Cercetări operaţionale 6

Cristian Niculescu

1 Curs 6

1.1 Mulţimea soluţiilor optime

Fie problema

$$\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \ rangA = m < n. \tag{1}$$

Reamintim:
$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ este domeniul admisibil.
$P^* = \{x^* \in P | c^T x^* = \inf\limits_{x \in P} c^T x\}$ este mulţimea soluţiilor optime.
Situaţii posibile:
1) $P = \emptyset \implies P^* = \emptyset$.
2) $P \neq \emptyset, \ \inf\limits_{x \in P} c^T x = -\infty \implies P^* = \emptyset$
3) $P^* \neq \emptyset$; algoritmul simplex primal dă o soluţie optimă de bază.
Propoziţia 1. Fie B bază primal admisibilă pentru problema (1) astfel încât $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Atunci $x \in P^* \iff x \in P$ şi $x_j\left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Demonstraţie. B primal admisibilă, $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \overset{\text{TO}}{\implies} \overline{z}^B$ este valoarea optimă.
$(\implies)$ $x \in P^* \implies x \in P$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in P^* \implies c^T x = \overline{z}^B \\ c^T x = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} x_j\left(z_j^B - c_j\right) \end{array}\right\} \implies \sum_{j \in \mathcal{R}} \underbrace{x_j}_{\geq 0} \underbrace{\left(z_j^B - c_j\right)}_{\leq 0} = 0 \implies$$

$x_j\left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
$(\impliedby) x_j\left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies c^T x = \overline{z}^B \overset{x \in P}{\implies} x \in P^*$.
Testul de unicitate. Fie B bază primal admisibilă pentru problema (1). Condiţia necesară şi suficientă pentru ca soluţia de bază asociată lui B să fie unica soluţie optimă este $z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R}$. Pentru necesitate se presupune

în plus că soluţia de bază este nedegenerată.
Demonstraţie. Necesitatea.
1) Arătăm că $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Reducere la absurd. Presupunem $\exists k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$.
Dacă $y_k^B \leq 0 \implies$ problema (1) are optim infinit $\implies P^* = \emptyset$, contradicţie.
Dacă $y_k^B \nleq 0 \implies B \to \widetilde{B}$ înlocuind o coloană a^r cu a^k. Noua valoare a funcţiei obiectiv este $\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \dfrac{\overbrace{(z_k^B - c_k)}^{>0}\overbrace{\overline{x}_r^B}^{>0}}{\underbrace{y_{rk}^B}_{>0}} < \overline{z}^B$, contradicţie cu $\overline{z}^B$ valoare optimă.
2) Arătăm că $z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Reducere la absurd. Presupunem $\exists k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k = 0$.
Fie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $x(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ definit astfel:

$$x_i(\alpha) = \begin{cases} \overline{x}_i^B - \alpha y_{ik}^B, i \in \mathcal{B} \\ \alpha, i = k \\ 0, i \in \mathcal{R} \setminus \{k\} \end{cases}$$

a) Dacă $y_k^B \leq 0 \implies x(\alpha) \in P, \forall \alpha \geq 0$ (din demonstraţia testului de optim infinit).
$x(\alpha)$ este distinctă de soluţia de bază asociată lui $B, \forall \alpha > 0$.
$c^T x(\alpha) = \overline{z}^B - \underbrace{(z_k^B - c_k)}_{=0} \alpha = \overline{z}^B \implies x(\alpha)$ este o altă soluţie optimă, contradicţie cu unicitatea soluţiei optime.
b) Dacă $y_k^B \nleq 0 \implies \alpha_0 = \min\limits_{i | y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} > 0$ (deoarece soluţia este nedegenerată) $\implies x(\alpha_0)$ este soluţie optimă distinctă de soluţia de bază asociată lui B, contradicţie cu unicitatea soluţiei optime. (Admisibilitatea lui $x(\alpha_0)$ s-a demonstrat la teorema de schimbare a bazei.)
Suficienţa.
$z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \overset{\text{TO}}{\implies}$ soluţia de bază asociată lui B este soluţie optimă.
Fie x^* soluţie optimă $\overset{\text{propoziţia 1}}{\implies}$
$x_j^* \underbrace{(z_j^B - c_j)}_{<0} = 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies x_j^* = 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ componentelor nenule ale lui x^* le corespund coloane ale lui $B \implies x^*$ este soluţia de bază asociată bazei $B \implies$ această soluţie de bază este unica soluţie optimă.

2 Seminar 6

1) Să se afle mulţimea soluţiilor optime:

$$\begin{cases} \inf\,(x_1+x_2) \\ 2x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1+x_2+x_4=3 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,4} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$B=(a^3,a^4)=I_2 \implies B^{-1}b=I_2\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			1	1		
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	2	1	1	0
0	x_4	3	3	1	0	1
	z	0	-1	-1	0	0

$z_j^B-c_j\leq 0, \forall j\in\mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.
$z_j^B-c_j< 0, \forall j\in\mathcal{R} \implies$ soluţia optimă este unică $\implies$
mulţimea soluţiilor optime este $P^*=\left\{(0,0,6,3)^T\right\}$, iar valoarea optimă este 0.

2) Să se afle mulţimea soluţiilor optime:

$$\begin{cases} \inf\,(-3x_1-x_2) \\ 2x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1+x_2+x_4=3 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,4} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$B=(a^3,a^4)=I_2 \implies B^{-1}b=I_2\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			-3	-1		
c_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	2	1	1	0
0	$\leftarrow x_4$	3	$\boxed{3}$	1	0	1
	z	0	3	1	0	0

$z_1^B-c_1=3\nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$y_1^B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \not\leq 0, y_2^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0 \implies$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\max(3,1) = 3 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{6}{2}, \frac{3}{3}\right) = 1 \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
z	-3	0	0	0	-1

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.

Testul de unicitate: $z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R}$.

$z_2^B - c_2 = 0, 2 \in \mathcal{R} \implies$ soluţia optimă nu este unică.

$\left.\begin{array}{l} B \text{ primal admisibilă} \\ z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \end{array}\right\} \implies$

x soluţie optimă

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \text{ soluţie admisibilă} \iff \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{array}\right. \\ x_j\left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R} \iff \left\{\begin{array}{l} x_2 \cdot 0 = 0 \\ x_4 \cdot (-1) = 0 \end{array}\right\} \iff x_4 = 0 \end{array}\right\} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \\ x_4 = 0 \end{array}\right.$$

$$x_1 = \lambda \geq 0 \implies \left\{\begin{array}{l} x_2 = 3 - 3\lambda \geq 0 \implies \lambda \leq 1 \\ x_3 = 6 - 2\lambda - (3 - 3\lambda) = \lambda + 3 \geq 0 \implies \lambda \geq -3 \end{array}\right\} \implies$$

mulţimea soluţiilor optime este $P^* = \left\{(\lambda, 3 - 3\lambda, \lambda + 3, 0)^T \,|\lambda \in [0,1]\right\}$, valoarea optimă este -3.

Această metodă se poate folosi mereu, spre deosebire de cea în care se determină toate soluţiile optime de bază şi se scrie mulţimea soluţiilor optime ca acoperirea convexă a mulţimii soluţiilor optime de bază, care se poate folosi numai când mulţimea soluţiilor optime e mărginită.

3) Să se afle mulţimea soluţiilor optime:

$$\left\{\begin{array}{l} \inf(x_1 - x_2 - x_3) \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,5} \end{array}\right.$$

$B = (a^3, a^5) = I_2 \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			1	-1		0	
c^B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_3	1	-1	1	1	1	0
0	x_5	1	-1	-1	0	0	1
	z	-1	0	0	0	-1	0

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.
$1 \in \mathcal{R}$ şi $z_1^B - c_1 = 0 \implies$ soluţia optimă nu este unică.
$x \in P^* \iff x \in P$ şi $x_j \left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R} \iff$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,5} \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x_1 \cdot 0 = 0 \\ x_2 \cdot 0 = 0 \\ x_4 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_4 = 0 \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3,5\} \end{cases}$$

$x_1 = \alpha \geq 0,\ x_2 = \beta \geq 0 \implies x_3 = \alpha - \beta + 1 \geq 0,\ x_5 = \alpha + \beta + 1 \geq 0$
$\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \implies \alpha + \beta + 1 \geq 0.$
$\implies$ mulţimea soluţiilor optime este
$P^* = \left\{(\alpha, \beta, \alpha - \beta + 1, 0, \alpha + \beta + 1)^T | \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha - \beta + 1 \geq 0\right\}$, iar valoarea optimă este -1.