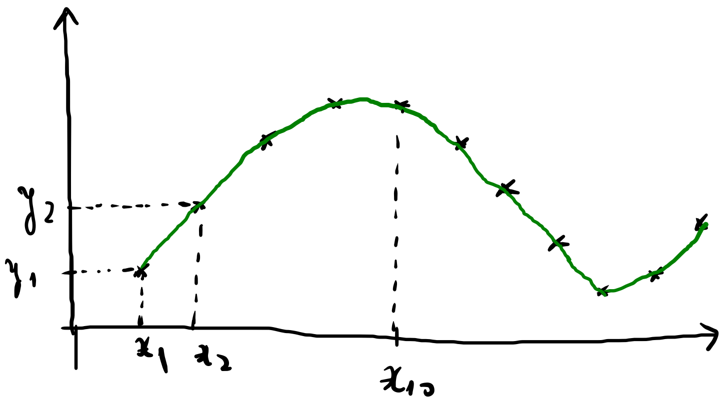
III. Interpolare polinomială: Pentru un set de date $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n+1}} \in \mathbb{R}^2$



Scopul: Să det. un polinom $P(x)$ care interpolează acest set de date, i.e.

$$P(x_i) = y_i, \quad i = \overline{1,n+1}$$

De ce? Pentru aproximarea unei funcții f cont. pe un $[a,b]$ care este dificil de evaluat; pentru recuperare de date sau predicție etc.

$$f \approx P \quad \Rightarrow \quad f' \approx P' = \text{polinom}, \quad \int f \approx \int P = \text{polinom}$$

Thm. Fie $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n+1}}$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$
$\Rightarrow \exists!$ un pol. de grad n $P_n(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ a.î. $P_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{1,n+1}$

· Fie $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n+1}} \in \mathbb{R}^2$. $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$P_n(x_i) = y_i \,, i=\overline{1,n+1} \iff P_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n = y_i \,, i=\overline{1,n+1}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{b} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ determin a

$\det(A) = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j)$ (A mat. Vandermonde)

$\neq 0 \iff x_i \neq x_j \,, i \neq j$.

În continuare, pp. x_i $n+1$ puncte echidistante în $[a, b]$.
$y_i = f(x_i)$.

Rez. sist. $(*)$ $\Rightarrow$ coef a_i, $i = \overline{0,n}$.

$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Obs. $Aa = b$ $\rightarrow$ rz. met. directe, met. iterative etc.
$\rightarrow$ regula Cramer.

$i = \overline{1, n+1}$ $\quad a_{i-1} = \dfrac{\det \tilde{A}_i}{\det A}$, $\tilde{A}_i$ = mat. A cu col. i înlocuită cu vect. col. b

Obs. Mat. A poate conține elem. $\ll 1$ și/sau $\gg 1$ $\Rightarrow$ cond$(A) \gg 1$.

ill-conditioned.

$\Rightarrow$ erori pentru aprox sol. a.

Q: Pot reformula pb. a.î. să **nu** ajung la un sist. de tip (*)?

Ans: Da!

Înainte am considerat baza $\{1, x, x^2, \dots x^n\}$ $\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Ideea: Schimb baza cu $\{L_1(x), L_2(x), \dots, L_{n+1}(x)\}$

$\hookrightarrow$ pol. de grad n → funcții de bază Lagrange.

$$x_i \rightsquigarrow L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = \overline{1, n+1}$$

$L_i(x_i) = 1$, $L_i(x_j) = 0$, $i \neq j$

$\Rightarrow$ sist. de ec. lin. la care se ajunge este $I \cdot y = y$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i L_i(x).$$