Curs 6 10. 11. 2020.

Principiul de maxim și alte proprietăți ale fct. armonice/ sub- super armonice

De data trecută

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domeniu, și $u \in C^2(\Omega)$

u - sub-armonică $\overset{def}{\iff} -\Delta u(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$

(super) $(\geq)$

u armonică $\iff$ u subarmonică + superarmonică $\iff \Delta u(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$

Teoremă (Formula de medie pt fct. armonice)

Fie $u \in C^2(\Omega)$. Atunci

i) Dacă u este armonică atunci

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,d(y) = \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy, \quad \forall r>0 \text{ a.î. } \overline{B_r(x)} \subset \Omega$$

$\forall x \in \Omega$.

media val.

unde $\fint_{\partial B_r(x)} = \dfrac{1}{|\partial B_r(x)|} \cdot \displaystyle\int_{\partial B_r(x)}$ = integrala medie pe sfera de rază r centrată în x

$\fint_{B_r(x)} = \dfrac{1}{|B_r(x)|} \displaystyle\int_{B_r(x)}$ - s.n. integrala medie pe bila de rază r centrată în x

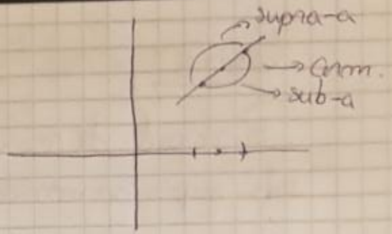
$|B_r(x)|$ ← volumul bilei

ii) Reciproc, dacă

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,d\sigma(y) \quad \left(\text{sau } u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy \right)$$

$\forall x \in \Omega$ și $(\forall)$ $r>0$ a.î. $\overline{B_r(x)} \in \Omega$

Atunci u este armonică



<u>Demo:</u>

i) u armonică

Consider şi fie $x \in \Omega$ fixat

↳ fct. $\varphi(r) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,d\sigma(y)$, $r>0$

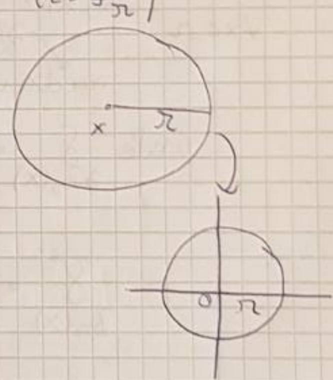
a.î. $B_r(x) \subset \Omega$.

Arăt că φ este fct. cts.

Prelucrăm pe $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \frac{n}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\,d\sigma(y) \overset{\substack{s.v.\\ y = x + rz \\ \left(z = \frac{y-x}{r}\right)}}{=} \frac{n}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u \cdot$$

$$\boxed{\begin{aligned} d\sigma(y) &= r^{n-1}\,d\sigma(z) \\ |z| &= \left|\frac{y-x}{r}\right| = \frac{r}{r} = 1 \end{aligned}}$$



$(x+rz)\, r^{n-1}\, d\sigma(z) =$

↳ element de "arie"

$$|\partial B_r(0)| = \underbrace{\omega_n}_{|\partial B_1(0)|} r^{n-1}$$

<u>Mai detaliat:</u>

$$\partial B_r(0) \subset \mathbb{R}^n : \left(U, \mathcal{L}(U), U \subset \mathbb{R}^{n-1} \right)$$

$$\partial B_r(x) \ni y = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n.$$

$$g = (g_{ij}) = \mathcal{L}_{,i} \cdot \mathcal{L}_{,j}$$

↳ derivata în rap. cu comp. i

$$\int_{\partial B_r(0)} f(y)\cdot d\sigma(y) = \int_U \underbrace{f(\mathcal{L}(u))}_{f(\mathcal{L}(u_1,\dots,u_{m-1}))} \sqrt{\det g}\; du_1,\dots,du_{m-1}$$

$$y = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_{m-1}) = x + r\,\mathcal{L}_1(u_1,\dots,u_{m-1})$$

$$g = (g_{ij}) = \mathcal{L}_{,i}\cdot\mathcal{L}_{,j} = r^2\,\mathcal{L}_{1,i}\cdot\mathcal{L}_{1,j} \subset \mathcal{M}_{m-1,m-1}$$

$\boxed{m=3} \Rightarrow$ Ex!

$$\Rightarrow \varphi(r) = \frac{1}{\omega_m \cancel{r^{m-1}}} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\,\cancel{r^{m-1}}\, d\sigma(z)$$

$$= \boxed{\frac{1}{\omega_m}\int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\, d\sigma(z)} \qquad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \varphi'(r) = \frac{1}{\omega_m}\int_{\partial B_1(0)} \frac{d}{dr}\left[u(x+rz)\right] d\sigma(z) =$$

$$= \frac{1}{\omega_m}\int_{\partial B_1(0)} \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}(x+rz)\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(x_i + r z_i)}_{z_i}\, d\sigma(z) =$$

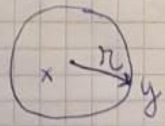
$$= \frac{1}{\omega_m}\int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+rz)\cdot z\, d\sigma(z)$$

$$\underset{x+rz=y}{\overset{S.V}{=}} \frac{1}{\omega_m}\int_{\partial B(x)} \nabla u(y)\cdot \frac{y-x}{r}\cdot r^{-(m-1)}\, d\sigma(y) =$$

$$\boxed{r^{m-1}\, d\sigma(z) = d\sigma(y)}$$

$$= \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y)\, \frac{y-x}{r}$$

$B_r(x)$ în y



$\frac{y-x}{r}$ - normala exterioară bilei

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \underbrace{\nabla u(y) \, \nu_y}_{\frac{\partial u}{\partial \nu_y}} \, d\sigma(y) \overset{G-O}{=} \underbrace{\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy}_{(2)}$$

$(2) = 0$

$\Rightarrow \varphi'(r) = 0, \ \forall r > 0$

$\varphi(r) = \lim_{r \downarrow 0} \varphi(r) = \lim_{r \downarrow 0} \fint_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y) = u(x)$ — vezi cursul trecut.

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(y) dy \longrightarrow u(0)$$

$$\fint_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$\Rightarrow \varphi(r) = u(x), \ \forall r$

Să arătăm și că $u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y) dy$

$$\fint_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \overset{coaie\ m}{=} \frac{n}{\omega_n r^n} \int_0^r \Big(\underbrace{\int_{\partial B_s(x)} u(y) d\sigma(y)}_{} \Big) ds = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_0^r u(x) |\partial B_s(x)| ds =$$

|| din pasul anterior

$$= u(x) \cdot \frac{n}{\cancel{\omega_n} r^n} \cdot \underbrace{\int_0^r \cancel{\omega_n} \cdot s^{n-1} ds}_{}$$

$= u(x) \Rightarrow$ item i) ✓

item ii)

Pp. că u nu ar fi armonică $\Rightarrow \exists\, x_0 \in \Omega$ a.î. $\Delta u(x_0) \neq 0$.

Fără a pierde din generalitate considerăm $\Delta u(x_0) > 0$.

$\Rightarrow \Delta u(x) > 0, \ \forall\, x \in U_{x_0}$

pe o vecinătate a lui x_0

Ipoteza $u(x) = \underbrace{\fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma(y)}_{\varphi(r)}$

Cu notațiile de i)

am văzut că $\varphi'(r) = \dfrac{n}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy, \ \forall\, x \in \Omega$

$\forall\, r \subset B_i(x) \subset \Omega$

Iau $x = x_0$ și $r > 0$ a.î. $B_r(x_0) \subset U_{x_0}$

$\Rightarrow \varphi'(r) > 0, \ \forall\, r << 1$.

contradicție cu faptul că φ este constantă din ipoteză.

[fiind $\varphi'(r) = 0, \ \forall\, r$].

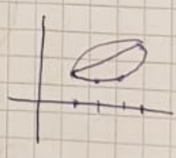
Temă: cealaltă ipoteză.

Principiul de maxim

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domeniu mărginit și $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

i) Dacă u este sub-armonică atunci

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$



(u își atinge maximul pe frontieră)

ii) Dacă u este super-armonică atunci $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$

(minimul se atinge pe frontieră)

ii) Dacă u este armonică atunci

$$\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u \quad , \text{ și } \max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(iii) este consecința trivială a lui i) + ii)

<u>Dem</u> i) Pp. că $\max_{\Omega} > \max_{\partial\Omega} u \Rightarrow$

$\Rightarrow u$ își atinge maximul într-un $x_0 \in \Omega$ (punct interior)

Fie $\varepsilon > 0$ abs fixat (mic) ce va fi ales ulterior.

Fie $v(x) := u(x) + \varepsilon |x - x_0|^2$ — ε perturbare a lui u.

$v(x_0) = u(x_0)$

Arat că pt. $\varepsilon \ll 1$ ...

$$\max_{\Omega} v > \max_{\partial\Omega} v$$

$$\max_{\partial\Omega} v \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \underbrace{\max_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2}_{:= M(x)} < \max_{\Omega} u = u(x_0) = v(x_0) \le \max_{\Omega} v$$

$$\left(\text{Alegând } \varepsilon < \frac{\max_{\Omega} u - \max_{\partial\Omega} u}{M(x_0)} \right)$$

$\Rightarrow v$ își atinge maximul într-un punct interior notat x_1.

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + \varepsilon \cdot 2n \ge 0 + 2 \cdot n \varepsilon > 0 \quad -\Delta u \le 0 \text{ } u \text{ subarm.}$$

$$\left(\Delta(|x - x_0|^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((x_1 - x_{n-1})^2 + \dots + (x_n - x_{n-\dots}) \right) \dots \right)$$

$\Delta v(x) > 0$

Pe de altă parte $x_1 \in \Omega$ e punct de maxim.

$$\Rightarrow \nabla v(x_1) = 0$$
$$\Rightarrow \Delta v(x_1) \le 0.$$

Ex Într-o dimensiune:

$f \in C^2(I)$ și $x_1 \in I$ punct interior
punct de maxim local

$\Rightarrow f'(x_1) = 0,\ f''(x_1) \leq 0.$

$f(t) = v(x_1 + te_1),\quad e_1 = (1, 0, \dots, 0).$

$f_m(t) \leq f_1(0),\quad f_1'(0) = 0$
$f_1''(0) \leq 0.$

0 punct de maxim.

$f_1'(t) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1 + te_1)$

$f_1''(t) = \partial_1^2 v(x_1 + te_1)$

$f_1''(0) = \partial_1^2 v(x_1)$

$\Rightarrow \partial_i^2 v(x_1) \leq 0 \quad \Rightarrow \Delta v(x_1) \leq 0$

contradicție cu faptul că $\Delta v(x) > 0$.

$\Rightarrow$ concluzia (i).

Aplicație la formula de medie (Th. Liouville)

Fie $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o fct. armonică mărginită inferior (sau mărginită superior).
Atunci u este funcție constantă.

Dem: Fie u mărg. inferior. $\Rightarrow \exists M > 0$ a.î. $u(x) \geq -M$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Putem pp. fără a pierde din generalitate că $M = 0$.

Pot lua $v(x) = u(x) + M \geq 0$.

$\Delta v = \Delta u = 0$.

Arăt că $v = ct$.

v armonică $\Rightarrow v_{x_i}$ sunt fct. armonice, $\forall i = \overline{1,n}$.

$$\Delta v_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\right) =$$

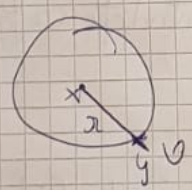
$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta v) = 0.$$

Aplic formula de medie pt.

$$v_{x_i}(x) = ⨍_{B_r(x)} v_{x_i}(y)\,dy = \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} 1 \cdot v_{x_i}(y)\,dy$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r(x)} v(y) \cdot \nu^i \, d\sigma(y).$$

ν^i – comp. i a versorului normalei exterioare ν



$$\Rightarrow |v_{x_i}(x)| \leq \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r(x)} |v(y)| \underbrace{|\nu^i|}_{\leq 1} d\sigma(y)$$

$$\leq \frac{n}{r} \cdot \underbrace{\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} |v(y)|\,d\sigma(y)}, \quad \forall r > 0.$$

$\downarrow r \to \infty$ $\qquad\qquad \downarrow$

$|v(x)| = 0.$

$\Rightarrow v_{x_i} = 0, \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow v = ct. \Rightarrow u = cts.$