→ Metoda Newton - Raphson : Rez $f(x) = 0$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu ipotezele uzuale

sol. x^*

$$(*) \begin{cases} x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1}) \\ x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \end{cases}$$

x^* ← răd. <u>simplă</u> pentru f

$$(x_n)_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$$

conv. <u>pătratică</u>

<u>Obs</u>: Dacă x^* este răd. multiplă, atunci $(x_n)_n$ <u>nu</u> conv. neapărat pătratic la x^*.

<u>Q</u>: Pot modifica $(*)$ astfel încât să recuperez conv. pătratică?
Da!

- Dacă se cunoaște ordinul de multiplicitate m

$$(*') \quad x_n = x_{n-1} - m \cdot f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1})$$

• Dacă <u>nu</u> se cunoaște ordinul de multiplicitate

$$(*'') \quad x_n = x_{n-1} - \frac{\mu(x_{n-1})}{\mu'(x_{n-1})}$$

$$\mu = \frac{f}{f'} \Rightarrow \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\frac{f}{f'}}{\left(\frac{f}{f'}\right)'} = \frac{\frac{f}{f'}}{\frac{(f')^2 - f \cdot f''}{(f')^2}} = \frac{f \cdot f'}{(f')^2 - f \cdot f''}$$

<u>**Obs**</u>: f, f', f''

<u>Recapitulare</u>: Am văzut cum putem modifica alg. Newton-Raphson a.î. să recuperăm conv. (cel puțin) pătratică și în cazul în care vrem să aproximăm rădăcini care sunt multiple.

Rez. $f(x) = 0$ $\rightsquigarrow$ Det. unui punct fix pentru $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}$

$g \neq 0$.

(f, ϕ cu ipotezele uzuale) $(**)$ $\begin{cases} x_n = \phi(x_{n-1}) \\ x_0 \in (\ldots, \ldots) \end{cases}$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$ sol. pt. f

pct fix pt. ϕ

conv. (cel puțin) <u>liniară</u>.

<u>Q</u>: Pot modifica alg. $(**)$ a.î. să obțin un șir care conv. mai repede la x^*?

Da!

$(x_n)_n$: $\quad x_0, \underbrace{\phi(x_0)}_{x_1}, \underbrace{\phi(x_1)}_{x_2}, \underbrace{\phi(x_2)}_{x_3}, \dots$

<u>Tehnici de accelerare</u>: $(\hat{x}_n)_n$

$$A(a,b,c) = a - \frac{(a-b)^2}{(a-b)-(b-c)}$$

<u>Aitken</u>: $\quad x_0, \underbrace{\phi(x_0)}_{x_1}, \underbrace{\phi(x_1)}_{x_2}, \underbrace{A(x_2, x_1, x_0)}_{\hat{x}_3}, \underbrace{\phi(x_2)}_{x_3}, \underbrace{A(x_3, x_2, x_1)}_{\hat{x}_4}$

$\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4 \dots$

<u>Steffensen</u>: $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \underbrace{A(\hat{x}_2, \hat{x}_1, \hat{x}_0)}_{\hat{x}_3}, \underbrace{\phi(\hat{x}_3)}_{\hat{x}_4}, \underbrace{\phi(\hat{x}_4)}_{\hat{x}_5},$

$\underbrace{A(\hat{x}_5, \hat{x}_4, \hat{x}_3)}_{\hat{x}_6}, \dots$