Cercetări operaţionale 5

Cristian Niculescu

1 Curs 5

1.1 Degenerare şi ciclare

Fie problema:

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ rangA = m < n,\ P \neq \emptyset. \tag{1}$$

$B \to \widetilde{B}$ înlocuind a^r cu $a^k \implies$
$\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \frac{(z_k^B - c_k)\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B}$ cu $z_k^B - c_k > 0, \overline{x}_r^B \geq 0, y_{rk}^B > 0.$
Situaţii:
1) $\overline{x}_r^B = 0 \implies \overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B$.
2) $\overline{x}_r^B > 0 \implies \overline{z}^{\widetilde{B}} < \overline{z}^B$.
Probleme:
nedegenerate - au toate soluţiile de bază nedegenerate;
degenerate - au cel puţin o soluţie de bază degenerată.
Pentru problemele nedegenerate avem numai situaţia 2) (funcţia obiectiv descreşte strict). Deoarece sunt cel mult C_n^m baze, algoritmul simplex primal este convergent într-un număr finit de paşi.
Pentru problemele degenerate este posibilă situaţia 1).
Este posibil $B_1 \to B_2 \to ... \to B_q$ şi $\overline{z}^{B_1} = \overline{z}^{B_2} = ... = \overline{z}^{B_q}$. Dacă $B_q \to B_1$, atunci $\{B_1, B_2, ..., B_q\}$ este parcursă în mod ciclic (apare fenomenul de ciclare în algoritmul simplex).

1.1.1 Metoda perturbării

Pentru a evita ciclarea se poate modifica (perturba) problema degenerată în termenul liber, transformând-o în una nedegenerată.

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b(\varepsilon) \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

$b(\varepsilon) = b + \sum\limits_{j=1}^{n} a^j \varepsilon^j,\ \varepsilon > 0.$

Propoziţia 1. $B_0 = (a^1, a^2, ..., a^m)$ bază primal admisibilă pentru problema (1) $\Longrightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât soluţia de bază în problema (2) asociată lui B_0 este nedegenerată, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Demonstraţie. $\overline{x}^{B_0}(\varepsilon) := B_0^{-1} b(\varepsilon)$.

$\overline{x}^{B_0} = B_0^{-1} b$.

$\Longrightarrow \overline{x}^{B_0}(\varepsilon) = B_0^{-1} \left(b + \sum\limits_{j=1}^{n} a^j \varepsilon^j \right) = \overline{x}^{B_0} + \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^{B_0} \varepsilon^j.$

Dacă $j \in \{1, 2, ..., m\}$ $\Longrightarrow$ $y_j^{B_0}$ vector unitar (cu 1 pe locul j şi 0 în rest)

$\Longrightarrow \overline{x}_i^{B_0}(\varepsilon) = \overline{x}_i^{B_0} + \varepsilon^i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} y_{ij}^{B_0} \varepsilon^j = \overline{x}_i^{B_0} + \varepsilon^i \left(1 + \sum\limits_{j=m+1}^{n} y_{ij}^{B_0} \varepsilon^{j-i} \right).$

B_0 bază primal admisibilă pentru problema (1) $\Longrightarrow$ $\overline{x}_i^{B_0} \geq 0$.

$\varepsilon^i > 0$.

$1 + \sum\limits_{j=m+1}^{n} y_{ij}^{B_0} \varepsilon^{j-i} > 0$ pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic (rezultă din continuitatea în 0 a membrului stâng, considerat ca funcţie de ε).

$\Longrightarrow$ $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}, \exists \varepsilon_i > 0$ suficient de mic astfel încât $\overline{x}_i^{B_0}(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_i)$.

Fie $\varepsilon_0 = \min\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ $\Longrightarrow$ $\overline{x}^{B_0}(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, q.e.d.

Propoziţia 2. Fie B bază primal admisibilă pentru problema (1) şi $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $y_k^B \not\leq 0$. Dacă $\exists \varepsilon_B > 0$ astfel încât soluţia de bază în problema (2) asociată lui B este nedegenerată $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_B)$, atunci $\exists \varepsilon' > 0$ astfel încât $\min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B(\varepsilon)}{y_{ik}^B} = \frac{\overline{x}_r^B(\varepsilon)}{y_{rk}^B}$, cu r unic, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon')$.

Demonstraţie. r este unic $\Longleftarrow \frac{\overline{x}_i^B(\varepsilon)}{y_{ik}^B} \neq \frac{\overline{x}_j^B(\varepsilon)}{y_{jk}^B}, \forall i \neq j$ astfel încât $y_{ik}^B, y_{jk}^B > 0$.

Fie $i \neq j$ astfel încât $y_{ik}^B, y_{jk}^B > 0$.

$\overline{x}^B(\varepsilon) = \overline{x}^B + \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^B \varepsilon^j.$

$\frac{\overline{x}_i^B(\varepsilon)}{y_{ik}^B} \neq \frac{\overline{x}_j^B(\varepsilon)}{y_{jk}^B} \Longleftrightarrow$

$$\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} - \frac{\overline{x}_j^B}{y_{jk}^B} + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B} - \frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B} \right) \varepsilon^s \neq 0. \tag{3}$$

Dacă $\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} - \frac{\overline{x}_j^B}{y_{jk}^B} \neq 0$, alegând $\varepsilon > 0$ suficient de mic $\Longrightarrow$ (3) îndeplinită.

Dacă $\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} - \frac{\overline{x}_j^B}{y_{jk}^B} = 0$ şi $\exists t$ astfel încât $\frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B} - \frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B} = 0, \forall s = \overline{1, t-1}$ şi $\frac{y_{it}^B}{y_{ik}^B} - \frac{y_{jt}^B}{y_{jk}^B} \neq 0,$

atunci (3) $\iff$
$$\sum_{s=t}^{n}\left(\frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B}-\frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B}\right)\varepsilon^{s-t}\neq 0. \tag{4}$$
Alegând $\varepsilon > 0$ suficient de mic $\implies$ (4) îndeplinită.
Dacă $\frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B}-\frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B}=0, \forall s=\overline{1,n} \implies \frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B}-\frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B}=0, \forall s=\overline{1,m} \implies B^{-1}B_0$ are liniile i şi j proporţionale, contradicţie cu $B^{-1}B_0$ inversabilă.
$\implies \forall i\neq j$ cu $y_{ik}^B, y_{jk}^B > 0, \exists \varepsilon_{ij} > 0$ astfel încât (3) are loc, $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_{ij})$.
$\varepsilon' := \min\left\{\varepsilon_{ij} | i\neq j \text{ cu } y_{ik}^B, y_{jk}^B > 0\right\} \implies r$ unic, $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon')$.
Observaţie. $\widetilde{B}$ obţinută din B înlocuind a^r cu a^k este primal admisibilă şi soluţia de bază asociată din problema (2) este nedegenerată, $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon')$.
$\mathcal{B}_0 = \left\{ i \left| \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} = \min_{y_{jk}^B>0}\frac{\overline{x}_j^B}{y_{jk}^B}\right.\right\}$.
$card\,(\mathcal{B}_0) = 1 \implies \mathcal{B}_0 = \{r\}$.
$card\,(\mathcal{B}_0) \geq 2 \implies \mathcal{B}_1 = \left\{ i\in\mathcal{B}_0 \left| \frac{y_{i1}^B}{y_{ik}^B} = \min_{j\in\mathcal{B}_0}\frac{y_{j1}^B}{y_{jk}^B}\right.\right\}$.
$card\,(\mathcal{B}_1) = 1 \implies \mathcal{B}_1 = \{r\}$.
$card\,(\mathcal{B}_1) \geq 2 \implies \mathcal{B}_2 = ...$
$\mathcal{B}_t = \left\{ i\in\mathcal{B}_{t-1} \left| \frac{y_{it}^B}{y_{ik}^B} = \min_{j\in\mathcal{B}_{t-1}}\frac{y_{jt}^B}{y_{jk}^B}\right.\right\}$.
$\mathcal{B}_0 \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq ... \supseteq \mathcal{B}_t \supseteq ...$
Din demonstraţia propoziţiei 2 $\implies$ şirul se termină cu o mulţime cu un singur element $\implies \{r\}$.
Modificarea algoritmului simplex primal în caz de ciclare
Pasul 0. Se determină o bază primal admisibilă iniţială formată cu primele m coloane din A (renumerotând eventual variabilele).
Pasul 3. Criteriul de ieşire din bază: $r\in\mathcal{B}$ astfel încât
$\mathcal{B}_0 \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq ... \supseteq \mathcal{B}_t = \{r\}$.

1.1.2 Regula lui Bland

În algoritmul simplex primal:
a) Criteriul de intrare în bază:
$k\in\mathcal{R}$ astfel încât $k=\min\{j\in\mathcal{R} | z_j^B - c_j > 0\} \implies a^k$ intră în bază.
b) Criteriul de ieşire din bază:
$r_0\in\mathcal{B}$ astfel încât $r_0 = \min\left\{ r\in\mathcal{B} \left| \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min_{y_{ik}^B>0}\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}\right.\right\} \implies a^r$ iese din bază.
Aplicarea regulii lui Bland evită ciclarea.
Demonstraţie. Reducere la absurd. Presupunem că apare ciclarea. În timpul ciclării, un număr finit de variabile intră şi ies din bază. Fiecare

din aceste variabile intră în bază cu valoarea 0 şi valoarea funcţiei obiectiv nu se schimbă. Eliminând toate liniile şi coloanele care nu conţin pivoţi în timpul unui ciclu, obţinem o nouă problemă de optimizare liniară, care de asemenea ciclează. Presupunem că matricea acestei probleme reduse de optimizare liniară are m linii şi n coloane. Considerăm iteraţia în care coloana a^n iese din bază, fiind înlocuită de coloana a^p. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că baza este formată din ultimele m coloane ale matricei A. Tabelul simplex corespunzător este

VB	VVB	x_1	...	x_p	...	x_{n-m+1}	...	x_n
x_{n-m+1}	0			≤ 0		1		0
x_{n-m+2}	0			≤ 0		0		0
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_n	0			> 0		0		1
z	0			> 0		0		0

Putem defini problema redusă de optimizare liniară în termenii acestui tabel, adică $B = (a^{n-m+1}, a^{n-m+2}, ..., a^n) = I_m,\ A = (a^1, a^2, ..., a^n)$ cu
$a^j = y_j^B, \forall j = \overline{1,n},\ b = \overline{x}^B = 0,\ \ -c_j = z_j^B - c_j, \forall j = \overline{1,n}$. În acest tabel pivotul este $a_{mp} > 0$. Din b), a^n iese din bază numai dacă nu sunt egalităţi la testul rapoartelor şi deoarece $b = 0$ (pentru că toate liniile sunt în ciclu) $\Longrightarrow\ a_{ip} \leq 0, \forall i \neq m$.
Mai avem $a^{n-m+i} = e^i, \forall i = \overline{1,m},\ c_{n-m+i} = 0, \forall i = \overline{1,m},\ c_p < 0$.
Acum considerăm iteraţia când a^n reintră în bază.
Din a) $\Longrightarrow\ z_n^{\overline{B}} - c_n > 0$ şi $z_j^{\overline{B}} - c_j \leq 0, \forall j \neq n$.
Fie $u_{\overline{B}}^T = c_{\overline{B}}^T \overline{B}^{-1} \Longrightarrow z_j^{\overline{B}} - c_j = u_{\overline{B}}^T a^j - c_j, \forall j = \overline{1,n}$.
$i \in \{1, 2, ..., m-1\},\ j = n-m+i \Longrightarrow 0 \geq z_j^{\overline{B}} - \underbrace{c_j}_{=0} = u_{\overline{B}}^T a^j = u_{\overline{B}}^T e^i = (u_{\overline{B}})_i$

$\Longrightarrow (u_{\overline{B}})_i \leq 0, \forall i = \overline{1, m-1}$.
$0 < z_n^{\overline{B}} - \underbrace{c_n}_{=0} = u_{\overline{B}}^T a^n = u_{\overline{B}}^T e^m = (u_{\overline{B}})_m \Longrightarrow (u_{\overline{B}})_m > 0$.

$z_p^{\overline{B}} - c_p = u_{\overline{B}}^T a^p - c_p = \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{(u_{\overline{B}})_i}_{\leq 0} \underbrace{a_{ip}}_{\leq 0} + \underbrace{(u_{\overline{B}})_m}_{>0} \underbrace{a_{mp}}_{>0} - \underbrace{c_p}_{<0} > 0$, contradicţie cu $z_j^{\overline{B}} - c_j \leq 0, \forall j \neq n$.

2 Seminar 5

Să se rezolve:

$$\begin{cases} \inf\left(-\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7\right) \\ x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Rezolvare.

$B = (a^1, a^2, a^3) = I_3$.

$$B^{-1}b = I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B \text{ primal admisibilă.}$$

I)

						$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	x_6	x_7
0	$\leftarrow x_1$	0	1	0	0	$\boxed{\frac{1}{4}}$	-8	-1	9
0	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
0	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
	z	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6

$z_4^B - c_4 = \frac{3}{4} \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{aligned} & y_4^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ & z_5^B - c_5 = -20 \ngtr 0 \\ & y_6^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ & z_7^B - c_7 = -6 \ngtr 0 \end{aligned}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{3}{4}$ atins pe coloana lui $x_4 \implies x_4$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_1 şi $x_2 \implies$ oricare din x_1 şi x_2 pot ieşi din bază. Alegem x_1 să iasă din bază.

II)

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\downarrow$ x_5	x_6	x_7
x_4	0	4	0	0	1	-32	-4	36
$\leftarrow x_2$	0	-2	1	0	0	$\boxed{4}$	$\frac{3}{2}$	-15
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
z	0	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33

$z_5^B - c_5 = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_1^B - c_1 = -3 \ngtr 0 \\ y_5^B = \begin{pmatrix} -32 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ y_6^B = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_7^B - c_7 = -33 \ngtr 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{4, \frac{7}{2}\right\} = 4$ atins pe coloana lui $x_5 \implies x_5$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{4}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_2 \implies x_2$ iese din bază.

III)

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\downarrow$ x_6	x_7
$\leftarrow x_4$	0	-12	8	0	1	0	$\boxed{8}$	-84
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
z	0	-1	-1	0	0	0	2	-18

$z_6^B - c_6 = 2 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_1^B - c_1 = -1 \ngtr 0 \\ z_2^B - c_2 = -1 \ngtr 0 \\ y_6^B = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_7^B - c_7 = -18 \ngtr 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\{2\} = 2$ atins pe coloana lui $x_6 \implies x_6$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{8}, \frac{0}{\frac{3}{8}}, \frac{1}{1}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_4 şi $x_5 \implies$ oricare dintre x_4 şi x_5 poate ieşi din bază. Alegem x_4 să iasă din bază.

IV)

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\downarrow$ x_7
x_6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$
$\leftarrow x_5$	0	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\boxed{\frac{3}{16}}$
x_3	1	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$
z	0	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3

$z_1^B - c_1 = 2 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_1^B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_2^B - c_2 = -3 \ngtr 0 \\ z_4^B - c_4 = -\frac{1}{4} \ngtr 0 \\ y_7^B = \begin{pmatrix} -\frac{21}{2} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{21}{2} \end{pmatrix} \nleq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\{2,3\} = 3$ atins pe coloana lui $x_7 \implies x_7$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{\frac{3}{16}}, \frac{1}{\frac{21}{2}}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_5 \implies x_5$ iese din bază.

V)

VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\leftarrow x_6$	0	$\boxed{2}$	-6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0
x_7	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1
x_3	1	-2	6	1	$\frac{5}{2}$	-56	0	0
z	0	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-16	0	0

$z_1^B - c_1 = 1 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_1^B = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_2^B - c_2 = -1 \not> 0 \\ y_4^B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_5^B - c_5 = -16 \not> 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = 1$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{2}, \frac{1}{\frac{1}{3}}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_6 şi $x_7 \implies$ oricare dintre x_6 şi x_7 poate ieşi din bază. Alegem x_6 să iasă din bază.

VI)

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	-3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0
$\leftarrow x_7$	0	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	$\frac{1}{6}$	-1	$-\frac{1}{6}$	1
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
z	0	0	2	0	$\frac{7}{4}$	-14	$-\frac{1}{2}$	0

$z_2^B - c_2 = 2 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_2^B = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ y_4^B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_5^B - c_5 = -14 \not> 0 \\ z_6^B - c_6 = -\frac{1}{2} \not> 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{2, \frac{7}{4}\right\} = 2$ atins pe coloana lui $x_2 \implies x_2$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{3}}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_7 \implies x_7$ iese din bază.
$\implies B = (a^1, a^2, a^3) \implies$ obţinem din nou tabelul I). Algoritmul ciclează.
Evităm ciclarea folosind metoda perturbării sau regula lui Bland.

Cu metoda perturbării:
Pasul 0. Rezolvarea a început cu $B = (a^1, a^2, a^3)$, bază primal admisibilă.
La tabelul I), $\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$ atins pe liniie lui x_1 şi $x_2 \implies \mathcal{B}_0 = \{1, 2\}$
$\min\left\{\frac{1}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_2 \implies \mathcal{B}_1 = \{2\} \implies x_2$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	$\overset{\downarrow}{x_4}$	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9
$\leftarrow x_2$	0	0	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
z	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overset{\downarrow}{x_6}$	x_7
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$
x_4	0	0	2	0	1	-24	-1	6
$\leftarrow x_3$	1	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0
z	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{21}{2}$

$z_6^B - c_6 = \frac{5}{4} \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_2^B - c_2 = -\frac{3}{2} \ngtr 0 \\ z_5^B - c_5 = -2 \ngtr 0 \\ y_6^B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_7^B - c_7 = -\frac{21}{2} \ngtr 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{\frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}$ atins pe coloana lui $x_6 \implies x_6$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$ atins pe linia lui $x_3 \implies x_3$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$
x_4	1	0	2	1	1	-24	0	6
x_6	1	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0
z	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$
soluţie optimă $x_1^* = \frac{3}{4},\ x_4^* = 1,\ x_6^* = 1,\ x_2^* = x_3^* = x_5^* = x_7^* = 0$,
valoarea optimă $= -\frac{5}{4}$.

Cu regula lui Bland:
La tabelul I)
$\min\{4, 6\} = 4 \implies x_4$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_1 şi x_2; $\min\{1, 2\} = 1 \implies x_1$ iese din bază $\implies$ tabelul II).

La tabelul II)
$\min\{5,6\}=5 \implies x_5$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{4}\right\}=0$ atins pe linia lui $x_2 \implies x_2$ iese din bază $\implies$ tabelul III).
La tabelul III)
$\min\{6\}=6 \implies x_6$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{8},\frac{0}{\frac{3}{8}},\frac{1}{1}\right\}=0$ atins pe liniile lui x_4 şi x_5; $\min\{4,5\}=4 \implies x_4$ iese din bază $\implies$ tabelul IV).
La tabelul IV)
$\min\{1,7\}=1 \implies x_1$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{16}},\frac{1}{\frac{3}{2}}\right\}=0$, atins pe linia lui $x_5 \implies x_5$ iese din bază.

VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$
$\leftarrow x_5$	0	$\boxed{\frac{1}{16}}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$
x_3	1	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$
z	0	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	0	0	-2	0	-1	24	1	-6
x_1	0	1	-2	0	$-\frac{3}{4}$	16	0	3
$\leftarrow x_3$	1	0	$\boxed{2}$	1	1	-24	0	6
z	0	0	1	0	$\frac{5}{4}$	-32	0	-3

$z_2^B-c_2=1 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_2^B=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}\not\leq 0 \\ y_4^B=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix}\not\leq 0 \\ z_5^B-c_5=-32\not> 0 \\ z_7^B-c_7=-3\not> 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\min\{2,4\}=2 \implies x_2$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$ atins pe linia lui $x_3 \implies x_3$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	$\overset{\downarrow}{x_4}$	x_5	x_6	x_7
x_6	1	0	0	1	0	0	1	0
x_1	1	1	0	1	$\frac{1}{4}$	-8	0	9
$\leftarrow x_2$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	-12	0	3
z	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-20	0	-6

$z_4^B-c_4=\frac{3}{4}\not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_3^B - c_3 = -\frac{1}{2} \not> 0 \\ y_4^B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_5^B - c_5 = -20 \not> 0 \\ z_7^B - c_7 = -6 \not> 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\min\{4\} = 4 \implies x_4$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{1}{\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = 1$ atins pe linia lui $x_2 \implies x_2$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	1	0	0	1	0	0	1	0
x_1	$\frac{3}{4}$	1			0		0	
x_4	1	0	2	1	1	-64	0	6
z	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	-6

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$
soluţie optimă $x_1^* = \frac{3}{4},\ x_4^* = 1,\ x_6^* = 1,\ x_2^* = x_3^* = x_5^* = x_7^* = 0$,
valoarea optimă $= -\frac{5}{4}$.