Curs EDP - Ecuații cu derivate parțiale

Oleacu Claudiu

October 14, 2020

Cuprins

1 Cursul 1

Exemplu: $u = u(x,y); \dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ ecuație cu derivate parțiale (EDP).

Tipuri de EDP fundamentale studiate:

EDP
- *(1)* Ecuații de gradul I
  - Ecuația de transport
- *(2)* Ecuații de gradul al II-lea
  - Ecuația Laplace
  - Ecuația căldurii
  - Ecuația undelor

(1) - Putem integra ecuația, soluții date explicit.

(2) - Ce se întâmplă când soluția nu este dată explicit? Se folosește aparatul analizei funcționale, care inplică existența și unicitatea soluțiilor slabe.

1.1 Operatorul diferențial : D^α, D^k

Fie $u = u(x_1, \ldots, x_n) = u(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ deschis.

$$D^\alpha_{u(x)} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Unde : $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leftarrow$ multiindice, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \forall \alpha_i \in \mathbb{N}$.

Exemplu: $D^4_{u(x)} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial^2 x_1 \partial x_2 \partial x_3}$

$$D^k_{u(x)} = \left\{ \frac{\partial^k u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n} \middle| k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \right\}$$

Exemplu: $D^2_{u(x)} = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right\}, u = u(x_1, x_2)$ toate derivatele parțiale de ordin II.

Definiție 1.1. Printr-o EDP de ordin k înțelegem o expresie de forma :

$$F\Big(D^k_{u(x)}, D^{k-1}_{u(x)}, \dots, D_{u(x)}, u(x), x\Big) = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Exemplu: $\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \to F\Big(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\Big) = F(t, r, s, w) = t + rs = 0$

Observație. Ordinul unei ecuații este dat de ordinul maxim de derivare parțială.

Clasificarea EDP :

- EDP
  - Ecuații liniare
  - Ecuatii neliniare
    - Ecuații semiliniare
    - Ecuați cvasiliniare
    - Ecuații total neliniare

1.2 EDP liniare

Forma generală a unei EDP liniare de ordin $k \geq 1$ este:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$f \to$ funcție dată continuă
$a_\alpha(x) \to$ funcții continue

Exemplu: $n = 3, k = 2, f(x) = e^{x_1 x_2 x_3}, u = u(x_1, x_2, x_3)$

$$f(x) = e^{x_1 x_2 x_3} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + u$$

Observație. Ecuația 1 este liniară pentru că operatorul $L_u(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$ este liniar.

$$L_{u_1 + u_2}(x) = L_{u_1}(x) + L_{u_2}(x)$$

$$L_{\lambda u}(x) = \lambda L_u(x)$$

deoarece D^α este operator liniar.

Dacă $f \neq 0 \to$ ecuație liniară <u>neomogenă</u>, altfel ecuatie liniară <u>omogenă</u>.

1.3 EDP semiliniare

Forma generală a unei EDP semiliniare de ordin $k \geq 1$ este:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + F\Big(D^k_{u(x)}, D^{k-1}_{u(x)}, \ldots, D_{u(x)}, u(x), x\Big), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

$f \to$ funcție dată continuă
$a_\alpha(x) \to$ funcții continue

Observație. Termenii de ordin k sunt liniari.

Notații pentru derivatele parțiale:

- derivate de ordin I : $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}; u_{x_i}; \partial_{x_i} u; \partial_i u$
- derivate de ordin II : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; u_{x_i x_j}; \partial^2_{x_i x_j} u; \partial_{ij} u$

Exemplu : $u_{x_1} - u_{x_1 x_2} + u u_{x_2} = 0, u = u(x_1, x_2)$

1.4 EDP cvasiliniare

Forma generală a unei EDP cvasiliniare de ordin $k \geq 1$ este:

$$\sum_{|\alpha|=k} F\Big(D^{k-1}_{u(x)}, D^{k-2}_{u(x)}, \ldots, D_{u(x)}, u(x), x\Big) D^k_{u(x)} + G\Big(D^{k-1}_{u(x)}, D^{k-2}_{u(x)}, \ldots, D_{u(x)}, u(x), x\Big) = 0 \qquad (3)$$

$$, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Observație. Termenii de ordin k sunt aproape liniari.

Exemplu : $u_{x_1 x_1} + (u^2_{x_1} + u) u_{x_2 x_2} + sin(u) = 0$

2 Cursul 2

2.1 EDP de ordin I

Forma generală : $F(Du, u, x) = 0 \Longleftrightarrow F(u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Ne vom limta la cazul 2-dimensional pentru claritatea expunerii : $F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$.

2.1.1 Ecuații liniare cu coeficienți constanți

Forma generală : $a u_x(x, y) + b u_y(x, y) = f(x, y)$

(I) Dacă $f \neq 0$ ecuație liniară neomogenă

(II) Dacă $f = 0$ ecuație liniară omogenă

Cazul (I) : $\quad a u_x(x, y) + b u_y(x, y) = 0$
Considerăm următoarele : $x \to$ variabilă în spațiu, $y \xleftarrow{not} t \to$ variabilă în timp. Astfel avem următoarea ecuație :

$$b u_t(x, t) + a u_x(x, t) = 0; x \in \mathbb{R}, t > 0, a, b \in \mathbb{R}$$

Pentru a obține o unică soluție trebuie inpuse anumite condiții inițiale.

2.1.2 Ecuația de transport omogenă

Forma generală :

$$\begin{cases} bu_t(x,t) + au_x(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, a, b \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Observație. Operatorul gradient ∇

Fie f o funcție diferențiabilă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gradientul funcției f, notat ∇f, în punctul $p \in \mathbb{R}^n, p = (x_1, \ldots, x_n)$ este un vector care are ca și componente derivarele parțiale ale funcției f în punctul p.

$$\nabla f(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}$$

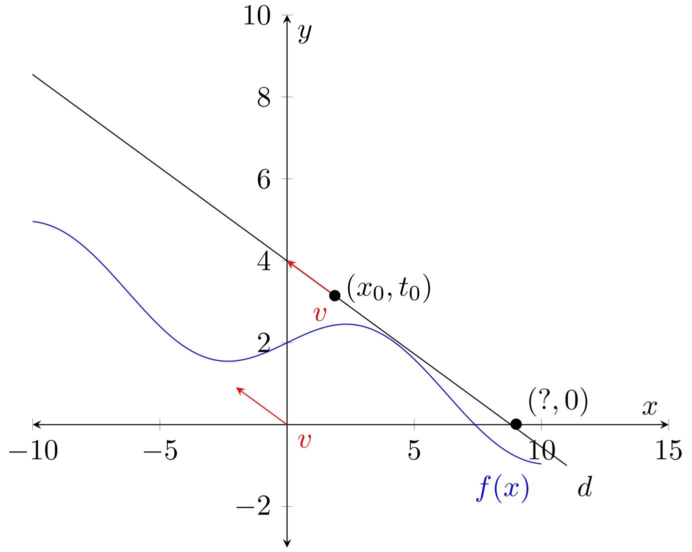
Gradientul este strâns legat de derivata (diferențiala) unei funcții, una reprezintă transpusa, și invers. Avem relația următoare, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, direcție oarecare :

$$(\partial f_p)(v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \nabla f(p) \cdot v$$

Rezolvarea ecuației de transport omogene : Metoda geometrică

$$bu_t(x,t) + au_x(x,t) = (b,a) \cdot (u_t(x,t), u_x(x,t)) = v \cdot \nabla u = 0, \text{ unde } v = (b,a) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = 0, \text{ ne folosim aici de observația de mai sus}$$

Astfel deducem că u este constantă pe direcția v, mai general, u este constantă pe orice dreaptă cu direcția $v = (b,a)$.



Considerăm un punct arbitrar $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Construim dreapta d cu direcția v astfel încât $(x_0, t_0) \in d$. Ne interesează să aflăm punctul de intersecție al dreptei d cu axa Ox.

$$d : \frac{x - x_0}{b} = \frac{t - t_0}{a} \xrightarrow{t=0} x = -\frac{bt_0}{a} + x_0 \Rightarrow ? = -\frac{bt_0}{a} + x_0 \Rightarrow$$

$$u(x_0,t_0) = u\left(-\frac{bt_0}{a} + x_0, 0\right) = f(-\frac{bt_0}{a} + x_0) \Rightarrow u(x,t) = f\left(-\frac{bt}{a} + x\right)$$

Interpretare geometrică

Ecuația se numește de transport pentru că soluția u se obține prin transportul/translatarea profilului inițial de-al lungul direcției v.