Interpolare polinomială

Pentru un set date $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n+1}}$, $x_i \neq x_j$, $\forall\, i \neq j$ $\Rightarrow \exists!\, P_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ a.î. $P_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{1,n+1}$.

→ Mai multe metode de construcție ale pol. de interpolare P_n

↳ Met. Naivă

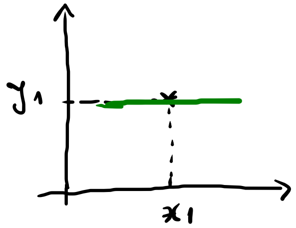
↳ Met. Lagrange: $x_i \rightsquigarrow L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, $\forall\, i = \overline{1,n+1}$.

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i L_i(x)$$

Obs. Pp. că se mai primește un nou set de date $(x_i, y_i)_{i=\overline{n+2,N+1}}$. Vrem să det. pol. $P_N(x)$ a.î. să interpoleze ambele seturi de date. Dacă am vrea să folosim met. Lagrange, ar trebui să det. $L_i(x)$, $i = \overline{n+2,N+1}$, și ar tr. să reconstruim $L_i(x)$, $i = \overline{1,n+1}$.

Ideea: Folosim metode recursive (în funcție de ce info avem)
- → Neville
- → Newton
  - → cu DD
  - → fără DD.

Met. Neville:



(x_1, y_1)
(x_2, y_2) $\rightarrow$ $P_{1,2}(x)$ interp. $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,2}}$
(x_3, y_3) $\rightarrow$ $P_{2,3}(x)$ interp $(x_i, y_i)_{i=\overline{2,3}}$
(x_4, y_4) $\rightarrow$ $P_{3,4}(x)$ interp $(x_i, y_i)_{i=\overline{3,4}}$
$\vdots$

$P_{1,2}, P_{2,3} \rightarrow P_{1,2,3}(x)$ interp. $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,3}}$

$P_{2,3}, P_{3,4} \rightarrow P_{2,3,4}(x)$ interp. $(x_i, y_i)_{i=\overline{2,4}}$

$P_{1,2,3}, P_{2,3,4} \rightarrow P_{1,2,3,4}(x)$

Q

y_1				
y_2	$P_{1,2}$			
y_3	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$		
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	
y_{n+1}				$P_{1,2,\dots n+1}$

$$Q_{i1} = y_i, \quad i = \overline{1,n+1}$$

$i = \overline{2,n+1}$, $j = \overline{2:i}$

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1}(x - x_{i-j+1}) - Q_{i-1,j-1}(x - x_i)}{x_i - x_{i-j+1}}$$

$$P = Q_{n+1,n+1}$$

Ip. x_i echidist. in $[a,b]$, $i = \overline{1,n+1}$.
$y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1,n+1}$.

Obs. Dacă adăugăm un punct (x_{n+2}, y_{n+2}), de fapt adăugăm și det. o nouă linie în matricea Q (folosind info din Q) pentru a det. pol. care interp. $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n+2}}$.

Ce facem dacă avem doar $Q_{n+1,n+1}$ (i.e. $P_{1,2,\dots,n+1}(x) = P_n(x)$)?

Pot det. P_{n+1} care interp. $\{(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n+2}}, (x_{n+2}, y_{n+2})\}$ folosind P_n?

Met. Newton: Da! Pentru P_n care interp $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ și punct adițional (x_{n+2}, y_{n+2}).

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + c_{n+1} \cdot \underbrace{(x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot (x-x_{n+1})}_{=:p(x)}$$

$$c_{n+1} \longrightarrow \frac{y_{n+2} - P_n(x_{n+2})}{p(x_{n+2})}$$

$i=\overline{1,n+1}$, $P_{n+1}(x_i) = P_n(x_i) = y_i$

$P_{n+1}(x_{n+2}) = y_{n+2}$

$P_0(x) = c_0 = y_1$

$P_1(x) = P_0(x) + c_1 \cdot (x - x_1)$, $\quad c_1 = \dfrac{x_2 - P_0(x_2)}{x_2 - x_1}$

$P_2(x) = P_1(x) + c_2 (x - x_1)(x - x_2)$, $\quad c_2 = \dfrac{x_3 - P_1(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$

$\vdots$

Met. Newton cu DD. (dif. div.)

$$q_n(x) = c_0 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)(x-x_2) + \dots + c_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

Coef. pot calc coef c_i folosind dif. divizate.

$(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n+1}}$, $y_i = f(x_i)$, $i=\overline{1,n+1}$.

$c_0 = f[x_1]$

$c_1 = f[x_1, x_2]$

$c_2 = f[x_1, x_2, x_3]$

$\vdots$

$f[x_1] = y_1$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$f[\underbrace{x_1, x_2}, \underbrace{x_2, x_3}] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$\vdots$

DD:

$f[x_1]$				
$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$			
$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		
$\vdots$			$\ddots$	
$f[x_{n+1}]$				$f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$

$DD_{i1} = y_i$, $i = \overline{1,n+1}$

$i = \overline{2,n+1}$, $j = \overline{2:i}$

$$DD_{ij} = \frac{DD_{i,j-1} - DD_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}$$

$c_i = DD_{ii}$