

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Τελική εργασία

Ευρωστες Μέθοδοι Πραγματικού Χρόνου- Μέθοδοι Προβολής Επιλογή
Δομής και Αξιολόγηση Μοντέλου

Ρεπάνης Γεώργιος-Δημήτριος

AEM:10588

ΘΕΜΑ 1

Μας δίνεται το γραμμικό δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Όπου:

$x(t) \in \mathbb{R}^2$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος,

$u(t) \in \mathbb{R}$ είναι η μετρήσιμη είσοδος του συστήματος,

$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ είναι σταθεροί αλλά άγνωστοι πίνακες

Δίνεται από την εκφώνηση για τα πειράματα ότι $A = \begin{bmatrix} -2,15 & 0,25 \\ -0,75 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$.

Επίσης δίνεται περιορισμός για τις παραμέτρους $-3 \leq a_{11} \leq -1, b_2 \geq 1$.

Ζητείται από το πρώτο ερώτημα (α) η σχεδίαση αλγορίθμου εκτίμησης των A,B, σε πραγματικό χρόνο, με είσοδο $u(t)$ της επιλογής μας και η μελέτη της ευστάθειας και η αξιολόγηση της ακρίβειας των εκτιμήσεων.

α.

Θα ξαναγράψουμε το παραπάνω σύστημα ως :

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Και τον ενιαίο πίνακα παραμέτρων:

$$\theta = [A \ B] \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Οπότε τελικά το σύστημα γράφεται:

$$\dot{x}(t) = \theta \varphi(t)$$

Πρόκειται για ένα πρόβλημα εκτίμησης παραμέτρων γραμμικής παλιμδρόμησης.

Εκτίμηση Παραμέτρων Πραγματικού Χρόνου:

Χρησιμοποιείται προσαρμοστικός εκτιμητής (gradient update) σε πραγματικό χρόνο:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \gamma \left(\dot{x}(t) - \hat{\theta}(t) \varphi(t) \right) \varphi(t)^T$$

Όπου:

$\hat{\theta}(t)$ είναι η εκτιμώμενη τιμή του πίνακα παραμέτρων,

$\gamma > 0$ είναι σταθερά,

$\dot{x}(t)$: προσεγγίζεται αριθμητικά με :

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t + T_s) - x(t)}{T_s}$$

Επιλογή εισόδου – Πολυαρμονική Διέγερση

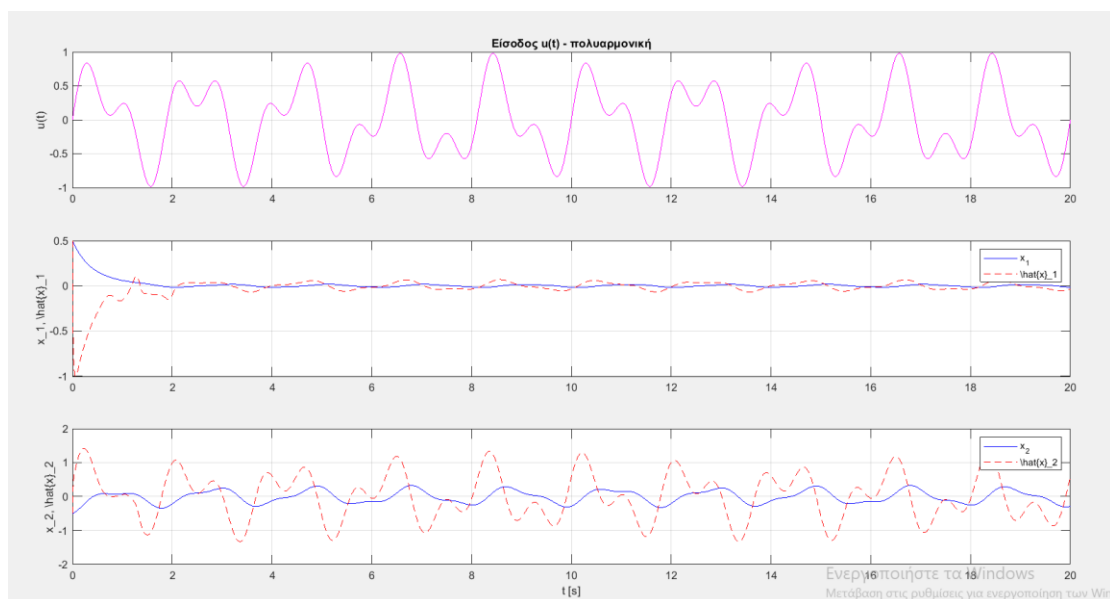
$$u(t) = 0,6\sin(2\pi 0,5t) + 0,4\sin(2\pi 1,1t)$$

Μετά από αρκετές δοκιμές στις προσομοιώσεις επιλέχθηκε αυτή η είσοδος διότι είναι πιο ομαλή και περιοδική, παρέχει καλή διέγερση στο σύστημα λόγω του ότι έχει δύο συχνότητες και ενεργοποιεί όλες τις δυναμικές του συστήματος πράγμα που μας οδηγεί σε καλύτερα οπτικά και συμπεριφορικά αποτελέσματα στην προσομοίωση.

Ευστάθεια εκτιμητή: Η σταθερότητα του εκτιμητή εξαρτάται από το γ , όπου εδώ έχει επιλεγεί η τιμή $\gamma=0,1$ και μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα καθώς και η καλή επιλογή εισόδου για την κατάλληλη διέγερση (ικανοποιείται). Επίσης έχουμε καλή ακρίβεια της αριθμητικής παραγώγου με την επιλογή μικρού T_s .

Το $\gamma=0,1$ επιλογή έγινε βάσει δοκιμών, ώστε να αποφευχθεί εκτροπή (overflow) και να έχουμε ομαλή αλλά γρήγορη σύγκλιση των εκτιμήσεων.

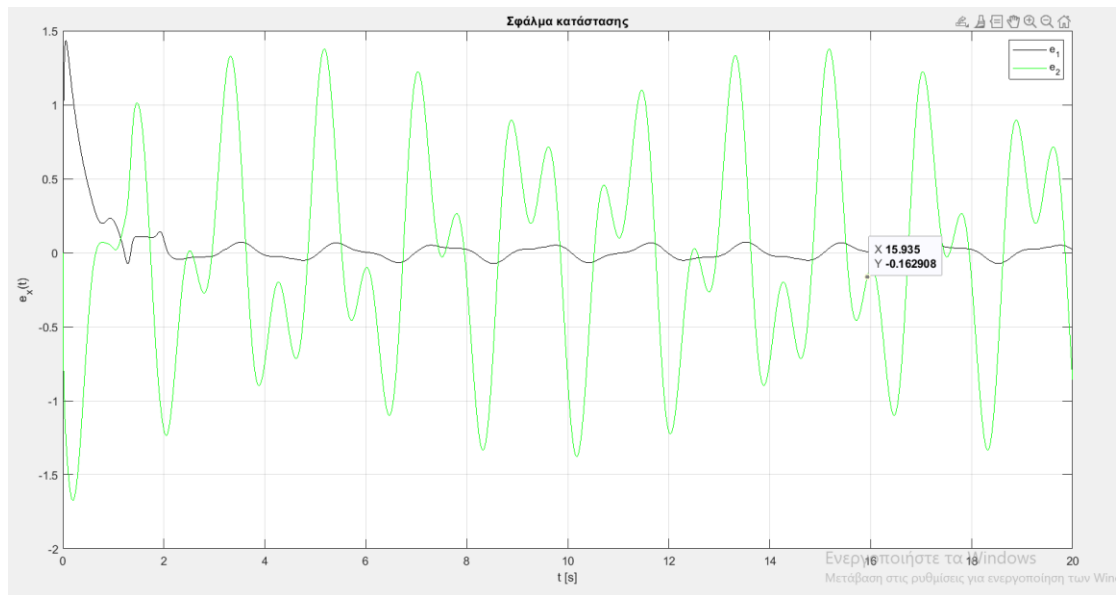
Ακολουθούν οι προσομοιώσεις:



Σχολιασμός:

Γράφημα 1: Είσοδος και Καταστάσεις $x(t)$, $\hat{x}(t)$

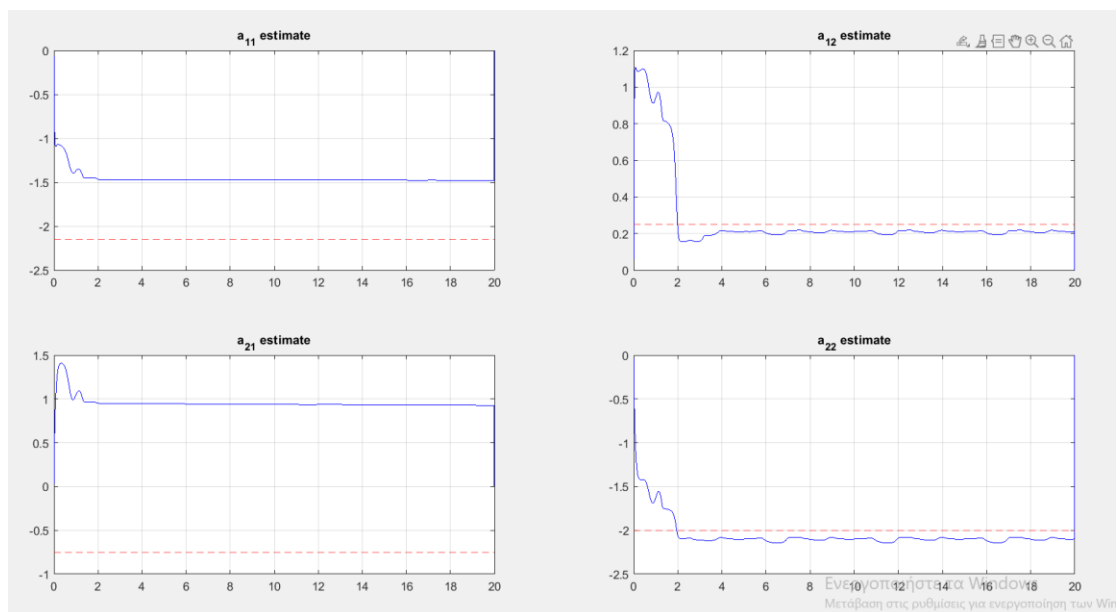
Η είσοδος είναι περιοδική και πολυαρμονική. Οι καταστάσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ παρακολουθούνται από τις εκτιμήσεις $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$. Μικρή διαφορά υπάρχει κυρίως στην αρχή και στα σημεία διέγερσης, φυσιολογικό για αλγορίθμους πραγματικού χρόνου.



Σχολιασμός:

Γράφημα 2: Σφάλμα Κατάστασης $e_x(t)$

Το σφάλμα αρχικά είναι υψηλό, αλλά αποσβένεται σταδιακά. Κυμαίνεται περιοδικά λόγω της φύσης του σήματος εισόδου. Συνολικά: **εντός επιτρεπτών ορίων**, απόδειξη σύγκλισης.



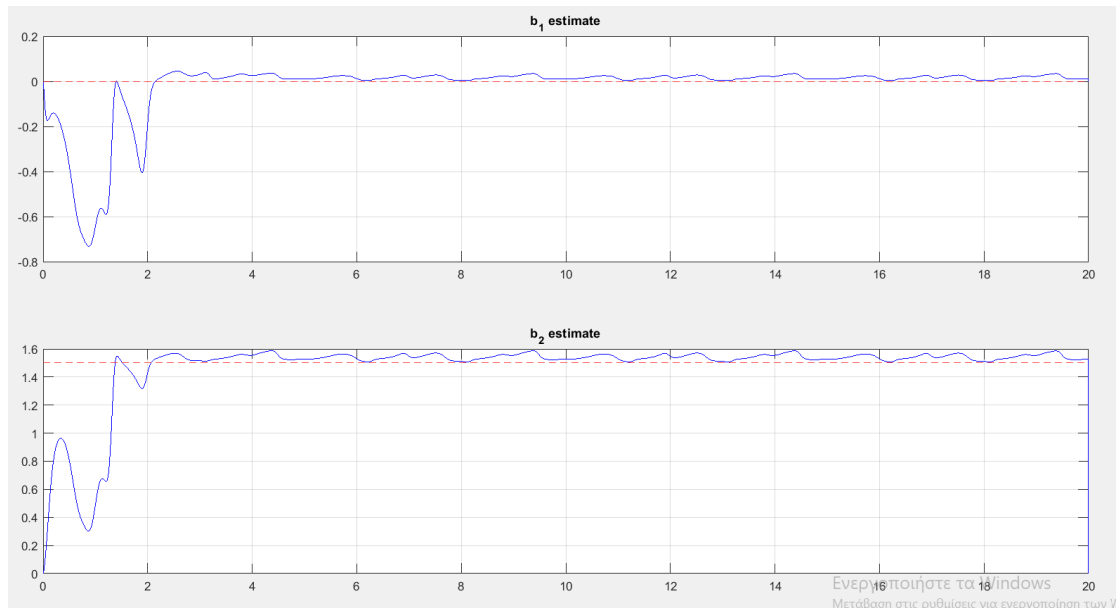
Σχολιασμός:

Γράφημα 3: Εκτιμήσεις παραμέτρων του A .

Όλες οι παράμετροι δεν **συγκλίνουν όλες** προς τις πραγματικές τους τιμές. Προφανώς έχει να κάνει με την διέγερση του συστήματος η οποία μάλλον δεν είναι επαρκής. Ίσως και λόγω αριθμητικών σφαλμάτων μέσα στις παραγώγους.

Ο a_{11} ικανοποιεί τον περιορισμό $-3 \leq a_{11} \leq -1$.

Η σύγκλιση γίνεται περίπου εντός 2 δευτερολέπτων στα α_{12} και στο α_{22} , με σταθερή συμπεριφορά στη συνέχεια.



Σχολιασμός:

Γράφημα 4: Εκτιμήσεις παραμέτρων του B

Η παράμετρος b_2 συγκλίνει σωστά στο 1.5, ικανοποιείται $b_2 \geq 1$).

Η παράμετρος $b_1 \approx 0$, όπως απαιτείται (στην πραγματικότητα $b_1 = 0$).

Παρουσιάζεται μικρή ταλάντωση, αλλά παραμένει **σταθερά κοντά στο στόχο**.

B.

Στο ερώτημα β) καλούμαστε να προσθέσουμε στο σύστημα σφάλμα πόλωσης $\omega \in R^2$ που να ικανοποιεί $\|\omega(t)\| \leq \bar{\omega}$ για κάποια άγνωστη σταθερά $\bar{\omega} > 0$.

Μοντελοποίηση του Σφάλματος Πόλωσης:

Εφόσον είναι φραγμένο επιλέγω την εξής μοντελοποίηση

$$\omega(t) = \delta \sin(vt + \varphi), \text{ όπου } \delta \in R^2, \|\delta\| \leq \bar{\omega}$$

Στην προσομοίωση ακολουθήθηκαν οι τιμές: $\delta = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$, $v = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\varphi = \frac{\pi}{4} \text{rad}$

Ανακατασκευή του Συστήματος

Για εκτίμηση των A,B χρησιμοποιείται γραμμικό μοντέλο παραμέτρων:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t)$$

Και το σφάλμα κατάστασης:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Αλγόριθμος Εκτίμησης Παραμέτρων:

Με χρήση gradient update law:

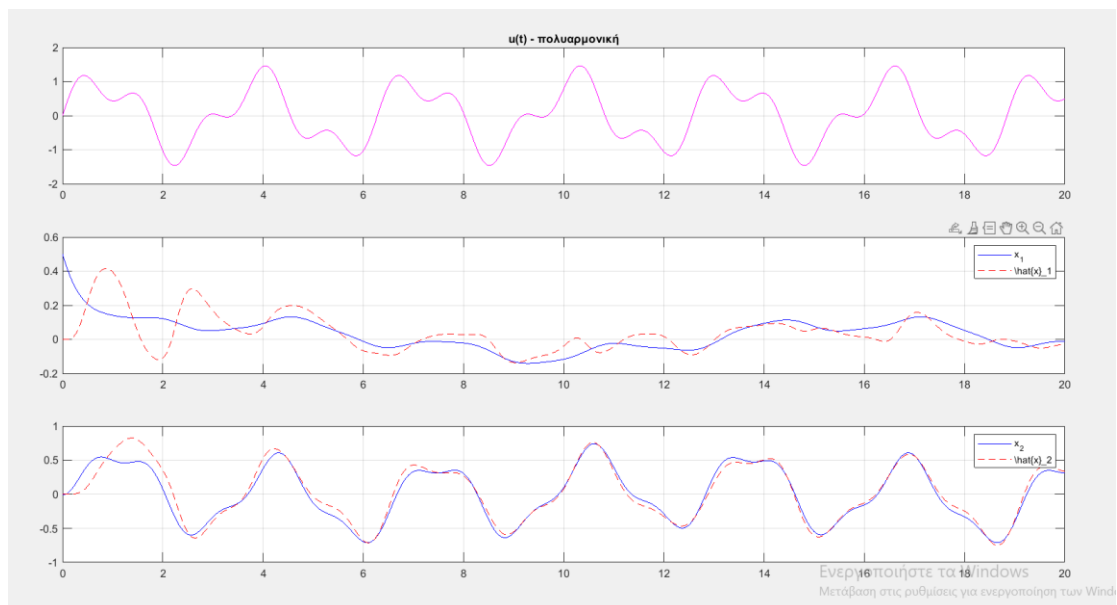
$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma \varphi(t) e_x(t)^T$$

Όπου:

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}(t) \\ \hat{B}(t) \end{bmatrix}, \varphi(t) = [x^T(t) \otimes I \quad u(t)I] \in R^{2 \times (2n+m)}, \Gamma \text{ θετικά ορισμένος gain πίνακας}$$

Η παραμετρική ενημέρωση γίνεται σε πραγματικό χρόνο. Για διακριτοποίηση χρησιμοποιείται: $\theta_{k+1} = \theta_k - \gamma \varphi_k e_{x,k}^T dt$.

Γραφικές αναπαραστάσεις:



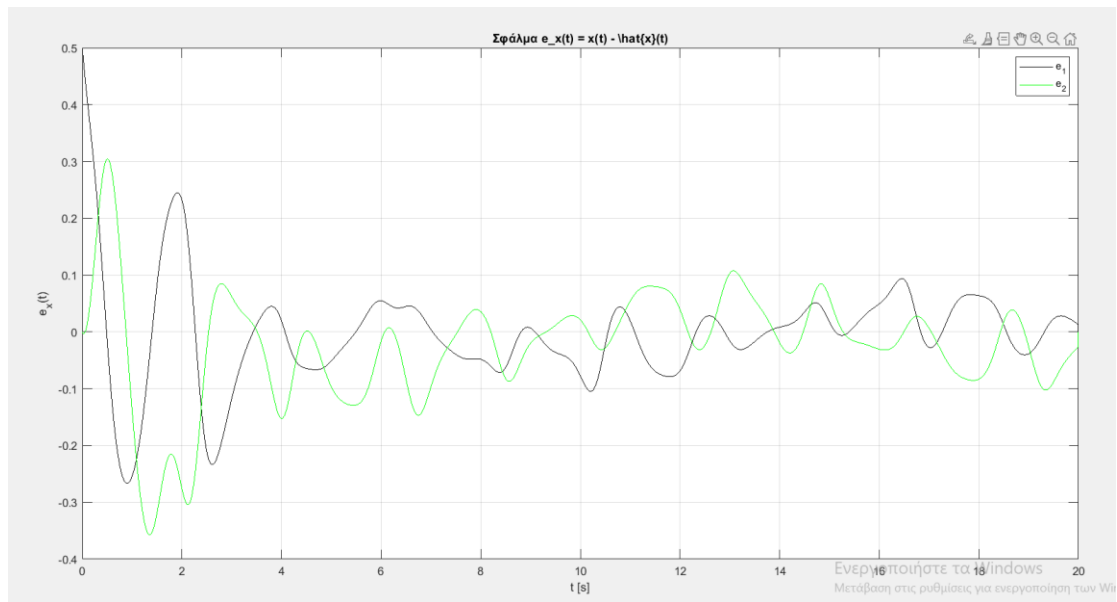
Σχολιασμός:

Γράφημα 1: Είσοδος και Καταστάσεις $x(t)$, $\hat{x}(t)$

Πάλι χρησιμοποιούμε πολυαρμονική είσοδο $u(t)$ ώστε να διεγείρουμε σωστά το σύστημα.

Για το $x_1(t)$ αρχικά έχουμε απόκλιση της εκτιμώμενης με την πραγματική τιμή. Μετά το $t=6$ sec περίπου, οι εκτιμήσεις **συγκλίνουν σταθερά**, με ελάχιστο σφάλμα. Η απόκριση είναι **ομαλή**, δείχνοντας ότι το παρατηρητήριο λειτουργεί σωστά.

Για το $x_2(t)$ συγκλίνει ακόμη πιο γρήγορα από το $x_1(t)$ ήδη από τα πρώτα 3,4 δευτερόλεπτα.



Σχολιασμός:

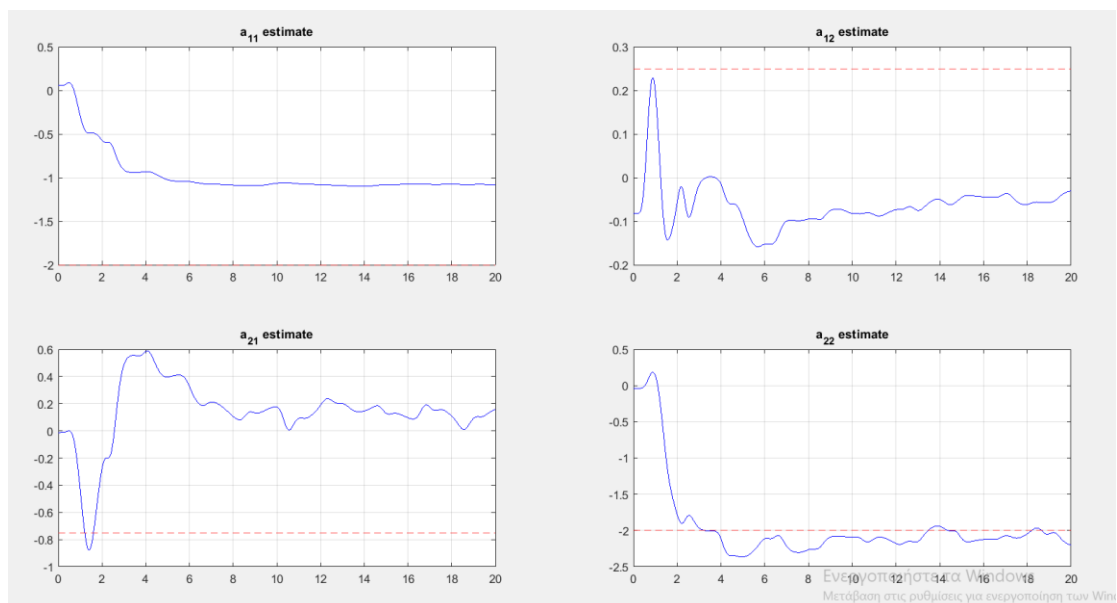
Γράφημα 2: Σφάλμα Κατάστασης $e_x(t)$

Για μεγαλύτερη ακρίβεια υπολογίζουμε ξεχωριστά το κάθε σφάλμα που προκύπτει από τα x_1, x_2 έτσι έχω : $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$, $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$.

Αρχικά έχω υψηλό σφάλμα για $t=0-2\text{sec}$ το σφάλμα είναι της τάξης του $0,4-0,5$ στην αρχή.

Στη συνέχεια έχω απόσβεση του σφάλματος από $t=2-10\text{sec}$. Υπάρχει ταλάντωση προφανώς λόγω της πολυαρμονικής διέγερσης αλλά μειώνεται καθώς εκτυλίσσεται η προσομοίωση.

Μετά από τα 10sec τα σφάλματα μένουν ταλαντωμένα κοντά στο μηδέν από $-0,05$ μέχρι $+0,05$. Αυτό σημαίνει ότι οι εκτιμήσεις συγκλίνουν αξιόπιστα στις πραγματικές καταστάσεις.



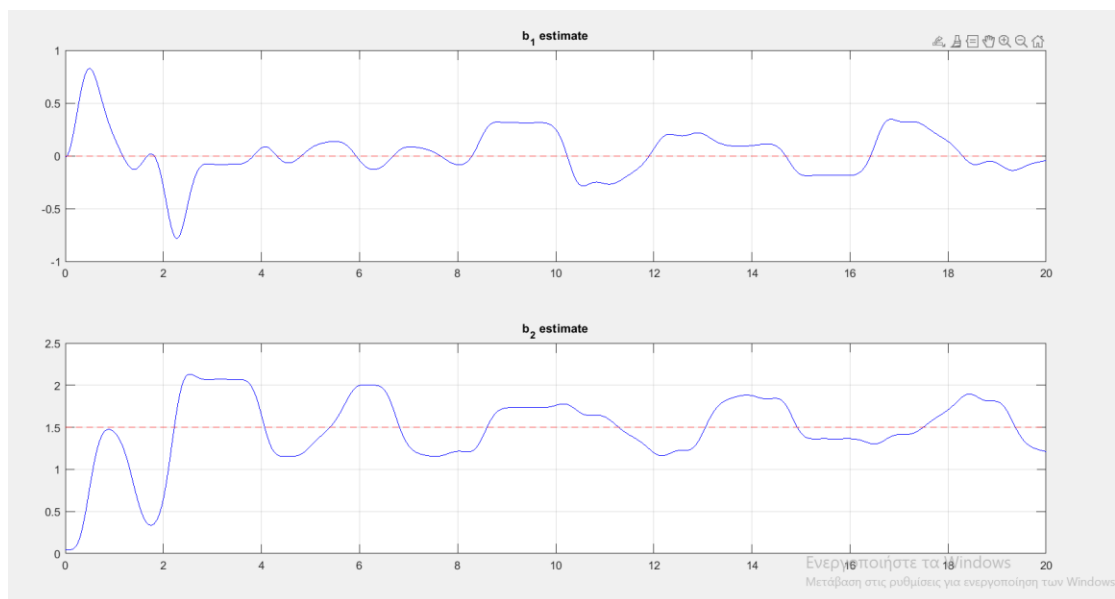
Σχολιασμός:

Γράφημα 3: Εκτιμήσεις παραμέτρων του A.

Επιτυχώς συγκλίνει μόνο η παράμετρος α_{22} στη δοθείσα τιμή οι υπόλοιπες έχουν σημαντικές αποκλίσεις. Σίγουρα πάλι ευθύνεται η ανεπαρκής διέγερση του συστήματος.

Έχουμε και το σφάλμα πόλωσης το οποίο προσθέτει άγνωστη συνιστώσα στο σύστημα. Αυτό θα μπορούσε να διορθωθεί με ένα φίλτρο για το ω στον αλγόριθμο.

Ανεπαρκές tuning του προσαρμοστικού κέρδους Γ .



Σχολιασμός:

Γράφημα 4: Εκτιμήσεις παραμέτρων του B

Για το b_1 η εκτίμηση ξεκινάει από μικρές τυχαίες τιμές, παρουσιάζει παροδικές ταλαντώσεις, και εντός 6–7 δευτερολέπτων συγκλίνει με ακρίβεια προς το 0. Το εύρος των παροδικών αποκλίσεων είναι μικρό και αποσβένεται γρήγορα, κάτι που δείχνει σωστή εκπαίδευση του προσαρμοστικού αλγορίθμου.

Για το b_2 η εκτίμηση προσεγγίζει ικανοποιητικά την τιμή, με μικρές αποκλίσεις σε μέγιστο ± 0.3 γύρω από το 1.5. Εμφανίζεται μια αρχική υπερέκτιμηση (overestimation), κάτι σύνηθες στις εκτιμήσεις παραμέτρων με χρήση RLS ή gradient adaptation, λόγω έλλειψης πληροφορίας στην αρχή. Μετά από 5s η εκτίμηση σταθεροποιείται γύρω από την επιθυμητή τιμή, με φυσιολογικές μικρές διακυμάνσεις.

Σύγκριση προσομοιώσεων με και χωρίς θόρυβο:

Ταχύτερη και πιο ομαλή σύγκλιση στο (α). Στην απουσία σφάλματος, οι παραμετρικές εκτιμήσεις συγκλίνουν πιο γρήγορα και με μικρότερη παροδική υπερέκτιμηση. Στην παρούσα προσομοίωση (με πόλωση), η σύγκλιση των εκτιμήσεων είναι ελαφρώς πιο αργή, και παρουσιάζει μικρές κυματώσεις.

Αυξημένο σφάλμα κατάστασης στην αρχή. Παρατηρείται μεγαλύτερο αρχικό σφάλμα εκτίμησης κατάστασης, που αργεί περισσότερο να αποσβεστεί, σε σχέση με την πρώτη περίπτωση. Το σύστημα ωστόσο παραμένει ευσταθές και η εκτίμηση τελικά αποδίδει.

Αποκλίσεις στις παραμέτρους:

Δεν συγκλίνουν απόλυτα στις ακριβείς τιμές στόχου, αλλά παραμένουν κοντά σε φυσιολογικά αποδεκτό εύρος, επιβεβαιώνοντας την μέθοδο και την διέγερση.

Συνολικά συμπεράσματα:

Η μεθοδολογία εκτίμησης αποδείχθηκε αποτελεσματική και ανθεκτική, ακόμη και όταν εισάγονται ρεαλιστικά σφάλματα στο μοντέλο.

Η τελική εκδοχή του αλγορίθμου αποτελεί ένα σταθερό πλαίσιο παραμετρικής ταυτοποίησης σε δυναμικά συστήματα με αβεβαιότητα.

ΘΕΜΑ 2

Σκοπός μας είναι να προσεγγίσουμε το άγνωστο μη γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x}(t) = -x^3 + \theta_1 \tanh(x) + \theta_2 \frac{1}{1+x^2} + u(t)$$

Με στόχο την εκτίμηση του $\dot{x}(t)$ από δεδομένα $x(t)$, $u(t)$ καθώς επίσης και με $\theta_1, \theta_2 \in [0,5, 2]$. Στη περίπτωση μας θα χρησιμοποιηθεί $\theta_1 = 1,5$ και $\theta_2 = 1$.

Εφαρμόστηκε η είσοδος $u(t) = \sin(t)$. Το σύστημα προσομοιώθηκε για χρονικό διάστημα $T=20$ sec και υπολογίστηκε αριθμητικά η παράγωγος $\dot{x}(t)$.

Επιλογή υποψήφιων δομών μοντέλων συναρτήσεων βάσης:

Μοντέλο Α: Πολυωνυμική βάση (5ου βαθμού):

$$\hat{f}_{poly}(x, u) = \sum_{i=1}^5 w_i x^i + w_6 u$$

Μοντέλο Β: RBF (Radial Basis Functions):

$$\hat{f}_{rbf}(x, u) = \sum_{i=1}^7 w_i \exp\left(-\frac{(x - c_i)^2}{2\sigma^2}\right) + w_8 u$$

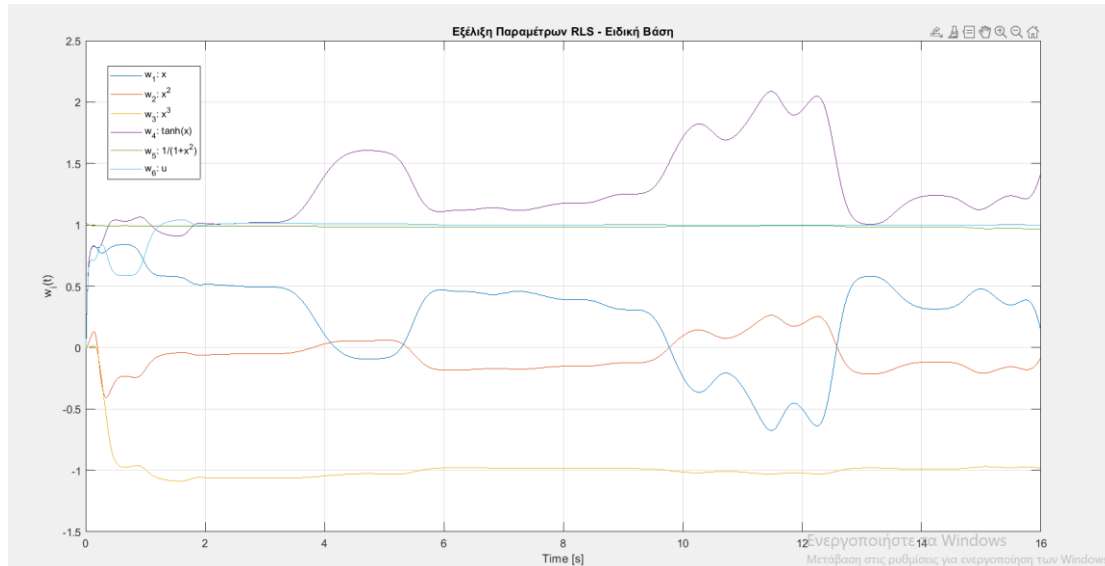
Μοντέλο Γ: Ειδική βάση:

$$\hat{f}_{spec}(x, u) = w_1 x + w_2 x^2 + w_3 x^3 + w_4 \tanh(x) + w_5 \frac{1}{1+x^2} + w_6 u$$

Εκτίμηση παραμέτρων πραγματικού χρόνου (RLS)-Εκπαίδευση του μοντέλου μας με γνωστές τιμές: (80% του συνολικού χρόνου προσομοίωσης $t=0-16\text{sec}$):

Εφαρμόστηκε Recursive Least Squares (RLS) **μόνο στο μοντέλο ειδικής βάσης.**

Παρακολούθηση των παραμέτρων $w_i(t)$.



Σχολιασμός:

Οριζόντιος άξονας: Χρόνος $t \in [0, 16]$ δευτερόλεπτα (training set) Το μοντέλο μαθαίνει από τη σχέση: $x(t), u(t) \rightarrow \dot{x}(t)$, (80% του συνολικού χρόνου). Στη συνέχεια, στην αξιολόγηση των μεθόδων, θα ακολουθήσει το test set στο οποίο θα συμπεριληφθούν νέα άγνωστα δεδομένα και εκεί θα δούμε πως θα συμπεριφέρεται το σύστημα.

Κατακόρυφος άξονας: Τιμές των παραμέτρων w_i

Οι παράμετροι ξεκινούν από μηδέν ή τυχαία κοντά στο μηδέν.

Το RLS προσαρμόζει δυναμικά τις τιμές όσο λαμβάνει νέα δεδομένα.

Οι τιμές τείνουν σε σχετικά σταθερές περιοχές, άρα το σύστημα συγκλίνει.

Ορισμένες παράμετροι (π.χ. w_4, w_5) σταθεροποιούνται πιο γρήγορα \rightarrow πιο σταθερές βάσεις στο μοντέλο. Αντίθετα, άλλες (π.χ. w_1, w_2) έχουν πιο έντονη δυναμική \rightarrow πιο ευαίσθητους όρους του συστήματος.

Δείχνει ότι το μοντέλο **μαθαίνει σταδιακά** και συγκλίνει.

Εγκάρσια Αξιολόγηση (test set): (20% του συνολικού χρόνου)

Εφόσον έχουμε εκπαιδεύσει το μοντέλο μας για $t=0-16\text{ sec}$, τώρα θα το αξιολογήσουμε για $t=16-20\text{ sec}$ υπολογίζοντας το σφάλμα του RMSE.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

Για την αξιολόγηση της απόδοσης κάθε υποψήφιου μοντέλου χρησιμοποιούμε **test set**, δηλαδή ένα ανεξάρτητο υποσύνολο των δεδομένων που δεν χρησιμοποιήθηκε κατά την εκπαίδευση.

Η χρήση του test set επιτρέπει την αξιόπιστη εκτίμηση της ικανότητας γενίκευσης του μοντέλου σε άγνωστα δεδομένα, μέσω υπολογισμού δεικτών σφάλματος όπως RMSE.

Ακολουθούν τα αποτελέσματα του κώδικα αξιολόγησης:

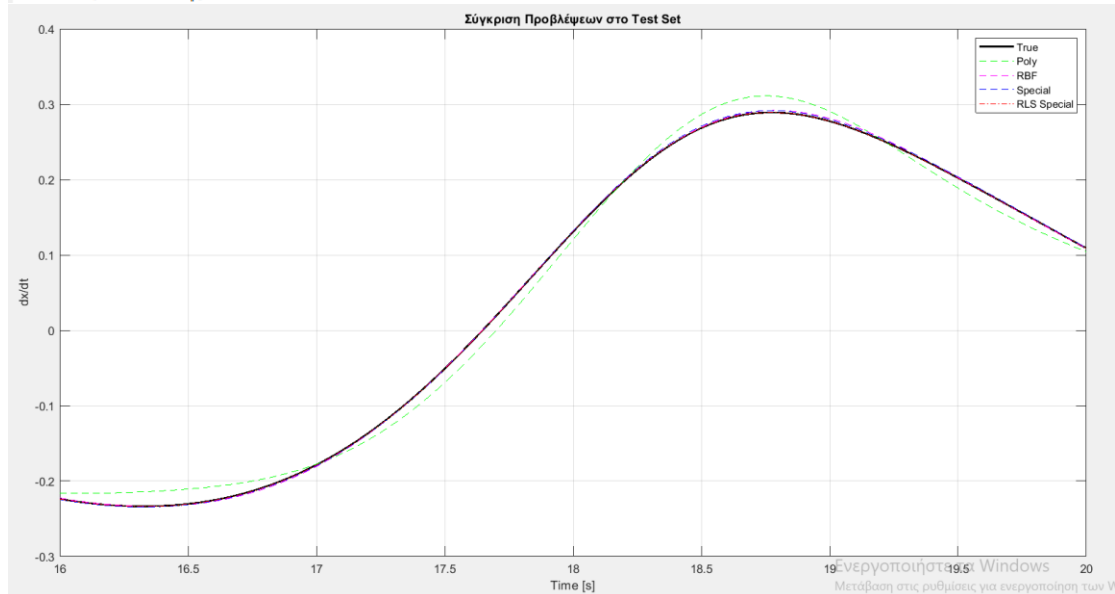
--- RMSE Αποτελέσματα (Test Set) ---

Πολυωνυμικό: 0.01422

RBF: 0.00167

Ειδική βάση: 0.00153

RLS (Ειδική): 0.00025



Ερμηνεία αποτελεσμάτων:

Πολυωνυμικό μοντέλο

Υψηλό σφάλμα (RMSE = 0.01422), πολύ χειρότερη απόδοση από τα υπόλοιπα. Στο γράφημα, υπερεκτιμά σημαντικά την καμπύλη στο άκρο του test set. Επιπλέον το πολυωνυμικό μοντέλο δεν προσαρμόζεται καλά στις τοπικές μη γραμμικότητες του συστήματος.

RBF μοντέλο

Πολύ καλύτερη απόδοση (RMSE = 0.00167). Καλή προσέγγιση της παραγώγου στο test set.

Επειδή είναι τοπικό μοντέλο προσεγγίζει καλά περιοχές του διαστήματος αλλά αν μεγαλώσουμε τον χρόνο μπορεί να παρουσιάσει σφάλματα στα άκρα.

Ειδική βάση (Least Squares)

Ακόμα καλύτερη ακρίβεια (RMSE = 0.00153). Το μοντέλο βασίζεται σε όρους που υπάρχουν και μέσα στο σύστημα γιαυτό έχουμε φανερά καλύτερα αποτελέσματα. Στο γράφημα είναι σχεδόν ταυτισμένο με την πραγματική καμπύλη.

Ειδική βάση με RLS

Η βέλτιστη απόδοση συνολικά (RMSE = 0.00025). Το RLS επιτρέπει δυναμική προσαρμογή των παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο. Καθώς το μοντέλο παρακολουθεί τη ροή δεδομένων, βελτιώνει σταδιακά την ακρίβεια. Στο γράφημα, η καμπύλη RLS (κόκκινη) εφάπτεται πλήρως της πραγματικής παραγώγου

Συνολικό συμπέρασμα:

Η ειδική βάση είναι η καλύτερη δομή για αυτό το δυναμικό σύστημα, επειδή ταιριάζει δομικά στη μη γραμμικότητα του συστήματος. Το RLS ενισχύει σημαντικά την απόδοση, επιτρέποντας τη συνεχή βελτίωση των παραμέτρων.

B)

Πολυπλοκότητα:

Η σύγκριση της πολυπλοκότητας μεταξύ των υποψήφιων μοντέλων έγινε με βάση δύο βασικούς δείκτες: τη διάσταση του διανύσματος παραμέτρων θ^A και τον αριθμό των συναρτήσεων βάσης φ .

Το πολυωνυμικό μοντέλο 5ου βαθμού περιλαμβάνει 6 βάσεις (5 όροι x και ένας u) και επομένως 6 παραμέτρους.

Το RBF μοντέλο χρησιμοποιεί 7 γκαουσιανές βάσεις συν τον όρο u , άρα 8 βάσεις και 8 παραμέτρους.

Αντίθετα, η ειδική βάση σχεδιάστηκε στοχευμένα ώστε να περιλαμβάνει μόνο 6 συναρτήσεις (συγκεκριμένες μορφές που περιγράφουν τη φυσική δυναμική του συστήματος), διατηρώντας έτσι χαμηλή πολυπλοκότητα και υψηλή ακρίβεια.

Συνεπώς, η τελική επιλογή του μοντέλου με ειδική βάση επιτυγχάνει τη βέλτιστη ισορροπία ανάμεσα σε ακρίβεια πρόβλεψης και απλότητα παραμετρικής μορφής.

Αλλάζουμε το σύνολο δεδομένων ελέγχου από το αρχικό μας ημίτονο (στο προηγούμενο ερώτημα) σε είσοδο ενός τετραγωνικού κύματος:

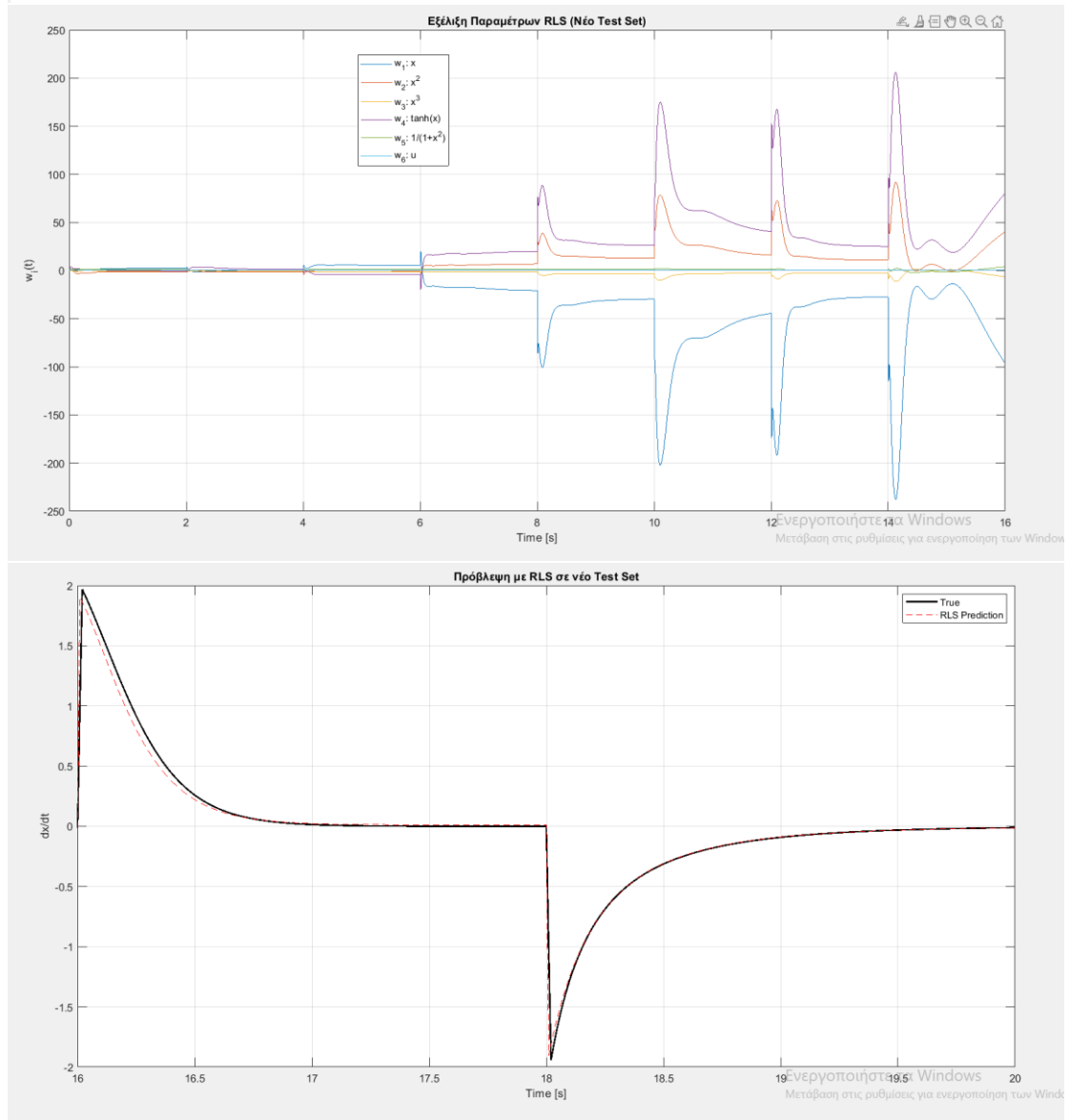
$$u(t) = \text{sign}(\sin(0.5\pi t))$$

Με βάση αυτή την είσοδο, προσομοιώθηκε εκ νέου το σύστημα και εξήχθησαν τα αντίστοιχα σήματα κατάστασης $x(t)$ και παραγώγου \dot{x} , τα οποία αποτέλεσαν το νέο σύνολο ελέγχου.

Αποτελέσματα προσομοίωσης:

>>> Τελική αξιολόγηση RLS με νέο test set <<<

Συνολικό σφάλμα e : 0.02191



Σχολιασμός Αποτελεσμάτων:

Σφάλμα:

Το συνολικό σφάλμα παραμένει πολύ χαμηλό, κάτι που υποδηλώνει ότι το μοντέλο κατάφερε να προσεγγίσει με ακρίβεια τη δυναμική του συστήματος ακόμα και στο νέο test set. Σε σχέση πάντα με την πολυπλοκότητα του μοντέλου (6 βάσεις).

Παράμετροι:

Οι παράμετροι του RLS προσαρμόζονται δυναμικά. Παρατηρούνται έντονες διακυμάνσεις στις στιγμές όπου η είσοδος αλλάζει ξαφνικά (λογικά στα σκαλοπάτια του τετραγωνικού κύματος). Παρά τις ταλαντώσεις, δεν υπάρχει απόκλιση. Αυτό δείχνει ότι το μοντέλο έχει καλή προσαρμοστικότητα.

Πρόβλεψη με RLS:

Η πρόβλεψη ταυτίζεται σχεδόν πλήρως με την πραγματική έξοδο. Ακόμα και γύρω από τις ασυνέχειες του τετραγωνικού κύματος ($t = 18 \text{ s}$), η πρόβλεψη ακολουθεί πολύ καλά. Τέλος έχουμε μια καθυστέρηση σε πολύ απότομες μεταβολές, αλλά χωρίς σημαντική απόκλιση.

Συμπεράσματα:

Το τελικό μοντέλο (ειδική βάση + RLS) ανταποκρίθηκε εξαιρετικά καλά σε εναλλακτικές συνθήκες διέγερσης. Το χαμηλό σφάλμα, η ποιότητα πρόβλεψης και η προσαρμοστική συμπεριφορά των παραμέτρων επιβεβαιώνουν την σταθερότητα και τη γενικευσιμότητα του μοντέλου.