Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Analiză Numerică
07.10.2020

CONŢINUTUL CURSULUI

I. Ecuaţii neliniare.

II. Sisteme de ecuaţii liniare: metode iterative staţionare; analiza stabilităţii.

III. Interpolare polinomială.

IV. Derivare numerică. Integrare numerică.

V. Aproximare polinomială în $\mathrm{L}^2_w(a, b)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Kendall E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition. John Wiley & Sons, London, 1989.
2. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*, Ninth Edition. Brooks/Cole, Boston, MA, 2011.
3. Daniel Stănică, *Analiză numerică.* Matrix Rom, Bucureşti, România, 2012.
4. Endre Süli, David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

NOTARE

EXAMEN SCRIS: I + II + III + IV + V; **150 minute**

$$\textbf{NOTA} = \textbf{Rotunjire/Trunchiere}\Big\{0,70 \times (\textbf{NotaExamenScris}) + 0,30 \times (\textbf{NotaLaborator}) + \textbf{Bonus}\Big\}$$

NotaExamenScris = nr. cu două zecimale din $[1; 10]$ − nota de la examenul scris;

NotaLaborator = nr. cu două zecimale din $[1; 10]$ − nota de la laborator;

Bonus = nr. cu două zecimale din $[0; 1]$ − bonus curs.

NotaLaborator = NotaL + BonusL

NotaL = nr. cu două zecimale din $[1; 10]$ − activitate de laborator, teme rezolvate;

BonusL = nr. cu două zecimale din $[0; 1]$ − bonus laborator;

Condiţie necesară intrare în examenul scris: prezenţa la minimum 9 laboratoare

Condiţie necesară promovare: NOTA ≥ 5

NotaLaborator şi **Bonus** (curs), obţinute în timpul semestrului, se iau considerare atât în sesiunea ianuarie-februarie 2021, cât şi în sesiunile de restanţe şi/sau reexaminări.

CURS#1

I. Ecuaţii neliniare

(a) Eroare absolută, eroare relativă, surse ale erorilor. Ordin (viteză) de convergenţă.

(b) Metoda bisecţiei: algoritm, convergenţă, caracterizare.

ERORI: DEFINIȚIE, SURSE, EXEMPLE

DEFINIȚIE:

Fie $x^* \in \mathbb{R}$ o valoare exactă și $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ o aproximare a lui $x^* \in \mathbb{R}$.

(i) Sn eroare absolută a aproximării $\tilde{x}$ a lui x^*

$$e_a(\tilde{x}) := |x^* - \tilde{x}|$$

(ii) Sn eroare relativă a aproximării $\tilde{x}$ a lui $x^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$e_r(\tilde{x}) := \frac{|x^* - \tilde{x}|}{|x^*|} = \frac{e_a(\tilde{x})}{|x^*|}$$

(iii) Spunem că aproximarea $\tilde{x}$ a lui $x^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ are $m \in \mathbb{N}$ cifre semnificative în baza 10 dacă

$$e_r(\tilde{x}) \leq 0,5 \times 10^{-m}$$

OBSERVAȚII: SURSE ALE ERORII

1) Modelarea matematică a problemei: de regulă, se fac ipoteze simplificatoare care modifică problema originală ⟶
ERORI DE MODELARE (MODELLING ERRORS)

2) Inacuratețea datelor problemei: de regulă, se fac erori umane, inerente, de măsurare a datelor problemei, i.e DATE PERTURBATE (NOISY DATA)

3) Reprezentarea numerelor în virgulă mobilă (floating point) ⟶
ERORI DE ROTUNJIRE (ROUNDING ERRORS)

4) <u>Aproximarea numerică a problemei</u>

(ie folosirea unor algoritmi) →

ERORI DE TRUNCHIERE
(TRUNCATION ERRORS)

5) <u>Programarea metodei numerice</u>

ERORI DE PROGRAMARE
(BLUNDERS)

EXEMPLU (eroare de trunchiere, eroare de rotunjire)

Fie $f \in C^2[a,b]$, $h>0$ suficient de mic și fixat și $x \in (a,b)$ fixat.

(i) Vrem o aproximare pentru $f'(x)$ SIMPLĂ și ACURATĂ.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(\xi_x)\,\frac{h^2}{2} \Rightarrow$$

$$\xi_x \in [x, x+h]$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{\text{formulă de} \\ \text{aproximare} \\ \text{pentru } f'(x)}} + \underbrace{\left[-\frac{f''(\xi_x)}{2}\,h\right]}_{\substack{=: e_t(x) \\ \text{eroare de} \\ \text{trunchiere}}}$$

Formula de aproximare pt $f'(x)$:

$$\boxed{f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad h>0}$$

(ii) Estimarea erorii de trunchiere, $e_t(x)$:

$$|e_t(x)| := \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| =$$

$$= \left| -\frac{f''(\xi_x)}{2} h \right| = |f''(\xi_x)| \frac{h}{2} \underset{f \in C^2[a,b]}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\max_{t \in [a,b]} |f''(t)|}_{=: M \geq 0} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M}{2} h \Rightarrow$$

$$\boxed{|e_t(x)| \leq \frac{M}{2} h}$$ estimarea erorii de trunchiere

(iii) Evaluarea funcției f se face prin intermediul reprezentării sub formă științifică standard normalizată, deci conține o eroare de rotunjire:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{reprezentare}\\ \text{în calculator}}}{\tilde{f}(x)} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{valoare}\\ \text{exactă}}}{f(x)} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{eroare de}\\ \text{rotunjire}}}{e_r(x)}$$

unde

$$|e_r(x)| \le \underset{\substack{\uparrow\\ \text{precizia mașinii}}}{\epsilon}, \quad \forall x \in [a,b]$$

Astfel, aproximarea lui $f'(x)$ prin formula de aproximare de la (i) se realizează, în fapt, prin:

$$\boxed{f'(x) \simeq \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}}$$

$$\left| f'(x) - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h} \right| =$$

$$\left| \left[f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] + \right.$$

$$+\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)}{h}\right]\Bigg|$$

$$\leq \left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|+$$

$$+\frac{1}{h}\left[\left|f(x+h)-\tilde{f}(x+h)\right|+\left|\tilde{f}(x)-f(x)\right|\right]$$

$$=\left|e_t(x)\right|+\frac{1}{h}\left[e_r(x+h)+e_r(x)\right]$$

$$\leq \frac{Mh}{2}+\frac{2\varepsilon}{h} \implies$$

$$\boxed{\left|f'(x)-\frac{\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)}{h}\right|\leq\frac{Mh}{2}+\frac{2\varepsilon}{h}}$$

<u>Eroarea totală</u> a aproximării lui $f'(x)$ prin formula determinată în (i) conține atât <u>eroarea de trunchiere</u>, cât și <u>eroarea de rotunjire</u>!

(iv) Determinați valoarea optimă a lui $h>0$, h_{opt}, care minimizează <u>eroarea totală</u> de la (iii).

$F : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(h) = \frac{Mh}{2} + \frac{2\epsilon}{h}$$

$$F'(h) = \frac{M}{2} - \frac{2\epsilon}{h^2}$$

$$F'(h) = 0 \iff h = \pm 2\sqrt{\epsilon/M} \xRightarrow{h>0}$$

$$\boxed{h^* = 2\sqrt{\epsilon/M}}$$

$$F''(h) = \frac{4\epsilon}{h^3} \Rightarrow F''(h^*) > 0 \Rightarrow$$

h^* punct de minim pt $F \Rightarrow$

$$\boxed{h_{opt} := 2\sqrt{\epsilon/M}}$$

I. ECUAȚII NELINIARE

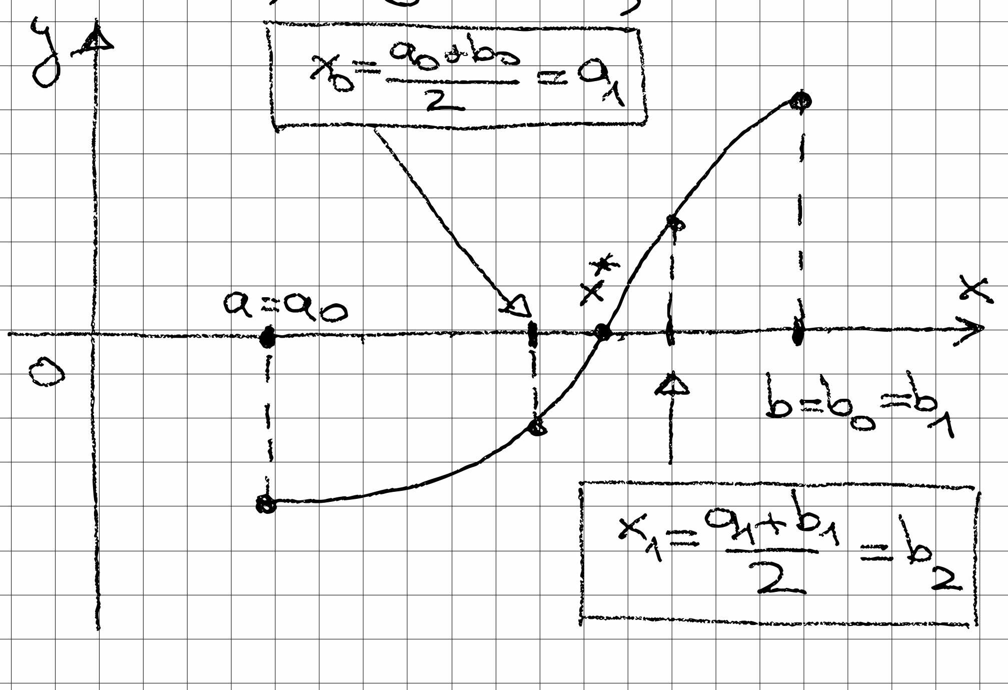
1) METODA BISECȚIEI

Metodă iterativă de rezolvare a ecuației neliniare:

$$f(x) = 0 \quad , \quad x \in [a,b]$$

unde $a,b \in \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$.

<u>IDEEA</u>: Izolarea soluției într-un interval și înjumătățirea acestuia



ALGORITM (metoda bisecției):

Date: f, a, b

$n=0$: $a_n = a$; $b_n = b$;

$x_n = (a_n + b_n)/2$;

$n = n+1$;

$n \geq 1$: if $f(a_{n-1}) f(b_{n-1}) \leq 0$

$a_n = a_{n-1}$; $b_n = x_{n-1}$;

else

$a_n = x_{n-1}$; $b_n = b_{n-1}$

endif

$x_n = (a_n + b_n)/2$;

$n = n+1$;

repeat step "$n \geq 1$"

TEOREMA (convergența & estimarea erorii):

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C[a,b]$ a.î. $f(a)\, f(b) < 0$.

Fie $x^* \in (a,b)$ unica soluție exactă a ecuației $f(x) = 0$, $x \in [a,b]$ (putem presupune așa ceva!). Atunci:

(i) metoda bisecției generează un șir de aproximări, $\{x_n\}_{n \geq 0}$, convergent către x^*;

(ii) are loc următoarea estimare a erorii absolute:

$$\boxed{e_n := e_a(x_n) = |x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall n \geq 1}$$

Dem: Ex!

OBSERVAȚII:

1) Cerințe relativ mici, i.e

$f \in C[a,b]$, $f(a)f(b)<0$.

2) Izolează soluția în $[a,b]$.

3) Numărul de iterații necesare pt atingerea unei anumite acurateți a soluției numerice, $\varepsilon>0$ mic, poate fi mare.

4) Criteriu de oprire alternativ:

Dat $\varepsilon>0$, procesul iterativ se oprește la prima iterație $n \in \mathbb{N}$ pentru care:

$$\boxed{\left|\frac{x_{n-1}-x_n}{x_n}\right|<\varepsilon} \quad \text{sau} \quad \boxed{|f(x_n)|<\varepsilon}$$