CURS#4

I. Ecuaţii neliniare

(g) Tehnici pentru ecuaţii neliniare cu rădăcini multiple:

(i) ordinul de multiplicitate cunoscut;
(ii) ordinul de multiplicitate necunoscut.

(h) Tehnici de accelerare a convergenţei metodelor iterative de punct fix:

(i) metoda lui Aitken;
(ii) metoda lui Steffensen.

6) TEHNICI PENTRU RĂDĂCINI MULTIPLE

DEFINIȚIE:

O rădăcină / soluție $x^* \in \mathbb{R}$ a ecuației $f(x) = 0$ s.n. rădăcină / soluție cu ordin de multiplicitate m dacă:

(i) $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x^*\}$, $\lim_{x \to x^*} g(x) \neq 0$.

TEOREMA (rădăcină cu ordin de multiplicitate m):

Fie $f \in C^m[a,b]$, $m \in \mathbb{N}$, $f(x^*) = 0$.

Atunci $x^* \in (a,b)$ are ordinul de multiplicitate $m \iff$

$$\begin{cases} f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0 \\ f^{(m)}(x^*) \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

PROBLEMA: Cum se comportă metoda Newton-Raphson pt rădăcini cu ordin de multiplicitate $m>1$?

$$x^* \in \mathbb{R} : \begin{cases} f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0 \\ f^{(m)}(x^*) \neq 0 \end{cases}$$

$$\phi_{NR} : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \phi_{NR}(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\phi_{NR}(x) = x - \frac{(x-x^*)^m g(x)}{[(x-x^*)^m g(x)]'}$$

$$= x - \frac{(x-x^*)^m g(x)}{m(x-x^*)^{m-1} g(x) + (x-x^*)^m g'(x)}$$

$$= x - (x-x)^* \frac{g(x)}{m\, g(x) + (x-x^*) g'(x)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi_{NR}(x) = x - (x-x^*) \frac{g(x)}{m g(x) + (x-x^*) g'(x)}} \quad (\phi)$$

- Evident, $\phi_{NE}(x^*) = x^*$ ✓
- $$\phi'_{NE}(x^*) = \frac{d}{dx}\left[x-(x-x^*)\frac{g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}\right]\Bigg|_{x=x^*}$$

$$= \left\{1-\frac{g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)} - \right.$$

$$\left. -(x-x^*)\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}\right]\right\}\Bigg|_{x=x^*}$$

$$= 1-\frac{g(x^*)}{mg(x^*)} = 1-\frac{1}{m} > 0, \quad \forall m>1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi'_{NE}(x^*) = 1-\frac{1}{m} > 0, \quad \forall m>1} \quad (3)$$

<u>CONSECINȚĂ</u>: Metoda Newton-Raphson pentru rădăcini de ordin $m>1$ are viteza de convergență <u>$r<2$</u>!

<u>PROBLEMA</u>: Cum regăsim viteza de conv. pătratică ($r=2$) în acest caz?

CAZUL I: $m>1$ cunoscut

$$\Phi_m : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \boxed{\Phi_m(x) = x - m\,\frac{f(x)}{f'(x)}} \quad (4)$$

$$\Phi_m(x) = x - m(x-x^*)\,\frac{g(x)}{m\,g(x) + (x-x^*)\,g'(x)}$$

• Evident $\Phi_m(x^*) = 0$ ✓

$$\bullet\ \Phi'_m(x^*) = \frac{d}{dx}\left[x - m(x-x^*)\,\frac{g(x)}{m\,g(x)+(x-x^*)\,g'(x)}\right]\Bigg|_{x=x^*}$$

$$= \Bigg\{1 - m\,\frac{g(x)}{m\,g(x) + (x-x^*)\,g(x)}$$

$$- m(x-x^*)\,\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{m\,g(x) + (x-x^*)\,g'(x)}\right]\Bigg\}\Bigg|_{x=x^*}$$

$$= 1 - m\,\frac{g(x^*)}{m\,g(x^*)} = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi'_m(x^*) = 0} \ ✓$$

CONSECINȚĂ: Metoda de punct fix asociată funcției de punct fix Φ_m (metoda Newton-Raphson modificată) converge către x^* cu viteza de conv pătratică $(r=2)$!

CAZUL II : $m>1$ <u>necunoscut</u>

$\tilde{\Phi} : [a,b] \to [a,b]$

$$\boxed{\tilde{\Phi}(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} \quad , \quad \mu(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}} \qquad (5)$$

- $\tilde{\Phi}(x^*) = x^* - \dfrac{\mu(x^*)}{\mu'(x^*)} = x^* - \dfrac{f(x^*)/f'(x^*)}{[f(x^*)/f'(x^*)]'} = x^*$

$\Rightarrow \underline{\tilde{\Phi}(x^*) = x^*}$ ✓

- $\tilde{\Phi}'(x^*) = \dfrac{d}{dx}\left[x - \dfrac{\mu(x)}{\mu'(x)}\right]\Bigg|_{x=x^*}$

$= \left[1 - \dfrac{\mu'(x)^2 - \mu(x)\mu''(x)}{\mu'(x)^2}\right]\Bigg|_{x=x^*}$

$= \left[1 - 1 + \dfrac{\mu(x)\,\mu''(x)}{\mu'(x)^2}\right]\Bigg|_{x=x^*}$

$= \dfrac{\mu(x)\,\mu''(x)}{\mu'(x)^2}\Bigg|_{x=x^*} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{\Phi}'(x^*) = 0} \Rightarrow$ Concluzie similară!

7) TEHNICI DE ACCELERARE A CONVERGENȚEI

PROBLEMA: Putem îmbunătăți viteza de convergență liniară a unei metode iterative de punct fix date de:

$\phi : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ fct. de punct fix

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_n = \phi(x_{n-1}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

• Cf teoremei de convergență, are loc

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|} = |\phi'(x^*)| =: \lambda \\ |\phi'(x^*)| < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ suficient de mare:} \\ x^* - x_n \simeq \lambda (x^* - x_{n-1}) \\ 0 < \lambda := |\phi'(x^*)| < 1 \end{array}} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow (1-\lambda)\, x^* \simeq x_n - \lambda\, x_{n-1} =$$

$$= (x_n - \lambda x_n) + (\lambda x_n - \lambda x_{n-1}) =$$

$$= (1-\lambda)\, x_n + \lambda (x_n - x_{n-1}) \implies$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N} \text{ suficient de mare:} \\ x^* \simeq x_n + \dfrac{\lambda}{1-\lambda}(x_n - x_{n-1}) \end{array}} \quad (2)$$

<u>formulă de extrapolare pt</u> $\{x_n, x_{n-1}, x^*\}$

<u>**OBSERVAȚIE**</u>:

Formula de extrapolare (2) presupune că atât x^*, cât și λ sunt cunoscute!

<u>**IDEEA**</u>:

În definiția lui $\lambda = \dfrac{x^* - x_n}{x^* - x_{n-1}}$,

înlocuiește erorile absolute $(x^* - x_n)$ și $(x^* - x_{n-1})$ cu valorile <u>incrementului</u> corespunzătoare celor două erori absolute, i.e. $(x_n - x_{n-1})$, respectiv $(x_{n-2} - x_{n-1})$:

$$\boxed{\lambda_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}, \quad \forall n \geq 2} \quad (3)$$

PROPOZIȚIA 1:

Șirul $\{\lambda_n\}_{n\geq 2}$, definit de relația (3), este convergent și

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda := \phi'(x^*)} \quad (4)$$

Dem:

$$\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = \frac{(x^* - x_{n-1}) - (x^* - x_n)}{(x^* - x_{n-2}) - (x^* - x_{n-1})}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{x^* - x_n}{x^* - x_{n-1}}}{\dfrac{x^* - x_{n-2}}{x^* - x_{n-1}} - 1} = \frac{1 - \dfrac{\phi(x^*) - \phi(x_{n-1})}{x^* - x_{n-1}}}{\dfrac{x^* - x_{n-2}}{\phi(x^*) - \phi(x_{n-2})} - 1}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\phi'(\xi_{n-1})(x^* - x_{n-1})}{x^* - x_{n-1}}}{\dfrac{x^* - x_{n-2}}{\phi'(\xi_{n-2})(x^* - x_{n-2})} - 1} = \frac{1 - \phi'(\xi_{n-1})}{\dfrac{1}{\phi'(\xi_{n-2})} - 1}$$

ξ_{n-1} între x_{n-1} și x^*;

ξ_{n-2} între x_{n-2} și x^*.

$$= \frac{1 - \phi'(\xi_{n-1})}{1 - \phi'(\xi_{n-2})} \phi'(\xi_{n-2}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \phi'(x^*) \qquad \square$$

<u>OBSERVAȚIE</u>:

În relația (1), folosim

$$\begin{cases} \hat{x}_n := x^* \\ \lambda_n := \lambda = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

și obținem <u>formula de extrapolare Aitken</u> pt $\{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$ care definește șirul aproximărilor $\{\hat{x}_n\}_{n\geq 2}$ date de <u>metoda lui Aitken</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_n &:= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}, \quad n \geq 2 \\ \hat{x}_n &:= x_n + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}} \qquad (5)$$

Relația (5) este echivalentă, în urma unor manipulări algebrice, cu:

$$\boxed{\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{(x_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2})}, \quad n \geq 2} \qquad (6)$$

<u>TEOREMA</u> (convergență):

Presupunem că șirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ dat de metoda iterativă de punct fix asociată funcției de punct fix ϕ:

$x_0 \in [a,b]$; $\quad x_n = \phi(x_{n-1}), \; n \geq 1$;

converge către x^* cu <u>viteza de convergență liniară</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^*-x_n}{x^*-x_{n-1}} = \lambda \in (0,1).$$

Atunci șirul $\{\hat{x}_n\}_{n\geq 2}$ al aproximărilor date de <u>metoda lui Aitken</u> converge către x^* cu <u>viteza de convergență pătratică</u>.

<u>Dem</u>:

1) $$\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{(x_n-x_{n-1})-(x_{n-1}-x_{n-2})}$$

$$= \frac{x_n(x_n-x_{n-1}) - x_n(x_{n-1}-x_{n-2}) - (x_n-x_{n-1})^2}{x_n-2x_{n-1}+x_{n-2}}$$

$$= \frac{(x_n-x_n+x_{n-1})(x_n-x_{n-1}) - x_n(x_{n-1}-x_{n-2})}{x_n-2x_{n-1}+x_{n-2}}$$

$$= \frac{x_{n-1}(\cancel{x_n}-x_{n-1}) - x_n(\cancel{x_{n-1}}-x_{n-2})}{x_n-2x_{n-1}+x_{n-2}}$$

$$= \frac{x_n x_{n-2} - (x_{n-1})^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$$

$$= \frac{x_{n-2}\,\phi(\phi(x_{n-2})) - \phi(x_{n-1})^2}{\phi(\phi(x_{n-2})) - 2\phi(x_{n-2}) + x_{n-2}} =: \phi_A(x_{n-2})$$

Am obținut funcția

$$\boxed{\begin{aligned} &\phi_A : [a,b] \longrightarrow [a,b] \\ &\phi_A(x) := \frac{x\,\phi(\phi(x)) - \phi(x)^2}{\phi(\phi(x)) - 2\phi(x) + x} \end{aligned}}$$

care definește iterația lui Aitken

$$\phi(\phi(x^*)) - 2\phi(x^*) + x^* =$$

$$= \phi(x^*) - 2x^* + x^* = x^* - x^* = 0$$

$$\phi_A(x^*) = \lim_{x \to x^*} \frac{x\,\phi(\phi(x)) - \phi(x)^2}{\phi(\phi(x)) - 2\phi(x) + x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

$$= \lim_{x \to x_A} \frac{\phi(\phi(x)) + x\,\phi'(\phi(x))\,\phi'(x) - 2\phi'(x)\,\phi(x)}{\phi'(\phi(x))\,\phi'(x) - 2\phi'(x) + 1}$$

$$= \frac{\phi(\phi(x^*)) + x^*\phi'(\phi(x^*))\phi'(x^*) - 2\phi'(x^*)\phi(x^*)}{\phi'(\phi(x^*))\phi'(x^*) - 2\phi'(x^*) + 1}$$

$$= \frac{\phi(x^*) + x^*\phi'(x^*)^2 - 2x^*\phi'(x^*)}{\phi'(x^*)^2 - 2\phi'(x^*) + 1}$$

$$= \frac{x^* - 2x^*\phi'(x^*) + x^*\phi'(x^*)^2}{(\phi'(x^*) - 1)^2}$$

$$= \frac{x^*(\phi'(x^*) - 1)^2}{(\phi'(x^*) - 1)^2} = x^* \Longrightarrow$$

$\boxed{\phi_A(x^*) = x^*}$, i.e x^* punct fix pt ϕ_A;

ϕ_A se poate prelungi prin continuitate în $x = x^*$.

2) Cf. teoremei de convergență pt funcțiile de punct fix

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^* - \hat{x}_n}{x^* - \hat{x}_{n-1}} = \phi_A'(x^*)$$

$$\phi_A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x(\phi \circ \phi) - \phi^2}{\phi \circ \phi - 2\phi + x}\right) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\phi\circ\phi) = \phi'\,(\phi'\circ\phi) \\[2ex] \dfrac{d}{dx}(\phi^2) = 2\phi\,\phi' \end{cases}$$

$$= \frac{1}{(\phi\circ\phi - 2\phi + x)^2}\Big[\big(x(\phi\circ\phi) - \phi^2\big)'(\phi\circ\phi - 2\phi + x) - \big(x(\phi\circ\phi) - \phi^2\big)(\phi\circ\phi - 2\phi + x)'\Big]$$

$$= \frac{1}{(\phi\circ\phi - 2\phi + x)^2}\times$$

$$\times\Big[\big(\phi\circ\phi + x\phi'(\phi'\circ\phi) - 2\phi\phi'\big)(\phi\circ\phi - 2\phi + x) - \big(x(\phi\circ\phi) - \phi^2\big)\big(\phi'(\phi'\circ\phi) - 2\phi' + 1\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{(\phi\circ\phi - 2\phi + x)^2}\times$$

$$\times\Big[(\phi\circ\phi)^2 + 2\phi(\phi\circ\phi) + \cancel{x(\phi\circ\phi)}$$

$$\cancel{+ x\,\phi'(\phi'\circ\phi)}(\phi\circ\phi) - 2x\,\phi\,\phi'(\phi'\circ\phi)$$

$$+ x^2\phi'(\phi\circ\phi) - 2\,\phi\phi'(\phi\circ\phi) + \underline{4\phi^2\phi'} - 2x\phi\phi'$$

$$-\cancel{x\phi'(\phi'\circ\phi)(\phi\circ\phi)}+x\,\phi'(\phi\circ\phi)\;-\cancel{x(\phi\circ\phi)}$$

$$+\;\phi^2\phi'(\phi'\circ\phi)\;\underline{-2\phi^2\phi'}+\phi^2\Big]$$

$$=\frac{1}{(\phi\circ\phi-2\phi+x)^2}\cdot\Big[(\phi\circ\phi)^2-2\phi(\phi\circ\phi)$$

$$-2x\phi\phi'(\phi'\circ\phi)+x^2\phi'(\phi'\circ\phi)-2\phi\phi'(\phi\circ\phi)$$

$$+2\phi^2\phi'-2x\phi\phi'+x\phi'(\phi\circ\phi)+\phi^2\phi'(\phi'\circ\phi)+\phi^2\Big]$$

OBSERVAȚIE:

Trebuie, mai întâi, demonstrat că

$\exists\,\phi_A'(x^*)$ pentru că

$$(\phi\circ\phi-2\phi+x)^2\Big|_{x=x^*}=\phi(\phi(x^*))-2\phi(x^*)+x^*$$

$$=\phi(x^*)-2x^*+x^*=x^*-x^*=0\;!$$

În final, se obține $\boxed{\phi_A'(x^*)=0}$, i.e.

metoda lui Aitken converge către x^*, cu viteza de convergență pătratică.

$\blacksquare$

ALGORITM (metoda lui Aitken):

Date: ϕ, a, b

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_n = \phi(x_{n-1}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$n \geq 2$: $\hat{x}_n = x_n - \dfrac{(x_n - x_{n-1})^2}{(x_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2})}$

$$= \frac{x_n x_{n-2} - (x_{n-1})^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$$

Alternativă: metoda lui Steffensen

ALGORITM (metoda lui Steffensen):

Date: ϕ, a, b

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_n = \phi(x_{n-1}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$\underline{n \geq 0}$:

$$\hat{x}_{3n} = \begin{cases} \in [a,b], & n = 0 \\ \hat{x}_{3n-1} - \dfrac{(\hat{x}_{3n-1} - \hat{x}_{3n-2})^2}{(\hat{x}_{3n-1} - \hat{x}_{3n-2}) - (\hat{x}_{3n-2} - \hat{x}_{3n-3})}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{x}_{3n+1} = \phi(\hat{x}_{3n})$$

$$\hat{x}_{3n+2} = \phi(\hat{x}_{3n+1})$$