ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙΙ

ΡΕΠΑΝΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ-ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΑΕΜ : 10588

grepanis@ece.auth.gr

ΤΜΗΜΑ Α

1) N(s) = 1

i) Το σύστημα μας περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$H(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$ Σε κλειστό βρόχο : $T(s)=\frac{H(s)}{1+H(s)}$

1 + H(s)N(s) = 0 $1+\frac{K}{s(Ts+1)}=0 \Rightarrow s(Ts+1)+K=0 \Rightarrow Ts^2+s+K=0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι : $Ts^2+s+K=0$

γενική μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης: $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$

Διαιρώντας : $s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}=0$

$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T}}$, $\zeta=\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_n T}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{K}}$

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$T\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=K(r(t)-y(t))$$

Το σφάλμα $e(t)=r(t)-y(t)$ $T\ddot{e}(t)+\dot{e}(t)+Ke(t)=T\ddot{r}(t)+\dot{r}(t)$

Για τις εξισώσεις $x_1=e(t)$ $x_2=\dot{e}(t)$

$$\ddot{e}(t) = -\frac{1}{T}\dot{e}(t) - \frac{K}{T}e(t) + \frac{1}{T}\ddot{r}(t) + \frac{1}{T}\dot{r}(t)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{T}\dot{e}(t) - \frac{K}{T}e(t) + \frac{1}{T}\ddot{r}(t) + \frac{1}{T}\dot{r}(t) \qquad \dot{x}_1 = x_2$$

Η έξοδος του συστήματος (αν την ορίσουμε ως το e(t)) είναι:

$$y_{έξοδος}(t) = x_1$$

ii) A) Βηματική Είσοδος: $r(t) = A \Rightarrow \dot{r}(t) = 0, \ddot{r}(t) = 0$

$(\dot{e} = \ddot{e} = 0) \quad (\dot{y} = \ddot{y} = 0)$

$$T\,0 + 0 = K(r(t) - y(t)) \Rightarrow A - y_{ισορροπίας} = 0 \Rightarrow y_{ισορροπίας} = A$$

Το σφάλμα της ισορροπίας είναι:

$$e_{ισορροπίας} = r(t) - y_{ισορροπίας} = A - A \Rightarrow e_{ισορροπίας} = 0$$

Το σύστημα δεν έχει μόνιμο σφάλμα για βηματική είσοδο.

B)Είσοδος Ράμπας Κλίσης B:

Είσοδος $r(t) = Bt$

Αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση:

$$T\,0 + B = K(r(t) - y(t)) \Rightarrow B = K(r(t) - y_{ισορροπίας}) \Rightarrow e_{ισορροπίας} = \frac{B}{K}$$

Οπότε : $e_{ισορροπίας} = \frac{B}{K}$

<u>Ερμηνεία Σημείων Ισορροπίας και Επίδραση των K,T :</u>

1) Για την Βηματική Είσοδο $r(t) = A$:

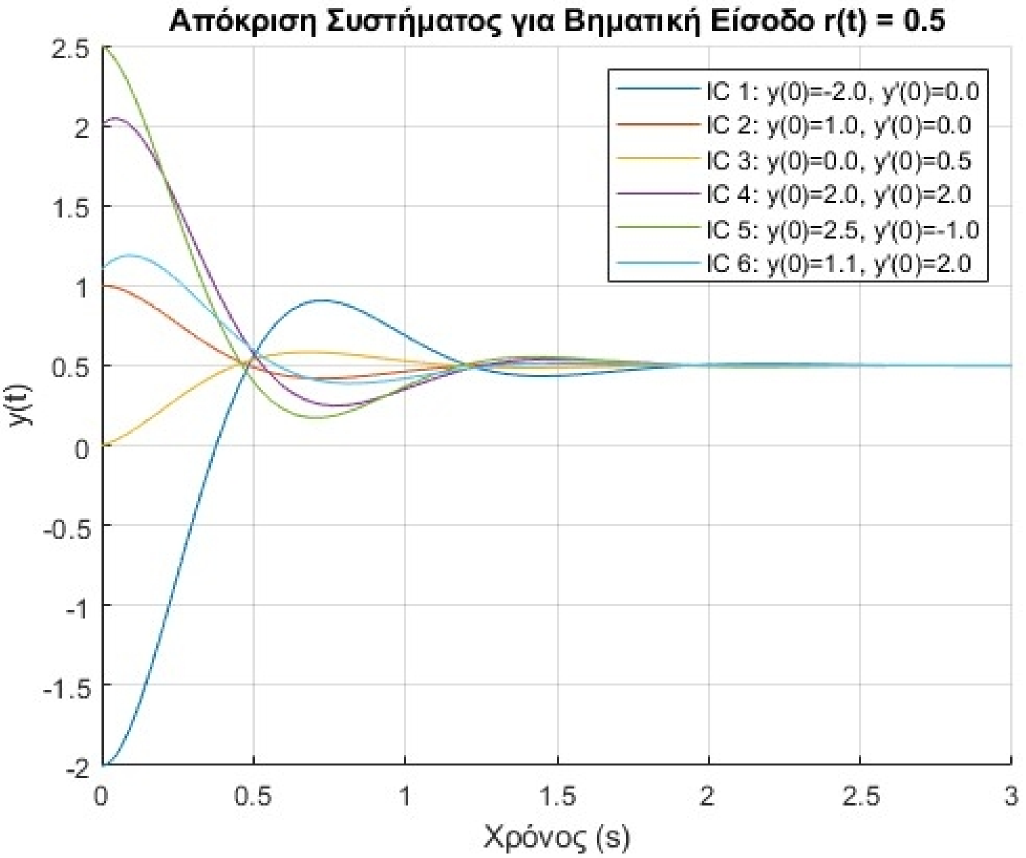
- Το σύστημα δεν έχει μόνιμο σφάλμα $(e_{ισορροπίας}=0)$
- Το Κ και το Τ δεν επηρεάζουν τη θέση ισορροπίας, αλλά επηρεάζουν την δυναμική συμπεριφορά:

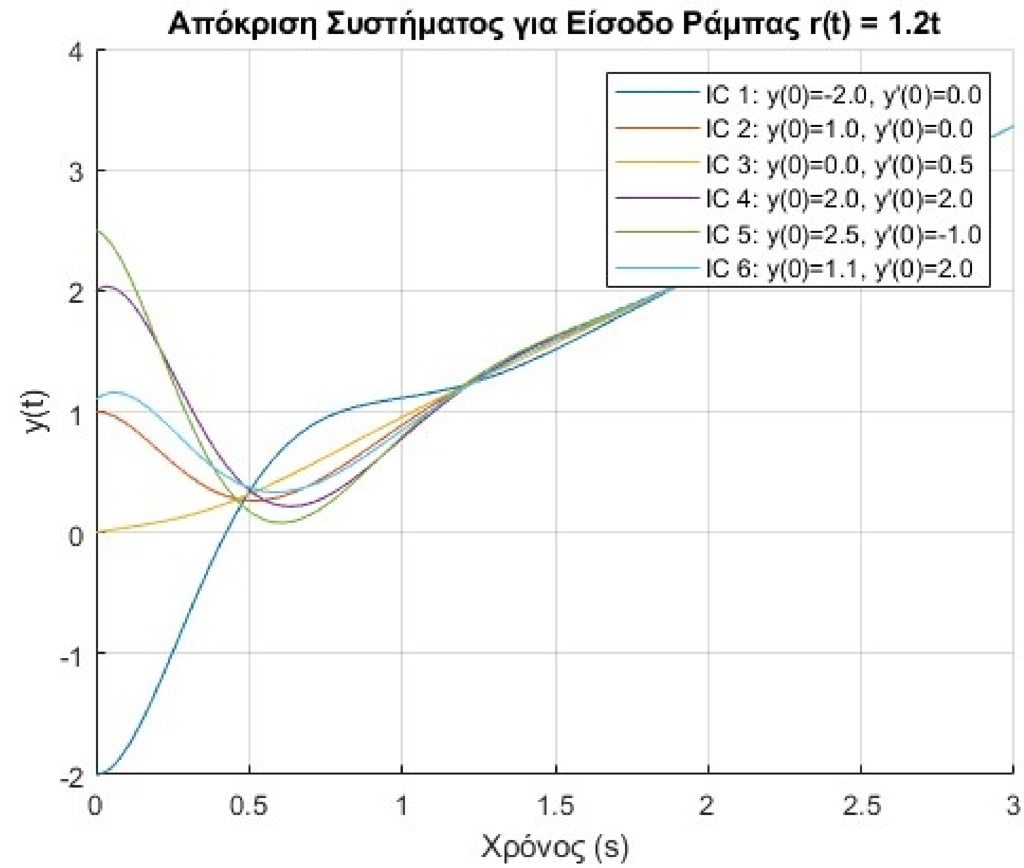
  - Μεγαλύτερο Κ: Ταχύτερη σύγκλιση στην ισορροπία.
  - Μεγαλύτερο Τ: Πιο αργή απόκριση με πιο ομαλή συμπεριφορά

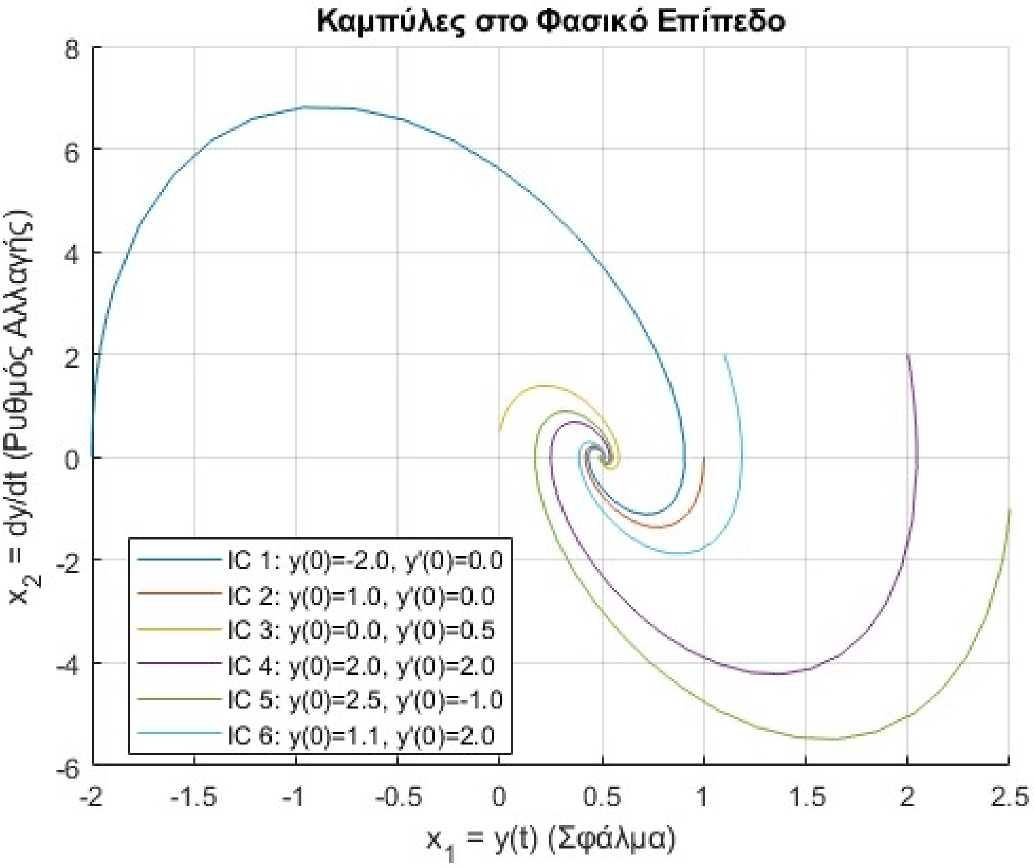
2)Για την Είσοδο Ράμπας $r(t)=Bt$:

- Το σύστημα έχει μόνιμο σφάλμα : $e_{ισορροπίας}=\frac{B}{K}$
- Το μόνιμο σφάλμα μειώνεται όσο αυξάνεται το Κ (δηλαδή, μεγαλύτερο κέρδος οδηγεί σε καλύτερη παρακολούθηση της ράμπας.
- Το Τ επηρεάζει τη δυναμική συμπεριφορά (πιο ομαλή απόκριση για μεγαλύτερο Τ), αλλά δεν επηρεάζει το μόνιμο σφάλμα.

iii) Παρακάτω απεικονίζονται οι γραφικές που προκύπτουν από την ζητούμενη προσομοίωση:


Απόκριση Συστήματος για Βηματική Είσοδο r(t) = 0.5
IC 1: y(0)=-2.0, y'(0)=0.0
IC 2: y(0)=1.0, y'(0)=0.0
IC 3: y(0)=0.0, y'(0)=0.5
IC 4: y(0)=2.0, y'(0)=2.0
IC 5: y(0)=2.5, y'(0)=-1.0
IC 6: y(0)=1.1, y'(0)=2.0
y(t)
Χρόνος (s)


Απόκριση Συστήματος για Είσοδο Ράμπας r(t) = 1.2t
IC 1: y(0)=-2.0, y'(0)=0.0
IC 2: y(0)=1.0, y'(0)=0.0
IC 3: y(0)=0.0, y'(0)=0.5
IC 4: y(0)=2.0, y'(0)=2.0
IC 5: y(0)=2.5, y'(0)=-1.0
IC 6: y(0)=1.1, y'(0)=2.0
y(t)
Χρόνος (s)



2) Θεωρούμε ότι η συνάρτηση N(s) είναι μια μη γραμμική συνάρτηση.

i)

$e(t)=r(t)-y(t)$ $\qquad$ $T\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=N(e(t))$

- Αν $|e(t)|\leq e_o$, τότε $N(e(t))=ae(t)$
- Αν $|e(t)|>e_o$, τότε $N(e(t))=sign(e(t))|e(t)|=e(t)$

Για $|e(t)|\leq e_o$:

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$$T\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=a(r(t)-y(t))\Rightarrow T\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+ay(t)=ar(t)$$

Οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $Ts^2+s+a=0$

Οι ρίζες είναι : $s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4Ta}}{2T}$

- $\omega_n=\sqrt{\frac{a}{T}}$
- $\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{a}}$

Για $|e(t)|>e_o$:

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος γίνεται :

$$T\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=r(t)-y(t)\Rightarrow T\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)=r(t)$$

Οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $Ts^2+s+1=0$

Οι ρίζες είναι : $s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4T}}{2T}$

Οι παράμετροι του συστήματος θα είναι :

- $\omega_n=\sqrt{\frac{1}{T}}$
- $\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{T}$

Συμπεραίνουμε ότι η συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται μόνο από την τιμή του T :

Οι νέες εξισώσεις κατάστασης που προκύπτουν , ορίζουμε:

- $x_1=e(t)$
- $x_2=\dot{e}(t)$

και $\dot{x}_1=x_2$

Για $|e(t)| \leq e_o$:
Η διαφορική γίνεται:

$$T\ddot{e}(t)+\dot{e}(t)+ae(t)=ar(t) \Rightarrow \dot{x}_2=-\frac{1}{T}x_2-\frac{a}{T}x_1+\frac{a}{T}r(t) \quad , \dot{x}_1=x_2$$

Για $|e(t)| > e_o$:
Η διαφορική γίνεται:

$$T\ddot{e}(t)+\dot{e}(t)+e(t)=r(t) \Rightarrow \dot{x}_2=-\frac{1}{T}x_2-\frac{1}{T}x_1+\frac{1}{T}r(t)\dot{x}_1=x_2$$

ii) <u>Περίπτωση 1 : Βηματική Είσοδος</u> $r(t)=A$:

Για αυτήν την βηματική είσοδο , το σφάλμα ισορροπίας ορίζεται ως :

$$e_{ισορροπίας}=A-y$$

α) Για $|e_{ισορροπίας}| \leq e_o$:

Εδώ, $N(e_{ισορροπίας})=ae_{ισορροπίας}$, και η εξίσωση ισορροπίας γίνεται:

$$0=N(e_{ισορροπίας}) \Rightarrow ae_{ισορροπίας}=0$$

Άρα, $e_{ισορροπίας}=0$ και $y=A$

β) Για $|e_{ισορροπίας}| > e_o$:

Εδώ, $N(e_{ισορροπίας})=e_{ισορροπίας}$, και η εξίσωση ισορροπίας γίνεται:

$$0=N(e_{ισορροπίας})\Rightarrow e_{ισορροπίας}=0$$

Άρα και πάλι $e_{ισορροπίας}=0$ και $y=A$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι το σύστημα εξισορροπεί πάντα στην $e_{ισορροπίας}=0$ τιμή : $y_{ισορροπίας}=A$

<u>Περίπτωση 2 :</u>
<u>Είσοδος Ράμπας</u> $r(t)=Bt$:

Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε για το σφάλμα ισορροπίας :

$$e_{ισορροπίας}=Bt-y$$

$$\dot{y}=B$$

Για τον υπολογισμό των δυο περιοχών της συνάρτησης $N(e(t))$:

α) Για $|e_{ισορροπίας}|\leq e_o$:

$N(e_{ισορροπίας})=ae_{ισορροπίας}$ η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$T\dot{y}+ae_{ισορροπίας}=0\Rightarrow TB+ae_{ισορροπίας}=0\Rightarrow e_{ισορροπίας}=-\frac{TB}{a}$$

Άρα, $y_{ισορροπίας}=Bt-e_{ισορροπίας}=Bt+\frac{TB}{a}$

β) Για $|e_{ισορροπίας}|>e_o$:

Εδώ, $N(e_{ισορροπίας})=e_{ισορροπίας}$ και η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$T\,\dot{y}+e_{ισορροπίας}=0\Rightarrow TB+e_{ισορροπίας}=0\Rightarrow e_{ισορροπίας}=-TB$$

Άρα, $y_{ισορροπίας}=Bt-e_{ισορροπίας}=Bt+TB$

iii) Για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων:

1) **Βηματική Είσοδος** $(r(t)=0.5)$ **:**

<u>Θεωρητική Ανάλυση:</u>

- Η έξοδος $y(t)$ συγκλίνει στο $y_{ισορροπίας}=0.5$.
- Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται από τις παραμέτρους K,T,α και e_o:
    - Το α καθορίζει την απόκριση για $|e|\leq e_o$
    - Το e_o διαχωρίζει τις περιοχές συμπεριφοράς της $N(e)$

Προσομοίωση:

- Η έξοδος $y(t)$ συγκλίνει πράγματι στην είσοδο $r(t)=0.5$ χωρίς μόνιμο σφάλμα.
- Οι μεταβατικές αποκλίσεις είναι ομαλές και η έξοδος φτάνει στην τελική τιμή μέσα σε 1 δευτερόλεπτο.
- Για αρχικές συνθήκες μακριά από την ισορροπία, οι ταλαντώσεις είναι μικρές λόγω της απόσβεσης.

Σύγκριση Με Ερώτημα 1:

- Το σύστημα κλειστού βρόχου παρακολουθεί τέλεια τη βηματική είσοδο.
- Οι θεωρητικές παράμετροι (ω_n , ζ) συμφωνούν με την ταχύτητα σύγκλισης που παρατηρήθηκε.

2) **Είσοδοι Ράμπας :**

Θεωρητική Ανάλυση:

- Στην περίπτωση ράμπας $r(t)=Bt$, το σύστημα παρουσιάζει μόνιμο σφάλμα:
  - Για $|e|\leq e_o$, το μόνιμο σφάλμα $e_{μονίμου}=\frac{TB}{a}$ είναι:
  - Για $|e|>e_o$, το μόνιμο σφάλμα $e_{μονίμου}=TB$ είναι:
  - Επομένως, για μεγαλύτερες κλίσεις B , το σφάλμα αυξάνεται καθώς και όταν το α μικραίνει.

Προσομοίωση:

- Για $r(t)=1.2t$
  - Η ράμπα έχει απότομη κλίση.
  - Το μόνιμο σφάλμα είναι μεγάλο $(e_{μονίμου}\approx T\,1.2=0.24)$ όπως αναμένεται.

- Το σύστημα καθυστερεί να παρακολουθήσει την είσοδο λόγω της μεγάλης κλίσης B = 1.2 .

- Για $r(t)=0.04t$

  - Η ράμπα έχει μικρή κλίση.
  - Το μόνιμο σφάλμα είναι μικρότερο $(e_{μονίμου} \approx T\,0.04 = 0.008)$.
  - Το σύστημα παρακολουθεί την είσοδο σχεδόν τέλεια, με ελάχιστο μόνιμο σφάλμα.

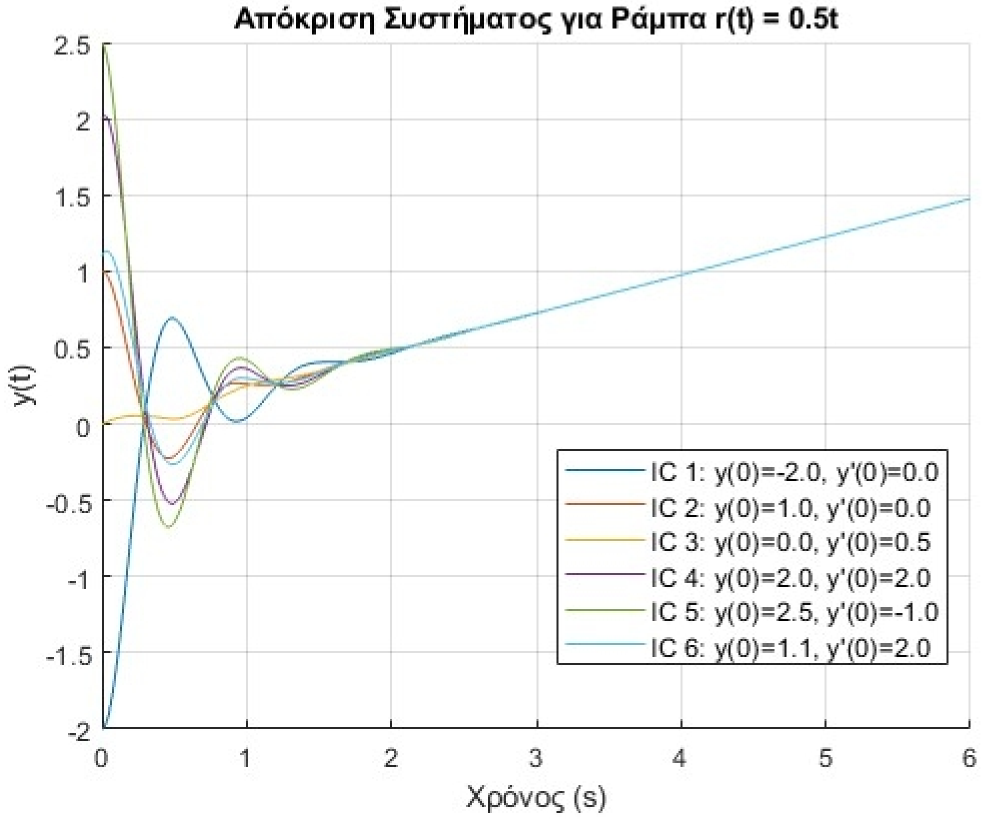
- Για $r(t)=0.5t$

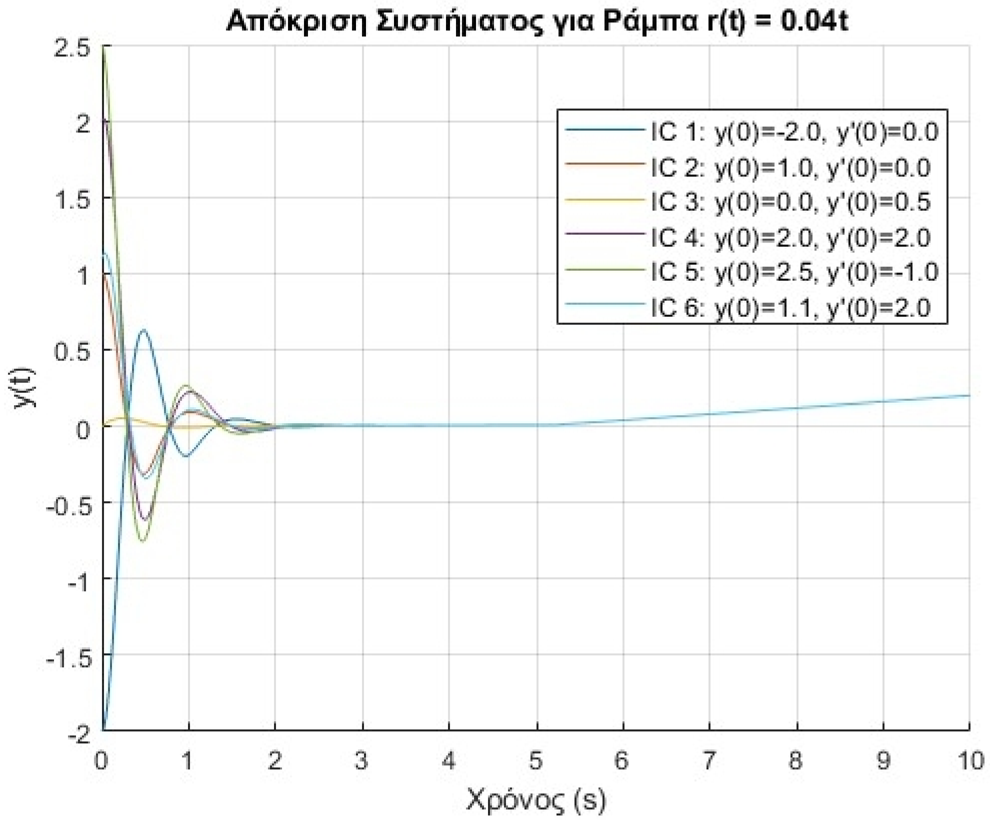
  - Το σφάλμα είναι ενδιάμεσο $(e_{μονίμου} \approx T\,0.5 = 0.1)$.
  - Το σύστημα παρακολουθεί τη ράμπα με μικρό μόνιμο σφάλμα , αλλά με εμφανή καθυστέρηση σε σχέση με την είσοδο.

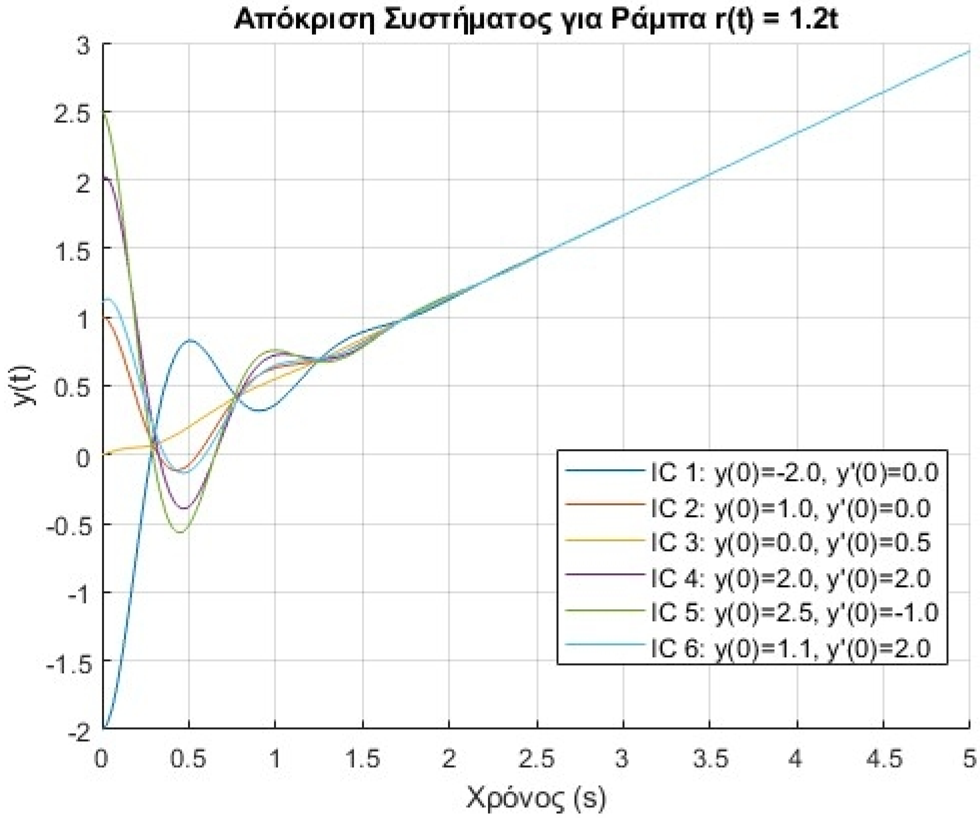
Σύγκριση Με Ερώτημα 1:

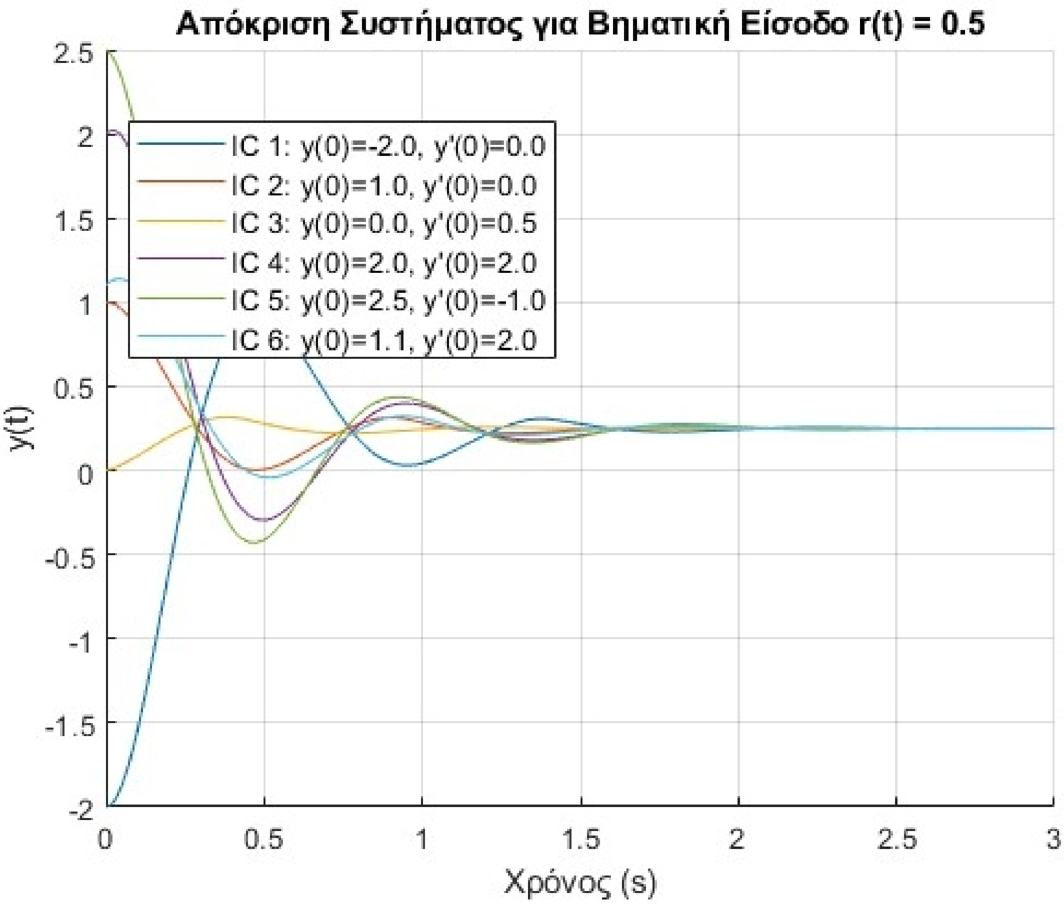
- Η θεωρητική ανάλυση του Ερωτήματος 1 επιβεβαιώνεται πλήρως.
- Για $|e| \le e_o$, η συμπεριφορά είναι ομαλή και το σφάλμα είναι μικρότερο λόγω της ενίσχυσης.
- Για $|e| > e_o$, το σύστημα παρουσιάζει μεγαλύτερο σφάλμα, όπως αναμένεται από τη μη γραμμική δυναμική.

Προσομοιώσεις:


Απόκριση Συστήματος για Ράμπα r(t) = 0.5t
y(t)
Χρόνος (s)
IC 1: y(0)=-2.0, y'(0)=0.0
IC 2: y(0)=1.0, y'(0)=0.0
IC 3: y(0)=0.0, y'(0)=0.5
IC 4: y(0)=2.0, y'(0)=2.0
IC 5: y(0)=2.5, y'(0)=-1.0
IC 6: y(0)=1.1, y'(0)=2.0


Απόκριση Συστήματος για Ράμπα r(t) = 0.04t
y(t)
Χρόνος (s)
IC 1: y(0)=-2.0, y'(0)=0.0
IC 2: y(0)=1.0, y'(0)=0.0
IC 3: y(0)=0.0, y'(0)=0.5
IC 4: y(0)=2.0, y'(0)=2.0
IC 5: y(0)=2.5, y'(0)=-1.0
IC 6: y(0)=1.1, y'(0)=2.0


Απόκριση Συστήματος για Ράμπα r(t) = 1.2t
y(t)
Χρόνος (s)
IC 1: y(0)=-2.0, y'(0)=0.0
IC 2: y(0)=1.0, y'(0)=0.0
IC 3: y(0)=0.0, y'(0)=0.5
IC 4: y(0)=2.0, y'(0)=2.0
IC 5: y(0)=2.5, y'(0)=-1.0
IC 6: y(0)=1.1, y'(0)=2.0


Απόκριση Συστήματος για Βηματική Είσοδο r(t) = 0.5
y(t)
Χρόνος (s)
IC 1: y(0)=-2.0, y'(0)=0.0
IC 2: y(0)=1.0, y'(0)=0.0
IC 3: y(0)=0.0, y'(0)=0.5
IC 4: y(0)=2.0, y'(0)=2.0
IC 5: y(0)=2.5, y'(0)=-1.0
IC 6: y(0)=1.1, y'(0)=2.0

ΤΜΗΜΑ Β

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + g(x) + u(x)$$

όπου $x = [x_1 x_2]^T \in \mathbb{R}^2$, το διάνυσμα καταστάσεων , $u(x) =: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου και $g(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια εν γενεί άγνωστη μη γραμμική και παραγωγίσιμη συνάρτηση των καταστάσεων.

1) Έστω ότι η μορφή της μη γραμμικής συνάρτησης είναι γνωστή :

$$g(x) = x_1 x_2 + \theta x_2^2, \theta = \frac{1}{2}$$

I) Γραμμικοποίση συστήματος $g(x) = 0$ γίνεται: $\dot{x} = Ax$

όπου: A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov δίνεται ως: $V(x) = x^T P x$
όπου, ο πίνακας P είναι η λύση της εξίσωσης Lyapunov: $A^T P + PA + Q = 0$
και ο πίνακας Q δίνεται:

Q = 0.2I = $\begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$

Για το ότι η αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αρχικά υπολογίζω τον πίνακα P δηλαδή:

Έστω $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix}$

$$A^T P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1-p_2 & -p_2-p_4 \\ p_1+p_2 & p_2-p_4 \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1-p_2 & p_1-p_2 \\ -p_2+p_4 & p_2-p_4 \end{pmatrix}$$

$$A^T P + PA = \begin{pmatrix} -2p_1-2p_2 & -2p_2-2p_4 \\ -2p_2-2p_4 & 2p_2-2p_4 \end{pmatrix}$$

$$A^T P + PA + Q = \begin{pmatrix} -2p_1-2p_2 & -2p_2-2p_4 \\ -2p_2-2p_4 & 2p_2-2p_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$
$= 0$

$-2p_1-2p_2+0.2=0 \Rightarrow p_1+p_2=0.1$ (1)
$-2p_2-2p_4+0=0 \Rightarrow p_2+p_4=0$ (2)
$2p_2-2p_4+0.2=0 \Rightarrow p_2-p_4=-0.1$ (3)

$p_1 = 0.15$, $p_2 = -0.05$, $p_4 = 0.05$,

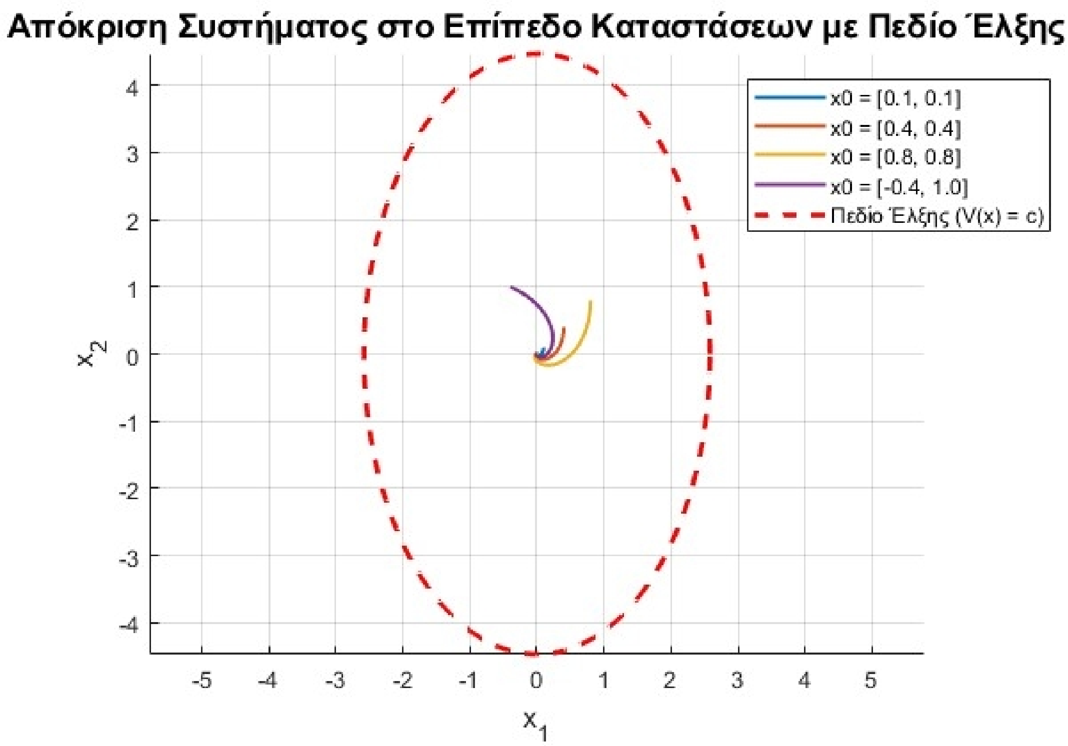
$$P = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.05 \\ -0.05 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Βλέπω ότι :
i)$P_1 > 0$ και $P_4 > 0$
ii)$\det(P) = 0.2 * 0.1 - 0^2 = 0.02 > 0$

Η παράγωγος της V(x) είναι : $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = x^T(A^T P + PA)x = -x^T Q x$

και ξέρω ότι Q(x) = 0.2I $\dot{V}(x) = -0.2(x_1^2 + x_2^2)$οπότε ,
Άρα, $V(x) \geq 0$ (θετικά ορισμένη) και $\dot{V}(x) < 0$
για κάθε $x \neq 0$ (αρνητικά ορισμένη).

Συνεπώς , το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές γύρω από το σημείο ισορροπίας (0,0)



- Συγκλίνουσες Τροχιές :

- Για αρχικές συνθήκες εντός του πεδίου έλξης ($x_1(0) = [0.1,0.1]$, $x_2(0) = [0.4,0.4]$) , οι τροχιές του συστήματος συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας (0,0)
  α.ε.

- Επιρροή Αρχικών Συνθηκών :

  - Το πεδίο έλξης εκφράζει την περιοχή εντός της οποίας το σύστημα εγγυημένα επανέρχεται στην ευσταθή κατάσταση.

Πεδίο Έλξης:

- Ελλειψοειδές Μορφή :

  - Το εκτιμώμενο πεδίο έλξης , όπως περιγράφεται από τη συνάρτηση Lyapunov V(x) = c , έχει ελλειψοειδή μορφή :

    $$0.15\, x_1^2 - 0.05\, x_1 x_2 + 0.05\, x_2^2 \leq c$$

  - Για c =1 , το ελλειψοειδές παρέχει μια ασφαλή εκτίμηση της περιοχής εντός της οποίας το σύστημα παραμένει ευσταθές.
    Η αρνητική παράγωγος $\dot{V}(x) < 0$ εξασφαλίζει ότι οι τροχιές του συστήματος μειώνουν σταδιακά την τιμή της V(x), οδηγώντας στο σημείο ισορροπίας.

- Αποτελέσματα Περιοχής :

  - Το πεδίο έλξης καλύπτει αρκετές από τις δοκιμασμένες αρχικές συνθήκες. Ωστόσο για αρχικές τιμές που ξεπερνούν το ελλειψοειδές , δεν εγγυάται η ασυμπτωτική σύγκλιση.

ii) Για Σύστημα Κλειστού Βρόχου :

Ο γενικός τύπος του νόμου ελέγχου είναι : $u(x) = -Kx$, όπου K είναι ο πίνακας ελέγχου που πρέπει να υπολογίσουμε.

Το δυναμικό σύστημα με τον νόμο ελέγχου γίνεται : $\dot{x} = (A - BK)x$

Για να έχει το σύστημα διπλή ιδιοτιμή στο λ = -3 , πρέπει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A – BK να είναι :

$$p(s) = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

Για τον υπολογισμό του Πίνακα K :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = [A, AB]$$

Για να είναι το ζεύγος ελεγκτικό θα πρέπει η διάσταση της C να είναι ίση με την διάσταση του πίνακα A (rank(C) = 2)

Επιλέγοντας $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rank(C) = 2.

Έτσι τελικά : $A - BK = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & k_1 - 1k_2 \end{pmatrix}$

Τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A – BK είναι:

$$\det(sI - (A - BK)) = \det \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1+k_1 & s+1+k_2 \end{pmatrix} = (s+1)^2 + k_2(s+1) + 1 + k_1$$

Εξισώνοντας τα δύο χαρακτηριστικά πολυώνυμα :

$p(s)=s^2+6s+9 \quad (1)$
$p(s)=(s+1)^2+k_2(s+1)+1+k_1 \quad (2)$
Προκύπτει ότι: $2+k_2=6 \Rightarrow k_2=4$ και $1+k_2+1+k_1=9 \Rightarrow 2+4+k_1=9 \Rightarrow k_1=3$

$K = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

Για την προσομοίωση θα χρησιμοποιήσω δύο τιμές του θ :

Εσφαλμένη τιμή : θ = 1
Πραγματική τιμή : θ = 0.5

Και το κλειστό σύστημα με την τιμή του θ θα γίνει:

$\dot{x}=(A-BK+\theta I)x$

Κάποια σχόλια για τα διαγράμματα που παράγονται από την προσομοίωση:

- Πρώτο Διάγραμμα (Πραγματική τιμή θ = 0.5)
    - Το σύστημα συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας (0,0) και οι δύο καταστάσεις (x_1 και x_2) σταθεροποιούνται
    - Η σύγκλιση είναι γρήγορη και ομαλή, όπως αναμενόταν λόγω της σωστής τιμής θ.
    - Αυτό επιβεβαιώνει ότι ο νόμος ελέγχου λειτουργεί σωστά όταν η πραγματική παράμετρος θ χρησιμοποιείται.
    - Όταν η πραγματική τιμή θ = 0.5 χρησιμοποιείται στον νόμο ελέγχου, το σύστημα συμπεριφέρεται όπως αναμενόταν, με ταχεία και ομαλή σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας.

- Δεύτερο Διάγραμμα (Εσφαλμένη Τιμή θ = 1)
    - Η απόκριση του συστήματος διαφέρει : η δεύτερη κατάσταση x_2 αποκλίνει σημαντικά πριν σταθεροποιηθεί, ενώ η πρώτη κατάσταση x_1 έχει επίσης πιο αργή σύγκλιση.
    - Το σύστημα εξακολουθεί να είναι ευσταθές, αλλά η δυναμική του είναι διαφορετική λόγω της εσφαλμένης παραμέτρου θ. Η ταχύτητα σύγκλισης επηρεάζεται αρνητικά.
    - Η λανθασμένη τιμή θ = 1 προκαλεί απόκριση, με πιο αργή σύγκλιση και μεγαλύτερες αποκλίσεις στις καταστάσεις. Παρά την εσφαλμένη τιμή , το σύστημα παραμένει ευσταθές, αλλά η δυναμική του δεν είναι βέλτιστη.

iii) θ άγνωστη παράμετρος.

συνάρτηση Lyapunov : $V(x,\tilde{\theta})=x^T P x+\tilde{\theta}^2$

όπου: $\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}$ και P είναι η λύση της εξίσωσης για Q = diag(2,4)

Το σύστημα περιγράφεται από την δυναμική : $\dot{x}=(A-BK)x+B\tilde{\theta}$

όπου: A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και K = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

Η δυναμική εκτίμηση της $\dot{\hat{\theta}}$ είναι: $\dot{\hat{\theta}}=-\gamma x^T P x$,όπου γ>0 είναι μια σταθερά που καθορίζει την ταχύτητα της εκτίμησης.

Η παράγωγος της Lyapunov κατά μήκος των τροχιών του συστήματος είναι: $\dot{V}(x,\tilde{\theta})=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}}\dot{\tilde{\theta}}$

Παράγωγος ως προς x:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=2x^T P \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}=x^T P\dot{x} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}=x^T P(A-BK)x+x^T PB\tilde{\theta}$$

Παράγωγος ως προς $\tilde{\theta}$:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}}=2\tilde{\theta} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}}\dot{\tilde{\theta}}=2\tilde{\theta}(-\dot{\hat{\theta}})=2\tilde{\theta}\gamma x^T Px$$

Για να εξασφαλίσουμε την αρνητικότητα της $\dot{V}$:

$$(A-BK)^T P+P(A-BK)+Q=0 \Rightarrow x^T P(A-BK)x=-x^T Q x$$

Επομένως : $\dot{V}=-x^T Q x+x^T PB\tilde{\theta}+2\tilde{\theta}\gamma x^T Px$

Οπότε για κατάλληλη επιλογή της σταθεράς γ , μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ημιορισμένη. Άρα η συνάρτηση Lyapunov μειώνεται συνεχώς και οι καταστάσεις x και το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{\theta}$ παραμένουν φραγμένα.
$\dot{V}(x,\tilde{\theta})\leq -x^T Qx$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα LaSalle (LaSalle’s Invariance Principle):

- Αρνητική Ορισμένη Παράγωγος:

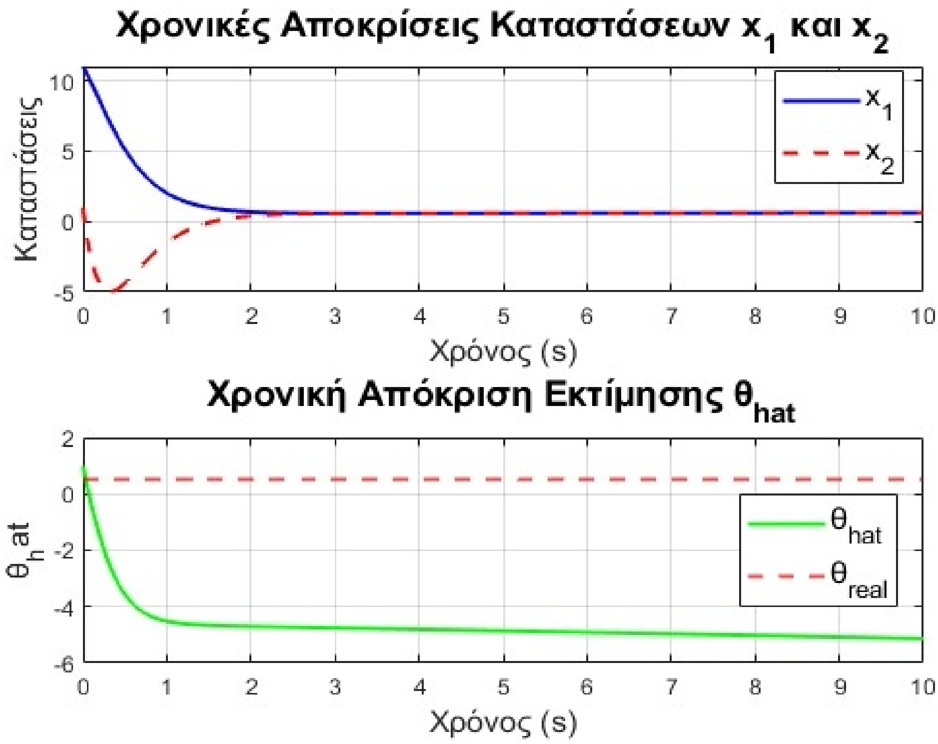
  - Η $\dot{V}(x,\tilde{\theta})\leq 0$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση Lyapunov δεν αυξάνεται.

- Από την $\dot{V}(x,\widetilde{\theta})=0$, προκύπτει $x=0$ και $\widetilde{\theta}=0$ $(x,\widetilde{\theta})=(0,0)$

- Ασύμπτωτη Σύγκλιση:

  - Σύμφωνα με το θεώρημα LaSalle , όλες οι τροχιές του συστήματος συγκλίνουν στο $(x,\widetilde{\theta})=(0,0)$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση Lyapunov $\dot{V}(x,\widetilde{\theta})$ αποδεικνύει τη γενική ασυμπτωτική σύγκλιση του συστήματος στο $(x,\widetilde{\theta})=(0,0)$, επιβεβαιώνοντας τη σταθερότητα του συστήματος.



Κάποια σχόλια και παρατηρήσεις για την προσομοίωση:

1) Αποτελέσματα από την Προσομοίωση:

- Η παράμετρος εκτίμησης $\hat{\theta}$ παρουσιάζει μια δυναμική σύγκλισης στην πραγματική τιμή $\theta_{real}=0.5$ κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης.
- Η σύγκλιση αυτή δεν είναι στιγμιαία, αλλά σταδιακή καθώς η $\hat{\theta}$ μειώνει τη διαφορά της από την πραγματική τιμή.

2) Παρατηρήσεις για την συμπεριφορά της $\hat{\theta}$:

- Στα πρώτα δευτερόλεπτα, η εκτίμηση $\hat{\theta}$ παρουσιάζει απόκλιση, καθώς επηρεάζεται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος και την επιλογή των δυναμικών του ελέγχου.
- Καθώς εξελίσσεται ο χρόνος , η εκτίμηση $\hat{\theta}$ συγκλίνει στην πραγματική τιμή, γεγονός που αποδεικνύει τη σωστή λειτουργία του νόμου εκτίμησης.

3) Σχόλια για τη Σύγκλιση:

- Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται από τη σταθερά προσαρμογής γ (στην περίπτωση μας επιλέχθηκε γ = 0.1) ,η οποία καθορίζει πόσο γρήγορα προσαρμόζεται η εκτίμηση $\hat{\theta}$ βάσει των δεδομένων του συστήματος.
- Η παράμετρος $\hat{\theta}$ προσεγγίζει την τιμή θ_{real} χωρίς να εμφανίζει ταλαντώσεις, γεγονός που επιβεβαιώνει τη σταθερότητα του συστήματος.

2)Το ζητούμενο για τον αν η αρχή των αξόνων στο σύστημα κλειστού βρόχου είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθής θα το εξετάσουμε μέσα από:

- Η αρχή των αξόνων είναι σταθερό σημείο:
    - Δηλαδή το σύστημα κλειστού βρόχου ικανοποιεί $\dot{x}=0$ όταν $x=0$.
- Το σύστημα κλειστού βρόχου είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθές :
    - Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τροχιές του συστήματος, ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών x(0) , συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο $[0,0]^T$.

Το σύστημα έχει τη μη γραμμική συνάρτηση g(x) : $|g(x)| \leq 2\|x\|^2$

Σχεδιάζουμε την είσοδο u(x) για να εξασφαλίσουμε γενική ασυμπτωτική ευστάθεια: $u(x)=-kx_1-g(x)$, όπου k > 0 είναι μια σταθερά που καθορίζει την ταχύτητα σύγκλισης.

Το σύστημα μετά τον έλεγχο γίνεται: $\dot{x}_1=-x_1+x_2$, $\dot{x}_2=-kx_1-x_2$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα γίνεται γραμμικό με τον παραπάνω έλεγχο και η μη γραμμικότητα g(x) αντισταθμίζεται.

Ο πίνακας γραμμικοποίησης είναι: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -k & -1 \end{pmatrix}$

και οι ιδιοτιμές του A είναι: $\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{k-1}$

Για k>1, και οι δύο ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, άρα το σύστημα είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η g(x) περιορίζεται από την $|g(x)|\leq 2\|x\|^2$ ιδιότητα , κάτι που σημαίνει ότι η επίδραση της μη γραμμικότητας είναι φραγμένη και δεν επηρεάζει την ευστάθεια.

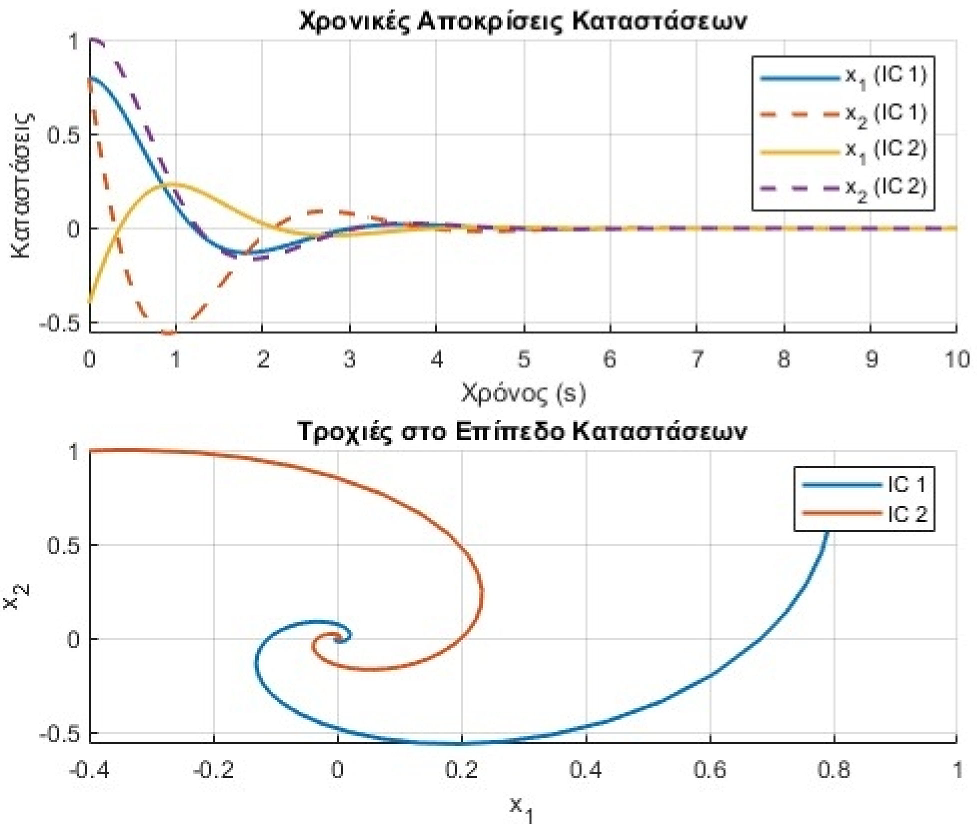
Επαληθεύουμε την γενική ασυμπτωτική ευστάθεια μέσω της Lyapunov:

$V(x)=x_1^2+x_2^2$, με παράγωγο $\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$.
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους έχω:
$\dot{V}(x)=2x_1(-x_1+x_2)+2x_2(-x_2-kx_1)\Rightarrow\dot{V}(x)=-2(x_1^2+x_2^2)-2(k-1)x_1x_2$

Για k > 1 , ο όρος $-2(k-1)x_1x_2$ είναι αρνητικός ή μηδενικός και έτσι:

$$\dot{V}(x)<0,\forall x\neq 0$$

Αυτό δείχνει ότι το σύστημα είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθές.



Κάποια γενικά συμπεράσματα:

- Σταθερότητα:
    - Το σύστημα είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθές.
    - Οι καταστάσεις x_1 και x_2 , συγκλίνουν στο 0 για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη.
- Αντιμετώπιση Μη Γραμμικότητας:
    - Η επιλογή u(x) αντισταθμίζει τη μη γραμμικότητα , επιτρέποντας την ανάλυση και τον έλεγχο του συστήματος ως γραμμικό.
- Οπτική Ερμηνεία:
    - Οι σπειροειδείς τροχιές στο επίπεδο καταστάσεων είναι σύμφωνες με την παρουσία

φανταστικού μέρους στις ιδιοτιμές του συστήματος

- Ευελιξία του Ελέγχου:

    - Η ευστάθεια του συστήματος παραμένει ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες, αποδεικνύοντας την αποτελεσματικότητα του σχεδιασμένου ελέγχου μας.