Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Analiză Numerică
14.10.2020

CURS#2

I. Ecuaţii neliniare

(c) Metode iterative de punct fix:

- (i) teorema lui Brouwer (existenţă şi unicitate);
- (ii) teorema de convergenţă; estimarea erorii;
- (iii) teorema de convergenţă (viteză de convergenţă superioară);
- (iv) algoritm; interpretare geometrică; caracterizare.

(d) Metoda Newton-Raphson:

- (i) algoritm;
- (ii) teorema de convergenţă/viteză de convergenţă;
- (iii) analiza erorii;
- (iv) interpretare geometrică;
- (v) caracterizare.

2) METODE ITERATIVE DE PUNCT FIX

DEFINIȚIE:

Punctul $x^* \in [a,b]$ se numește punct fix pentru funcția $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dacă $\phi(x^*) = x^*$.

OBSERVAȚII:

(i) Rezolvarea ecuației neliniare

$$\boxed{f(x) = 0 \quad , \quad f : [a,b] \to \mathbb{R}} \quad (1)$$

se poate reduce la o problemă de punct fix pentru o funcție $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. De exemplu

$$\phi(x) = x - f(x)$$

$$\phi(x) = x + 5 f(x)$$

$$\phi(x) = x + \frac{f(x)}{x^2+3}$$

(ii) Interpretare geometrică: intersecția graficului lui ϕ cu prima bisectoare.

<u>TEOREMA</u> (Brouwer):

Fie $\phi \in C[a,b]$, cu $\phi(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$.

Atunci:

(i) EXISTENTA: ϕ are <u>cel puțin un punct fix</u> $x^* \in [a,b]$.

(ii) UNICITATEA: Dacă, în plus

(a) $\exists\, \phi'(x)$, $\forall x \in (a,b)$;

(b) $\exists\, k \in (0,1)$:

$$|\phi'(x)| \leq k, \ \forall x \in (a,b);$$

atunci ϕ are <u>un singur punct fix</u> $x^* \in [a,b]$.

<u>Dem</u>:

(i) <u>EXISTENTA</u>:

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := \phi(x) - x \Rightarrow$

$g \in C[a,b]$ (*)

<u>Cazul 1</u>: $g(a) = 0$ sau $g(b) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a sau b punct fix ✓

<u>Cazul 2</u>: $g(a) \neq 0$ și $g(b) \neq 0$

$a \leq \phi(x) \leq b, \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \phi(a) - a =: g(a) \\ g(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(a) > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \geq \phi(b) - b =: g(b) \\ g(b) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(b) < 0$$

Cum $g \in C[a,b]$, rezultă că

$$\exists x^* \in (a,b) : \quad \begin{array}{l} g(x^*) = 0 \\ \phi(x^*) = x^* \end{array} \checkmark$$

(ii) <u>UNICITATEA</u>:

Fie x^* și $\tilde{x}^* \in [a,b]$ a.î. $\phi(x^*) = x^*$ și $\phi(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*$. Presupunem $x^* \neq \tilde{x}^* \Rightarrow$

$$|x^* - \tilde{x}^*| = |\phi(x^*) - \phi(\tilde{x}^*)| \overset{\text{Lagrange}}{=}$$

$$= |\phi'(\xi)(x^* - \tilde{x}^*)| \overset{(b)}{\leq} k|x^* - \tilde{x}^*| <$$

ξ între x^* și $\tilde{x}^*$

$$< |x^* - \tilde{x}^*| \quad \text{↯} \Rightarrow x^* = \tilde{x}^* \quad \square$$

DEFINIȚIE:

Fie $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}$.

Spunem că șirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge către $x^* \in \mathbb{R}$ cu ordinul (viteza) de convergență $r>0$ dacă

$$\boxed{\exists\, C \geq 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{|x^* - x_{n-1}|}{|x^* - x_n|^r} = C}$$

C se numește constanta erorii asimptotice

Cazuri particulare:

1) $r = 1$ & $\begin{cases} C = 0 & \text{- supraliniară} \\ 0 < C < 1 & \text{- liniară} \\ C = 1 & \text{- subliniară} \end{cases}$

2) $r = 2$ & $C > 0$ - pătratică

3) $r = 3$ & $C > 0$ - cubică

TEOREMA (convergența):

În ipotezele teoremei lui Brouwer, ie

(a) $\phi \in C[a,b]$;

(b) $\phi([a,b]) \subseteq [a,b]$;

(c) $\exists\, \phi'(x)$, $\forall x \in (a,b)$ și ϕ' continuă;

(d) $\exists\, k \in (0,1)$: $|\phi'(x)| \leq k$, $\forall x \in (a,b)$;

sunt valide următoarele:

(i) Șirul de aproximări generat de iterația de punct fix asociată lui ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 \in [a,b] \\ x_n = \phi(x_{n-1}), \quad \forall n \geq 1 \end{array}} \quad (2)$$

converge către unicul punct fix $x^* \in [a,b]$ al lui ϕ, ie

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = x^* \quad \text{cu} \quad \phi(x^*) = x^*} \quad (3)$$

(ii) Dacă $\phi'(x^*) \neq 0$, atunci viteza de convergență a șirului de aproximări $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este <u>liniară</u>, ie

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|} = |\phi'(x^*)| \in (0,1)} \quad (4)$$

<u>Dem</u>:

(i) Cf teoremei lui Brouwer:

$$\exists!\ x^* \in [a,b] : \quad \phi(x^*) = x^*$$

$$|x^* - x_n| = |\phi(x^*) - \phi(x_{n-1})| \underset{\text{Lagrange}}{=}$$

$$|\phi'(\xi_{n-1})(x^* - x_{n-1})| \leq k|x^* - x_{n-1}| \leq$$

ξ_{n-1} între x^* & x_{n-1}

$$\leq \ldots \leq k^2 |x^* - x_{n-2}| \leq \ldots \leq k^n |x^* - x_0|$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{pt că } k \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \quad \checkmark$$

(ii) Repetăm raționamentul de la (i) și obținem:

$$\frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|} = |\phi'(\xi_{n-1})| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\phi'(x^*)|$$

ξ_{n-1} între x^* & x_{n-1}

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|} = \underbrace{|\phi'(x^*)|}_{\in (0,1)}$$

$\Rightarrow$ viteză/ordin de convergență <u>liniară</u>

$\square$

<u>DEFINIȚIE</u>:

Iterația dată de (2) se <u>metodă iterativă de punct fix</u> indusă de (asociată cu) funcția de punct fix $\phi : [a,b] \to [a,b]$

COROLAR (estimarea erorii):

În ipotezele teoremei de convergență, au loc următoarele estimări ale erorii:

$$\boxed{e_n := e_a(x_n) = |x^* - x_n| \le k^n \max\{x_0 - a,\ x_0 - b\},\quad \forall n \ge 1} \quad (5)$$

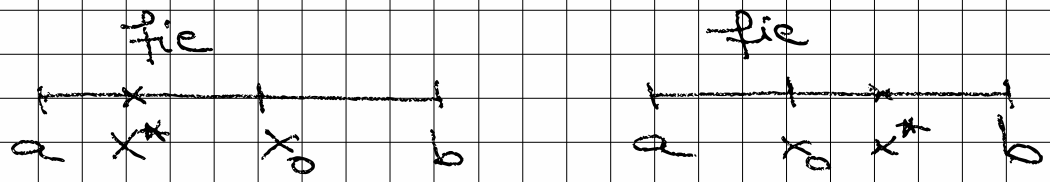
$$\boxed{e_n := e_a(x_n) = |x^* - x_n| \le \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|,\quad \forall n \ge 1} \quad (6)$$

Dem:

- Cf teoremei de convergență:

$$e_n := |x^* - x_n| \le k^n |x^* - x_0|$$

Cum $x_0, x^* \in [a,b]$, rezultă că



$$\Rightarrow |x^* - x_0| \le \begin{cases} |a - x_0| = x_0 - a \\ |b - x_0| = b - x_0 \end{cases} \le$$

$$\le \max\{x_0 - a,\ b - x_0\} \quad \checkmark$$

• Reluăm raționamentul din teorema de convergență:

$$|x_{n+1}-x_n| = |\phi(x_n)-\phi(x_{n-1})| \underset{\text{Lagrange}}{=}$$

$$= |\phi'(\xi_{n-1})| \cdot |x_n - x_{n-1}| \quad , \xi_{n-1} \text{ între } x_{n-1}, x_n$$

$$\leq k|x_n - x_{n-1}| \leq \dots$$

$$\leq k^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq k^n |x_1 - x_0|$$

Fie $m > n \geq 1 \Rightarrow$

$$|x_m - x_n| =$$

$$= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)| \leq$$

$$\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq k^{m-1}|x_1 - x_0| + k^{m-2}|x_1 - x_0| + \dots + k^n |x_1 - x_n|$$

$$= k^n |x_1 - x_0| \left(k^{m-n-1} + k^{m-n-2} + \dots + 1\right)$$

$$= \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \left(1 - k^{m-n}\right) \underset{m \to \infty}{\Longrightarrow}$$

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \checkmark$$

$\square$

TEOREMA (viteză/ordin de convergență superior):

Fie $\phi \in C^2[a,b]$ a.î. $\phi(x^*) = x^*$, unde $x^* \in (a,b)$. Dacă

(a) $\phi'(x^*) = 0$;

(b) $\exists M > 0 : |\phi''(x)| \leq M$, $\forall x \in I$ vecinătate a lui x^*;

atunci $\exists\, \delta_0 > 0$ a.î. șirul de aproximări

$$\begin{cases} x_0 \in [x^* - \delta_0,\ x^* + \delta_0] \\ x_n = \phi(x_{n-1}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge către x^* cu viteza/ordinul de convergență <u>cel puțin pătratică</u>, ie

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \\ &\lim_{n\to\infty} \frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|^2} \leq \frac{M}{2} \end{aligned}} \qquad (7)$$

Dem:

CONVERGENTA:

$\phi'(x^*) = 0$ și $\phi' \in C^1[a,b] \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &\exists \delta_0 > 0: \\ &\quad |\phi'(x) - \phi'(x^*)| \le k < 1, \ \forall x \in [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0] \\ &\quad |\phi'(x)| \le k < 1, \ \forall x \in [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0] \end{aligned}}$$

Atunci, $\forall x \in [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0]$:

$$|\phi(x) - x^*| = |\phi(x) - \phi(x^*)| \underset{\text{Lagrange}}{=}$$

$$= |\phi'(\xi_x)(x - x^*)|, \quad \xi_x \text{ între } x \text{ \& } x^*$$

$$= |\phi'(\xi_x)| \cdot |x - x^*|, \quad \xi_x \in [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0]$$

$$\le k\,\delta_0 < \delta_0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi(x) \in [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0], \ \forall x \in [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0]}$$

Astfel sunt îndeplinite condițiile teoremei de convergență pt funcția de punct fix

$\phi: [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0] \longrightarrow [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0]$ ✓

VITEZA DE CONVERGENȚĂ:

Cf teoremei lui Taylor, $\forall x \in [x^* - \delta_0, x^* + \delta_0]$:

$$\phi(x) = \phi(x^*) + \phi'(x^*)(x - x^*) + \phi''(\xi_x)\frac{(x-x^*)^2}{2}$$

ξ_x între x și x^*

$$= x^* + \phi''(\xi_x)\frac{(x-x^*)^2}{2}$$

Pt $x = x_n$, obținem:

$$\underbrace{\phi(x_n)}_{= x_{n+1}} = x^* + \phi''(\xi_n)\frac{(x_n - x^*)^2}{2}, \quad \xi_n \text{ între } x_n \text{ și } x^*$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \frac{|\phi''(\xi_n)|}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|\phi''(x^*)|}{2} \leq \frac{M}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \frac{|\phi''(x^*)|}{2} \leq \frac{M}{2}$$

viteză de convergență cel puțin pătratică ✓

$\square$

ALGORITM (metoda iterativă de punct fix):

Date: ϕ (construită plecând de la f), a, b

$\underline{n=0}$: $x_n \in [a,b]$

$\underline{n \geq 1}$: $x_n = \phi(x_{n-1})$

$n = n+1$

repeat step "$n \geq 1$"

OBSERVAȚII:

1) Cerințe relativ mici pentru f, ie $f \in C^1[a,b]$ sau $f \in C^2[a,b]$, dar relativ mari pt ϕ!

2) Izolarea soluției se realizează.

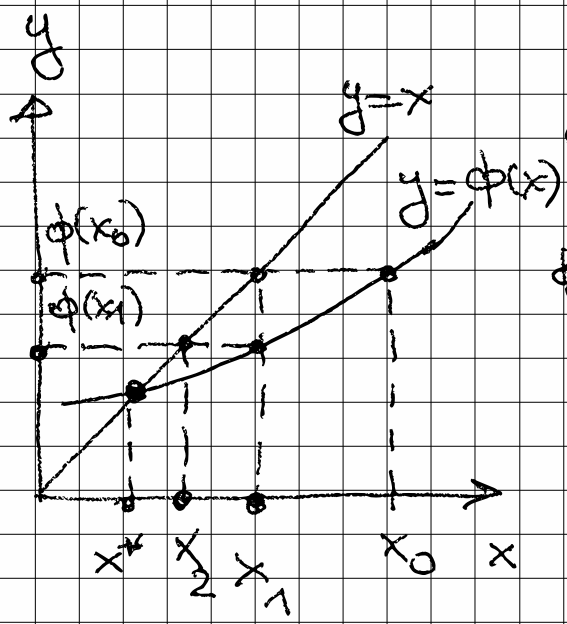
3) Convergența metodei are loc independent de alegerea lui x_0.

4) Ordin/viteză de convergență:

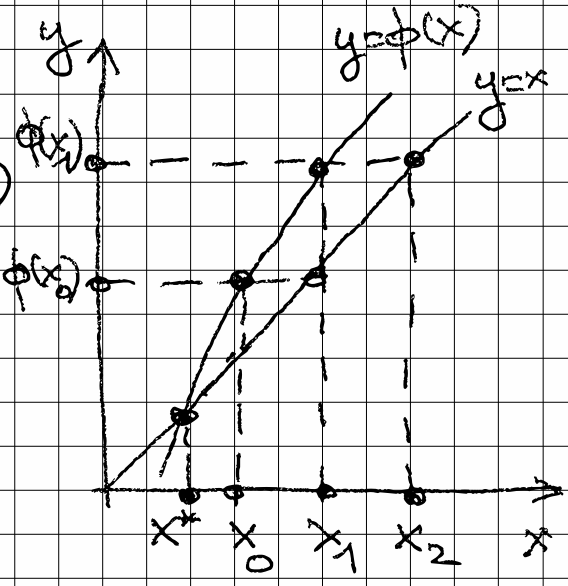
- cel puțin <u>liniară</u> dacă $\phi'(x^*) \neq 0$;
- cel puțin <u>pătratică</u> dacă $\phi'(x^*) \neq 0$ și au loc ipotezele teoremei (despre viteza de convergență)

5) <u>Criteriu de oprire</u> ($x^* \neq 0$):

$n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{|x_{n-1} - x_n|}{|x_{n-1}|} \leq \varepsilon$ toleranța



Convergentă



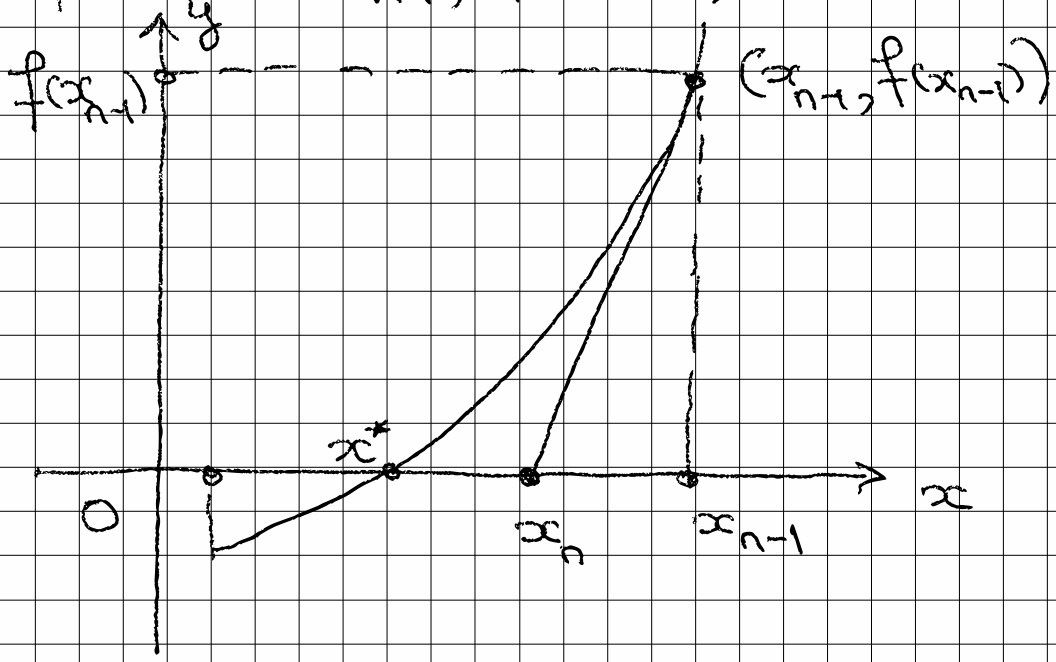
Divergentă

3) METODA NEWTON – RAPHSON

Considerăm, din nou, ecuația neliniară:

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}, \quad f(x)=0 \qquad (1)$$

<u>IDEEA</u>: La pasul n, aproximarea x_n a soluției exacte x^* a ecuației (1) se obține prin intersecția cu axa Ox a tangentei la graficul funcției f în punctul $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$.



OBSERVAȚIE:

Metoda se poate deduce și prin considerarea polinomului Taylor de gradul întâi în vecinătatea soluției exacte a ecuației (1), $x^* \in [a,b]$, cu ipotezele:

(i) $f \in C^2[a,b]$;

(ii) $|x_0 - x^*|$ suficient de mic;

(iii) $f'(x_0) \neq 0$.

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2}(x^* - x_0)^2,$$

unde ξ_0 între x^* și x_0 $\Rightarrow$

$$0 \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) \Rightarrow$$

$$0 \simeq \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x^* - x_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^* \simeq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =: x_1} \qquad (2)$$

ALGORITM (metoda Newton-Raphson):

Date: f, f', a, b

$n=0$: $x_n \in [a,b]$

$n = n+1$

$n \geq 1$: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

$n = n+1$

repeat step "$n \geq 1$"

TEOREMA (convergență / viteză de conv):

Fie $f \in C^2[a,b]$ cu $f(a)f(b) < 0$.

Dacă $x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*) = 0$ și $f'(x^*) \neq 0$, atunci $\exists\, \delta > 0$ a.î. șirul aproximărilor definite de metoda Newton-Raphson

$$\begin{cases} x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad (3)$$

converge către x^* cu viteza de conv. cel puțin pătratică.

Dem:

Arătăm că metoda Newton-Raphson este o metodă iterativă de punct fix și satisface ipotezele teoremei de punct fix.

- $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$,

funcția de punct fix asociată metodei Newton-Raphson $\Longrightarrow$

$\boxed{\phi(x^*) = x^*}$, ie x^* punct fix pt ϕ (4)

- $f'(x^*) \neq 0$ și $f' \in C^1[a,b] \Longrightarrow$

$\exists\, \delta_1 > 0 : f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_1]$

Fie $\phi : [x^* - \delta_1, x^* + \delta_1] \longrightarrow \mathbb{R} \Longrightarrow$

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right] = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$= \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \Longrightarrow \boxed{\phi'(x^*) = 0} \quad (5)$$

Evident, $\phi' \in C[x^*-\delta_1, x^*+\delta_1] \subset C[a,b]$ și $\phi'(x^*) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists\ 0 < \delta \le \delta_1 : \\ \quad |\phi'(x)| = |\phi'(x) - \phi'(x^*)| \le k < 1, \\ \qquad \forall\, x \in [x^*-\delta, x^*+\delta] \end{array}} \quad (6)$$

• Mai trebuie să arătăm că

$$\boxed{\phi(x) \in [x^*-\delta, x^*+\delta], \quad \forall\, x \in [x^*-\delta, x^*+\delta]} \quad (7)$$

Cf teoremei Lagrange, $\forall x \in [x^*-\delta, x^*+\delta]$, $\exists\, \xi_x$ între x și x^* a.î.

$$|\phi(x) - \underbrace{\phi(x^*)}_{=x^*}| = |\phi'(\xi_x)| \cdot |x - x^*| \le$$

$$\le k\,|x - x^*| < |x - x^*| \le \delta \quad \Rightarrow (7)$$

• Prin urmare, ϕ satisface ipotezele teoremei de punct fix, adică șirul de aproximări generat de metoda N-R, $\{x_n\}_{n\ge 0}$ <u>converge către x^*</u>, ce

viteza de convergență cel puțin liniară.

- Cum $\varphi'(x^*) = 0$, din teorema ref. la viteza de convergență a metodei iterative de punct fix rezultă că $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge către x^* <u>cu viteza de conv. cel puțin pătratică</u>. $\square$

<u>OBSERVAȚII</u>:

1) <u>Cerințe</u> relativ mici pt f, ie $f \in C^2[a,b]$ și $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$, dar nu tocmai convenabile dpdv computațional.

2) <u>Izolarea soluției</u> nu se realizează în mod necesar!

3) <u>Convergența metodei</u> se realizează în funcție de alegerea primei aproximări, x_0!

4) <u>Ordinul / viteza de convergență</u>

este cel puțin pătratică.

5) Criteriu de oprire:

$$\boxed{\frac{|x_{n-1}-x_n|}{|x_{n-1}|} \le \varepsilon} \quad \text{sau} \quad \boxed{|f(x_n)| \le \varepsilon}$$

ANALIZA EROARE:

1) VITEZA DE CONVERGENȚĂ

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \ge 1 \end{cases}$$

$$e_n := x^* - x_n = x^* - x_{n-1} + \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$= \frac{1}{f'(x_{n-1})}\left[f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x^* - x_{n-1})\right]$$

$$0 = f(x^*) = f\left(x_{n-1} + (x^* - x_{n-1})\right)$$

$$= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x^* - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x^* - x_{n-1})^2 \Rightarrow$$

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x^* - x_{n-1}) = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(e_{n-1})^2$$

ξ_{n-1} între x^* și x_{n-1}

Astfel, obținem:

$$e_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})}(e_{n-1})^2, \quad \xi_{n-1} \text{ între } x^* \text{ și } x_{n-1}$$

de unde rezultă

$$\boxed{\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|^2} = \left|\frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})}\right| \simeq \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right| =: M \quad \forall n \geq 0 \text{ suficient de mare}}$$

2) CONVERGENȚA

$$|e_n| \leq M|e_{n-1}|^2 \leq M\left(M|e_{n-2}|^2\right)^2 =$$

$$M^{1+2}|e_{n-2}|^{2^2} \leq M^{1+2}\left(M|e_{n-3}|^2\right)^{2^2} =$$

$$M^{1+2^1+2^2}|e_{n-3}|^{2^3} \leq \ldots \leq$$

$$M^{1+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}}|e_0|^{2^n} = M^{2^n-1}|e_0|^{2^n}$$

$$= \frac{1}{M}\left(M|e_0|\right)^{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Alegem $x_0 \in [a,b]$: $\boxed{M|e_0| < 1}$ $\square$