Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică 2020–2021

Probleme Analiză Numerică
Matematică, Anul III

I. Ecuaţii neliniare

I.1. (a) Arătaţi că dacă şirul $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ converge către $x^\star \in \mathbb{R}$ cu ordin/viteză de convergenţă $r > 1$, atunci $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ converge către $x^\star \in \mathbb{R}$ cu ordin/viteză de convergenţă supraliniară.

(b) Arătaţi că şirul $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $x_n = \dfrac{1}{n^n}$ converge către 0 cu ordin/viteză de convergenţă supraliniară, dar fără a converge cu vreun ordin/viteză de convergenţă $r > 1$.

I.2. Presupunem că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ converge către $x^\star \in \mathbb{R}$ cu ordin/viteză de convergenţă supraliniară. Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x^\star|} = 1.$$

I.3. Fie $A > 0$ şi funcţia $\phi(x) = 2x - Ax^2$.

(a) Arătaţi că dacă metoda iterativă de punct fix asociată funcţiei ϕ converge către o limită nenulă, atunci această limită este $1/A$.

(b) Determinaţi o vecinătate a lui $1/A$ pentru care metoda iterativă de punct fix asociată funcţiei ϕ converge dacă aproximarea iniţială x_0 se găseşte în această vecinătate.

I.4. În teorema lui Brouwer, înlocuiţi condiţia

$$\exists\ k \in (0,1): \quad |\phi'(x)| \leq k\,,\ \forall\ x \in (a,b) \tag{1}$$

cu proprietatea Lipschitz pentru funcţia ϕ, i.e.

$$\exists\ L > 0: \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|\,,\ \forall\ x, y \in [a,b]\,, \tag{2}$$

cu constanta Lipschitz $L < 1$. Ce puteţi spune despre teorema lui Brouwer?

I.5. (a) Arătaţi că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ definit prin

$$\begin{cases} x_0 > \sqrt{2} \\ x_n = \dfrac{1}{2}x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\,, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge către $\sqrt{2}$.

(b) Arătaţi că dacă $0 < x_0 < \sqrt{2}$, atunci $x_1 > \sqrt{2}$.
Indicaţie: Folosiţi relaţia $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ dacă $x_0 \neq \sqrt{2}$.

(c) Folosiţi (a) şi (b) pentru a arăta că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}\,, \quad \forall\ x_0 > 0.$$

I.6. Fie $A > 0$.

(a) Arătaţi că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ definit prin

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_n = \dfrac{1}{2}x_{n-1} + \dfrac{A}{2x_{n-1}}\,, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge către $\sqrt{A}$.

(b) Ce se întâmplă dacă $x_0 < 0$?

I.7. (a) În teorema lui Brouwer, înlocuiţi condiţia

$$\exists\, k \in (0,1): \quad |\phi'(x)| \leq k\,,\ \forall\, x \in (a,b) \tag{3}$$

cu proprietatea

$$\exists\, k \in (0,1): \quad \phi'(x) \leq k\,,\ \forall\, x \in (a,b)\,. \tag{4}$$

Ce puteţi spune despre existenţa şi unicitatea punctului fix al funcţiei ϕ în acest caz?

(b) Găsiţi un contraexemplu pentru care teorema lui Brouwer nu mai este validă prin înlocuirea condiţiei (3) cu condiţia (4).

I.8. Fie $\phi \in \mathrm{C}^1[a,b]$ şi $x^\star \in (a,b)$ astfel încât $\phi(x^\star) = x^\star$ şi $|\phi'(x^\star)| > 1$.

Arătaţi că

$$\exists\, \delta > 0: \quad 0 < |x^\star - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^\star - x_0| < |x^\star - x_1|\,,$$

i.e. metoda iterativă de punct fix asociată funcţiei ϕ este divergentă.

I.9. Fie $\phi \in \mathrm{C}^m[a,b]$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, o funcţie de punct fix, $\phi(x^\star) = x^\star \in [a,b]$.

Arătaţi că dacă

$$\phi'(x^\star) = \phi''(x^\star) = \ldots = \phi^{(m-1)}(x^\star) = 0; \qquad \phi^{(m)}(x^\star) \neq 0; \tag{5}$$

şi iteraţia de punct fix

$$x_0 \in [a,b]; \qquad x_n = \phi(x_{n-1})\,, \quad n \geq 1\,; \tag{6}$$

converge la $x^\star$, atunci viteza sa (ordinul său) de convergenţă este m.

I.10. Fie $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^m\, \mathrm{e}^x$, unde $m \in \{1,2,3\}$, şi $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $x_0 > 0$, şirul de aproximări generate de *metoda Newton-Raphson* pentru ecuaţia $f(x) = 0$.

(i) Arătaţi că $x_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$.

(ii) Determinaţi relaţia dintre două erori consecutive ale şirului $\{x_n\}_{n\geq 0}$ şi arătaţi că *metoda Newton-Raphson* este convergentă în acest caz.

(iii) Care este viteza de convergenţă a şirului $\{x_n\}_{n\geq 0}$ pentru $m \in \{1,2,3\}$?

(iv) Pentru $m \in \{2,3\}$, propuneţi o metodă iterativă convergentă, cu viteza de convergenţă pătratică (demonstraţi acest din urmă fapt!).

I.11. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a.i. $x_i \neq x_j$, $\forall\, i,j \in \{0,1,2\}$, şi definim

$$f[x_0,x_1] \coloneqq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,, \qquad f[x_0,x_1,x_2] \coloneqq \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}\,. \tag{7}$$

(a) Arătaţi că $f[x_0,x_1] = f'(\xi)$, unde $\xi \in [m,M]$, $m \coloneqq \min\{x_0,x_1\}$ şi $M \coloneqq \max\{x_0,x_1\}$.

(b) Arătaţi că $f[x_i,x_j,x_k] = f[x_0,x_1,x_2]$ pentru orice (i,j,k) permutare a lui $(0,1,2)$.

(c) Arătaţi că $f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{1}{2}f''(\xi)$, unde $\xi \in [m,M]$, $m \coloneqq \min\{x_0,x_1,x_2\}$ şi $M \coloneqq \max\{x_0,x_1,x_2\}$.

(d) Presupunând că $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, arătaţi că definiţia lui $f[x_0, x_1, x_2]$ poate fi extinsă continuu la cazul în care punctele x_0, x_1 şi x_2 coincid. De exemplu, arătaţi că

$$f[x_0, x_1, x_0] = \lim_{x_2 \to x_0} f[x_0, x_1, x_2] \tag{8}$$

există şi calculaţi o formulă pentru aceasta.

I.12. Fie $c \in (0, 1)$ şi iteraţia:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + c)\,, \quad n \geq 0\,. \tag{9}$$

(a) Arătaţi că funcţia iterativă asociată iteraţiei (9) are două puncte fixe ξ_1 şi ξ_2 a.i. $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$.

(b) Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi_1$ dacă $0 \leq x_0 < \xi_2$.

(c) Ce se întâmplă cu şirul $\{x_n\}_{n \geq 0}$ dacă $x_0 < 0$ sau dacă $x_0 \geq \xi_2$?

I.13. Fie $f \in \mathrm{C}^2[a, b]$ şi $x^\star \in (a, b)$ astfel încât $f(x^\star) = 0$ şi $f'(x^\star) \neq 0$. Considerăm iteraţia asociată ecuaţiei neliniare $f(x) = 0$ (*metoda lui Steffensen*), dată de:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\big[f(x_n)\big]^2}{f\big(x_n + f(x_n)\big) - f(x_n)}\,, \quad n \geq 0\,. \tag{10}$$

(a) Explicaţi legătura iteraţiei (10) cu metoda Newton-Raphson.

(b) Arătaţi că şirul $\{x_n\}_{n \geq 0}$ converge către soluţia exactă a ecuaţiei $f(x) = 0$ dacă x_0 este suficient de aproape de aceasta.

I.14. Determinaţi viteza/ordinul de convergenţă al următoarelor metode:

(a) *Metoda lui Olver*

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_{n-1})f(x_{n-1})^2}{f'(x_{n-1})^3}\,, \quad n \geq 1\,, \tag{11}$$

unde $f \in \mathrm{C}^4[a, b]$ cu $f(x^\star) = 0$ şi $f'(x^\star) \neq 0$.

(b) *Metoda lui Steffensen*

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})^2}{f\big(f(x_{n-1}) + x_{n-1}\big) - f(x_{n-1})}\,, \quad n \geq 1\,, \tag{12}$$

unde $f \in \mathrm{C}^2[a, b]$ cu $f(x^\star) = 0$ şi $f'(x^\star) \neq 0$.