CURS#5

II. Sisteme de ecuaţii liniare

(a) Rafinarea iterativă (metoda corecţiei reziduale). Vector eroare absolută, vector eroare reziduală.

(b) Metode iterative staţionare:

   (i) descompunerea aditivă a matricei sistemului;
   (ii) metoda Jacobi;
   (iii) metoda Gauss-Seidel.

(c) Norme matriciale induse de o normă vectorială. Număr de condiţionare al unei matrice.

(d) Analiza stabilităţii sistemelor de ecuaţii liniare.

II. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

PROBLEMA :

Date $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă și $\underline{b} = (b_j)_{j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$, să se determine $\underline{x} = (x_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$ a.î.

$$\boxed{A\underline{x} = \underline{b}} \qquad (1)$$

sau, echivalent :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Să se determine o soluție numerică (aproximație) $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ pt. (1).

1) RAFINAREA ITERATIVĂ

• <u>Datele problemei</u>:

$A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice inversabilă;

$\underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

• $\underline{x}^* := A^{-1}\underline{b}$ <u>soluția exactă</u> a sistemului liniar

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$

• $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ o <u>soluție numerică</u> a sist. (1), obținută printr-o <u>metodă directă</u>, eg metodele de eliminare Gauss, factorizările LU, PLU, Cholesky.

<u>DEFINIȚIE</u>:

Sn <u>vectorul eroare (absolută)</u> în $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\underline{e} := \underline{x}^* - \underline{x} \in \mathbb{R}^n} \qquad (2)$$

DEFINIȚIE:

Sn <u>vectorul reziduu</u> <u>(eroare reziduală)</u> în $\underline{x}$:

$$\boxed{\underline{r} := \underline{b} - A\underline{x} \in \mathbb{R}^n} \qquad (3)$$

OBSERVAȚII:

1) Vectorii $\underline{e}$ și $\underline{r}$ satisfac sistemul

$$\boxed{A\underline{e} = \underline{r}} \qquad (4)$$

<u>Dem</u>:

$$A\underline{e} = A(\underline{x}^* - \underline{x}) = A\underline{x}^* - A\underline{x} = \underline{b} - A\underline{x} = \underline{r}$$

$\square$

2) <u>Rafinarea iterativă</u>: o tehnică de îmbunătățire iterativă a acurateței soluției numerice a sistemului (1), obținute printr-o metodă directă,

prin rezolvarea succesivă a sist. (2).

ALGORITM (rafinarea iterativă):

Date: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă

$\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$\varepsilon > 0$ toleranța / acuratețea dorită

ITMAX nr. maxim de iterații

k=0 : $\underline{x}^{(k)} := \text{MetDirectă}(A, \underline{b})$;

$\underline{r}^{(k)} := \underline{b} - A\underline{x}^{(k)}$

while $(\|\underline{r}^{(k)}\| > \varepsilon \ \& \ k < \text{ITMAX})$

$\underline{z} := \text{MetDirectă}(A, \underline{r}^{(k)})$

$\underline{x}^{(k)} := \underline{x}^{(k)} + \underline{z}$

$\underline{r}^{(k)} := \underline{b} - A\underline{x}^{(k)}$

$k = k+1$

end

2) METODE ITERATIVE STAȚIONARE

- Datele problemei:

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice inversabilă;

$\underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

- $\underline{x}^* := A^{-1} b$ soluția exactă a sistemului liniar

$$\boxed{A\underline{x} = \underline{b}} \quad (1)$$

IDEEA: Descompunerea aditivă (matrix splitting) a matricei A:

$$\boxed{\begin{array}{l} A = N - P \\ N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inversabilă (ușor);} \\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ asigură convergența} \end{array}} \quad (2)$$

Din (1) și (2), obținem:

$$N\underline{x}^* = P\underline{x}^* + \underline{b} \implies \boxed{\underline{x}^* = N^{-1}P\underline{x}^* + N^{-1}\underline{b}} \quad (3)$$

Prin urmare, considerăm următoarea

metodă iterativă:

$$\boxed{\begin{aligned} & \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ & \underline{x}^{(k)} = N^{-1} P \underline{x}^{(k-1)} + N^{-1} \underline{b}, \quad k \geq 1 \end{aligned}} \qquad (4)$$

Din (4) și (2), rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(k)} &= N^{-1} P \underline{x}^{(k-1)} + N^{-1} \underline{b} \\ &= N^{-1}(N-A)\, \underline{x}^{(k-1)} + N^{-1} \underline{b} \\ &= N^{-1} N \underline{x}^{(k-1)} + N^{-1} \underline{b} - N^{-1} A \underline{x}^{(k-1)} \\ &= \underline{x}^{(k-1)} + N^{-1} \underbrace{\left(\underline{b} - A\underline{x}^{(k-1)}\right)}_{= \underline{r}^{(k-1)}} = \underline{x}^{(k-1)} + N^{-1} r^{(k-1)} \end{aligned}$$

Metoda iterativă (4) se poate rescrie ca

$$\boxed{\begin{aligned} & \underline{k=0}: \quad \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ & \qquad\quad \underline{r}^{(0)} := \underline{b} - A\underline{x}^{(0)} \\ & \underline{k \geq 1}: \quad \delta \underline{x}^{(k-1)}: \quad N(\delta \underline{x}^{(k-1)}) = \underline{r}^{(k-1)} \\ & \qquad\quad \underline{x}^{(k)} := \underline{x}^{k} + \boxed{\delta \underline{x}^{k-1}} \leftarrow \text{corecție a lui } \underline{x}^{(k)} \\ & \qquad\quad k = k+1 \longrightarrow \text{repetă „}k \geq 1\text{"} \end{aligned}} \qquad (5)$$

ANALIZA ERORII:

$$\underline{e}^{(k)} := \underline{x}^* - \underline{x}^{(k)}$$
$$= N^{-1}P\underline{x}^* + N^{-1}\underline{b} - \left(N^{-1}P\underline{x}^{(k-1)} + N^{-1}\underline{b}\right)$$
$$= N^{-1}P\underline{x}^* - N^{-1}P\underline{x}^{(k-1)}$$
$$= \underbrace{(N^{-1}P)}_{=:M} \underbrace{(\underline{x}^* - \underline{x}^{(k-1)})}_{=\underline{e}^{(k-1)}} = M\,\underline{e}^{(k-1)} =$$
$$= M^2\,\underline{e}^{(k-2)} = \ldots = M^k\,\underline{e}^{(0)}, \quad \forall k \geq 0$$

Am obținut:

$$\boxed{\underline{e}^{(k)} = M^{k}\,\underline{e}^{(0)}, \; k \geq 0; \quad M := N^{-1}P} \quad (6)$$

Vrem $\underline{e}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \underline{0} \in \mathbb{R}^n$, deci este suficient ca:

(i) $M^k \xrightarrow[k\to\infty]{} O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

(ii) $\|M\| < 1$, cu norma matriceală indusă de o normă vectorială.

CAZURI PARTICULARE:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & U \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ L & & & a_{nn} \end{bmatrix} \overset{not}{=:} L + D + U$$

$$D := \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

(1) METODA JACOBI:

$$\begin{cases} N = D \\ P = -(L+U) \end{cases}$$

(2) METODA GAUSS-SEIDEL:

$$\begin{cases} N = L + D \\ P = -U \end{cases}$$

<u>Ex</u>: Determinați explicit metodele iterative staționare Jacobi, resp. Gauss-Seidel.

3) NORME MATRICIALE INDUSE DE NORME VECTORIALE

DEFINIȚIE:

Fie $\|\cdot\|$ o normă vectorială pe $\mathbb{R}^n$.

Sn <u>normă matricială indusă de normă vectorială $\|\cdot\|$</u>:

$$\boxed{\|A\| := \sup_{\substack{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{x} \neq \underline{0}}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \quad (1)$$

OBSERVAȚII:

1) $\|A\| = \sup_{\|\underline{x}\| = 1} \|A\underline{x}\|, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (2)$

2) Fie $\underline{x} = (x_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$ și $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

Atunci

$$\|A\|_p := \sup_{\substack{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{x} \neq \underline{0}}} \frac{\|A\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p}, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \quad (3)$$

VECTOR	MATRICE
$\|\|\underline{x}\|\|_1 := \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$	$\|\|A\|\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} \|a_{ij}\|$
$\|\|\underline{x}\|\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2}$	$\|\|A\|\|_2^2 = \max_{\lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda$
$\|\|\underline{x}\|\|_\infty := \max_{i=\overline{1,n}} \|x_i\|$	$\|\|A\|\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$

DEFINIȚIE (număr de condiționare):

Șn <u>număr de condiționare</u> a lui $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversabilă

$$\boxed{\mathcal{K}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \qquad (4)$$

unde $\|\cdot\|$ este o normă matricială indusă de o normă vectorială pe $\mathbb{R}^n$.

OBSERVAȚII:

1) În general, $\varkappa_p(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$, unde $p \in \{1, 2, \infty\}$.

2) $\varkappa(A) \geq 1$

$$1 = \|I_n\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| =: \varkappa(A) \quad \square$$

3) $\varkappa(A)$ foarte mare $\Rightarrow$ A sn <u>rău condiționată</u>;

$\varkappa(A)$ "rezonabil" $\Rightarrow$ A sn <u>bine condiționată</u>

4) $\varkappa(A) = \varkappa(A^{-1})$

5) $\varkappa(\alpha A) = \varkappa(A)$

DEFINIȚIE (norma Frobenius):

$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ este o normă pe $M_n(\mathbb{R})$, numită <u>norma Frobenius</u>, ie norma euclidiană pe $\mathbb{R}^{n^2} \simeq M_n(\mathbb{R})$.

4) ANALIZA STABILITĂȚII SISTEMELOR LINIARE

Analizăm sensitivitatea soluției sistemului liniar

$$\boxed{A\underline{x} = \underline{b}} \qquad (1)$$

la variații ale datelor problemei, ie variații ale matricei sistemului, A, respectiv variații ale membrului drept, $\underline{b}$,

- analiza directă a stabilității

TEOREMA 1:

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ și $\underline{x}^* = A^{-1}\underline{b}$ soluția exactă a sistemului (1).

Dacă $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ este o soluție numerică pt (1), atunci

$$\boxed{\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|\underline{b} - A\underline{x}\|}{\|\underline{b}\|} \leq \frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\underline{b} - A\underline{x}\|}{\|\underline{b}\|}} \qquad (2)$$

Dem:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ A(\underline{x}^* - \underline{x}) = A\underline{x}^* - A\underline{x} = \underline{b} - A\underline{x} \implies \\ \quad \underline{x}^* - \underline{x} = A^{-1}(\underline{b} - A\underline{x}) \implies \\ \quad \|\underline{x}^* - \underline{x}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\underline{b} - A\underline{x}\| \\ \\ \bullet\ A\underline{x}^* = \underline{b} \implies \|\underline{b}\| \le \|A\| \cdot \|\underline{x}^*\| \end{array}\right\} \implies$$

$$\boxed{\frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|} \le \underbrace{\left(\|A\| \cdot \|A^{-1}\|\right)}_{=\kappa(A)} \frac{\|\underline{b} - A\underline{x}\|}{\|\underline{b}\|}}$$

$$\bullet\ \|\underline{b} - A\underline{x}\| \cdot \|\underline{x}^*\| = \|A\underline{x}^* - A\underline{x}\| \cdot \|A^{-1}\underline{b}\| \le$$

$$\le \|A\| \cdot \|\underline{x}^* - \underline{x}\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\underline{b}\|$$

$$= \kappa(A)\, \|\underline{x}^* - \underline{x}\| \cdot \|\underline{b}\| \implies$$

$$\boxed{\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|\underline{b} - A\underline{x}\|}{\|\underline{b}\|} \le \frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|}}$$

$\square$