Ejercicios 1

Tópicos de Investigación CM-072

Teoria de Conjuntos

1. Prueba que $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$ no es cierto en general.
2. Sea $A_0 = \{a\}$ y definimos $A_k = 2^{A_{k-1}}$ para $k \in \mathbb{N}$. Escribe los elementos de los conjuntos A_k para todo $k = 1, 2, 3$.
3. Sean A, B, C tres conjuntos finitos. Describe intuitivamente los conjuntos $A^{(B^C)}$ y $(A^B)^C$. ¿ Cuál es el tamaño de los dos conjuntos?.
4. Prueba que si A es un conjunto infinito contable entonces lo es también A^d, para $d \in \mathbb{N}$.

Álgebra lineal

1. ¿ Qué es el espacio columna, el espacio nulo y el rango de una matriz?. Calcula estos conceptos para una matriz de unos.
2. ¿Cuál es el espacio columna de la matriz?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Encuentra los autovalores y autovectores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Considere los vectores $(1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, 1)$. Muestra que son linealmente independientes y encuentra dos vectores adicionales para formar una base de $\mathbb{R}^4$.
5. Calcula la descomposición espectral y el SVD de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Producto interno y ortogonalización

1. Considere el conjunto de las funciones desde $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$, es

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dt$$

es un producto interno.

2. Enuncie y demuestre el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

3. Asumiendo que W es una matriz no singular, se define
   $\|x\|_{p,W} = \|Wx\|_p$.
   donde para un vector $x \in \mathbb{R}^d$ se define la norma L_p como

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Probabilidad y Variables aleatorias

1. Sea $p_1, p_2, \ldots, p_N$ números no negativos tal que $p_1 + p_2 + \cdots p_N = 1$ y sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}$ y sea F el conjunto potencia de Ω. Muestra que la función $\mathbb{Q}$ dada por

$$\mathbb{Q}(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i \quad A \in F$$

   es una probabilidad en (Ω, F). Si F no es el conjunto potencia, $\mathbb{Q}$ es una probabilidad.

2. Una moneda es lanzada $2n$ veces. ¿ Cuál es la probabilidad de obtener n caras?. ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?.

3. Da un ejemplo concreto de una variable aleatorio que no es discreta ni continua.

4. Considera una variables aleatoria X con $f_X(x) = \exp(-x)$ para $x \geq 0$ y 0 en otros casos. Calcula el la función de densidad de $Y = g(X) = \log(X)$. Concluye que:

$$f_{g(X)}(r) \neq g \circ f_X(r) = g(f_X(r)).$$

5. Consideremos sobre (a, b) una variable X, tal que

$$F_X(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & x \in (a,b) \\ 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

   y

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & x \in (a,b) \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   Calcula la esperanza y varianza de X.

6. Si X es una variable aleatoria discreta y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prueba que

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in Im\ X} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

   siempre que esta suma converga absolutamente.

7. Definimos el tamaño de soporte de una variable aleatoria discreta X como el número de valores que puede alcanzar con una probabilidad distinta de cero (el número puede ser infinito). ¿Cuál es la relación entre los tamaños de soporte de una variable aleatoria discreta X y de $g(X)$?.