CURS#6

II. Sisteme de ecuaţii liniare

(d) Analiza stabilităţii sistemelor de ecuaţii liniare:

- (i) perturbări ale membrului drept al sistemului de ecuaţii liniare.
- (ii) perturbări ale matricei sistemului de ecuaţii liniare;
- (iii) perturbări ale membrului drept şi ale matricei sistemului de ecuaţii liniare.

III. Interpolare polinomială

(a) Interpolarea Lagrange:

- (i) problema interpolării Lagrange;
- (ii) metoda naivă: algoritm;
- (iii) metoda lui Lagrange: polinoamele de bază (auxiliare) Lagrange; teorema de existenţă şi unicitate; teorema de estimare a erorii de interpolare; algoritm.

TEOREMA 2 (perturbarea membrului drept al sistemului):

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ și $\underline{x}^* := A^{-1}\underline{b}$ soluția exactă a sistemului (1).
Fie $\delta\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ o perturbație a lui $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ și $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ soluția sistemului perturbat, i.e

$$\boxed{A\underline{x} = \underline{b} + \delta\underline{b}} \qquad (3)$$

Atunci

$$\boxed{\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \leq \frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}} \qquad (4)$$

Dem:

- $A(\underline{x}^* - \underline{x}) = \underline{b} - (\underline{b} + \delta\underline{b}) = -\delta\underline{b} \Rightarrow$

  $\underline{x}^* - \underline{x} = A^{-1}(\delta\underline{b}) \Rightarrow$

  $\|\underline{x}^* - \underline{x}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta\underline{b}\|$ $\qquad (\alpha)$

- $A\underline{x}^* = \underline{b} \Rightarrow \|\underline{b}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}^*\| \Rightarrow$

  $\frac{1}{\|\underline{x}^*\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|\underline{b}\|}$ $\qquad (\beta)$

Din (α) și (β), rezultă

$$\boxed{\frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|} \le k(A) \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}} \qquad (\gamma)$$

- $A(\underline{x}^* - \underline{x}) = A\underline{x}^* - A\underline{x} = \underline{b} - (\underline{b} + \delta\underline{b}) = -\delta\underline{b}$

$\Rightarrow \|\delta\underline{b}\| \le \|A\| \cdot \|\underline{x}^* - \underline{x}\| \qquad (\delta)$

- $A\underline{x}^* = \underline{b} \Rightarrow \underline{x}^* = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow \|\underline{x}^*\| \le \|A^{-1}\| \, \|\underline{b}\|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\|\underline{b}\|} \le \|A^{-1}\| \dfrac{1}{\|\underline{x}^*\|} \qquad (\varepsilon)$

Din (δ) și (ε), obținem

$$\frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \le k(A) \frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{k(A)} \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \le \frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|}} \qquad (\varphi)$$

Relațiile (γ) și (φ) implică (4).

$\square$

TEOREMA 3 (perturbare a matricei sistemului):

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ și $\underline{x}^* := A^{-1}\underline{b}$ soluția exactă a sistemului (1).

Fie $\delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o perturbare a lui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $(A + \delta A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă și $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ soluția sistemului perturbat

$$\boxed{(A+\delta A)\,\underline{x} = \underline{b}} \qquad (5)$$

Atunci

$$\boxed{\frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \kappa(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \qquad (6)$$

Dem:

$$\left.\begin{aligned} A\underline{x}^* &= \underline{b} \\ (A+\delta A)\,\underline{x} &= \underline{b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(\underline{x}^* - \underline{x}) = (-\delta A)\,\underline{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x}^* - \underline{x} = A^{-1}(-\delta A)\,\underline{x} \Rightarrow$$

$$\|\underline{x}^* - \underline{x}\| \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{\kappa(A)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \|\underline{x}\| \Rightarrow (6) \qquad \square$$

OBSERVAȚIE:

În fapt, se poate demonstra relația

$$\boxed{\frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|} \leq k(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \left(1 + O(\|\delta A\|)\right)} \quad (7)$$

OBSERVAȚIE (perturbare a membrului drept și a matricei sistemului):

Fie sistemul perturbat

$$(A + \delta A)\, \underline{x} = \underline{b} + \delta \underline{b}$$

și presupunem că $(A + \delta A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă.

Cum $A\underline{x}^* = \underline{b}$, rezultă:

$$A\underline{x}^* - (A + \delta A)\, \underline{x} = -\delta \underline{b} \implies$$

$$(A + \delta A)(\underline{x}^* - \underline{x}) - (\delta A)\, \underline{x}^* = -\delta \underline{b} \implies$$

$$(A + \delta A)(\underline{x}^* - \underline{x}) = (\delta A)\, \underline{x}^* - \delta \underline{b} \implies$$

$$\underline{x}^* - \underline{x} = (A + \delta A)^{-1} \left((\delta A)\, \underline{x}^* - \delta \underline{b}\right) \implies$$

$$\|\underline{x}^* - \underline{x}\| \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \cdot \|(\delta A)\underline{x}^* - \delta \underline{b}\| \leq$$

$$\leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \cdot \left(\|(\delta A)\, \underline{x}^*\| + \|\delta \underline{b}\|\right) \leq$$

$$\leq \|(A+\delta A)^{-1}\| \left(\|\delta A\|\cdot\|\underline{x}^*\| + \|\delta \underline{b}\|\right)$$

$$= \|(A+\delta A)^{-1}\|\cdot\|\underline{x}^*\|\left(\|\delta A\| + \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{x}^*\|}\right)$$

$$= \|\underline{x}^*\|\cdot\|(A+\delta A)^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|A\|\cdot\|\underline{x}^*\|}\right)$$

$$\leq \|\underline{x}^*\|\cdot\|(A+\delta A)^{-1}\|\cdot\|A\|\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}\right)$$

$\uparrow$

$\|\underline{b}\| \leq \|A\|\cdot\|\underline{x}^*\|$

$$= \|\underline{x}^*\|\cdot \kappa(A)\,\frac{\|(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\cdot\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}\right)$$

Obținem, în condițiile Teoremelor 2-3:

$$\boxed{\frac{\|\underline{x}^*-\underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|} \leq \kappa(A)\,\frac{\|(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}\right)} \quad (8)$$

OBSERVAȚIE: Vrem, în (8), o majorare a termenului $\dfrac{\|(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}$!

LEMA (Banach):

Fie $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă a.î. $\|C\| < 1$.

Atunci:

(i) $I_n \pm C$ inversabilă;

(ii) $\|(I_n \pm C)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|C\|}$.

LEMA 1:

Fie $A, \delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabile a.î.

$$\|\delta A\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}. \quad (g)$$

Atunci:

(i) $A + \delta A$ inversabilă;

(ii) $\|(A+\delta A)^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|$.

Dem: $A + \delta A = [I_n + (\delta A) A^{-1}] A \Rightarrow$

Este suficient să arătăm că $I_n + (\delta A) A^{-1}$ este inversabilă.

Au loc relațiile:

$$\|(\delta A) A^{-1}\| \leq \|\delta A\| \cdot \|A^{-1}\| \overset{(9)}{\leq} \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \|A^{-1}\| = \frac{1}{2} < 1 \quad (*)$$

Cf lemei Banach:

(i) $\exists \left[I_n + (\delta A) A^{-1}\right]^{-1}$, deci $\exists (A+\delta A)^{-1}$;

(ii) $\left\| \left[I_n + (\delta A) A^{-1}\right]^{-1} \right\| \leq \dfrac{1}{1 - \|(\delta A) A^{-1}\|} \leq$

$$\leq \frac{1}{1 - \|\delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Prin urmare, obținem:

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| = \left\| \left(\left[I_n + (\delta A) A^{-1}\right] A \right)^{-1} \right\|$$

$$= \left\| A^{-1} \left[I_n + (\delta A) A^{-1}\right]^{-1} \right\|$$

$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \left\| \left[I_n + (\delta A) A^{-1}\right]^{-1} \right\| \leq 2\|A^{-1}\| \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\|(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq 2}$$

□

TEOREMA 4 (perturbări ale membrului drept și ale matricei sistemului):

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ și $\underline{x}^* := A^{-1}\underline{b}$ soluția exactă a sistemului (1).
Fie $\delta\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ o perturbare a lui $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ și $\delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o perturbare a lui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î.

$$\boxed{\|\delta A\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}} \qquad (10)$$

Fie $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ soluția sistemului perturbat

$$\boxed{(A+\delta A)\,\underline{x} = \underline{b} + \delta\underline{b}} \qquad (11)$$

Atunci:

$$\boxed{\frac{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|}{\|\underline{x}^*\|} \leq 2\,\kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}\right)} \qquad (12)$$

Dem: Rezultă din relațiile (8) − (11).

OBSERVAȚII:

1) Din Teorema 2 și $\kappa(A) \geq 1$, rezultă:

(i) Dacă A este <u>bine condiționată</u>, ie $\kappa(A)$ <u>mic</u> (rezonabil), atunci o mică perturbare $\delta \underline{b}$ a lui $\underline{b}$ implică o soluție numerică <u>acurată</u> $\underline{x}$.

(ii) Dacă A este <u>rău condiționată</u>, ie $\kappa(A)$ <u>mare</u>, atunci o mică perturbare $\delta \underline{b}$ a lui $\underline{b}$ <u>poate implica</u> o soluție numerică <u>inacurată</u> $\underline{x}$.

2) Din Teoremele 3 și 4 și $\kappa(A) \geq 1$, obținem concluzii similare.

III. INTERPOLARE POLINOMIALĂ

PROBLEMA INTERPOLĂRII

Considerăm mulțimea polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienți din $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_n := \left\{ P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R},\ j=\overline{0,n} \right\}$$

<u>**PROBLEMA**</u> (interpolarea Lagrange):

<u>Date</u> $n \in \mathbb{N}$ și setul de date/puncte

$$\mathcal{D} = \{(x_i, y_i) \mid i=\overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$$

unde $x_i \neq x_j$, $0 \le i < j \le n$, să se determine $P_n \in \mathbb{P}_n$ a.î.

$$\boxed{P_n(x_i) = y_i, \quad i=\overline{0,n}} \qquad (1)$$

P_n - <u>polinomul de interpolare Lagrange</u> de grad n asociat setului de date $\mathcal{D}$;

$x_i, i=\overline{0,n}$, sn <u>noduri de interpolare</u>

1) METODA NAIVĂ

Relația (1) reprezintă un sistem de $(n+1)$ ecuații liniare cu $(n+1)$ necunoscute a_j, $j=\overline{0,n}$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

Echivalent cu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{X \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\underline{a} \in \mathbb{R}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_n \end{bmatrix}}_{\underline{y} \in \mathbb{R}^{n+1}} \quad (2')$$

$$X \underline{a} = \underline{y} \quad (2'')$$

OBSERVAȚII:

1) Întrucât $x_i \neq x_j$, $0 \le i < j \le n$, sistemul liniar (2), (2') sau (2'') se rezolvă, în mod unic, cu regula lui Cramer:

$$\det X = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

$$X^{(k)} := \left(X_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=\overline{0,n}}, \quad X_{ij}^{(k)} = \begin{cases} X_{ij}, & j \neq k \\ y, & j = k \end{cases}$$

$$\boxed{a_k = \frac{\det X^{(k)}}{\det X}, \quad k = \overline{0,n}} \qquad (3)$$

2) # operații algebrice elementare $= O\left((n+1)^3\right)$

3) În cazul metodei naive, polinoamele de bază sunt cele date de baza canonică a lui $\mathbb{P}_n$: $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

2) METODA LUI LAGRANGE

LEMA 1 (polinoamele de bază Lagrange):

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists L_{n,k} \in \mathbb{P}_n$, $k=\overline{0,n}$:

$$L_{n,k}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i = x_k \\ 0, & x_i \neq x_k \end{cases} \qquad (4)$$

Dem:

$n=0$: $L_{0,0} \in \mathbb{P}_0$

$$L_{0,0}(x) = 1$$

$n \geq 1$:

$$\boxed{L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}} \qquad (5)$$

$L_{n,k} \in \mathbb{P}_n$ și satisface relația (4)

□

CONSECINȚĂ: Polinomul Lagrange P_n este

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x)\, y_k} \qquad (6)$$

TEOREMA 1 (teorema de interpolare Lagrange):

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \mathcal{D} = \{(x_i, y_i) \mid i = \overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$

a.î. $x_i \neq x_j$, $0 \leq i < j \leq n$,

$$\boxed{\exists!\, P_n \in \mathbb{P}_n : \quad P_n(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,n}} \quad (7)$$

Dem:

$n=0$: Evident! $P_0(x) \equiv y_0$

$n \geq 1$:

EXISTENȚA: din Lema 1.

UNICITATEA:

Fie $P_n, Q_n \in \mathbb{P}_n$ a.î. $P_n \neq Q_n$ și

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}$$

$\Rightarrow P_n - Q_n \in \mathbb{P}_n$ & $(P_n - Q_n)(x_i) = 0$, $i = \overline{0,n}$

$\Rightarrow P_n - Q_n \equiv 0 \Rightarrow P_n = Q_n$ Abs

$\square$

TEOREMA 2 (estimarea erorii):

Fie $n \geq 0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_i \in [a,b]$, $i=\overline{0,n}$, $\mathcal{D} = \{(x_i, f(x_i)) \mid i=\overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$, $x_i \neq x_j$, $0 \leq i < j \leq n$.

Atunci

$$\boxed{\begin{gathered}\forall x \in [a,b],\ \exists\, \xi = \xi(x) \in [a,b]: \\ f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, \pi_{n+1}(x)\end{gathered}} \quad (8)$$

unde $\pi_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n+1} (x - x_i) \in \mathbb{P}_{n+1}$.

Are loc <u>estimarea erorii de interpolare</u>:

$$\boxed{|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\, |\pi_{n+1}(x)|,\ \forall x \in [a,b]} \quad (9)$$

$$M := \max_{y \in [a,b]} |f^{(n+1)}(y)| = \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Dem:

Cazul I: $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Relația (8) devine $0 = 0$ ✓

Cazul II: $x \in [a,b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \pi_{n+1}(t),$$
$\forall t \in [a,b]$

$\Rightarrow \varphi(x_i) = 0,\ i = \overline{0,n}$ & $\varphi(x) = 0 \Rightarrow$

φ are $(n+2)$ zerouri distincte în $[a,b]$,

$x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \equiv x \xRightarrow[\text{Rolle}]{}$

φ' are $(n+1)$ zerouri distincte, între

cele $(n+2)$ zerouri ale lui $\varphi \xRightarrow[\text{Rolle}]{} \dots$

$\varphi^{(n+1)}$ are un zerou între cele două

zerouri ale lui $\varphi^{(n)}$:

$\exists\ \xi = \xi(x) \in [a,b]$ a.î. $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \varphi(t) \Big|_{t=\xi}$$

$$= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[f(t) - P_n(t) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \pi_{n+1}(t) \right] \Big|_{t=\xi}$$

$$= \left[f^{(n+1)}(t) - 0 - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)! \right] \Big|_{t=\xi}$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)! \quad \Rightarrow$$

$\exists\ \xi = \xi(x) \in [a,b]$ a.î.

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) \quad \checkmark$$

Estimarea erorii de interpolare se obține din (8) și ipoteza $f \in C^{(n+1)}[a,b]$. □

OBSERVAȚIE: În cazul metodei Lagrange, polinoamele de bază Lagrange $L_{n,k}(x)$, $k = \overline{0,n}$, sunt baza lui $\mathbb{P}_n$.