CURS#3

I. Ecuaţii neliniare

(e) Metoda secantei:

  (i) algoritm;
  (ii) interpretare geometrică;
  (iii) teorema de convergenţă/viteză de convergenţă;
  (iv) analiza erorii;
  (v) caracterizare.

(f) Metoda punctului fals (*regula falsi*):

  (i) algoritm;
  (ii) interpretare geometrică;
  (iii) caracterizare.

4) METODA SECANTEI

Considerăm, din nou, ecuația neliniară:

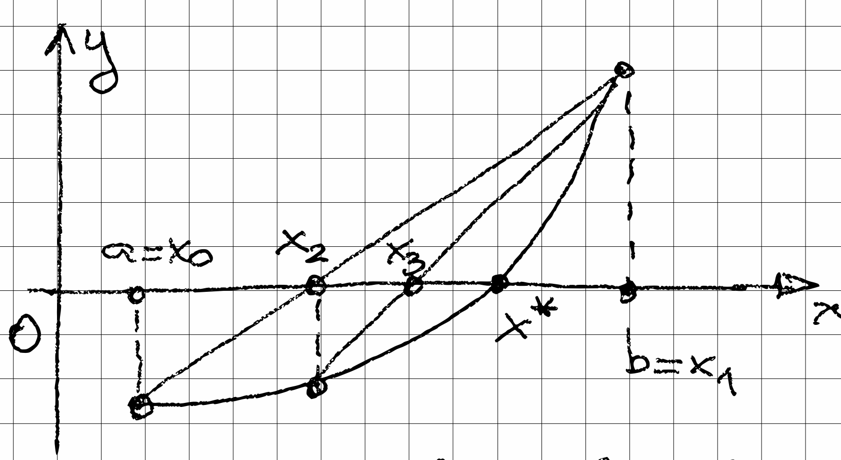
$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x)=0 \qquad (1)$$

unde $f \in C[a,b]$ și $f(a)f(b)<0$.

IDEEA: Aproximarea derivatei din metoda Newton-Raphson prin formula cu diferențe divizate, ie

$$f'(x_{n-1}) \simeq \frac{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}{x_{n-1}-x_{n-2}}, \quad n \geq 2$$

INTERPRETARE GEOMETRICĂ:



Tangenta la grafic în $(x_{n-1}, f(x_{n-1})) \simeq$ coarda secante $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$.

ALGORITM (metoda secantei):

Date: f, a, b

x_0 și x_1 sunt date

(e.g. $x_0 = a$ și $x_1 = b$ sau invers)

$n \geq 2$: $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \dfrac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$

$n = n+1$

repeat step "$n \geq 2$"

~~TEOREMA~~ (convergență & viteza de conv):

Fie $f \in C^2[a,b]$ a.î. $f(a) f(b) < 0$.

Dacă $x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*) = 0$ și $f'(x^*) \neq 0$, atunci $\exists\, \delta > 0$ a.î. șirul aproximărilor definite de metoda secantei:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in [x^* - \delta,\ x^* + \delta] \\ x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \dfrac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}, \ n \geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

converge către x^* cu viteza de conv.

$$r = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1{,}62$$

ANALIZA ERORII

Fie $x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*)=0$, i.e. soluția exactă.

$e_n := x^* - x_n$

$$= x^* - x_{n-1} + f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

$$= \frac{1}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \Big[x^* f(x_{n-1}) - x^* f(x_{n-2})$$

$$- \cancel{x_{n-1} f(x_{n-1})} + x_{n-1} f(x_{n-2}) + \cancel{x_{n-1} f(x_{n-1})}$$

$$- x_{n-2} f(x_{n-1}) \Big]$$

$$= \frac{1}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \Big[(x^* - x_{n-2}) f(x_{n-1}) - (x^* - x_{n-1}) f(x_{n-2}) \Big]$$

$$= \frac{1}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \left[e_{n-2} f(x_{n-1}) - e_{n-1} f(x_{n-2}) \right]$$

$$= \frac{e_{n-1} e_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \left[\frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} - \frac{f(x_{n-2})}{e_{n-2}} \right]$$

$$= e_{n-1} e_{n-2} \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \cdot \frac{\frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} - \frac{f(x_{n-2})}{e_{n-2}}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

$$= - e_{n-1} e_{n-2} \frac{f[x_{n-2}, x^*, x_{n-1}]}{f[x_{n-1}, x_{n-2}]} \Rightarrow$$

Am obținut:

$$\boxed{e_n = - e_{n-1} e_{n-2} \frac{f[x_{n-1}, x^*, x_{n-2}]}{f[x_{n-1}, x_{n-2}]}} \quad (3)$$

<u>OBSERVAȚIE</u>: Are loc identitatea

$$-f[x_{n-2}, x^*, x_{n-1}] = \frac{\frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} - \frac{f(x_{n-2})}{e_{n-2}}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \quad (4)$$

<u>Dem</u>: Ex!

Din teorema lui Lagrange, rezultă:

- $f[x_{n-1}, x_{n-2}] = f'(\xi_{n-1}), \quad \xi_{n-1} \in [m_1, M_1]$

$$m_1 := \min\{x_{n-1}, x_{n-2}\} \quad (5)$$
$$M_1 := \max\{x_{n-1}, x_{n-2}\}$$

<u>Dem</u>: Ex!

• $f[x_{n-2}, x^*, x_{n-1}] = -\frac{1}{2} f''(\eta_{n-1})$, $\eta_{n-1} \in [m_2, M_2]$

$$m_2 := \min\{x_{n-1}, x_{n-2}, x^*\} \qquad (6)$$
$$M_2 := \max\{x_{n-1}, x_{n-2}, x^*\}$$

Dem: Ex!

• Astfel, obținem:

$$\boxed{\begin{gathered} e_n = -e_{n-1} e_{n-2} \frac{f''(\eta_{n-1})}{f'(\xi_{n-1})}, \\ \xi_{n-1} \in [m_1, M_1] \text{ și } \eta_{n-1} \in [m_2, M_2] \end{gathered}} \qquad (7)$$

<u>Dem</u> (teoremei de convergență):

$f' \in C^1[a,b]$ și $f'(x^*) \neq 0 \Rightarrow$

$\exists\, \varepsilon > 0: f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] =: I$

Fie $M := \dfrac{\max\limits_{x \in I} |f''(x)|}{2 \min\limits_{x \in I} |f'(x)|} > 0 \Rightarrow$

$\forall x_0, x_1 \in I: \quad |e_2| \le |e_1| \cdot |e_0| \cdot M$

$$M|e_2| \le (M|e_1|)(M|e_0|)$$

- Alegem $x_0, x_1 \in I$ a.î.

$$\delta := \max\{M|e_0|, M|e_1|\}$$
$$= M \max\{|e_0|, |e_1|\} < 1$$

Atunci

$$M|e_2| \le (M|e_1|)(M|e_0|) \le \delta^2 < \delta \Rightarrow$$

$$|e_2| < \frac{\delta}{M} = \max\{|e_0|, |e_1|\} \le \varepsilon \Rightarrow$$

$$\boxed{x_2 \in I := [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]}$$

Prin inducție după $n \ge 2$, se arată că

$$\boxed{x_n \in I := [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon], \ \forall n \ge 2}$$

- Știm că $M|e_0| \le \delta$ și $M|e_1| \le \delta$, cu $\delta \in (0,1)$. Arătăm că $M|e_n| \le \delta^{g_n}$, $\{g_n\}_{n \ge 0}$ este șirul lui Fibonacci.

$$r_0 := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$$

$$r_1 := \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}62$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} q_n = r_0 \simeq 1{,}62}$$

$\square$

OBSERVAȚIE:

Altă modalitate de demonstrare a vitezei de convergență:

Presupunem că

$\frac{|e_n|}{C|e_{n-1}|^r} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $r>0$ și $C>0 \Rightarrow$

$|e_n| \simeq C|e_{n-1}|^r$, pt $n>0$ suf. de mare $\Rightarrow$

$$\left.\begin{cases} |e_n| = C\,|e_{n-1}|^r \\ |e_{n-2}| = C^{-1/r}\,|e_{n-1}|^{1/r} \\ \text{Dar } |e_n| = |e_{n-1}|\cdot|e_{n-2}|\,\dfrac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$C\,|e_{n-1}|^{r} = M\,|e_{n-1}|\,C^{-1/r}\,|e_{n-1}|^{1/r} \Rightarrow$$

$$\underbrace{M^{-1}C^{1+1/r}}_{\in\mathbb{R}} = |e_{n-1}|^{1+\frac{1}{r}-r}, \ \forall n \text{ suf. de mare}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\frac{1}{r}-r=0 \iff r^2-r-1=0 \qquad r_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ M^{-1}C^{1+1/r}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1{,}62} \ \& \ \boxed{M=C^{1+1/r}}$$

$\square$

<u>OBSERVAȚII:</u>

1) <u>Cerințe</u> relativ mici:

- $f\in C[a,b]$ computațional;
- $f\in C^2[a,b]$ pt analiza numerică.

2) <u>Izolarea soluției</u>: nu se realizează în mod necesar.

3) Convergența șirului de aproximări către x^* se realizează în funcție de alegerea primelor două aproximări, x_0 și x_1!

4) Viteza de convergență:

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$$

5) Criteriu de oprire:

$$\boxed{\frac{|x_{n-1} - x_n|}{|x_{n-1}|} \leq \varepsilon} \quad \text{sau} \quad \boxed{|f(x_{n-1})| \leq \varepsilon}$$

5) METODA POZIȚIEI FALSE (REGULA FALSI)

IDEEA: Combinăm metoda bisecției (ie izolarea soluției) cu metoda secantei (viteză de convergență >1).

ALGORITM (metoda poziției false)

Date: f, a, b

$n=1$: $x_{n-1} = a$; $x_n = b$;

$n=2$: $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \dfrac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$

$n \geq 3$: $x := x_{n-1} - f(x_{n-1}) \dfrac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$

if $f(x) f(x_{n-1}) \leq 0$

$x_n = x$

else

$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \dfrac{x_{n-1} - x_{n-3}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-3})}$

end

$n = n+1$; repeat step "$n \geq 3$"

OBSERVAȚIE :

Metoda poziției false (regula falsi) are aceleași caracteristici ca metoda secantei, cu mențiunea că se realizează izolarea soluției (cf metodei bisecției).