Curs 2

(Model Statistic) Numim model statistic (experiența statistică) un triplet $\xi = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$, Θ s.n. sp. parametrilor

Def (Eșantion aleator de volum n dintr-o populație) (talie)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate și Q o măsură de prob. pe $\mathbb{R}$. Numim eșantion aleator de volum n din populația Q asociat câmpului de prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un șir $X_1, X_2, \ldots X_n$ de v.a independente și de aceeași lege Q (rep. comună este măsura de prob Q: $\mathbb{P} \circ X_i^{-1} = Q$, $i = 1, 2, \ldots n$)

Notație: $X_1, X_2, \ldots X_n \sim Q$

Dacă Q admite densitate de rep, f, atunci putem scrie

$$X_1, X_2, \ldots X_n \sim f$$

Obiectivul: plecând de la eșantion să aflăm cât mai multe informații despre populație (Q)

Exp: $X = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ - vector aleator

$$\xi = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}) \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \to \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

$$\mathbb{P}_\theta = N(\mu, \sigma^2) \otimes N(\mu, \sigma^2) \otimes \ldots \otimes N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mathbb{P}_\theta \circ X^{-1}(A) = \int_A \underline{f}(x)\, dx$$

$\underline{f}(x) \to f_1(x_1) \times \ldots \times f_n(x_n)$

(T) (Existența șirurilor indep)

Fie $(\mu_n)_n$ șir de măsuri de prob. pe $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, fiecare ~~are~~ având suport finit. Atunci există un câmp de prob $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și un șir de v.a. $(X_n)_n$ independente a.î. rep lui X_n este μ_n.

Dem:

Ideea: a) Vrem să construim un șir $(X_n)_n$ indep rep $\mathcal{B}(1/2)$

$(\mu_n(\{0\}) = \mu_n(\{1\}) = 1/2)$

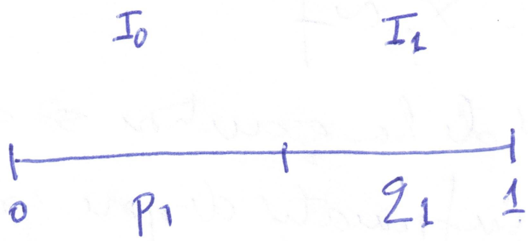
b) Putem construi un șir $(U_n)_n$ de v.a. indep rep. $\mathcal{U}([0,1])$

c) Putem construi pt cazul general

a)

Să presupunem că μ_n își concentrează masa în 0 și 1, considerăm $p_n = \mu_n(\{0\})$ și $q_n = 1 - p_n = \mu(\{1\})$.

Luăm $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ și $\mathbb{P}$ să fie măsura Lebesgue pe $[0,1]$ (λ)



$p_1 + q_1 = 1$

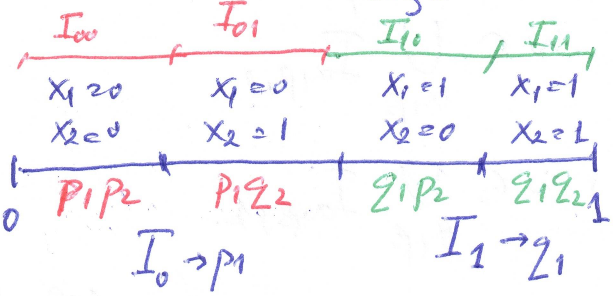
luăm I_0, I_1 subintervale de lung. p_1 resp q_1

Definim $X_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{pt } \omega \in I_0 \\ 1 & \text{pt } \omega \in I_1 \end{cases}$

$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \lambda(I_0) = p_1$

$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \lambda(I_1) = q_1$

$\Rightarrow X_1$ este rep precum μ_1.



Împărțim fiecare interval I_0 resp I_1 în câte 2 subintervale I_{00}, I_{01} și resp I_{10} și I_{11} de lungimi p_1p_2, p_1q_2 și resp. q_1p_2, q_1q_2

Definim v.a. X_2 prin

$$X_2 = \begin{cases} 0, & w\in I_{00}\cup I_{10} \\ 1, & w\in I_{01}\cup I_{11}\end{cases}$$

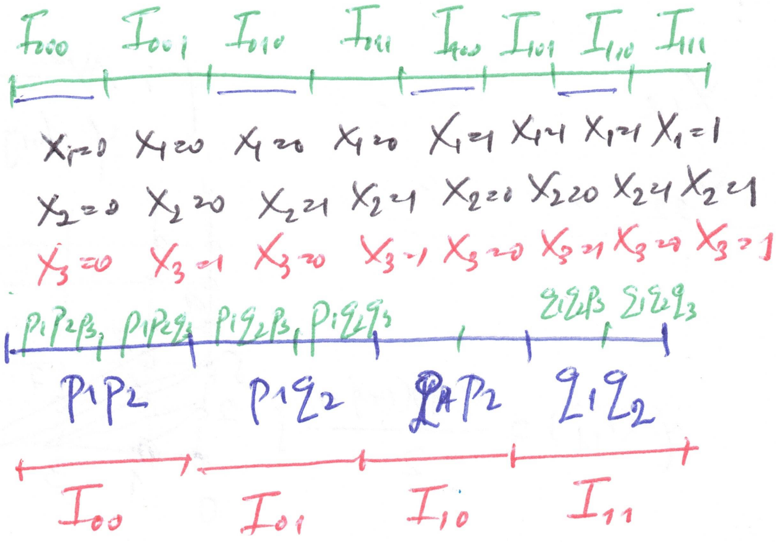
Observăm că $\mathbb{P}(X_2=0) = p_1p_2+q_1p_2 = p_2$

$\mathbb{P}(X_2=1) = q_2$

Mai mult, din construcție avem că $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

Pentru X_3: împărțim intervalele $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$ în câte 2 subintervale $I_{\alpha\beta 0}$, $I_{\alpha\beta 1}$, $\alpha,\beta\in\{0,1\}$

Lungimile lui $I_{\alpha\beta 0}$ și $I_{\alpha\beta 1}$ sunt $p_1^{1-\alpha}p_2^{1-\beta}p_3$, $p_1^{1-\alpha}p_2^{1-\beta}q_3$ cu notația $p_i^0=q_i$



Definim $X_3 = \begin{cases} 0, & \omega \in \bigcup\limits_{\alpha,\beta} I_{\alpha,\beta,0} \\ 1, & \omega \in \bigcup\limits_{\alpha,\beta} I_{\alpha,\beta,1}. \end{cases}$

$$\mathbb{P}(X_3=0) = \sum_{\alpha,\beta}{}' \lambda(I_{\alpha,\beta,0}) = \sum_{\alpha,\beta} p_1^{1-\alpha} p_2^{1-\alpha} p_3 = p_3$$

$$\mathbb{P}(X_3=1) = q_3$$

În plus, X_3 este indep de X_1 și X_2

Dem. continuă prin inducție.

Obs: Am arătat cum putem arunca cu o monedă echilibrată de maniera indep ($\mu_i(\{0\}) = \mu_i(\{1\}) = 1/2$)

b) Există un câmp de prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și un șir de v.a. $(U_n)_n$ independente a.î. $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$

Din rezultatul anterior (punctul a)) avem că există $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și un șir de v.a. $(X_n)_n$ indep, $X_n \in \{0,1\}$ cu

$$\mathbb{P}(X_n=0) = \mathbb{P}(X_n=1) = 1/2$$

Rearanjăm șirul $(X_n)_n$ sub forma unui tablou bidimensional:

$U_1 \leftarrow X_{11} \quad X_{12} \quad \dots$

$U_2 \leftarrow X_{21} \quad X_{22} \quad \dots$

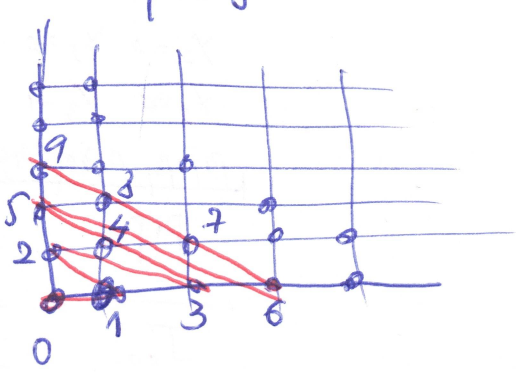
$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots$

$U_n \leftarrow$

$\vdots$

$\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
φ bij.

$$\varphi(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$$



Definim $U_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{nk}}{2^k}$ (seria este conv. pt că este absolut conv.)

Vrem să verificăm că $(U_n)_n$ sunt v.a indep. și că $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$

Pentru prop de independență folosim asociativitatea indep:

Reamintim:

Fie $\{\mathcal{F}_t, t\in T\}$ o familie de σ-alg indep. Fie S o mulț. de indici și să presupunem $s\in S$, $T_s \subset T$ și $\{T_s, s\in S\}$ o fam. de mulțimi disjuncte.

Dacă definim

$$\mathcal{F}_{T_s} = \sigma\Big(\bigcup_{t\in T_s}\mathcal{F}_t\Big) = \bigvee_{t\in T_s}\mathcal{F}_t$$

atunci $\{\mathcal{F}_{T_s}, s\in S\}$ este o fam. de σ-alg indep.

În cazul nostru, $(X_n)_n$ indep

$$\begin{array}{lll}
U_1 \leftarrow & X_{11}, X_{12}, \dots & \mathcal{F}_1 \\
U_2 \leftarrow & X_{21}, X_{22}, \dots & \mathcal{F}_2 \\
\vdots & \vdots & \\
U_n \leftarrow & X_{n1}, X_{n2}, \dots & \mathcal{F}_n \\
& \vdots &
\end{array}$$

$(U_n)_n$ este indep.

Vrem să verificăm că U_n este $\mathcal{U}([0,1])$

$$\mathbb{P}(U_n \le x) = x \quad , 0\le x<1$$

Considerăm șirul sumelor parțiale $S_{nk} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{ni}}{2^i}$

$$S_{nk} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{ni}}{2^i} \in \left\{0, \dots, j/2^k, \dots, \frac{2^k-1}{2^k}\right\}$$

$$\mathbb{P}(X_{n1}=x_1, X_{n2}=x_2, \dots X_{nk}=x_k) = \frac{1}{2^k}, \quad x_j \in \{0,1\}$$

Dacă $0 \le x < 1$ — câte elem. de forma $j/2^k$ sunt în $[0,x]$

$$\mathbb{P}(S_{nk} \le x) = ? \quad \frac{[x2^k]+1}{2^k}$$

$\Downarrow$

$0 \le j \le x \cdot 2^k$

$[x2^k]+1$

Cum $S_{nk}(\omega) \uparrow U_n(\omega)$, $k \to \infty$

atunci $\{S_{nk} \le x\} \downarrow \{U_n \le x\}$

$$\mathbb{P}(U_n \le x) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(S_{nk} \le x) = \lim_{k\to\infty} \frac{[x2^k]+1}{2^k} = x$$

$\Rightarrow U_n \sim \mathcal{U}[0,1]$

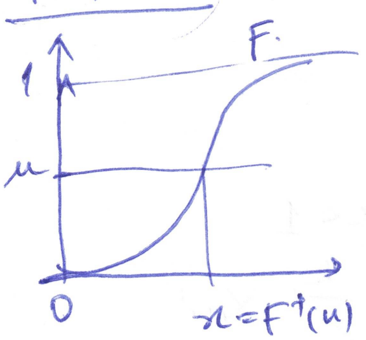
c) Cazul general

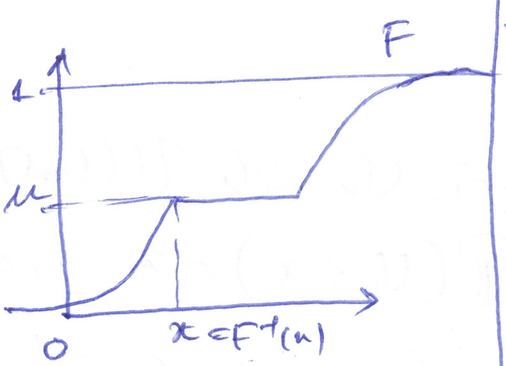
Def: (Funcția cuantilă)

Fie X o v.a. cu fct de rep F. Se numește fct cuantilă $F^{-1}: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \,/\, F(x) \ge u\}$$

$F(x) \ge u$





X v.a, $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Rep: $\mathbb{P} \circ X^{-1}(A) = \mathbb{P}(X \in A)$

Fct de rep: $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$

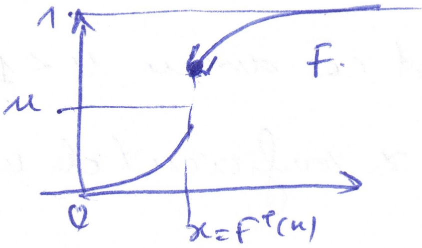
Prop: a) F crescătoare

b) F cont. la dreapta

$$\mathbb{P}(X = x_0) = F(x_0) - F(x_0-) = F(x_0) - \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} F(x)$$

c) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$



(T) (Teorema fund. a simulării)
(Universalitatea rep uniforme)

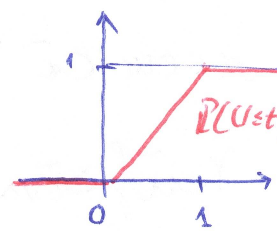
Fie X o v.a. cu fct de rep F și $U \sim \mathcal{U}(a$

atunci X și $F^{-1}(U)$ au aceeași rep.

Dem: Pentru simplitate vom considera că $U \sim \mathcal{U}[(0,1)]$ dar cum $\{0\}$ și $\{1\}$ sunt de măsură Lebesgue 0 aceasta este aceeași cu $\mathcal{U}[0,1]$.

Dacă $U \sim \mathcal{U}[(0,1)]$ atunci fct. de rep. a lui U este:

$$\mathbb{P}(U \le t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$



Cum pentru $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0,1)$ și luând $t = F(x)$ atunci avem că $\mathbb{P}(U \le F(x)) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ne propunem să arătăm că $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \le x) = \mathbb{P}(U \le F(x)) = F(x)$, $\forall x$

și pentru aceasta vom arăta că $\{F^{-1}(U) \le x\} = \{U \le F(x$

Pentru $u \in (0,1)$ definim

$I_u = \{x \in \mathbb{R} \mid u \le F(x)\}$ ceea ce înseamnă

că $F^{-1}(u) = \inf I_u$

Vom arăta că I_u este un interval de forma $[b, +\infty)$ unde

$b = \inf I_u = F^{-1}(u)$

Pentru început să observăm că $I_u \neq \emptyset$ pt că avem $u < 1$ și cum $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ deducem că pt x suficient de mare avem $F(x) > u$ (deci $x \in I_u$)

De asemenea, dacă $x \in I_u$ atunci pt $x' > x$ avem că $F(x') \geq F(x)$ și cum $F(x) \geq u \Rightarrow F(x') \geq u \Rightarrow x' \in I_u$

Astfel $[x, \infty) \subset I_u$, $\forall x \in I_u \rightarrow I_u$ este un interval de forma $[b, \infty)$ sau (b, ∞)

Să pp. că $b = -\infty \Rightarrow I_u = \mathbb{R}$ dar cum $u > 0$ și $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ avem că $F(x) < u$ pt $x \leq x_0 \Rightarrow x \notin I_u \rightarrow I_u \notin \mathbb{R} \Rightarrow b \in \mathbb{R}$

Verificăm că $I_u = [b, +\infty)$ pt $b \in \mathbb{R}$. Am văzut că dacă $x > b$ cu $x \in I_u$ atunci $F(x) \geq u$ astfel

$$F(x) \geq u, \ \forall x > b$$

Din continuitatea la dreapta a fct. de rep găsim că

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} F(x) \geq u \quad \text{cu} \quad \lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} F(x) = F(b) \text{ deci}$$

$F(b) \geq u \rightarrow b \in I_u \Rightarrow I_u = [b, +\infty)$

Am găsit că $I_u = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\} = [b, +\infty)$ prin urmare

$$F(x) \geq u \Leftrightarrow x \in I_u \Leftrightarrow x \geq b$$

dar $b = \inf I_u = F^{-1}(u) \Rightarrow \boxed{F(x) \geq u \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(u)}$ adică

$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x) \Rightarrow F^{-1}(U)$ și X au aceeași rep. ∎