Cercetări operaţionale 3

Cristian Niculescu

1 Curs 3

1.1 Algoritmul simplex primal

Fie problema

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ unde } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rangA = m < n. \quad (1)$$

Reamintim că $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ este domeniul admisibil al problemei (1).
Presupunem $P \neq \emptyset$.
Definiţie. Fie B, bază a problemei (1) (adică bază a sistemului $Ax = b$). B se numeşte bază primal admisibilă a problemei (1) $\iff B^{-1}b \geq 0$.
Observaţie. Fie B, bază a problemei (1). B este bază primal admisibilă a problemei (1) $\iff$ soluţia de bază asociată lui B, $\begin{cases} x^B = B^{-1}b \\ x^R = 0 \end{cases}$, este soluţie admisibilă a problemei (1).
Fie $B = (a^{j_1}, a^{j_2}, ..., a^{j_m})$, bază primal admisibilă a problemei (1).
Forma explicită a sistemului $Ax = b$ în raport cu baza B este
$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R$.
Notaţii. $\mathcal{B} = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, $\mathcal{R} = \{1, 2, ..., n\} \setminus \mathcal{B}$, $\overline{x}^B = B^{-1}b$,
$y_j^B = B^{-1}a^j, j = \overline{1, n}$.
$\Longrightarrow x^B = \overline{x}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_j^B x_j \Longrightarrow x_i = \overline{x}_i^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_{ij}^B x_j, i \in \mathcal{B}$.
Notaţii. $c_B = (c_{j_1}, c_{j_2}, ..., c_{j_m})^T$, $c_R = (c_j)_{j \in \mathcal{R}}$.
Fie $x \in P$.

$$c^T x = c_B^T x^B + c_R^T x^R = c_B^T \left(\overline{x}^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_j^B x_j \right) + \sum_{j \in \mathcal{R}} c_j x_j = c_B^T \overline{x}^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} \left(c_B^T y_j^B - c_j \right) x_j.$$

Notaţii. $\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B$, $z_j^B = c_B^T y_j^B, j = \overline{1, n}$.
$\Longrightarrow c^T x = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} \left(z_j^B - c_j \right) x_j$.

$\overline{z}^B$ este valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia de bază asociată bazei B.
$z = c^T x$ este valoarea funcţiei obiectiv pentru $x \in P$.
Testul de optim (TO). Fie B, bază primal admisibilă a problemei (1). Dacă $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$, atunci soluţia de bază asociată lui B este soluţie optimă a problemei (1).
Demonstraţie. $\left.\begin{array}{l} \forall x \in P \implies x_j \geq 0, \forall j \in \mathcal{R} \\ z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \end{array}\right\} \implies$
$c^T x = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} \left(z_j^B - c_j\right) x_j \geq \overline{z}^B, \forall x \in P \overset{\text{Observaţie}}{\implies}$ soluţia de bază asociată lui B este soluţie optimă a problemei (1).
Testul de optim infinit (TOI). Fie B, bază primal admisibilă a problemei (1). Dacă $\exists k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$ şi $y_k^B \leq 0$, atunci problema (1) are optim infinit.
Demonstraţie. Fie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $x(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ definit astfel:

$$x_i(\alpha) = \begin{cases} \overline{x}_i^B - \alpha y_{ik}^B, i \in \mathcal{B} \\ \alpha, i = k \\ 0, i \in \mathcal{R} \setminus \{k\} \end{cases}$$

Arătăm că $\forall \alpha \geq 0, x(\alpha)$ este soluţie a sistemului $Ax = b$, verificând forma explicită $x_i^B = \overline{x}_i^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_{ij}^B x_j, i \in \mathcal{B}$:
$\overline{x}_i^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_{ij}^B x_j(\alpha) = \overline{x}_i^B - y_{ik}^B \alpha = x_i(\alpha), \forall i \in \mathcal{B}$.
Arătăm că $x_i(\alpha) \geq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$:
$\forall i \in \mathcal{B}, x_i(\alpha) = \underbrace{\overline{x}_i^B}_{\geq 0} - \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{y_{ik}^B}_{\leq 0} \geq 0;$
$x_k(\alpha) = \alpha \geq 0;$
$\forall i \in \mathcal{R} \setminus \{k\}, x_i(\alpha) = 0 \geq 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \implies x(\alpha) \in P, \forall \alpha \geq 0 \\ c^T x(\alpha) = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} (z_j^B - c_j) x_j(\alpha) = \overline{z}^B - \underbrace{(z_k^B - c_k)}_{>0} \alpha \implies \lim\limits_{\alpha \to \infty} c^T x(\alpha) = -\infty \end{array}\right\} \implies$$

$\inf\limits_{x \in P} c^T x = -\infty \implies$ problema (1) are optim infinit.
Lema substituţiei (LS). Fie $A = (a^1, a^2, ..., a^n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\widetilde{A} = (a^1, ..., a^{r-1}, b, a^{r+1}, ..., a^n)$, $c = A^{-1} b$.
1) $\widetilde{A}$ este inversabilă $\iff c_r \neq 0$.
2) Dacă $c_r \neq 0$, atunci $\widetilde{A}^{-1} = E_r(\eta) A^{-1}$, unde $E_r(\eta)$ se obţine din I_n înlocuind coloana e^r cu $\eta = \left(-\frac{c_1}{c_r}, ..., -\frac{c_{r-1}}{c_r}, \frac{1}{c_r}, -\frac{c_{r+1}}{c_r}, ..., -\frac{c_n}{c_r}\right)^T$.
Demonstraţie. $c = A^{-1} b \overset{A \cdot |}{\implies} b = Ac \implies b = \sum\limits_{j=1}^{n} a^j c_j$.

1) ($\Longrightarrow$) Reducere la absurd. Presupunem $c_r = 0 \Longrightarrow b = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a^j c_j \Longrightarrow$ o coloană a lui $\widetilde{A}$ este combinaţie liniară de celelalte $\Longrightarrow \widetilde{A}$ neinversabilă, contradicţie.

($\Longleftarrow$) Reducere la absurd. Presupunem $\widetilde{A}$ neinversabilă

$\Longrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ nu toate 0 astfel încât $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a^j \alpha_j + \alpha_r b = 0$.

Dacă $\alpha_r = 0$, cum $a^1, ..., a^n$ sunt liniar independente $\Longrightarrow \alpha_j = 0, \forall j = \overline{1, n}$, contradicţie. Deci $\alpha_r \neq 0$.

Înlocuim $b \Longrightarrow \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a^j \alpha_j + \alpha_r \sum\limits_{j=1}^{n} a^j c_j = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} (\alpha_j + \alpha_r c_j) a^j + \alpha_r c_r a^r = 0$.

$a^1, ..., a^n$ sunt liniar independente $\Longrightarrow \alpha_r c_r = 0 \overset{\alpha_r \neq 0}{\Longrightarrow} c_r = 0$, contradicţie.

2) $b = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a^j c_j + a^r c_r, c_r \neq 0 \Longrightarrow a^r = \frac{1}{c_r} b + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} \left(-\frac{c_j}{c_r}\right) a^j \Longrightarrow a^r = \widetilde{A}\eta$.

$\forall j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{r\}, a^j = \widetilde{A} e^j$, unde $e^j \in \mathbb{R}^n$ având componenta j 1 şi celelalte componente 0.

$\Longrightarrow A = \widetilde{A} E_r(\eta) \overset{\widetilde{A}^{-1} \cdot |,| \cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} \widetilde{A}^{-1} = E_r(\eta) A^{-1}$.

Teorema de schimbare a bazei (TSB). Fie B, bază primal admisibilă pentru problema (1), $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$ şi $y_k^B \nleq 0$. Fie $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$. Atunci:

a) matricea $\widetilde{B}$ obţinută din B înlocuind coloana a^r cu a^k este bază primal admisibilă pentru problema (1);

b) $\overline{z}^{\widetilde{B}} \leq \overline{z}^B$.

Demonstraţie. a) Din lema substituţiei,

$\widetilde{B}$ inversabilă $\Longleftrightarrow \left(B^{-1} a^k\right)_r \neq 0 \Longleftrightarrow y_{rk}^B \neq 0$.

Dar $y_{rk}^B > 0 \Longrightarrow \widetilde{B}$ inversabilă $\Longrightarrow \widetilde{B}$ bază a problemei (1).

Arătăm că baza $\widetilde{B}$ este primal admisibilă pentru problema (1):

Fie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $x(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ definit astfel:

$$x_i(\alpha) = \begin{cases} \overline{x}_i^B - \alpha y_{ik}^B, i \in \mathcal{B} \\ \alpha, i = k \\ 0, i \in \mathcal{R} \setminus \{k\} \end{cases}$$

În demonstraţia testului de optim infinit am arătat că $Ax(\alpha) = b, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$.

Fie $\alpha_0 = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B}$.

Arătăm că $x(\alpha) \in P, \forall \alpha \in [0, \alpha_0]$:

Este suficient de demonstrat că $x(\alpha) \geq 0, \forall \alpha \in [0, \alpha_0]$.
Fie $i \in \mathcal{B}$.
Dacă $y_{ik}^B \leq 0$, atunci $x_i(\alpha) = \underbrace{\overline{x}_i^B}_{\geq 0} - \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{y_{ik}^B}_{\leq 0} \geq 0$.
Dacă $y_{ik}^B > 0$, atunci
$x_i(\alpha) \geq 0 \iff \overline{x}_i^B - \alpha y_{ik}^B \geq 0 \iff \alpha \leq \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$.
Dar $\alpha \in [0, \alpha_0]$ şi $\alpha_0 = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \implies \alpha \leq \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \implies x_i(\alpha) \geq 0$.
$x_k(\alpha) = \alpha \geq 0$.
$\forall i \in \mathcal{R} \setminus \{k\}, x_i(\alpha) = 0 \geq 0$.
Deci $x(\alpha) \in P, \forall \alpha \in [0, \alpha_0] \implies x(\alpha_0) \in P$.
$x_r(\alpha_0) = \overline{x}_r^B - \alpha_0 y_{rk}^B = 0 \implies x_i(\alpha_0) = 0, \forall i \in (\mathcal{R} \cup \{r\}) \setminus \{k\} \implies$ componentele nenule ale lui $x(\alpha_0)$ corespund coloanelor lui $\widetilde{B} \implies x(\alpha_0)$ este soluţia de bază asociată lui $\widetilde{B} \overset{x(\alpha_0) \in P}{\implies} \widetilde{B}$ este bază primal admisibilă pentru problema (1).
b) $\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} (z_j^B - c_j) x_j(\alpha_0) = \overline{z}^B - \underbrace{\left(z_k^B - c_k\right)}_{>0} \underbrace{\alpha_0}_{\geq 0} \leq \overline{z}^B$.

Comentariu. $\widetilde{B}$ este cel puţin la fel de bună ca B din punctul de vedere al valorii funcţiei obiectiv.

Algoritmul simplex

Pasul iniţial 0. Se determină o bază primal admisibilă B, se calculează $\overline{x}^B = B^{-1}b$, $\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B$, $y_j^B = B^{-1}a^j, j = \overline{1,n}$, $z_j^B - c_j = c_B^T y_j^B - c_j, j = \overline{1,n}$ şi se trece la pasul 1.

Pasul 1 (testul de optim). Dacă $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$, atunci $x^B = \overline{x}^B$, $x^R = 0$ este soluţie optimă şi $\overline{z}^B$ este valoarea optimă, STOP. Altfel se trece la pasul 2.

Pasul 2 (testul de optim infinit). Dacă $\exists k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$ şi $y_k^B \leq 0$, atunci problema are optim infinit, STOP. Altfel se trece la pasul 3.

Pasul 3 (schimbarea bazei). Se alege $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$.
Se alege $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$.

Se consideră baza $\widetilde{B}$ obţinută din B înlocuind coloana a^r cu a^k, se calculează $\overline{x}^{\widetilde{B}}$, $\overline{z}^{\widetilde{B}}$, $y_j^{\widetilde{B}}, j = \overline{1,n}$, $z_j^{\widetilde{B}} - c_j, j = \overline{1,n}$ şi se trece la pasul 1, înlocuind B cu $\widetilde{B}$.

Alegerea lui k. Ar trebui ales k astfel încât $\overline{z}^B - \overline{z}^{\widetilde{B}}$ să fie cât mai mare. Dacă alegem $j \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_j^B - c_j > 0$ şi apoi $i_j \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_{i_j}^B}{y_{i_j j}^B} = \min\limits_{y_{ij}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ij}^B}$, avem $\overline{z}^B - \overline{z}^{\widetilde{B}} = \left(z_j^B - c_j\right) \frac{\overline{x}_{i_j}^B}{y_{i_j j}^B}$, deci ar trebui să alegem $k \in \mathcal{R}$

astfel încât $\left(z_k^B - c_k\right) \frac{\overline{x}_{i_k}^B}{y_{i_k k}^B} = \max \left\{ \left(z_j^B - c_j\right) \frac{\overline{x}_{i_j}^B}{y_{i_j j}^B} | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0 \right\}$ şi apoi $r = i_k$. Pentru simplitate se renunţă la rapoarte $\Longrightarrow$
Criteriul de intrare în bază. $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k = \max \left\{ z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0 \right\}$ (arată indicele coloanei care intră în bază).
Criteriul de ieşire din bază. $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$ (arată indicele coloanei care iese din bază).

1.2 Formule de schimbare a bazei (FSB)

Fie $\widetilde{B}$, baza obţinută din B înlocuind a^r cu a^k. ($\widetilde{B}$ este bază conform lemei substituţiei deoarece $y_{rk}^B \neq 0$.)
Fie

$$\widetilde{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \cup \{k\}) \setminus \{r\}, \tag{2}$$

$$\widetilde{\mathcal{R}} = (\mathcal{R} \cup \{r\}) \setminus \{k\}. \tag{3}$$

Pentru B:

$$x_i = \overline{x}_i^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{ij}^B x_j, \forall i \in \mathcal{B}, \tag{4}$$

$$z = \overline{z}^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} \left(z_j^B - c_j\right) x_j. \tag{5}$$

Pentru $\widetilde{B}$:

$$x_i = \overline{x}_i^{\widetilde{B}} - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} y_{ij}^{\widetilde{B}} x_j, \forall i \in \widetilde{\mathcal{B}}, \tag{6}$$

$$z = \overline{z}^{\widetilde{B}} - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} \left(z_j^{\widetilde{B}} - c_j\right) x_j. \tag{7}$$

Avem:

$$y_j^B = B^{-1} a^j, \forall j \in \overline{1, n}. \tag{8}$$

Dacă $j \in \mathcal{B} \Longrightarrow a^j$ este coloană a lui $B \Longrightarrow B^{-1} a^j$ este vector unitar $\Longrightarrow$

$$y_{jj}^B = 1, \forall j \in \mathcal{B}, \tag{9}$$

$$y_{ij}^B = 0, \forall j \in \mathcal{B}, i \in \mathcal{B} \setminus \{j\}. \tag{10}$$

$j \in \mathcal{B} \implies z_j^B - c_j = c_B^T y_j^B - c_j = \sum_{i \in \mathcal{B}} c_i y_{ij}^B - c_j \overset{(9),\,(10)}{=} c_j - c_j = 0 \implies$

$$z_j^B - c_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}. \tag{11}$$

$r \in \mathcal{B} \overset{(9)}{\implies}$

$$y_{rr}^B = 1. \tag{12}$$

$r \in \mathcal{B} \overset{(10)}{\implies}$

$$y_{ir}^B = 0, \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}. \tag{13}$$

$r \in \mathcal{B} \overset{(4)}{\implies} x_r = \overline{x}_r^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{rj}^B x_j = \overline{x}_r^B - \sum_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} y_{rj}^B x_j - y_{rk}^B x_k \overset{y_{rk}^B \neq 0}{\implies}$

$x_k = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j - \frac{1}{y_{rk}^B} x_r \overset{(12)}{=} \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j - \frac{y_{rr}^B}{y_{rk}^B} x_r \overset{(3)}{\implies}$

$$x_k = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j. \tag{14}$$

$k \in \widetilde{\mathcal{B}} \overset{(6)}{\implies} x_k = \overline{x}_k^{\widetilde{B}} - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} y_{kj}^{\widetilde{B}} x_j \overset{(14)}{\implies}$

$$\overline{x}_k^{\widetilde{B}} = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B}, \tag{15}$$

$$y_{kj}^{\widetilde{B}} = \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B}, \forall j = \overline{1, n}. \tag{16}$$

(15) şi (16) sunt formulele de schimbare a bazei corezpunzătoare regulii ”linia pivotului se împarte la pivot”.
Fie $i \in \widetilde{\mathcal{B}} \setminus \{k\} \overset{(2)}{\implies} i \in \mathcal{B} \setminus \{r\} \overset{(4)}{\implies}$

$x_i = \overline{x}_i^B - \sum_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} y_{ij}^B x_j - y_{ik}^B x_k \overset{(14)}{=} \overline{x}_i^B - \sum_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} y_{ij}^B x_j - y_{ik}^B \left(\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j \right) \overset{(3),\,(13)}{\implies}$

$x_i = \left(\overline{x}_i^B - \frac{y_{ik}^B \overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} \right) - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} \left(y_{ij}^B - \frac{y_{ik}^B y_{rj}^B}{y_{rk}^B} \right) x_j \overset{(6)}{\implies}$

$$\overline{x}_i^{\widetilde{B}} = \overline{x}_i^B - \frac{\overline{x}_r^B y_{ik}^B}{y_{rk}^B}, \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}, \tag{17}$$

$$y_{ij}^{\widetilde{B}} = y_{ij}^B - \frac{y_{ik}^B y_{rj}^B}{y_{rk}^B}, \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}, j \in \overline{1, n}. \tag{18}$$

$$(5),(14) \Longrightarrow z = \overline{z}^B - \sum_{j\in\mathcal{R}\setminus\{k\}} \left(z_j^B - c_j\right) x_j - \left(z_k^B - c_k\right) \left(\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum_{j\in\widetilde{\mathcal{R}}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j \right) \overset{r\in\mathcal{B},(11)}{\Longrightarrow}$$

$$z = \left(\overline{z}^B - \frac{\overline{x}_r^B\left(z_k^B - c_k\right)}{y_{rk}^B} \right) - \sum_{j\in\widetilde{\mathcal{R}}} \left(\left(z_j^B - c_j\right) - \frac{y_{rj}^B\left(z_k^B - c_k\right)}{y_{rk}^B} \right) x_j \overset{(7)}{\Longrightarrow}$$

$$\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \frac{\overline{x}_r^B\left(z_k^B - c_k\right)}{y_{rk}^B}, \tag{19}$$

$$z_j^{\widetilde{B}} - c_j = \left(z_j^B - c_j\right) - \frac{y_{rj}^B\left(z_k^B - c_k\right)}{y_{rk}^B}, \forall j \in \overline{1,n}. \tag{20}$$

(17), (18), (19) şi (20) sunt formulele de schimbare a bazei corespunzătoare regulii dreptunghiului.

1.3 Tabelul simplex

Primul tabel:

			c_1	...	c_j	...	c_n
	VB	VVB	x_1	...	x_j	...	x_n
c_B	x^B	$\overline{x}^B$	y_1^B	...	y_j^B	...	y_n^B
	z	$\overline{z}^B$	$z_1^B - c_1$	...	$z_j^B - c_j$	...	$z_n^B - c_n$

"VB" este prescurtare de la "variabile de bază".
"VVB" este prescurtare de la "valorile variabilelor de bază".
Coloanele variabilelor de bază sunt vectori unitari cu 1 pe linia variabilei respective şi 0 în rest.
$z_j^B - c_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$.
$\overline{x}^B = B^{-1}b$ (îl ştim de când am verificat că B este primal admisibilă).
$y_j^B = B^{-1}a_j, \forall j \in \mathcal{R}$.
$\overline{z}^B = c_B^T\overline{x}^B$ (produs scalar).
$z_j^B - c_j = c_B^T y_j^B - c_j, \forall j \in \mathcal{R}$.
Tabelul pentru baza B:

VB	VVB	...	x_j	...	x_k	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
x_i	$\overline{x}_i^B$	...	y_{ij}^B	...	y_{ik}^B	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
x_r	$\overline{x}_r^B$	...	y_{rj}^B	...	$\boxed{y_{rk}^B}$	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
z	$\overline{z}^B$	...	$z_j^B - c_j$	...	$z_k^B - c_k$	...

y_{rk}^B se numeşte pivot.

Linia lui x_r se numeşte linia pivotului.
Coloana lui x_k se numeşte coloana pivotului.
Pentru baza $\widetilde{B}$, obţinută din B înlocuind a^r cu a^k, pe coloana VB, în locul lui x_r apare x_k:

VB	VVB	...	x_j	...	x_k	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
x_i	$\overline{x}_i^{\widetilde{B}}$	...	$y_{ij}^{\widetilde{B}}$	...	0	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
x_k	$\overline{x}_k^{\widetilde{B}}$	...	$y_{kj}^{\widetilde{B}}$	...	1	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
z	$\overline{z}^{\widetilde{B}}$	...	$z_j^{\widetilde{B}} - c_j$	...	0	...

Coloana pivotului devine vector unitar.
Coloanele celorlalte variabile de bază rămân vectori unitari.
Linia pivotului se împarte la pivot.
Pentru celelalte elemente:
Regula dreptunghiului:
Se formează un dreptunghi având în vârfurile unei diagonale valoarea de calculat şi pivotul.
noua valoare $=$ vechea valoare $- \frac{\text{produsul elementelor din vârfurile celeilalte diagonale}}{\text{pivot}}$.

2 Seminar 3

1) Să se rezolve cu algoritmul simplex primal:

$$\begin{cases} \inf\left(-x_1 - 2x_2\right) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}.$$

Rezolvare.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \left(a^3, a^4\right) = I_2$ (matricea unitate de ordinul 2) $\Longrightarrow$
$B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \geq 0 \Longrightarrow B$ primal admisibilă.

$\mathcal{B} = \{3, 4\}\,; \mathcal{R} = \{1, 2\}\,.$

Pe coloana VB (variabile de bază) sunt variabilele corespunzătoare coloanelor bazei, în ordinea în care acestea sunt în bază, apoi z.

Coloanele variabilelor de bază (aici x_3 şi x_4) sunt vectori unitari, cu 1 pe linia variabilei respective şi 0 în rest.

Pe coloana VVB (valorile variabilelor de bază) sunt:

$\overline{x}^B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ (a fost calculat când am verificat că B este primal admisibilă);

$\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0.$

Pe coloanele variabilelor secundare sunt:

pe coloana lui x_1 :

$y_1^B = B^{-1}a^1 = I_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

$z_1^B - c_1 = c_B^T y_1^B - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) = 1;$

pe coloana lui x_2 :

$y_2^B = B^{-1}a^2 = I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

$z_2^B - c_2 = c_B^T y_2^B - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2) = 2.$

Deoarece $B = I_2$, elementele din tabelul simplex, exceptând linia z sunt coeficienţii problemei: pe coloana VVB sunt termenii liberi, iar pe coloana lui x_j sunt coeficienţii lui $x_j, \forall j \in \mathcal{R}$.

Pentru a calcula mai uşor $\overline{z}^B$ şi $z_j^B - c_j, j \in \mathcal{R}$, la primul tabel simplex se scrie în stânga c_B şi deasupra lui x_j, c_j. Se face produsul scalar dintre c_B şi vectorul de pe coloana respectivă şi se scade ce este deasupra.

			-1	-2		
c_B	VB	VVB	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4
0	$\leftarrow x_3$	4	-1	$\boxed{1}$	1	0
0	x_4	8	1	1	0	1
	z	0	1	2	0	0

Testul de optim: $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$ nu e îndeplinit deoarece, de exemplu $z_1^B - c_1 = 1 \nleq 0$.

Testul de optim infinit: $\exists k \in \mathcal{R}$ a. î. $z_k^B - c_k > 0$ şi $y_k^B \leq 0$, nu e îndeplinit deoarece $y_1^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0$ şi $y_2^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0$.

Criteriul de intrare în bază: $k \in \mathcal{R}$ a. î.

$z_k^B - c_k = \max \left\{ z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0 \right\} \implies x_k$ intră în bază.

$\max \left\{ z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0 \right\} = \max \left(z_1^B - c_1, z_2^B - c_2 \right) = \max (1, 2) = 2 = z_2^B - c_2$ (atins pe coloana lui x_2) $\implies x_2$ intră în bază. Se face semn că x_2 intră în bază (o săgeată deasupra lui x_2).

Criteriul de ieşire din bază: $r \in \mathcal{B}$ a. î. $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \implies x_r$ iese din bază.

$\min\limits_{y_{i2}^B>0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{i2}^B} = \min\left(\frac{\overline{x}_3^B}{y_{32}^B}, \frac{\overline{x}_4^B}{y_{42}^B}\right) = \min\left(\frac{4}{1}, \frac{8}{1}\right) = 4 = \frac{\overline{x}_3^B}{y_{32}^B}$ (atins pe linia lui x_3) $\Longrightarrow$ x_3 iese din bază. Se face semn că x_3 iese din bază (o săgeată în stânga lui x_3 din coloana VVB).

Pivot: $y_{rk}^B = y_{32}^B = 1$. Se încercuieşte pivotul.

În noul tabel simplex:

Coloanele variabilelor de bază (x_2 şi x_4) sunt vectori unitari, cu 1 pe linia variabilei respective şi 0 în rest.

Linia pivotului se împarte la pivot.

Regula dreptunghiului: se formează un dreptunghi care are în vârfurile unei diagonale valoarea de calculat şi pivotul;

noua valoare = vechea valoare $-\frac{\text{produsul elementelor din vârfurile celeilalte diagonale}}{\text{pivot}}$.

Pe coloana VVB: $8 - \frac{4\cdot 1}{1}; 0 - \frac{4\cdot 2}{1}$; pe coloana lui $x_1 : 1 - \frac{(-1)\cdot 1}{1}; 1 - \frac{(-1)\cdot 2}{1}$; pe coloana lui $x_3 : 0 - \frac{1\cdot 1}{1}; 0 - \frac{1\cdot 2}{1}$.

VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
x_2	4	-1	1	1	0
$\leftarrow x_4$	4	$\boxed{2}$	0	-1	1
z	-8	3	0	-2	0

$z_1^B - c_1 = 3 \nleq 0 \Longrightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit.

$y_1^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \nleq 0, z_3^B - c_3 = -2 \ngtr 0 \Longrightarrow$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\max(3) = 3$ pe coloana lui $x_1 \Longrightarrow x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{4}{2}$ atins pe linia lui $x_4 \Longrightarrow x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	6	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	-14	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

$z_3^B - c_3 = -\frac{1}{2} \leq 0, z_4^B - c_4 = -\frac{3}{2} \leq 0 \Longrightarrow$ soluţie optimă este $x_1^* = 2, x_2^* = 6, x_3^* = 0, x_4^* = 0$, valoarea optimă este -14.

Metode de verificare:

1) baza este mereu primal admisibilă, adică valorile de pe coloana VVB, exceptând linia z sunt totdeauna ≥ 0:

$4, 8; 4, 4; 6, 2 \geq 0$;

2) valoarea funcţiei obiectiv $\overline{z}^B$ nu creşte de la un tabel la altul:

$0 \geq -8 \geq -14$;

3) soluţia de bază din orice tabel verifică ecuaţiile problemei:

$-0 + 0 + 4 = 4$;

$0 + 0 + 8 = 8$;

$-0+4+0=4;$
$0+4+4=8;$

$-2+6+0=4;$
$2+6+0=8;$
4) totdeauna pivotul este >0: $1,2>0$;
5) calculând funcţia obiectiv pentru soluţia de bază din orice tabel, obţinem valoarea $\overline{z}^B$ corespunzătoare:
$-0-2\cdot 0=0;$
$-0-2\cdot 4=-8;$
$-2-2\cdot 6=-14.$

2) Să se rezolve cu algoritmul simplex primal:

$$\begin{cases} \inf(-x_1) \\ -x_1+x_2+x_3=3 \\ -x_2+x_3+x_4=6 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,4} \end{cases}$$

Rezolvare.
Căutăm o bază primal admisibilă.
Fie $B=(a^3,a^4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
$det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1.$
$B^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$B^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$B^{-1}=\frac{1}{det(B)}B^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$B^{-1}b=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\geq 0 \implies B$ primal admisibilă.
$\overline{x}^B=B^{-1}b=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$y_1^B=B^{-1}a^1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$y_2^B=B^{-1}a^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

			-1	0		
c_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	3	-1	1	1	0
0	$\leftarrow x_4$	3	$\boxed{1}$	-2	0	1
	z	0	1	0	0	0

$z_1^B - c_1 = 1 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$y_1^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0$, $z_2^B - c_2 = 0 \ngtr 0 \implies$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\max(1) = 1$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{3}{1}$ atins pe linia lui $x_4 \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	6	0	-1	1	1
x_1	3	1	-2	0	1
z	-3	0	2	0	-1

$z_2^B - c_2 = 2 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$\exists 2 \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_2^B - c_2 = 2 > 0$ şi $y_2^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \leq 0 \implies$ testul de optim infinit este îndeplinit $\implies$ problema are optim infinit.