Cercetări operaţionale 2

Cristian Niculescu

1 Curs 2

1.1 Optimizare liniară

1.1.1 Exemple de probleme de optimizare liniară

1. Folosirea optimă a resurselor
O fabrică face n produse din m resurse. Se dau:
$a_i > 0$, cantitatea disponibilă din resursa $i, i = \overline{1, m}$;
$a_{ij} \geq 0$, consumul din resursa i pentru a face o unitate din produsul j, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$;
$b_j > 0$, profitul dintr-o unitate de produs $j, j = \overline{1, n}$.
Se cere să se organizeze producţia astfel încât profitul total să fie maxim.
Fie x_j, cantitatea care trebuie fabricată din produsul $j, j = \overline{1, n}$.
În acest caz, problema de optimizare liniară este

$$\begin{cases} \sup \left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$ se numeşte funcţie obiectiv.
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_i, i = \overline{1, m}$ se numesc restricţii.
$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ se numesc condiţii de semn.
Problema se numeşte problemă de optimizare liniară deoarece funcţia obiectiv şi membrii stângi ai restricţiilor sunt funcţii liniare.
2. Problema de transport
Sunt m depozite şi n beneficiari. Se dau:

$a_i > 0$, cantitatea de marfă din depozitul $i, i = \overline{1,m}$;
$b_j > 0$, cantitatea de marfă cerută de beneficiarul $j, j = \overline{1,n}$;
c_{ij}, costul transportului unei unităţi de marfă de la depozitul i la beneficiarul $j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.
Presupunem că problema este echilibrată, adică $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ (oferta totală = cererea totală).
Se cere să se organizeze transportul mărfii de la depozite la beneficiari astfel încât costul total să fie minim.
Fie x_{ij}, cantitatea de marfă care trebuie transportată de la depozitul i la beneficiarul $j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.
Problema de transport este

$$\begin{cases} \inf \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

1.1.2 Forme ale problemelor de optimizare liniară

Forma generală a problemei de optimizare liniară este

$$\begin{cases} \inf(\sup)(c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3) \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

În problema de infimum, restricţiile cu $\geq$ se numesc inegalităţi concordante, iar restricţiile cu $\leq$ se numesc inegalităţi neconcordante.
În problema de supremum, restricţiile cu $\leq$ se numesc inegalităţi concordante, iar restricţiile cu $\geq$ se numesc inegalităţi neconcordante.
Forma standard a problemei de optimizare liniară are toate variabilele ≥ 0

şi toate restricţiile ecuaţii:

$$\begin{cases} \inf(\sup)(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Forma canonică a problemei de optimizare liniară are toate variabilele ≥ 0 şi toate restricţiile inegalităţi concordante:

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \sup(c^T x) \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Forma mixtă a problemei de optimizare liniară are toate variabilele ≥ 0 şi toate restricţiile ecuaţii sau inegalităţi concordante. Exemplu:

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ A_1 x \geq b_1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1.1.3 Transformări echivalente

Fie $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$a^T x \geq \alpha \iff -a^T x \leq -\alpha$$

$$a^T x \leq \alpha \iff \begin{cases} a^T x + y = \alpha \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$a^T x \geq \alpha \iff \begin{cases} a^T x - y = \alpha \\ y \geq 0 \end{cases}$$

y se numeşte variabilă ecart.

$$a^T x = \alpha \iff \begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ a^T x \geq \alpha \end{cases}$$

$$x \leq 0 \iff \begin{cases} x = -x' \\ x' \geq 0 \end{cases}$$

$$x \text{ arbitrar} \iff \begin{cases} x = x' - x'' \\ x', x'' \geq 0 \end{cases}$$

$$X \subseteq \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset, f : X \to \mathbb{R} \implies \inf_{x\in X} f(x) = -\sup_{x\in X}(-f(x)).$$

Aceasta ne permite să trecem de la o problemă de supremum la una de infimum sau invers prin schimbarea semnului funcţiei obiectiv.

1.1.4 Definiţii

Fie problema de optimizare liniară la forma standard

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rangA = m < n. \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ care verifică $Ax = b$ şi $x \geq 0$ se numeşte soluţie admisibilă pentru problema (1).
O soluţie admisibilă care este şi soluţie de bază pentru sistemul $Ax = b$ se numeşte soluţie admisibilă de bază pentru problema (1).
$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ se numeşte domeniul admisibil pentru problema (1).
x^* se numeşte soluţie optimă pentru problema (1) $\iff$ $x^* \in P$ şi $c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in P$.
$P^* = \{x^* \in P | c^T x^* = \inf_{x\in P}(c^T x)\}$ se numeşte mulţimea soluţiilor optime pentru problema (1).
O soluţie optimă care este şi soluţie de bază pentru sistemul $Ax = b$ se numeşte soluţie optimă de bază pentru problema (1).
problema (1) are optim infinit $\iff$ $\inf_{x\in P}(c^T x) = -\infty$.
Dacă problema (1) are optim infinit, atunci $P^* = \emptyset$.

1.1.5 Teorema fundamentală a optimizării liniare şi metoda descrierii complete

Teorema fundamentală a optimizării liniare (TFOL). Fie problema de optimizare liniară la forma standard

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rangA = m < n. \tag{1}$$

1) Dacă problema (1) are soluţie admisibilă, atunci are şi soluţie admisibilă de bază.
2) Dacă problema (1) are soluţie optimă, atunci are şi soluţie optimă de bază.

Demonstraţie. 1) $P \neq \emptyset$. Fie $x \in P$.
Dacă $x = 0$, atunci x este soluţie admisibilă de bază.
Dacă $x \neq 0$, atunci, renumerotând eventual variabilele, putem scrie

$$x = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n, \text{ cu } x_i \neq 0, \forall i = \overline{1, k}.$$

Fie $A = (a^1, ..., a^n)$.
Dacă $a^1, ..., a^k$ sunt liniar independente, atunci x este soluţie admisibilă de bază.
Dacă $a^1, ..., a^k$ sunt liniar dependente, atunci $\exists \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ nu toate 0 astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a^i = 0$.
Fie $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n \implies$
$A\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a^i = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a^i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} 0a^i = 0 + 0 = 0.$
Fie $x(\lambda) = x + \lambda\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.
$Ax(\lambda) = Ax + \lambda A\alpha = b + \lambda \cdot 0 = b \implies$
$x(\lambda)$ este soluţie a sistemului $Ax = b, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Determinăm $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x(\lambda) \geq 0 \iff x_j + \lambda\alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, k} \iff \begin{cases} \lambda \geq -\dfrac{x_j}{\alpha_j}, \text{ dacă } \alpha_j > 0 \\ \lambda \leq -\dfrac{x_j}{\alpha_j}, \text{ dacă } \alpha_j < 0 \end{cases}$$

Fie $I_+ = \{j | \alpha_j > 0\}, I_- = \{j | \alpha_j < 0\} \implies I_+ \cap I_- = \emptyset$.
$\alpha_1, ..., \alpha_k$ nu sunt toate 0 $\implies I_+ \cup I_- \neq \emptyset$.
Fie

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max\limits_{j \in I_+} \left(-\frac{x_j}{\alpha_j}\right), \text{ dacă } I_+ \neq \emptyset \\ -\infty, \text{ dacă } I_+ = \emptyset \end{cases} ; \ \lambda_2 = \begin{cases} \min\limits_{j \in I_-} \left(-\frac{x_j}{\alpha_j}\right), \text{ dacă } I_- \neq \emptyset \\ \infty, \text{ dacă } I_- = \emptyset. \end{cases}$$

$\implies x(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ (cu convenţia că, dacă vreunul din capete este infinit, intervalul este deschis acolo) $\implies x(\lambda) \in P, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.
$I_+ \cup I_- \neq \emptyset \implies$ cel puţin unul din λ_1, λ_2 este finit.
Presupunem λ_1 finit (dacă $\lambda_1 = -\infty$, atunci $\lambda_2 < \infty$ şi se procedează analog, înlocuind λ_1 cu λ_2) $\implies \exists j_0 \in I_+$ astfel încât $\lambda_1 = -\frac{x_{j_0}}{\alpha_{j_0}} \implies x(\lambda_1) \in P$ şi $x_{j_0}(\lambda_1) = x_{j_0} + \lambda_1\alpha_{j_0} = 0 \implies$ numărul componentelor $\neq 0$ ale lui $x(\lambda_1)$ este cel mult $k - 1$.
Dacă $x(\lambda_1)$ nu este soluţie de bază, se repetă procedeul, obţinându-se o soluţie admisibilă cu cel mult $k-2$ componente nenule, ş.a.m.d. $\implies$ după un număr finit de paşi se obţine o soluţie admisibilă de bază.

2) Fie $x \in P^*$.
Dacă $x = 0$, atunci x este soluţie optimă de bază.
Dacă $x \neq 0$ şi x nu este soluţie de bază, repetăm procedeul de la 1) $\Longrightarrow$ $x(\lambda) \in P, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.
$x \in P^* \Longrightarrow c^T x(\lambda) \geq c^T x \Longrightarrow c^T x + \lambda c^T \alpha \geq c^T x \Longrightarrow$
$\lambda c^T \alpha \geq 0, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \stackrel{\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0}{\Longrightarrow} c^T \alpha = 0$ (altfel luăm $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ de semn contrar lui $c^T \alpha \Longrightarrow$ contradicţie) $\Longrightarrow c^T x(\lambda) = c^T x \stackrel{x(\lambda) \in P, x \in P^*}{\Longrightarrow}$
$x(\lambda) \in P^*, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.
Presupunem λ_1 finit (dacă $\lambda_1 = -\infty$, atunci $\lambda_2 < \infty$ şi se procedează analog, înlocuind λ_1 cu λ_2) $\Longrightarrow x(\lambda_1) \in P^*$ şi are cel mult $k-1$ componente $\neq 0$ (din demonstraţia de la 1)).
Dacă $x(\lambda_1)$ nu este soluţie de bază, se repetă procedeul, obţinându-se o soluţie optimă cu cel mult $k-2$ componente nenule, ş.a.m.d. $\Longrightarrow$ după un număr finit de paşi se obţine o soluţie optimă de bază.
Observaţie. O soluţie optimă se poate căuta printre soluţiile admisibile de bază (cel mult C_n^m).
Metoda descrierii complete.

- Se demonstrează că problema (1) are soluţie optimă.
- Se determină toate soluţiile de bază ale sistemului $Ax = b$.
- Pentru soluţiile de admisibile de bază se calculează valorile funcţiei obiectiv.
- O soluţie optimă este o soluţie admisibilă de bază pentru care se atinge minimul valorilor funcţiei obiectiv calculate.

Această metodă nu se poate aplica practic din cauza primelor 2 puncte.

2 Seminar 2

1) $$\begin{cases} \inf\,(2x_2 + x_3) \\ -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}.$$
Să se aducă la:
a) forma standard;
b) forma canonică;
c) forma mixtă.

Rezolvare.

a) $\begin{cases} x_2 = x_4 - x_5, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_3 = -x_6, x_6 \geq 0 \\ x_7, x_8 \geq 0 \text{ variabile ecart} \end{cases}$.

Forma standard:

$$\begin{cases} \inf (2x_4 - 2x_5 - x_6) \\ -3x_1 + 4x_4 - 4x_5 - 8x_6 + x_7 = 2 \\ x_1 - 2x_6 = 8 \\ 5x_1 - 3x_4 + 3x_5 - 2x_6 - x_8 = 7 \\ x_1, x_4, ..., x_8 \geq 0 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x_2 = x_4 - x_5, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_3 = -x_6, x_6 \geq 0 \end{cases}$.

Înmulţim prima inegalitate cu -1 ca s-o facem concordantă, iar ecuaţia o scriem echivalent ca 2 inegalităţi contrare, înmulţind-o cu -1 pe cea neconcordantă.

Forma canonică:

$$\begin{cases} \inf (2x_4 - 2x_5 - x_6) \\ 3x_1 - 4x_4 + 4x_5 + 8x_6 \geq -2 \\ x_1 - 2x_6 \geq 8 \\ -x_1 + 2x_6 \geq -8 \\ 5x_1 - 3x_4 + 3x_5 - 2x_6 \geq 7 \\ x_1, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}.$$

c) $\begin{cases} x_2 = x_4 - x_5, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_3 = -x_6, x_6 \geq 0 \end{cases}$.

Înmulţim prima inegalitate cu -1.

Forma mixtă:

$$\begin{cases} \inf (2x_4 - 2x_5 - x_6) \\ 3x_1 - 4x_4 + 4x_5 + 8x_6 \geq -2 \\ x_1 - 2x_6 = 8 \\ 5x_1 - 3x_4 + 3x_5 - 2x_6 \geq 7 \\ x_1, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}.$$

2) $\begin{cases} \sup (3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4) \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar, } x_3 \leq 0, x_4 \text{ arbitrar} \end{cases}$.

Să se aducă la:

a) forma standard;

b) forma canonică;

c) forma mixtă.

Rezolvare.

a) $\begin{cases} x_2 = x_5 - x_6, x_5, x_6 \geq 0 \\ x_3 = -x_7, x_7 \geq 0 \\ x_4 = x_8 - x_9, x_8, x_9 \geq 0 \\ x_{10}, x_{11}, x_{12} \geq 0 \text{ variabile ecart} \end{cases}$.

Forma standard:

$$\begin{cases} \sup(3x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9) \\ x_1 + 4x_5 - 4x_6 + x_7 - 3x_8 + 3x_9 + x_{10} = 3 \\ -2x_1 + x_5 - x_6 - 2x_7 - x_8 + x_9 - x_{11} = -1 \\ 5x_1 - 3x_5 + 3x_6 - x_7 + 2x_8 - 2x_9 + x_{12} = 4 \\ x_1, x_5, ..., x_{12} \geq 0 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x_2 = x_5 - x_6, x_5, x_6 \geq 0 \\ x_3 = -x_7, x_7 \geq 0 \\ x_4 = x_8 - x_9, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$.

Înmulţim a 2-a inegalitate cu -1 ca s-o facem concordantă.

Forma canonică:

$$\begin{cases} \sup(3x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9) \\ x_1 + 4x_5 - 4x_6 + x_7 - 3x_8 + 3x_9 \leq 3 \\ 2x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9 \leq -1 \\ 5x_1 - 3x_5 + 3x_6 - x_7 + 2x_8 - 2x_9 \leq 4 \\ x_1, x_5, ..., x_9 \geq 0 \end{cases}.$$

c) În acest caz, forma mixtă coincide cu forma canonică.

Forma mixtă:

$$\begin{cases} \sup(3x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9) \\ x_1 + 4x_5 - 4x_6 + x_7 - 3x_8 + 3x_9 \leq 3 \\ 2x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9 \leq -1 \\ 5x_1 - 3x_5 + 3x_6 - x_7 + 2x_8 - 2x_9 \leq 4 \\ x_1, x_5, ..., x_9 \geq 0 \end{cases}.$$

3) Să se rezolve cu metoda descrierii complete:

$$\begin{cases} \inf(-5x_1 - 4x_2) \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}.$$

Rezolvare.

Arătăm mai întâi că problema are soluţie optimă:

Domeniul admisibil $P = \left\{x \in \mathbb{R}^4_+ | x_1 + 3x_2 + x_3 = 15, 4x_1 + x_2 + x_4 = 16\right\}$ este nevid ($(0, 0, 15, 16)^T \in P$), închis (limita unui şir din P verifică şi ea cele 2 ecuaţii şi condiţiile de semn, deci este şi ea în P) şi mărginit ($P \subset [0, 4] \times [0, 5] \times [0, 15] \times [0, 16]$, ultima fiind mărginită în $\mathbb{R}^4$), deci compact, iar funcţia obiectiv $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f(x) = -5x_1 - 4x_2$ este continuă (fiind liniară). Din teorema lui Weierstrass (o funcţie continuă pe un compact nevid este mărginită şi îşi atinge marginile) $\implies \exists x^* \in P$ a. î.

$f(x^*) = \inf\limits_{x \in P} f(x) \implies \exists x^*$ soluţie optimă.

Apoi facem tabelul (calculăm valoarea funcţiei obiectiv numai pentru soluţiile de bază admisibile, adică având toate componentele ≥ 0).
Variabile de bază $x_1, x_2 \implies$ baza este $(a^1, a^2) \implies$ pentru a obţine soluţia de bază asociată acestei baze punem $x_3 = x_4 = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 15 \\ 4x_1 + x_2 = 16 \end{array} \right\} \implies$
$x_1 = 3, x_2 = 4 \implies$ soluţia de bază este în acest caz $(3,4,0,0)^T$.
$f((3,4,0,0)^T) = -5 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = -31$.
Analog se determină elementele de pe celelalte linii ale tabelului.

Variabile de bază	Soluţie de bază	Valoarea funcţiei obiectiv
x_1, x_2	$(3,4,0,0)^T$	-31
x_1, x_3	$(4,0,11,0)^T$	-20
x_1, x_4	$(15,0,0,-44)^T$	-
x_2, x_3	$(0,16,-33,0)^T$	-
x_2, x_4	$(0,5,0,11)^T$	-20
x_3, x_4	$(0,0,15,16)^T$	0

$\min(-31,-20,-20,0) = -31$, atins pentru $(3,4,0,0)^T \implies$ soluţie optimă $(3,4,0,0)^T$, valoarea optimă -31.

$$4) \left\{ \begin{array}{l} \inf(-x_1) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{array} \right.$$

Să se completeze tabelul de la metoda descrierii complete şi să se determine soluţia admisibilă de bază pentru care se atinge minimul valorilor calculate ale funcţiei obiectiv. Să se arate că aceasta nu este soluţie optimă. Are problema soluţie optimă? Arătaţi că problema are optim infinit.
Rezolvare.
Tabelul este:

Variabile de bază	Soluţie de bază	Valoarea funcţiei obiectiv
x_1, x_2	$(-9,-6,0,0)^T$	-
x_1, x_3	$(3,0,6,0)^T$	-3
x_1, x_4	$(-3,0,0,6)^T$	-
x_2, x_3	$\left(0,-\frac{3}{2},\frac{9}{2},0\right)^T$	-
x_2, x_4	$(0,3,0,9)^T$	0
x_3, x_4	$(0,0,3,3)^T$	0

$\min(-3,0,0) = -3$ atins pentru soluţia admisibilă de bază $\overline{x} = (3,0,6,0)^T$.
Fie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f(x) = -x_1$ şi
$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^4_+ \middle| -x_1 + x_2 + x_3 = 3, -x_2 + x_3 + x_4 = 6 \right\}$.

$f(\overline{x}) = -3$.
Pentru a arăta că $\overline{x}$ nu este soluţie optimă căutăm $\widetilde{x} \in P$ cu $f(\widetilde{x}) < -3$. Deoarece $f(\widetilde{x}) = -\widetilde{x}_1$, căutăm de exemplu $\widetilde{x}$ cu $\widetilde{x}_1 = 4$. Punem $\widetilde{x}_3 = 0 \implies \widetilde{x} = (4, 7, 0, 13)^T \in P$ şi $f(\widetilde{x}) = -4 < -3 = f(\overline{x}) \implies \overline{x}$ nu este soluţie optimă.
Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies rangA = 2 < 4 \implies$ se poate aplica teorema fundamentală a optimizării liniare.
Presupunem prin absurd că problema are soluţie optimă $\overset{\text{TFOL}}{\implies}$ problema are soluţie optimă de bază $\implies \overline{x}$ este soluţie optimă, contradicţie. Deci problema nu are soluţie optimă.
Căutăm $x(\lambda) \in P$ cu $x_1(\lambda) = \lambda$ şi $x_3(\lambda) = 0 \implies$
$x(\lambda) = (\lambda, \lambda + 3, 0, \lambda + 9)^T \in P, \forall \lambda \geq 0$ şi $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f(x(\lambda)) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} (-\lambda) = -\infty \implies \inf\limits_{x \in P} f(x) = -\infty \implies$ problema are optim infinit.