Rudimente de probabilităţi

Fie S o mulţime finită nevidă ce se va numi spaţiu de modelare. O submulţime $A \subset S$ se numeşte eveniment al lui S iar un element $a \in S$ se numeşte eveniment elementar. S se numeşte evenimentul sigur iar $\emptyset$ se numeşte evenimentul nul. Fie $\mathcal{P}(S)$ mulţimea tuturor evenimentelor lui S.

Definiţia 1. *Se numeşte distribuţie a probabilităţii în S, o funcţie*

$$p : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$$

cu următoarele proprietăţi:

1. *$p(A) \geq 0$ pentru orice $A \subset S$.*
2. *$p(S) = 1$*
3. *Dacă $A, B \subset S$ sunt evenimente (mutual) exclusive, adică $A \cap B = \emptyset$, atunci:*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Dacă $A \subset S$ atunci $p(A)$ se numeşte probabilitatea lui A.
Avem următoarele consecinţe imediate:

1. $p(\emptyset) = 0$.
2. Dacă $A \subseteq B$ atunci $p(A) \leq p(B)$.
3. Pentru orice eveniment $A \subset S$ avem $p(S \setminus A) = 1 - p(A)$.
4. $p(A) \in [0, 1]$ pentru orice eveniment A.
5. Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$ sunt evenimente două câte două exclusive, atunci

$$p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i).$$

6. Deoarece S este finită, este suficient să definim distribuţia probabilităţii pe evenimente elementare. Astfel, pentru orice eveniment $A \subset S$, făcând notaţia $p(a) = p(\{a\})$, $a \in A$, avem $p(A) = \sum_{a \in A} p(a)$.

Exemplul 1. *Fie $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mulţimea feţelor unui zar şi două probabilităţi p, q definite pe A prin $p(a) = 1/6$ pentru orice $a \in A$ (adică zarul nu este măsluit) şi $q(a) = 1/9$ pentru $1 \leq a \leq 3$, $q(4) = q(5) = 1/6$, $q(6) = 1/3$. Probabilitatea ca la aruncarea zarului să apară un număr par, adică probabilitatea evenimentului $A = \{2, 4, 6\}$, este $p(A) = 1/2$ în cazul lui p, respectiv $q(A) = 1/9 + 1/6 + 1/3 = 11/18$ în cazul lui q.*

Definiţia 2. *Fie S este un spaţiu de modelare pe care este dată o distribuţie a probabilităţii p. Dacă $p(a) = \frac{1}{card(S)}$ pentru orice $a \in S$, p se numeşte distribuţia uniformă a probabilităţii.*

Definiţia 3. *Fie $A, B \subset S$ două evenimente ale lui S şi p o distribuţie a probabilităţii dată pe S. Dacă $p(B) > 0$, probabilitatea lui A condiţionată de (realizarea lui) B sau probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze în ipoteza că evenimentul B s-a întâmplat ($p(B) \neq 0$), este definită prin*

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Exemplul 2. *Considerăm din nou $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mulţimea feţelor unui zar şi probabilitatea p, definită pe S prin $p(a) = 1/6$ pentru orice $a \in S$ (distribuţia uniformă). Presupunem că am aruncat zarul de trei ori şi s-a obţinut $\{4, 5, 6\}$, deci evenimentul $B = \{4, 5, 6\}$ s-a întâmplat. Cu această presupunere, care este probabilitatea (condiţionată) ca să aruncăm un număr par? Cum $A = \{2, 4, 6\}$ iar B conţine două numere pare, avem: $p(A|B) = (2/6)/(3/6) = 2/3$.*

Definiţia 4. *Două evenimente se zic independente dacă $p(A \cap B) = p(A)p(B)$. Dacă A, B nu sunt independente ele se numesc dependente.*

Observaţia 1. *În ipoteza $p(B) \neq 0$, condiţia de independenţă este echivalentă cu $p(A|B) = p(A)$.*

Teorema 1. *(Teorema lui Bayes) Dacă A, B sunt evenimente cu $p(A) > 0$, $p(B) > 0$ atunci*

$$p(B)p(A|B) = p(A)p(B|A).$$

Demonstraţie: Din definiţie avem $p(A|B)p(B) = p(A \cap B)$ şi $p(B|A)p(A) = p(A \cap B)$. Aceasta implică aserţiunea din lemă.■