

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

[01005] Matematik

HJEMMEOPGAVE 5

Lucas Buhelt
S214691

25. februar 2022

Opgave 3

I denne opgave undersøges funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = \frac{5}{4}x^2y - \frac{1}{4}x^4 - y^2 + 1$$

Vi starter med at betragte en kurve K givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{r}(u) = \left(u, \frac{1}{2}u^2\right), u \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- a) Lad h betegne den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$, $u \in \mathbb{R}$. Lav et Maple-plot hvor du har brugt h til at løfte K op på grafen for f . Bestem de værdier af u for hvilke $h(u) = 1$ og $h'(u) = 0$, og angiv de intervaller for u i hvilke $h'(u)$ er negativ, henholdsvis positiv.

For at plotte funktionen $f(x, y)$ bruges plot3d. Spacecurve bruges til at plotte den sammensatte funktion $h(u)$. Disse funktioner ses i maple ligning 1.1 og 1.4. For at løfte K op i 3D bruges $h(u)$ idet den gør at funktionen nu følger $f(x, y)$. Derfor tilføjes $h(u)$ som tredjeaksen i $\mathbf{r}(u)$.

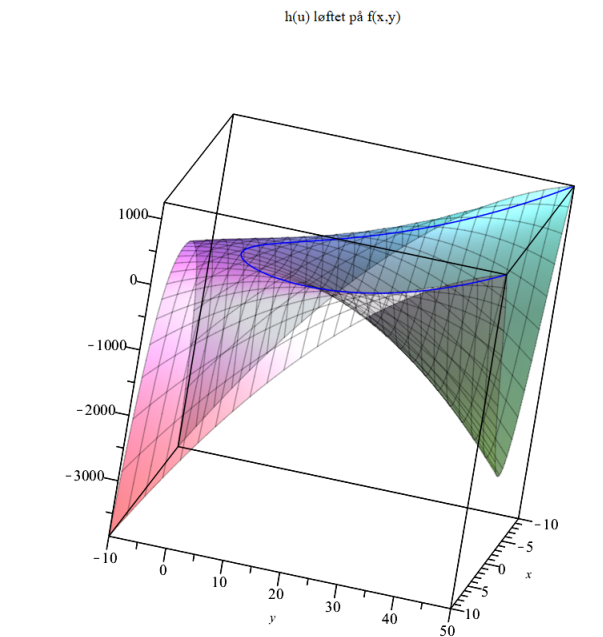
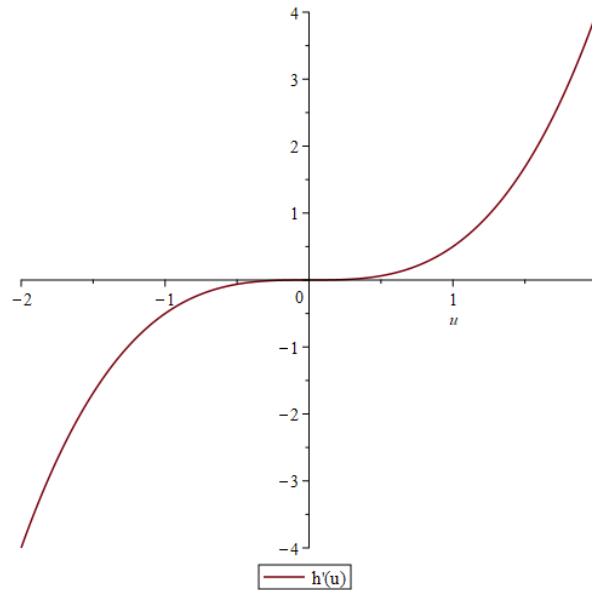


Figure 1: K løftet op på grafen for f

Værdierne for u findes ved at lave to ligninger med en ubekendt. Den første ligning er at $h(u) = 1$ og $h'(u) = 0$. De løses med Maple og u findes til at være 0. Dette ses i maple ligning 1.5.

$$h(u) = 1 \text{ og } h'(u) = 0 \rightarrow u = 0 \quad (2)$$

For at se for hvilke værdier af u hvor $h'(u)$ er negativ, plottes funktionen hvor der så ses for hvilket værdier for u at $h'(u)$ er negativ.

Figure 2: $h'(u)$ plottet omkring origo

Det ses på figur 2, at når u bliver negativt vil $h'(u)$ også blive negativt og omvendt at når u bliver positivt vil $h'(u)$ også blive positivt

Vi betragter i det følgende punkterne $A = (0, -1)$ og $B = (0, 0)$.

- b) **Bestem Hessematricen for f i A , og bestem arten af det approksimerede andengradspolynomium P_2 for f med udviklingspunktet A . Illustrer. Bestem den største fejl man begår, hvis man benytter P_2 i stedet for f på det afsluttende kvadrat der er afgrænset af linjerne $x = \frac{-1}{10}, x = \frac{1}{10}, y = \frac{-11}{10}$ og $y = \frac{-9}{10}$.**

Hessematricen er bygget op af de dobbelt-differentierede funktioner for f i A .

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Hvor $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Dette løses, se maple ligning 2.1 til 2.4, og hessematricen fås til at være:

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

For at finde det approksimerede andengradspolynomium bruges mtaylor funktionen i maple. Så fås det approksimerede andengradspolynomium til:

$$P_2(0, -1) = 1 - \frac{5 \cdot x^2}{4} - y^2 \quad (5)$$

Denne funktion ligner en elliptisk cylinderflade, hvis ligning har formen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad (6)$$

Dette er fordi den har top-punkt i $(0, 0, 0)$ og det ses efter maple ligning 2.6. For at finde den største fejl man begår laves en funktion ud fra den originale funktion f og den approksimerede funktion $P2$. Denne funktion er

$$R(x, y) = f(x, y) - P2(x, y) \quad (7)$$

Med denne funktion skal der findes extrema for funktionen. Dette gøres ved først at undersøge om der er et stationært punkt. Dette gøres ved at finde gradienten og sætte den lig 0 og se om der findes nogle punkter. Se maple ligning 2.10.

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \rightarrow \quad (8)$$

$$x_0 = 0, y_0 = y \quad (9)$$

Dette viser at de stationære punkter ligger på en linje som løber langs x-aksen. Derfor kan dette ikke være den største restværdi.

Så undersøges randen for om der er nogen extrema, da disse nødvendigvis vil være der hvor der er størst restværdi. Dette gøres ved at lave en parameterfremstilling for hver af randlinjerne og finde ekstremum ved at differentiere og sætte lig 0.

$$R'_x\left(-\frac{1}{10}, y\right) = \frac{1}{80} \quad (10)$$

Dette betyder at dens ekstremum ligger uden for firkanten som er afgrænset. Det samme sker for de andre randlinjer, se maple ligning 2.11 til 2.12. Derfor er det eneste sted som er tilbage er i randhjørnerne. Af disse skal den maksimale absolutte værdi findes. Dette gøres med maple max kommandoen for de absolutte værdier ved hvert hjørne. Se maple ligning 2.15. Derfra fås det at den største fejl ligger i hjørnerne med forskriften:

$$R\left(-\frac{1}{10}, -\frac{11}{10}\right) \text{ og } R\left(\frac{1}{10}, -\frac{11}{10}\right) \quad (11)$$

Disse hjørner har den største fejl på $\frac{51}{40000}$.

- c) **Gør rede for at B er et stationært punkt for f hvor man ikke umiddelbart kan bruge Hessemetoden til at afgøre om B er sted for et lokalt ekstremum.**

Hvis B er et stationært punkt betyder det at gradientet for punktet vil være lig $(0, 0)$.¹ Dette testes.

$$\nabla f(0, 0) = (f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)) = (0, 0) \quad (12)$$

Dette betyder at B er et stationært punkt.

Så findes hessematricen for f i B , da denne bruges til hessemetoden som kan afgøre om B er et lokalt ekstremum.

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Heraf aflæses egenværdierne til at være $(0, -2)$. Dette betyder at hvis man ganger egenværdierne sammen giver det 0. Denne egenskab betyder så at man ikke kan sikre at B er et lokalt ekstremum ud fra hessemetoden².

- d) **Vis at restriktionen af f til alle rette linjer gennem B har lokalt maksimum i B . Kan vi på den baggrund slutte at f har lokalt maksimum i B ? HAR f lokalt maksimum i B ?**

For at vise at alle rette linjer har et maksimum i B undersøges der først om der er et stationært punkt i B .

Først vides der at der kigges på den rette linje igennem origo og derfor kan y erstattes af funktionen for den rette linje $a \cdot x$. Dernæst differentieres funktionen for at se om det er et extrema.

$$f'(x, ax) = \frac{15}{4}x^2a - x^3 - 2a^2x \quad (14)$$

Her sættes $x = 0$ og det fås at det er et lokalt extrema da a bare er en variabel. Så skal der undersøges om det er et maksimum eller et minimum ved at differentiere igen og se om det er positivt eller negativt.

$$f''(x, ax) = \frac{15}{2}ax - 3x^2 - 2a^2 \quad (15)$$

Heraf fås det at a altid vil være negativt og derfor er det et maksimum og ikke minimum³.

Til sidst skal der undersøges hvor den rette linje svarer til x-aksen. Her vil $x = 0$ og $y = 0$. Der differentieres og dobbelt-differentieres igen og det ses at igen så bliver det bare en variabel y og den bliver negativ ved dobbelt-differention.

¹Defintion 21.9

²Definition 21.17

³Definition 25.15

Appendiks

```
[> restart:
  with(plots):
```

A

```
[> f:=(x,y)->5/4*x^2*y-1/4*x^4-y^2+1
```

$$f := (x, y) \mapsto \frac{5}{4} \cdot x^2 \cdot y - \frac{1}{4} \cdot x^4 - y^2 + 1 \quad (1.1)$$

```
[> r:=(u)->(u,1/2*u^2)
```

$$r := u \mapsto \left(u, \frac{u^2}{2} \right) \quad (1.2)$$

```
[> h:=u->f(r(u)):
  'h(u) '=h(u)
```

$$h(u) = \frac{u^4}{8} + 1 \quad (1.3)$$

```
[> vector_r:=u-><u,1/2*u^2,h(u)>
```

$$vector_r := u \mapsto \left\langle u, \frac{u^2}{2}, h(u) \right\rangle \quad (1.4)$$

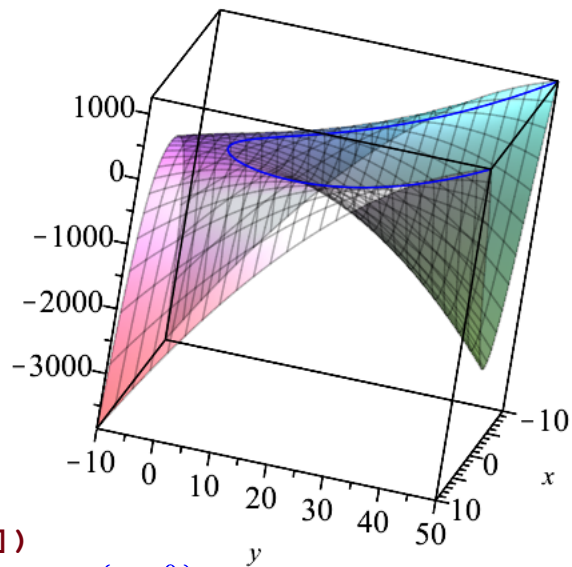
```
[> sp1:=spacecurve(vector_r(u),u=-10..10,color=blue):
```

```
[> p1:=plot3d(f(x,y),x=-10..10,y=-10..50,transparency=0.25,title="h
  (u) løftet på f(x,y)":
```

```
> display(p1,sp1,orientation=[39, 71, 29],size=[300,300])
```

$h(u)$ løftet på $f(x,y)$

her er den plottet



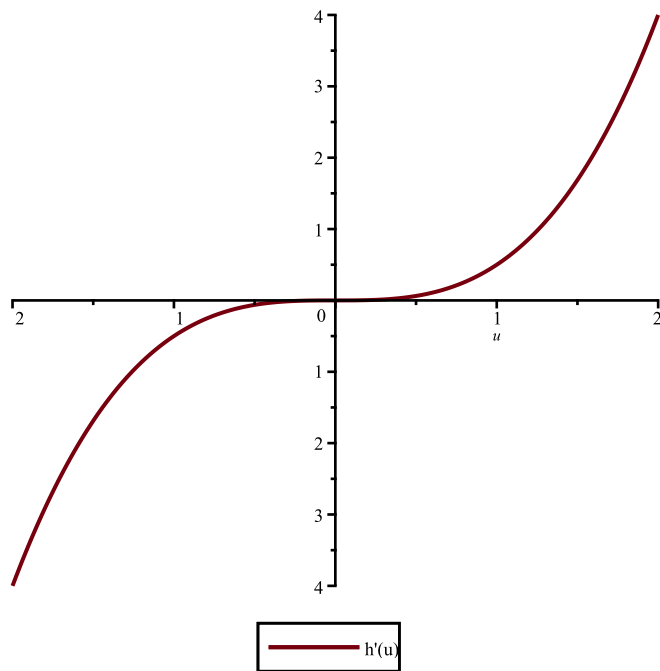
```
> solve([h(u)=1,D(h)(u)=0])
```

$\{u=0\}$

```
> 'h'(u)'=D(h)(u)
```

$$h'(u) = \frac{u^3}{2}$$

```
> plot(D(h)(u), u=-2..2, legend="h'(u)", size=[500,500])
```



B

```
> A:=(0,-1):  
   B:=(0,0):
```

```
> fxx:=unapply(D[1,1](f)(A),x)  
                                      $fx := x \mapsto \frac{5}{2}$  (2.1)
```

```
> fxy:=unapply(D[1,2](f)(A),x)  
                                      $fx := x \mapsto 0$  (2.2)
```

```
> fyy:=unapply(D[2,2](f)(A),x)  
                                      $fy := x \mapsto -2$  (2.3)
```

```
> fyx:=unapply(D[2,1](f)(A),x)  
                                      $fyx := x \mapsto 0$  (2.4)
```

```
> H:<fxx(x,y), fyx(x,y) | fxy(x,y), fyy(x,y)>  
                                      $H := \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  (2.5)
```

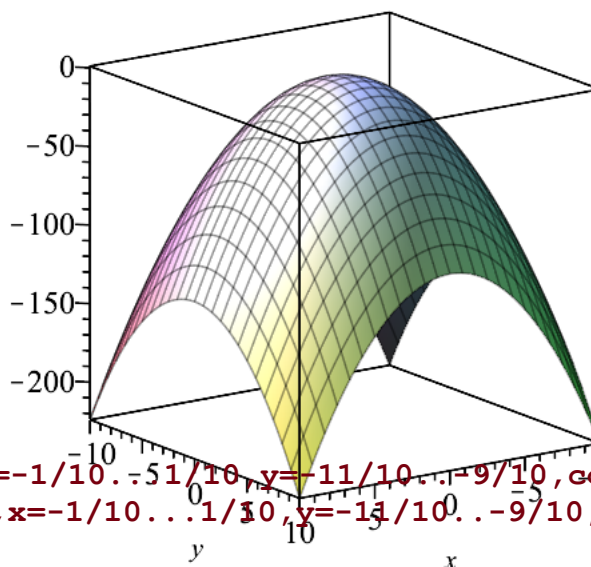


```
> P2:=unapply(mttaylor(f(x,y),[x=0,y=-1],3),[x,y]):
'P[2]':expand(P2(x,y))
```

$$P_2 = 1 - \frac{5x^2}{4} - y^2$$

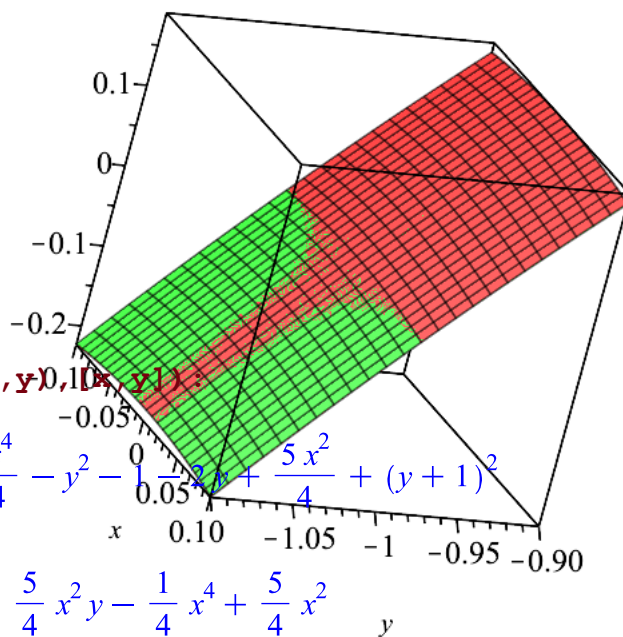
(2.6)

```
> plot3d(P2(x,y),size=[300,300])
```



```
> plotf:=plot3d(f(x,y),x=-1/10..1/10,y=-11/10..-9/10,color=red):
> plotP2:=plot3d(P2(x,y),x=-1/10..1/10,y=-11/10..-9/10,color=
green):
```

```
> display(plotf,plotP2,orientation=[11,65,36],size=[300,300])
```



```
> R:=unapply(f(x,y)-P2(x,y),[x,y]);
R(x,y)
```

$$\frac{5x^2y}{4} - \frac{x^4}{4} - y^2 - \frac{5x^2}{4} + (y+1)^2$$

```
> expand(R(x,y))
```

$$\frac{5}{4}x^2y - \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{4}x^2$$

```
> lign1:=D[1](R)(x,y)=0;
lign2:=D[2](R)(x,y)=0;
```

$$\text{lign1} := \frac{5}{2}yx - x^3 + \frac{5}{2}x = 0$$

$$\text{lign2} := \frac{5x^2}{4} = 0$$

```
> solve([lign1,lign2])
```

$$\{x=0, y=y\}$$

$$\begin{aligned} & \text{> diff(R(-1/10,y),y)} \\ & \frac{1}{80} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \text{> diff(R(1/10,y),y)} \\ & \frac{1}{80} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \text{> diff(R(x,-11/10),x):} \\ & \text{solve(%,x);} \\ & 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & \text{> diff(R(x,-9/10),x):} \\ & \text{solve(%,x);} \\ & 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \text{> max(abs(R(-1/10,-11/10)),abs(R(1/10,-11/10)),abs(R(-1/10,-9/10)),} \\ & \text{abs(R(1/10,-9/10)))} \\ & \frac{51}{40000} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \text{> abs(R(1/10,-11/10))} \\ & \frac{51}{40000} \end{aligned} \quad (2.16)$$

C

$$\begin{aligned} & \text{> fxxb:=unapply(D[1,1](f)(B),x)} \\ & fxxb := x \mapsto 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{> fxyb:=unapply(D[1,2](f)(B),x)} \\ & fxyb := x \mapsto 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \text{> fyyb:=unapply(D[2,2](f)(B),x)} \\ & fyyb := x \mapsto -2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \text{> fyx b:=unapply(D[2,1](f)(B),x)} \\ & fyx b := x \mapsto 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \text{> HB:=<fxxb(x,y),fyxb(x,y)|fxyb(x,y),fyyb(x,y)>} \\ & HB := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

D

```
[> restart:
with(LinearAlgebra) :
```

```
[> f:=(x,y)->5/4*x^2*y-1/4*x^4-y^2+1
```

$$f := (x, y) \mapsto \frac{5}{4} \cdot x^2 \cdot y - \frac{1}{4} \cdot x^4 - y^2 + 1 \quad (4.1)$$

```
=> f(x,a*x)
```

$$\frac{5}{4} x^3 a - \frac{1}{4} x^4 - a^2 x^2 + 1 \quad (4.2)$$

```
=> diff(f(x,a*x),x);
solve(%=0)
```

$$\frac{15}{4} x^2 a - x^3 - 2 a^2 x$$

$$\{a=a, x=0\}, \left\{a=\left(\frac{15}{16} + \frac{\sqrt{97}}{16}\right)x, x=x\right\}, \left\{a=\left(\frac{15}{16} - \frac{\sqrt{97}}{16}\right)x, x=x\right\} \quad (4.3)$$

```
[> diff(diff(f(x,a*x),x),x);
subs(x=0,%)
```

$$\frac{15}{2} a x - 3 x^2 - 2 a^2$$

$$-2 a^2 \quad (4.4)$$

```
[> diff(f(0,y),y);
```

$$-2 y \quad (4.5)$$

```
[> diff(diff(f(0,y),y),y);
```

$$-2 \quad (4.6)$$