I. Met. numerice pentru rez. <u>ec. neliniare</u> $f(x) = 0$

↳ met. iterative : i.e. gen. <u>şir</u> $(x_n)_n$ <u>de nr. reale</u> a.î. $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$ sol $\in \mathbb{R}$ pt.

II. Met. numerice iterative pentru rez. <u>sist. ec. liniare</u> : $Ax = b$, A inv. $\in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

(cunoaşte A^{-1} sol. $x^* = A^{-1} b$) $b \in \mathbb{R}^n$

↳ gen. şir de vectori $(x^{(k)})_k$ a.î. $x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} x^*$ sol. exactă

↳ $\| x^{(k)} - x^* \|_{\square} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

<u>Met. iterative</u> : Jacobi şi Gauss-Seidel.

<u>Jacobi</u> : e.g.

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}
\quad \to \quad
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= (10 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}) / 9 \\
x_2^{(k)} &= (19 - 2x_1^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}) / 10 \\
x_3^{(k)} &= (0 - 3x_1^{(k-1)} - 4x_2^{(k-1)}) / 11
\end{aligned}$$

<u>Ideea</u>. Pornesc cu $x^{(0)}$ şi gen. $(x^{(k)})_k$ ca mai sus, atâta timp cât un crit. de oprire <u>nu</u> este satisfăcut.

Jacobi:

Date: A, b, x_0, TOL

$x_{old} = x_0$

atâta timp $\| A x_{old} - b \| > TOL$

$i = \overline{1,n}$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_{ij} \cdot x_{old_j}\right) / A_{ii}$$

$x_{old} = x$

Gauss-Seidel:

Date: A, b, x_0, TOL

$x_{old} = x_0$

atâta timp $\| A x_{old} - b \| > TOL$

$i = \overline{1,n}$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j<i} A_{ij} x_j - \sum_{j>i} A_{ij} x_{old_j}\right) / A_{ii}$$

$x_{old} = x$

Gauss-Seidel : eg.

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow x_1^{(k)} = (10 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}) / 9$

$\rightarrow x_2^{(k)} = (19 - 2x_1^{(k)} - 3x_3^{(k-1)}) / 10$

$\rightarrow x_3^{(k)} = (0 - 3x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)}) / 11$

<u>Obs</u>. (cond. suf.) A strict diag. dominantă ($|A_{ii}| > \sum_{j} |A_{ij}|$, $\forall i = \overline{1,n}$)
$\Rightarrow$ ambele şiruri converg.

<u>Obs</u>. În general, <u>nu</u> pot spune care metodă este mai bună!

<u>Jacobi</u> : $x^{(k)} = T_J x^{(k-1)} + c_J$, $T_J = D^{-1}(L - U)$

<u>Gauss-Seidel</u> : $x^{(k)} = T_{GS} x^{(k-1)} + c_{GS}$, $T_{GS} = (D-L)^{-1} U$

conv $\Leftrightarrow$ $\rho(T_J) < 1$ (resp. $\rho(T_{GS}) < 1$) $A = D + L + U$

Obs. (conv) Jacobi ✓ ✗

Gauss-Seidel ✗ ✓

Obs. • Folosesc în general met. iterative atunci când avem sist. foarte mari de ec. lin.

• Pentru sisteme mai mici, se folosesc de regulă met. directe (e.g. met. Gauss (cu piv. parțială, totală), met. de factorizare etc).

Corecție reziduală: Rez. $Ax = b \rightsquigarrow \tilde{x}$ sol. aprox.

$$A(\underbrace{\tilde{x} + \Delta x}_{sol}) = b$$

$$A\tilde{x} + A\Delta x = b$$

$$A\Delta x = \underbrace{b - A\tilde{x}}_{r = \text{reziduu}} \rightsquigarrow \text{det. } \Delta x$$

$$\tilde{x} = \tilde{x} + \Delta x$$

atât timp cât $\| A\tilde{x} - b \| > TOL$.

Matrici Hilbert : $\underline{n=3}$. $H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$\underline{n=3}$ $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{Hx = b}$. $\xrightarrow{\text{met.dir}} \tilde{x} \xrightarrow{\text{cor. rez.}}$ o aproximare mai bună.

$$\frac{\| x^* - \tilde{x} \|}{\| x^* \|} \le \underbrace{cond(H)}_{\|H\| \cdot \|H^{-1}\|} \frac{\| \overbrace{Hx^*}^{b} - H\tilde{x} \|}{\| \underbrace{Hx^*}_{b} \|}$$

$\underline{n=8}$: $cond(H) \approx 10^{10}$, $det(H) \approx 10^{-33}$

<u>Obs</u>: $cond(H) > 10^{\text{n. de cifre exacte pe care le fol. calc.}}$, am nevoie să folosesc mai multă precizie pentru a obține o îmbunătățire a sol. aprox.