Cercetări operaţionale 4

Cristian Niculescu

1 Curs 4

1.1 Determinarea unei baze primal admisibile. Metoda celor 2 faze (bazei artificiale)

Problema
$$\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ b \geq 0 \tag{1}$$
are soluţie admisibilă? Dacă da, să se determine o bază primal admisibilă.
Observaţie. Ipoteza $b \geq 0$ nu este restrictivă. Dacă nu este îndeplinită, se înmulţesc cu -1 ecuaţiile cu termeni liberi negativi.
Fie problema
$$\begin{cases} \inf\left(x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+m}\right) \\ Ax + x^a = b \\ x \geq 0,\ x^a \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$
unde $x^a = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$.
$x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ se numesc variabile artificiale.
Matricea problemei (2) este
$(A, I_m) \in \mathcal{M}_{m,m+n}(\mathbb{R}),\ rang(A, I_m) = m < m+n \implies$ problema (2) îndeplineşte condiţiile de la algoritmul simplex primal.
$\begin{cases} x = 0 \\ x^a = b \geq 0 \end{cases}$ este soluţie admisibilă pentru problema (2) şi este chiar soluţia de bază asociată bazei I_m, deoarece componentele ei nenule sunt asociate cu coloane ale lui $I_m \implies I_m$ este bază primal admisibilă pentru problema (2).
$x^a \geq 0 \implies x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+m} \geq 0 \implies$ funcţia obiectiv a problemei (2) este mărginită inferior de 0 pe domeniul admisibil

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \text{ problema (2) nu are optim infinit} \\ \text{problema (2) are soluţie admisibilă} \\ \text{problema (2) este de optimizare liniară} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ problema (2) are soluţie}$$

optimă.

Aplicăm algoritmul simplex primal pentru problema (2) plecând cu baza I_m şi presupunem că este convergent într-un număr finit de paşi $\Longrightarrow$ se obţine o soluţie optimă de bază $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{x}^a \end{pmatrix}$ pentru problema (2), asociată unei baze B.

Propoziţia 1. Dacă $\overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+2} + ... + \overline{x}_{n+m} > 0$, atunci problema (1) nu are soluţie admisibilă.

Demonstraţie. Reducere la absurd. Presupunem că problema (1) are soluţia admisibilă $\widetilde{x} \Longrightarrow \begin{cases} A\widetilde{x} = b \\ \widetilde{x} \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \widetilde{x} \\ x^a = 0 \end{cases}$ este soluţie admisibilă pentru problema (2), pentru care funcţia obiectiv este

$0 < \overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+2} + ... + \overline{x}_{n+m}$, contradicţie cu $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{x}^a \end{pmatrix}$ soluţie optimă pentru problema (2).

Propoziţia 2. Dacă $\overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+2} + ... + \overline{x}_{n+m} = 0$ şi
$\mathcal{B} \cap \{n+1, n+2, ..., n+m\} = \emptyset$ (adică nu sunt variabile artificiale în bază), atunci B este bază primal admisibilă pentru problema (1).

Demonstraţie. $\overline{x}_{n+i} \geq 0, \forall i = \overline{1,m}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{x}_{n+i} = 0 \Longrightarrow \overline{x}_{n+i} = 0, \forall i = \overline{1,m}$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \overline{x} \text{ este soluţie admisibilă pentru problema (1)} \\ \mathcal{B} \cap \{n+1, n+2, ..., n+m\} = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{x} \text{ este soluţie}$$

de bază pentru problema (1) asociată lui $B \Longrightarrow B$ este bază primal admisibilă pentru problema (1).

Propoziţia 3. Dacă $\overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+2} + ... + \overline{x}_{n+m} = 0$ şi
$\exists i_0 \in \mathcal{B} \cap \{n+1, n+2, ..., n+m\}$ astfel încât $y^B_{i_0 j} = 0, \forall j = \overline{1,n}$, atunci
a) $rangA \leq m - 1$;
b) ecuaţia $i_0 - n$ din sistemul $Ax = b$ este consecinţa celorlalte ecuaţii.

Demonstraţie.

a) $y^B_j = B^{-1}a^j \Longrightarrow a^j = By^B_j = \sum\limits_{i \in \mathcal{B}} a^i y^B_{ij} \overset{y^B_{i_0 j}=0}{=} \sum\limits_{i \in \mathcal{B} \setminus \{i_0\}} a^i y^B_{ij}, \forall j = \overline{1,n} \Longrightarrow$ toate coloanele lui A sunt combinaţii liniare de aceiaşi $m-1$ vectori $\Longrightarrow$ $rangA \leq m - 1$.

b) $\overline{x}_{n+i} \geq 0, \forall i = \overline{1,m}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{x}_{n+i} = 0 \Longrightarrow \overline{x}_{n+i} = 0, \forall i = \overline{1,m} \Longrightarrow \overline{x}^B_{i_0} = 0$.

$x_i = \overline{x}^B_i - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y^B_{ij} x_j, \forall i \in \mathcal{B} \overset{i_0 \in \mathcal{B}}{\Longrightarrow} x_{i_0} = \underbrace{\overline{x}^B_{i_0}}_{=0} - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y^B_{i_0 j} x_j$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{y^B_{i_0 j}=0, \forall j=\overline{1,n}}{\Longrightarrow} \quad x_{i_0} = - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \cap \{n+1,n+2,...,n+m\}} y^B_{i_0 j} x_j \\ \text{ecuaţia } i_0 - n \text{ din problema (2) este } a^T_{i_0-n} x + x_{i_0} = b_{i_0-n} \Longrightarrow x_{i_0} = b_{i_0-n} - a^T_{i_0-n} x \\ \text{analog } x_j = b_{j-n} - a^T_{j-n} x, \forall j \in \{n+1, n+2, ..., n+m\} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$b_{i_0-n} - a^T_{i_0-n} x = \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \cap \{n+1,n+2,...,n+m\}} y^B_{i_0 j} \left(b_{j-n} - a^T_{j-n} x\right) \Longrightarrow$ ecuaţia $i_0 - n$ din sistemul $Ax = b$ este consecinţă a celorlalte ecuaţii.

Metoda celor 2 faze sau a bazei artificiale

Faza I. Se rezolvă problema (2) cu algoritmul simplex primal, plecând cu baza I_m, obţinându-se soluţia optimă $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{x}^a \end{pmatrix}$ asociată bazei B.

1) $\overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+2} + ... + \overline{x}_{n+m} > 0 \Longrightarrow$ problema (1) nu are soluţie admisibilă.

2) $\overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+2} + ... + \overline{x}_{n+m} = 0, \mathcal{B} \cap \{n+1, n+2, ..., n+m\} = \emptyset \Longrightarrow B$ este bază primal admisibilă pentru problema (1).

3) $\overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+2} + ... + \overline{x}_{n+m} = 0,\ \mathcal{B} \cap \{n+1, n+2, ..., n+m\} \neq \emptyset$.

Dacă $\exists i \in \mathcal{B} \cap \{n+1, n+2, ..., n+m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $y^B_{ij} \neq 0$, se înlocuieşte în bază coloana a^i cu coloana a^j, obţinându-se o nouă bază B' şi soluţia de bază asociată este tot optimă pentru problema (2) (rezultă din formulele de schimbare a bazei, deoarece $\overline{x}^B_i = 0$, deci coloana VVB din tabelul simplex rămâne aceeaşi).

Se repetă aceste eliminări ale variabilelor artificiale din bază.

Fie B_1, baza obţinută la sfârşitul acestor eliminări.

Dacă $\mathcal{B}_1 \cap \{n+1, n+2, ..., n+m\} = \emptyset$, atunci B_1 este bază primal admisibilă pentru problema (1).

Dacă $\mathcal{B}_1 \cap \{n+1, n+2, ..., n+m\} = \{i_1, i_2, ..., i_p\}$, atunci $rang A = m - p$ şi ecuaţiile $i_1 - n, i_2 - n, ..., i_p - n$ sunt consecinţe ale celorlalte ecuaţii ale problemei (1). Se elimină liniile lui $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_p}$ din tabelul simplex. Fie B_2, matricea obţinută din B_1 eliminând liniile şi coloanele $i_1 - n, i_2 - n, ..., i_p - n \Longrightarrow B_2$ este matrice pătrată de ordin $m - p$ şi bază primal admisibilă pentru problema (1).

Faza a II-a. Se rezolvă problema (1) cu algoritmul simplex primal plecând cu baza primal admisibilă determinată la faza I.

Observaţii. 1) În practică se introduc variabile artificiale doar în ecuaţiile care nu conţin variabile care au coloane vectori unitari.

2) Primul tabel simplex de la faza a II-a se obţine din ultimul tabel simplex de la faza I eliminând coloanele variabilelor artificiale şi recalculând linia z în conformitate cu funcţia obiectiv a problemei (1).

2 Seminar 4

Să se rezolve cu metoda celor 2 faze (bazei artificiale):

$$1)\begin{cases} \inf(2x_1+3x_2) \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ -2x_1-x_3+x_4=-2 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,5} \end{cases}$$

Rezolvare.

Trebuie ca $b\geq 0$. Înmulţim ultima ecuaţie cu -1.

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{2x_1+3x_2}^{z}\right) \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ 2x_1+x_3-x_4=2 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,5} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Faza I

Introducem câte o variabilă artificială în fiecare ecuaţie care nu conţine o variabilă a cărei coloană în A e vector unitar.

Singura coloană vector unitar din A este a^5. Doar în ecuaţia în care apare x_5 nu introducem variabilă artificială. Funcţia obiectiv este suma variabilelor artificiale.

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{x_6+x_7+x_8}^{z'}\right) \\ x_1-x_2+x_3+x_6=1 \\ x_1+x_2-x_4+x_7=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ 2x_1+x_3-x_4+x_8=2 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,8} \end{cases}$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = I_4 = (a^6, a^7, a^5, a^8) \implies B^{-1}b = I_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$$

primal admisibilă.

Se rezolvă cu algoritmul simplex primal.

			0	0	0	0				
c'_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	$\leftarrow x_6$	1	$\boxed{1}$	-1	1	0	0	1	0	0
1	x_7	1	1	1	0	-1	0	0	1	0
0	x_5	1	1	-2	0	0	1	0	0	0
1	x_8	2	2	0	1	-1	0	0	0	1
	z'	4	4	0	2	-2	0	0	0	0

$z_1'^B - c_1' = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

Problema de la faza I nu poate avea optim infinit, deoarece valoarea minimă a funcţiei obiectiv pe domeniul admisibil e 0 ($x_{6,7,8} \geq 0$). La faza I nu mai facem testul de optim infinit.

$\max\{4, 2\} = 4$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\} = 1 \implies$ oricare din x_5, x_6, x_7, x_8 poate ieşi din bază, dar:

- nu putem trece la faza a II-a dacă nu au fost eliminate din bază toate variabilele artificiale; de aceea, alegerea lui x_5 să iasă din bază nu este economică;

- preferăm calcule cât mai uşoare; de aceea, preferăm să iasă x_6 sau x_7, cu pivotul 1, decât x_8, cu pivotul 2.

Alegem pe x_6 să iasă din bază.

Dacă avem 0 pe linia (respectiv coloana) pivotului, coloana (respectiv linia) corespunzătoare se copiază. Aici, coloana lui x_4 se copiază.

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	-1	1	0	0	1	0	0
$\leftarrow x_7$	0	0	$\boxed{2}$	-1	-1	0	-1	1	0
x_5	0	0	-1	-1	0	1	-1	0	0
x_8	0	0	2	-1	-1	0	-2	0	1
z'	0	0	4	-2	-2	0	-4	0	0

$z_2'^B - c_2' = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

Acest tabel arată că testul de optim este doar o condiţie suficientă de optim, dar nu şi necesară, deoarece valoarea funcţiei obiectiv este 0, minimul posibil.

$\max\{4\} = 4$ atins pe coloana lui $x_2 \implies x_2$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{0}{2}, \frac{0}{2}\right\} = 0 \implies$ oricare din x_7 şi x_8 poate ieşi din bază; alegem pe x_7.

Coloana VVB se copiază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_5	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_8	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1
z'	0	0	0	0	0	0	-2	-2	0

$z_j'^B - c_j' \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.

$\overline{z}'^B = 0 \implies$ problema iniţială are soluţie admisibilă.

Variabila artificială x_8 este de bază şi nu se poate înlocui cu o variabilă iniţială deoarece $y_{8j}^B = 0, j = \overline{1,5} \implies$ ecuaţia în care a fost introdus x_8 este consecinţă a celorlalte (într-adevăr, ecuaţia 4 este suma primelor 2 ecuaţii). O eliminăm din problemă şi eliminăm linia lui x_8 din tabel.

Faza a II-a

Primul tabel simplex de la faza a II-a se obţine din ultimul tabel simplex de la faza I eliminând coloanele variabilelor artificiale şi recalculând linia z în conformitate cu funcţia obiectiv iniţială.

					0	0	
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
3	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
0	x_5	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
	z	2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ soluţie optimă $x_1^* = 1, x_2^* = x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$, valoarea optimă 2.

$$2)\ \begin{cases} \inf\left(2x_1 + 3x_2\right) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 1 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases} .$$

Rezolvare.

Trebuie ca $b \geq 0$. Înmulţim ultima ecuaţie cu -1.

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{2x_1+3x_2}^{z}\right) \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ 2x_1+x_3-x_4=1 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,5} \end{cases}$$

Faza I

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{x_6+x_7+x_8}^{z'}\right) \\ x_1-x_2+x_3+x_6=1 \\ x_1+x_2-x_4+x_7=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ 2x_1+x_3-x_4+x_8=1 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,8} \end{cases}$$

$$B=I_4=(a^6,a^7,a^5,a^8) \implies B^{-1}b=I_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\geq 0 \implies B$$

primal admisibilă.

			0	0	0	0				
c'_B	VB	VVB	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	x_6	1	1	-1	1	0	0	1	0	0
1	x_7	1	1	1	0	-1	0	0	1	0
0	x_5	1	1	-2	0	0	1	0	0	0
1	$\leftarrow x_8$	1	$\boxed{2}$	0	1	-1	0	0	0	1
	z'	3	4	0	2	-2	0	0	0	0

$z_1'^B - c_1' = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.
$\max\{4,2\}=4$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$ atins pe linia lui $x_8 \implies x_8$ iese din bază.
Coloana lui x_2 se copiază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_6	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
x_7	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{1}{2}$	0	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
z'	1	0	0	0	0	0	0	0	-2

$z_j'^B - c_j' \leq 0, \forall j\in\mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.
$\overline{z}'^B = 1 > 0 \implies$ problema iniţială nu are soluţie admisibilă.

3) $\begin{cases} \inf(-x_1 - x_2) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$

Rezolvare.

$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$

Faza I

Deoarece $a^3 = e^1$, vector unitar, introducem o variabilă artificială doar în ecuaţia a 2-a.

$$\begin{cases} \inf \left(\overbrace{x_4}^{z'} \right) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$B = I_2 = (a^3, a^4) \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			0	0		
c'_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	4	1	-2	1	0
1	$\leftarrow x_4$	0	$\boxed{1}$	-1	0	1
	z'	0	1	-1	0	0

$z_1'^B - c_1' = 1 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

La faza I nu facem testul de optim infinit.

$\max\{1\} = 1$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{0}{1}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_4 \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	0	-1	1	-1
x_1	0	1	-1	0	1
z'	0	0	0	0	-1

$z_j'^B - c_j' \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.

$\overline{z}'^B = 0.$

Nu mai sunt variabile artificiale în bază.

Faza a II-a

				-1	
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3
0	x_3	4	0	-1	1
-1	x_1	0	1	-1	0
	z	0	0	2	0

$z_2^B - c_2 = 2 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$\exists 2 \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_2^B - c_2 = 2 > 0$ şi $y_2^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0 \implies$ problema are optim infinit.