Metode iterative de punct fix

Def. x^* este punct fix pentru ϕ dacă $\phi(x^*) = x^*$.

Rez. $f(x) = 0$ $\rightsquigarrow$ det. punct fix $\phi(x) = x - f(x)$

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0.$$

Ideea: Pornind de la f, construiesc un ϕ "corespunzător" și apoi det. un pct fix pt. ϕ. + alte tipuri de ϕ.

Thm. $\phi : [a,b] \to [a,b]$ cont. $\Rightarrow \exists\, x^* \in [a,b]$ pct. fix pentru ϕ.

Dacă $\exists\, K \in (0,1)$

$|\phi'(x)| \leq K < 1 \quad \forall x \Rightarrow \exists!$ —"—

Mai mult, șirul $(x_n)_n$, $\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n) \\ x_0 \in [a,b] \end{cases}$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$.

$$|x^* - x_n| \leq K^n \, |x^* - x_0|$$

$x_n = \phi(x_{n-1})$

$x_0 \in [a, b]$

cu cât $K \ll 1$, cu atât șirul $(x_n)_n$ conv. mai repede la x^*.

i.e. în pas finit obținem o aproximare mai bună.

Caz particular al metodelor iterative de punct fix

↳ Metoda Newton Raphson

Rez. $\underline{f(x) = 0}$ ⟿ det. un pct. fix $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

i.e. $(*)\begin{cases} x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1}) \\ x_0 \end{cases}$

<u>Thm.</u> $f \in C^2[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Dacă $x^* \in [a,b]$ a.î. $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$

$\Longrightarrow \exists$ o vecinătate $[x^* - \delta, x^* + \delta]$, $\forall x_0 \in$

şirul (x_n) generat ca în $(*)$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$ sol. pt. $f(x) = 0$.

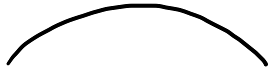
Obs. $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \Rightarrow x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$

Dar nu știu cât de mic e δ!

Cond. suficientă:

→ aleg un interval "bun": f cont, f schimbă semnul
$f', f'' \neq 0$

→ aleg un x_0 punct "bun": f  aleg x_0 a.î. $f(x_0) > 0$

f  aleg x_0 a.î. $f(x_0) < 0$.