{3}k(i,j)\,\delta_{ij}}$$

Στο ασυμπίεστο δε χρειάζεται
Μηδενίζεται λόγω συνέχειας

Όρος καταστροφής ΤΚΕ

- Όρος καταστροφής κινητικής ενέργειας τύρβης
  - Μη γραμμικός όρος

$$-C_D \frac{k^{3/2}}{L}$$

  - Γραμμικοποίηση της μορφής: $S = S_C + S_P \varphi_p$

$$-C_D \frac{k^{3/2}}{L} = \boxed{-\frac{C_D}{L}\sqrt{k^*}}\, k = S_P \varphi_p$$

$$S_C = 0, \quad S_P = -\frac{C_D}{L}\sqrt{k^*}$$

- Υπολογισμός τυρβώδους συνεκτικότητας

$$\nu_t = c_\mu k^{1/2} L, \quad c_\mu = 0.033$$ για ατμοσφαιρικές ροές

- Είσοδος

  • Ομοιόμορφη ταχύτητα *u=1, v=0*
  • Τυρβώδης κινητική ενέργεια *k:* υπολογίζεται από την ένταση της τύρβης

$$k = \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right), \quad \sigma_y / \sigma_x = 0.8, \quad \sigma_z / \sigma_x = 0.5$$

$$k = 0.945\sigma_x^2 = 0.945\left(U_\infty^2 I^2\right) = 0.945 I^2$$

- Άξονας συμμετρίας

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = 0, \quad v = 0$$

- Έξοδος: Συνθήκες Neumann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = 0$
- Άνω όριο $u = v = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = 0$

- Τελική μορφή εξίσωσης

$$\alpha_P u_P = \alpha_E u_E + \alpha_W u_W + \alpha_N u_N + \alpha_S u_S + S$$

- Γράφεται ως δύο τριδιαγώνια συστήματα

$$\alpha_P u_P - \alpha_E u_E - \alpha_W u_W = \boxed{\alpha_N u_N + \alpha_S u_S + S}$$

$$\alpha_P u_P - \alpha_N u_N - \alpha_S u_S = \boxed{\alpha_E u_E + \alpha_W u_W + S}$$

όρος πηγής

- Επιλύονται διαδοχικά θεωρώντας γνωστό το δεξί μέλος από την προηγούμενη επανάληψη

- Πραγματοποιείται ένα πλήθος σαρώσεων κατά την κατεύθυνση S→N και μετά κατά την κατεύθυνση W→E

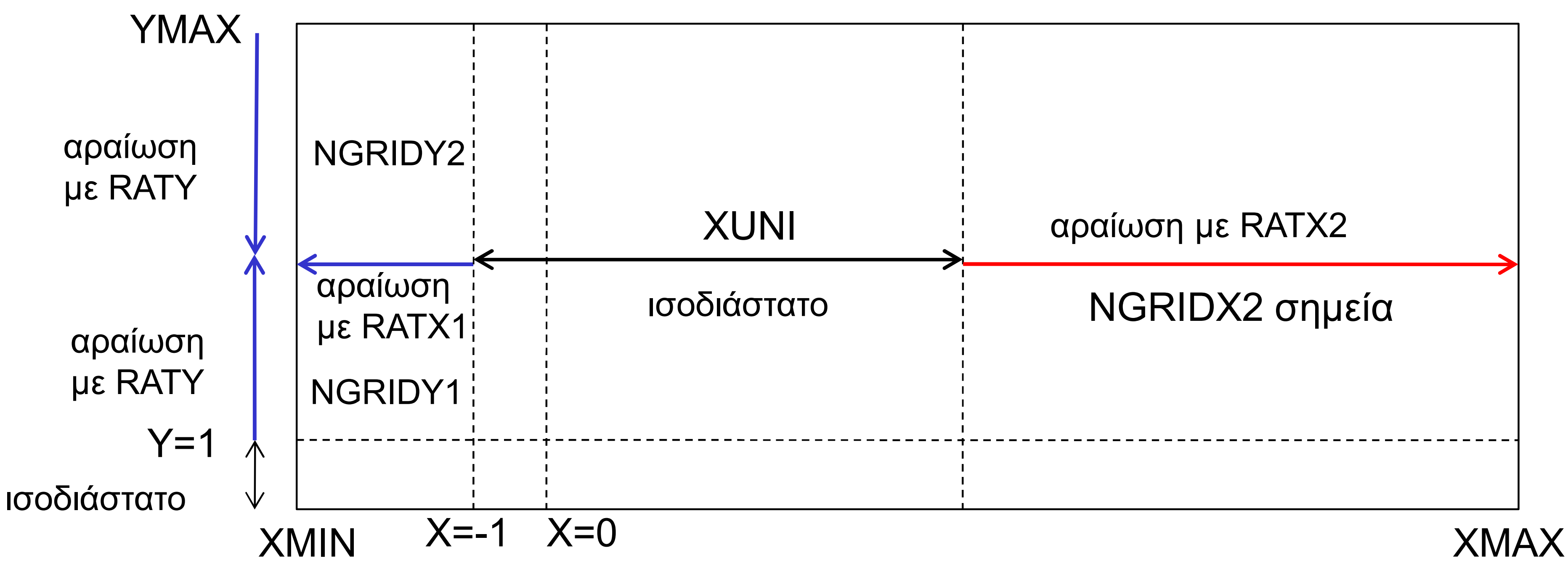
Αρχείο δεδομένων κώδικα

XMIN	XMAX	XUNI	YMIN	YMAX
-10.	60.	20.	0.	20.

Θα πρέπει να γίνουν αλλαγές λόγω τοιχώματος

NGRIDX2	NGRIDY
101	151

RATX1	RATX2	RATY
1.05	1.05	1.05



Αρχείο δεδομένων κώδικα

```
DVISC    UINF
1.5e-5   10.
```

DVISC: Κινηματική συνεκτικότητα

UINF: Αδιατάρακτη ταχύτητα ροής

```
RADIUS   CT
50.      0.8
```

RADIUS: Ακτίνα δρομέα

CT: Συντελεστής ώσης

```
ITMAX    NSWP    NBACKUP
30000    5       1000
```

ITMAX: Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων

NSWP: Πλήθος σαρώσεων ADI

NBACKUP: Ανά πόσες επαναλήψεις αποθηκεύονται τα αποτελέσματα

```
EPS      TINY
1d-6     1d-20
```

EPS: Κριτήριο σύγκλισης

TINY: Μικρός αριθμός

URFU	URFV	URFP	URFTE	URFVIS
0.50	0.50	0.30	0.80	0.80

Συντελεστές υποχαλάρωσης για ταχύτητες *u,v,w*, διόρθωση πίεσης *p*, τυρβώδη κινητική ενέργεια *k* και τυρβώδη συνεκτικότητα ν_t

TIAMB Ένταση ατμοσφαιρικής τύρβης (turbulence intensity)
0.05

ibackup ibackup = 0 → Εκκίνηση κώδικα από την αρχή
0 ibackup = 1 → Επανεκκίνηση κώδικα (rerun)

Δομή κώδικα

```
!---READ INPUT DATA
 open(5,file='input.txt')
```

ανοίγει το αρχείο ‘input.txt’ και διαβάζει τα δεδομένα

```
!--- Grid definition
 call GRID_DEF
```

Η υπορουτίνα GRID_DEF κατασκευάζει το αρχικό και τα μετατοπισμένα πλέγματα (αρχεία 'grid1’ 'grid2‘, 'stggridU1’ 'stggridU2‘, 'stggridV1’ 'stggridV2‘)

```
!---- FLOW FIELD INITIALIZATION

  do i=1,ngridx
  do j=1,ngridy-1
    UVEL(i,j)=1.d0
  enddo
 enddo

 VVEL=0.d0;  PTOT=0.d0;  PRE=0.0d0; TE=0.d0;  vt=0.d0;  vtold=0.d0
```

Αρχικοποίηση πεδίων
u, v, p, p΄, k, ν_t

```
!----- Calculate Reynolds number
 Re=uinf*radius/dvisc
```

υπολογισμός αριθμού Reynolds

```
!---- Read from backup files for rerun
 if(ibackup.eq.1) then
```

Ανάγνωση πεδίων σε περίπτωση rerun

Δομή κώδικα

Κυρίως βρόχος επαναλήψεων

```
do it=itstart,itmax
!----Calculation of turbulent viscosity (initialization)
   if(it.eq.1) then
    call TURBVIS
   endif

!----Momentum equation u
   call MOMENTUM_U(errmaxu)

!--- Momentum equation v
   call MOMENTUM_V(errmaxv)

!--- Presure correction
   call PRESCOR(errmaxp)

!--- Velocity correction
   call VELOCOR

! --- Turbulence model
!    call CALCTE(errmaxte)

!----Calculation of turbulent viscosity
   call TURBVIS
```

→ Αρχικοποίηση τυρβώδους συνεκτικότητας

→ Εξίσωση ορμής κατά x

→ Εξίσωση ορμής κατά r

→ Εξίσωση διόρθωσης πίεσης

→ Διορθώσεις ταχυτήτων

→ Εξίσωση TKE: πρέπει να εισαχθεί

→ Υπολογισμός τυρβώδους συνεκτικότητας

```
!--- Underrelaxation of pressure
```

→ Υποχαλάρωση για τη διόρθωση πίεσης

```
!--- Define a pressure reference point
   Pref = PTOT(1,ngridy-1)
   PTOT=PTOT+urfp*PRE-Pref
   PRE=0.
```

→ Διόρθωση πίεσης $p = p + p'$

```
!--- Write velocity and pressure field every nbackup iterations

   if (mod(it,nbackup).eq.0) then
    open(97,file='Uvelocity')
    open(98,file='Vvelocity')
    open(99,file='Pres-TKE')
```

Αποθήκευση πεδίων

```
!  write errors
  write(200,'(i7,3e18.9)') it,errmaxu,errmaxv,errmaxp
```

→ Γραφή σφαλμάτων στο αρχείο ‘errormax’

```
   if(errmaxp.lt.eps.and.errmaxu.lt.eps.and.errmaxv.lt.eps) exit
```

→ Έλεγχος σύγκλισης

```
  enddo
```