Universitatea din Bucureşti 2020–2021
Facultatea de Matematică şi Informatică

Probleme Analiză Numerică
Matematică, Anul III

II. Sisteme de ecuaţii liniare

II.1. Fie $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, o matrice tridiagonală astfel încât

$$a_{ii} = 2, \quad i = \overline{1,n}\,; \qquad a_{i,\,i+1} = a_{i+1,\,i} = -1, \quad i = \overline{1,n-1}\,.$$

Considerăm vectorii $\mathbf{a}^{(j)} = (a_{1j}\, a_{2j}\, \ldots\, a_{nj})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,n}$, şi $\mathbf{v}^{(k)} = \left(v_1^{(k)}\, v_2^{(k)}\, \ldots\, v_n^{(k)}\right)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$, $k = \overline{1,n}$, ale cărui componente sunt definite prin

$$v_j^{(k)} = \begin{cases} j(n+1-k)\,, & j = \overline{1,k} \\ k(n+1-j)\,, & j = \overline{k+1,n}\,. \end{cases}$$

(a) Daţi definiţia normei matriciale $\|\cdot\|_\infty$ şi formula de calcul pentru aceasta. Calculaţi $\|\mathbf{A}\|_\infty$.
(b) Calculaţi produsul scalar $\left\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{a}^{(j)} \right\rangle_2$, $k, j = \overline{1,n}$.
(c) Folosind (b), determinaţi componentele matricei $\mathbf{A}^{-1}$ şi verificaţi că $\mathbf{A}^{-1}$ este simetrică.
(d) Determinaţi $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$ şi calculaţi $\kappa_\infty(\mathbf{A})$.

II.2. Fie $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, o matrice tridiagonală astfel încât

$$a_{ii} = 2, \quad i = \overline{1,n}\,; \qquad a_{i,\,i+1} = a_{i+1,\,i} = -1, \quad i = \overline{1,n-1}\,;$$

şi factorizarea LU a acesteia, i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$, unde $\mathbf{L} = \left(\ell_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\mathbf{U} = \left(u_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Arătaţi că

$$\ell_{i+1,\,i} = -\frac{i}{i+1}\,, \quad i = \overline{1,n-1}\,.$$

(b) Determinaţi u_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$.
(c) Calculaţi $\det(\mathbf{A})$.
(d) Presupunând că matricea tridiagonală $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, are singurele elemente nenule a_{ii}, $i = \overline{1,n}$, $a_{i,\,i+1}$, $i = \overline{1,n-1}$, şi $a_{i+1,\,i}$, $i = \overline{1,n-1}$, şi admite factorizarea LU fără pivotare, descrieţi algoritmul acestei factorizări adaptate matricei $\mathbf{A}$.

II.3. Fie $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Demonstraţi următoarele formule de calcul pentru normele matriciale induse de normele vectoriale $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ şi $\|\cdot\|_\infty$ pe $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,; \tag{1a}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})} \lambda\,; \tag{1b}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,. \tag{1c}$$

II.4. Fie $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Demonstraţi că au loc următoarele inegalităţi:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_\infty\,; \tag{2a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{A}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_1\,; \tag{2b}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 \leq n\,\|\mathbf{A}\|_1\|\mathbf{A}\|_\infty\,. \tag{2c}$$

II.5. ie $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Demonstraţi că

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \tag{3}$$

este o normă pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, denumită *norma Frobenius*.

II.6. Fie $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă.

Demonstraţi că au loc următoarele inegalităţi:

$$\frac{1}{n}\kappa_1(\mathbf{A}) \leq \kappa_2(\mathbf{A}) \leq n\kappa_1(\mathbf{A})\,; \tag{4a}$$

$$\frac{1}{n}\kappa_\infty(\mathbf{A}) \leq \kappa_2(\mathbf{A}) \leq n\kappa_\infty(\mathbf{A})\,; \tag{4b}$$

$$\frac{1}{n^2}\kappa_1(\mathbf{A}) \leq \kappa_\infty(\mathbf{A}) \leq n^2\kappa_1(\mathbf{A})\,, \tag{4c}$$

unde $\kappa_p(\mathbf{A})$, $p \in \big\{1, 2, \ldots, \infty\big\}$, este numărul de condiţionare al matricei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ în norma matricială $\|\cdot\|_p$.

II.7. (**Lema Banach**) Fie $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă astfel încât $\|\mathbf{C}\| < 1$. Atunci:

(i) $\mathbf{I}_n \pm \mathbf{C}$ este inversabilă;

(ii) $\|\big(\mathbf{I}_n \pm \mathbf{C}\big)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|\mathbf{C}\|}\,.$