Metoda respingerii pentru simularea v.a.

I Cazul v.a. continue

Fie X și Y două v.a. continue cu densitățile de probabilitate f și respectiv g. Presupunem cunoscută o metodă de simulare pentru Y. Atunci:

Căutam o constantă $c > 0$ a.î. $\boxed{\frac{f(y)}{g(y)} \leq c \ \forall y}$

OBS: Cu cât c e mai mic, cu atât metoda funcționează mai rapid.

ALGORITM

1. Generez Y
2. Generez U
3. Dacă $U \leq \frac{f(Y)}{c \cdot g(Y)}$ atunci $X = Y$ altfel mergi la 1

Exemplu

$X \sim Beta(2,4)$ $\quad f(x) = 20x(1-x)^3$, $0 < x < 1$

Aleg $Y \sim Unif(0,1)$ $\quad g(x) = 1$, $0 < x < 1$

Căutam constanta c:

- Calculăm $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{not}{=} h(x) = 20x(1-x)^3$
- Pentru a determina c verificăm dacă $h(x)$ are punct de maxim

$h'(x) = 0 \iff \dots \quad x = \frac{1}{4}$

Facem tabelul de variație pt h:

x	0		$\frac{1}{4}$		1
$h'(x)$		$+ + +$	0	$- - -$	
$h(x)$		$\nearrow$	$h(\frac{1}{4})$	$\searrow$	

$h(\frac{1}{4}) = \frac{135}{64} = c$

Așadar $\dfrac{f(x)}{c\cdot g(x)} = \dfrac{20\cdot x(1-x)^3}{\frac{135}{64}\cdot 1} = \dfrac{256}{27}\, x\cdot(1-x)^3$

$\boxed{\text{Algoritm pentru generarea unei valori din } X \sim Beta(2,4)}$

$\boxed{\text{Pas 1}}$: Generăm U_1 și U_2 $(\sim Unif(0,1))$

variabila uniformă din algoritmul general

joacă rolul lui Y

$\boxed{\text{Pas 2}}$: Dacă $U_2 \le \dfrac{256}{27}\cdot U_1(1-U_1)^3$ atunci $X = U_1$ și STOP

Altfel, revenim la $\boxed{\text{Pas 1}}$

$\boxed{\text{Obs}}$: ① Numărul de iterații necesar pentru a obține o valoare din X prin metoda respingerii este o v.a. repartizată geometric cu media c, deci alegerea constantei este importantă în eficientizarea algoritmului.

② Suportul densității de probabilitate pt. Y trebuie să coincidă cu suportul densității de probabilitate pt. X !

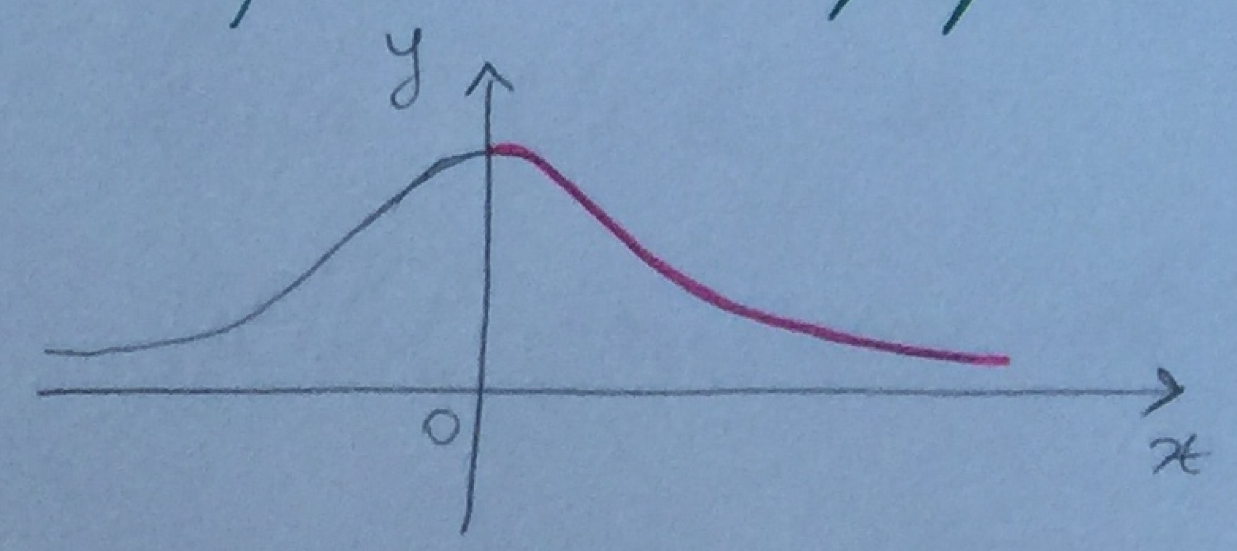
$\boxed{\text{Exemplu special:}}$

$X \sim N(0,1)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x \in \mathbb{R}$

$Y \sim Exp(1)$ $\quad g(x) = e^{-x}, \; x > 0$

observăm că suportul celor 2 v.a. nu coincide, deci nu putem aplica metoda respingerii.

$\boxed{\text{OBS}}$: Ne folosim de proprietatea de simetrie a normalei standard



Remarcăm ca v.a. $|X|$ are densitatea $\tilde{f}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x>0$

are același suport ca Y.

Vom începe prin a genera valori din $|X|$, apoi le atribuim semne în mod aleator!

Căutăm constanta c:

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{2}} = h(x)$$

TEMĂ: Faceți calculele necesare pentru a obține valoarea constantei c.

Maximizând funcția $h(x)$ obținem $\boxed{c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}}$

Calculăm $\frac{\tilde{f}(x)}{c \cdot g(x)} = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

Algoritmu pentru generarea lui $|X|$ și respectiv X

$\boxed{\text{Pas 1}}$: Generez $Y \sim Exp(1)$

$\boxed{\text{Pas 2}}$: Generez $U_1, U_2 (\sim Unif(0,1))$

$\boxed{\text{Pas 3}}$: Dacă $U_1 \leq e^{-\frac{(Y-1)^2}{2}}$ atunci $|X| = Y$ și STOP

Altfel, revenim la $\boxed{\text{Pas 1}}$

$\boxed{\text{Pas 4}}$: Dacă $U_2 \leq \frac{1}{2}$ atunci $X = -|X|$

Altfel $X = |X|$.