Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 1

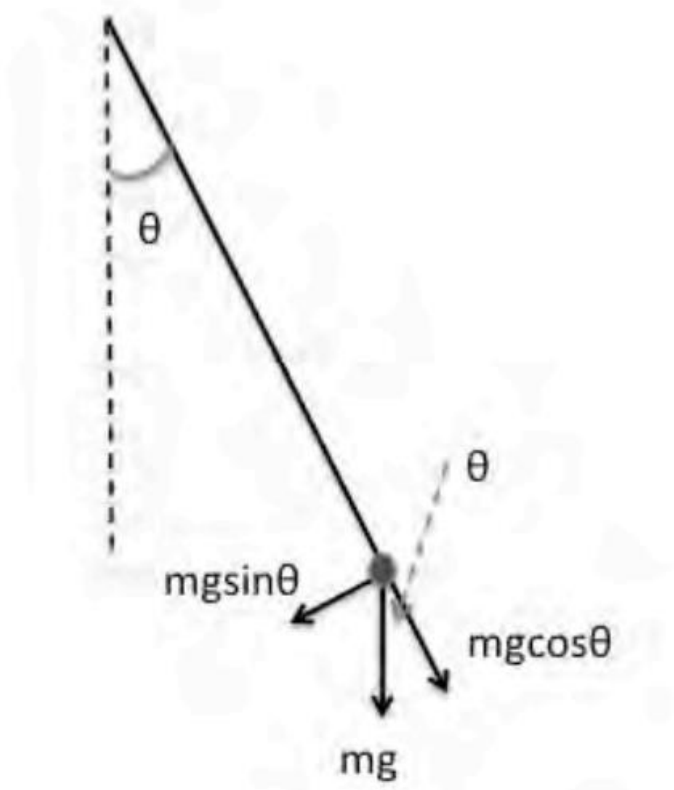
Εκτίμηση Αγνώστων Παραμέτρων - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

20 Μαρτίου 2025

Ρεπάνης Γεώργιος-Δημήτριος

ΑΕΜ:10588

ΘΕΜΑ 1ο



Αρχικά το πρόβλημα μας περιγράφεται από ένα μαθηματικό μοντέλο του συστήματος ενός απλού εκκρεμούς με ροπή εισόδου, αφού έχει γραμμικοποιηθεί για μικρές γωνίες q ($\sin q \approx q$). Το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει τις παραμέτρους : την γωνία εκτροπής του εκκρεμούς q(t) [rad], την μάζα m[kg], το μήκος του εκκρεμούς L [m], έναν σταθερό συντελεστή απόσβεσης c$[N \cdot m \cdot sec]$, την επιτάχυνση της βαρύτητας g $[m/s^2]$ και μια είσοδο ελέγχου u(t) $[N \cdot m]$.

Το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το πρόβλημά μας είναι το:

$$m\, L^2 \ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t)$$

$$\ddot{q}(t) + \frac{c}{mL^2}\dot{q}(t) + \frac{mgL}{mL^2}q(t) = \frac{1}{mL^2}u(t)$$

$$\ddot{q}(t) = -\frac{c}{mL^2}\dot{q}(t) - \frac{g}{L}q(t) + \frac{1}{mL^2}u(t)$$

Θεωρώ

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{bmatrix}$$

Τότε θα έχω

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \frac{1}{mL^2\,(-c\dot{q}(t) - mgL\dot{q}(t) + u(t))} \end{bmatrix}$$

Επίσης,

$$x_1 = q(t)$$

$$x_2 = \dot{q}(t) = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{q}(t) = \dot{x}_2$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2(-cx_2 - mgLx_1 + u(t))} \end{bmatrix}$$

Και θέλω να το φέρω στην μορφή $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, εύκολα παρατηρώ ότι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση του συστήματος στο πεδίο Laplace είναι:

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t) \overset{L.T.}{\Longrightarrow} mL^2s^2Q(s) + csQ(s) + mgLQ(s) = U(s)$$

$$Q(s)(mL^2s^2 + cs + mgL) = U(s)$$

Οπότε η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{mL^2 s^2 + cs + mgL}$$

1.β)

Για την μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς τους συστήματος θα πραγματοποιηθεί προσομοίωση της απόκρισης του γραμμικοποιημένου εκκρεμούς χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κατάστασης που προέκυψαν στο ερώτημα 1.α)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

με:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}, \; x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές των παραμέτρων:

m=0.75kg, L=1.25m, c=0.15 N m sec, g=9.81 m/sec^2, $A_0 = 4, \omega = 2\, rad/sec$

και η είσοδος:

$$u(t) = A_0 \sin \omega t, \forall t \geq 0 \text{ με αρχικές συνθήκες } x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η προσομοίωση εκτελέστηκε για χρονικό διάστημα 20 sec με βήμα ολοκλήρωσης Δt<10^{-3}*sec για ακρίβεια χρησιμοποιώντας την συνάρτηση επίλυσης ode45 στο Matlab.*

Το σύστημα που θα προσομοιώσουμε προκύπτει από την αρχική διαφορική εξίσωση η οποία ισοδυναμεί με το σύστημα πρώτης τάξης :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = \frac{1}{mL^2}(u(t) - cx_2(t) - mgLx_1(t))$$

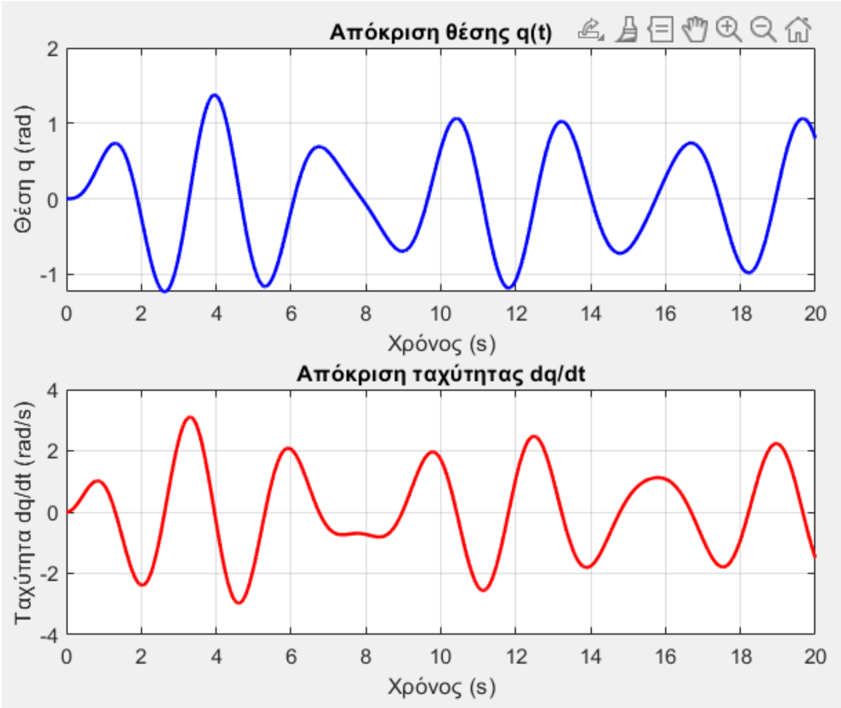
όπου:

$$x_1(t) = q(t)(\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha)$$

$$x_2(t) = \dot{q}(t)(\gamma\omega\nu\iota\alpha\kappa\acute{\eta}\ \tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha)$$

και

$$x_1(0) = 0 \quad , \quad x_2(0) = 0$$



ΘΕΜΑ 2ο

Στο δεύτερο θέμα καλούμαστε να εφαρμόσουμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων m,L και c.

Για το σχεδιασμό της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων θα πρέπει αρχικά να ορίσουμε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος . Στην περίπτωσή μας έχουμε:

$$\ddot{q} = -\frac{c}{mL^2}\dot{q} - \frac{g}{L}q + \frac{1}{mL^2}u$$

Αυτό περιγράφει την συσχέτιση μεταξύ της u(t), $\dot{q}(t), q(t)$ και των παραμέτρων m,L,g,c.

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε μια συνάρτηση κόστους που θα υπολογίζει την ολική τετραγωνική διαφορά μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμώμενων τιμών.

Έστω λοιπόν :

$$J = \sum_{k=1}^{N} (q(t_k) - \hat{q}(t_k))^2 = \sum_{k=1}^{N} e_q^2(t_k)$$

Όπου: $q(t_k)$: *πραγματική τιμή της γωνίας στο δείγμα* t_k

$\hat{q}(t_k)$: *εκτιμώμενη τιμή της γωνίας στο δειγμα* t_k

$e_q(t_k) = q(t_k) - \hat{q}(t_k)$: *σφάλμα*

Για την παραμετροποίηση του συστήματος, συγκρίνω το σύστημα με την μορφή y=Aϑ όπου:

$$y \rightarrow \ddot{q}(t)$$

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q(t)} & q(t) & u(t) \end{bmatrix}$$

$$\theta \rightarrow \begin{bmatrix} mL^2 \\ c \\ mgL \end{bmatrix}$$

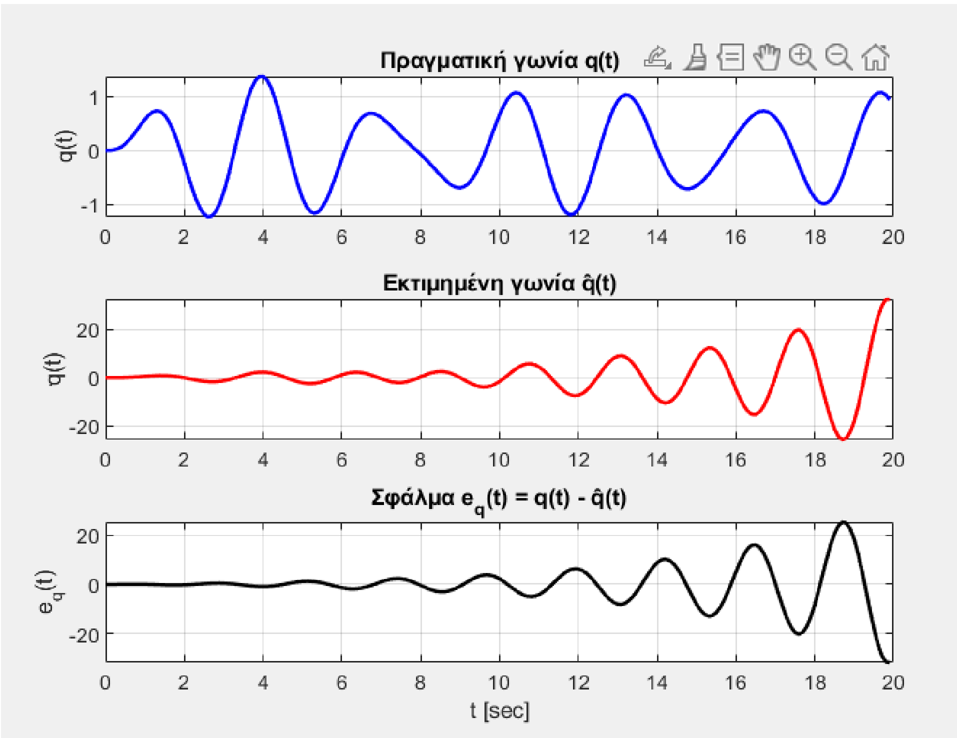
Η εκτίμηση των ϑ γίνεται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων :

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Υπολογισμός παραμέτρων $\hat{\theta}$:

- $c = \widehat{\theta_1} mL^2$=σταϑ.
- $L = \frac{g}{\hat{\theta}_2}$
- $m = \frac{1}{\hat{\theta}_3 L^2}$

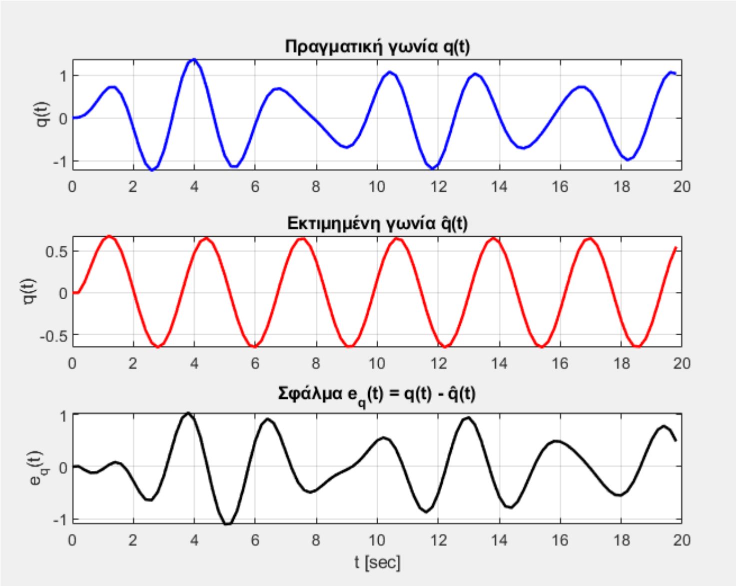
Στο 2.α) μας υποδεικνύει ότι είναι μετρήσιμο το διάνυσμα κατάστασης x(t) καθώς και η είσοδος u(t) επίσης καλούμαστε να χρησιμοποιήσουμε δειγματοληψία με Ts=0.1 sec. Οπότε:



Παρατηρήσεις και σχόλια:

- *Το διάγραμμα της q(t) παρουσιάζει την αναμενόμενη φθίνουσα ταλάντωση λόγω της απόσβεσης $c\dot{q}(t)$*
- *Το διάγραμμα της $\hat{q}(t)$ έχει μεγάλη απόκλιση από την πραγματική συμπεριφορά*
- *Το διάγραμμα του σφάλματος αυξάνει με το χρόνο και παρατηρείται σταδιακή απόκλιση της πρόβλεψης από το πραγματικό q(t) πράγμα το οποίο αντικατοπτρίζεται και από τον τύπο J.*

2.β) Σε αυτό το ερώτημα μελετάμε το σύστημα θεωρώντας μετρήσιμα τα q(t) και u(t).



Παρατηρήσεις και σχόλια:

- *Η πραγματική γωνία παρουσιάζει κανονική φθίνουσα ταλάντωση όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Το σήμα είναι ομαλό περιοδικό και εμφανίζει ελάττωση του πλάτους λόγω της απόσβεσης .*
- *Η εκτιμημένη γωνία ταιριάζει αρκετά καλά σε σχήμα με την πραγματική απόκριση και το πλάτος δεν ξεφεύγει σημαντικά. Επίσης η εκτίμηση είναι εμφανώς πιο σταθερή σε σχέση με της προηγούμενη περίπτωση καθώς τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε είναι πιο άμεσα συνδεδεμένα με την έξοδο. Η περιοδικότητα είναι ξεκάθαρη και η μορφή της ταλάντωσης προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματικότητα.*
- *Το σφάλμα παραμένει συστηματικά περιοδικό και δεν αυξάνει επικίνδυνα με τον χρόνο.*

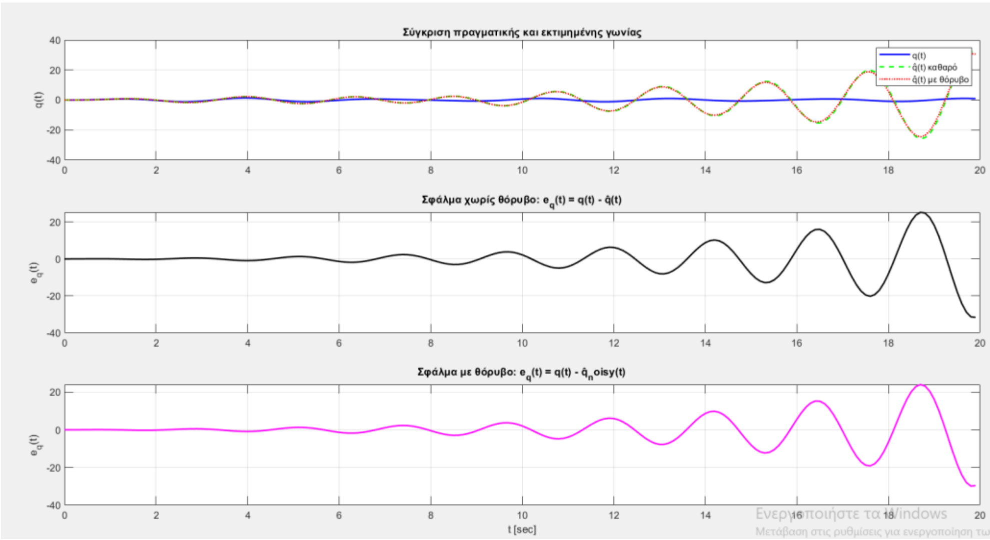
Συμπεράσματα:

- *Σε σχέση με το 2.α) η εκτίμηση είναι βελτιωμένη στο 2.β).*
- *Η χρήση απλούστερων μετρήσιμων μεγεθών (q και u) οδήγησε σε πιο αξιόπιστα αποτελέσματα*

- *Το σφάλμα στο 2.β) είναι σταθερό και περιοδικό το οποίο το καθιστά και πιο προβλέψιμο. Επίσης το σφάλμα διατηρήθηκε εντός των 1 rad στην δεύτερη περίπτωση ενώ στην πρώτη ξέφυγε στα 20 rad.*
- *Στην 2.α) η παρουσία δευτέρας παραγώγου του q οδήγησε σε ένα αριθμητικά ευαίσθητο σύστημα και ασταθές*
- *Στην 2.β) έχουμε καλύτερη πρακτική συμπεριφορά παρά την θεωρητική απώλεια πληροφορίας.(στην μια περίπτωση έχω q και στην άλλη x)*

ΘΕΜΑ 3ο

3.α) Σε αυτό το ερώτημα καλούμαστε να προσθέσουμε λευκό Γκαούσιαν θόρυβο στο σύστημα μας και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με και χωρίς θόρυβο.



Command Window

```
--- Εκτιμώμενες Παράμετροι με Θόρυβο ---
    1.1418
    0.4336
    9.0282

--- Πραγματικές Παράμετροι ---
    1.1719
    0.1500
    9.1969

--- Απόλυτο Σφάλμα ---
    0.0300
    0.2836
    0.1687

fx >>
```

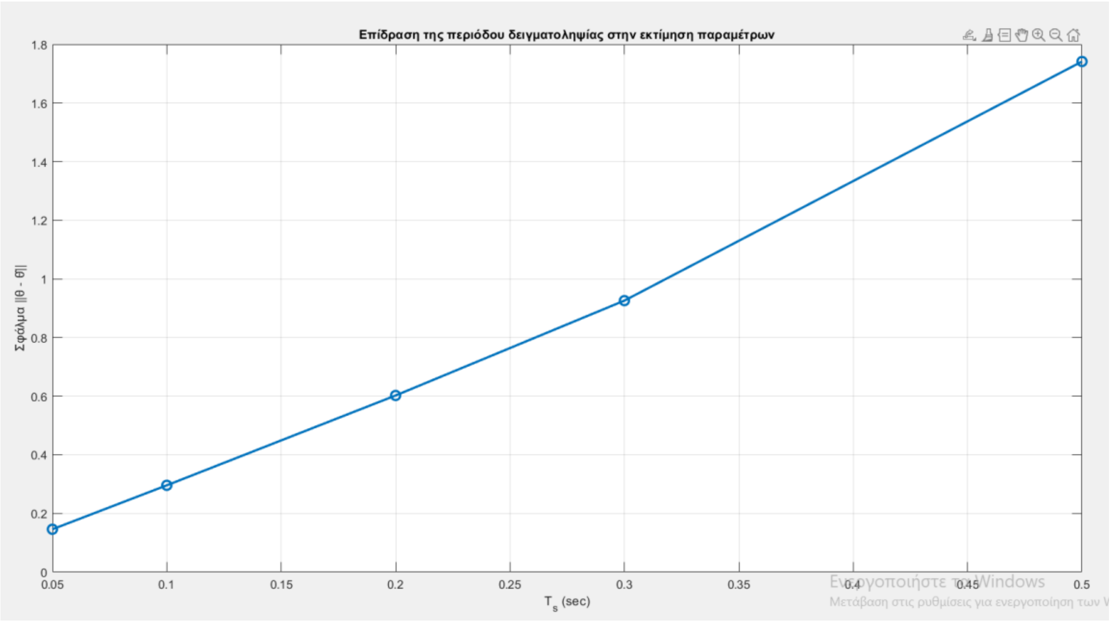
Τόσο από τα αριθμητικά αποτελέσματα όσο και από τις προσομοιώσεις παρατηρούμε τα εξής:

- *Εκτίμηση χωρίς θόρυβο: Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων προσεγγίζουν πολύ καλά τις πραγματικές τιμές του συστήματος με μικρό σφάλμα.*

- *Εκτίμηση με θόρυβο: (σ=0,02)*

  - *Παρατηρούμε απόλυτο σφάλμα ειδικότερα σε παραμέτρους που εξαρτώνται από υψηλότερης τάξης παραγώγους όπως η $\ddot{q}$ όπως η θ_1.*
  - *Το σήμα $\hat{q}$ αποκλίνει περισσότερο από την πραγματική γωνία*
  - *Το σφάλμα γίνεται μεγαλύτερο και πιο ασταθές χρονικά στην ύπαρξη θορύβου ειδικότερα προς το τέλος της προσομοίωσης*

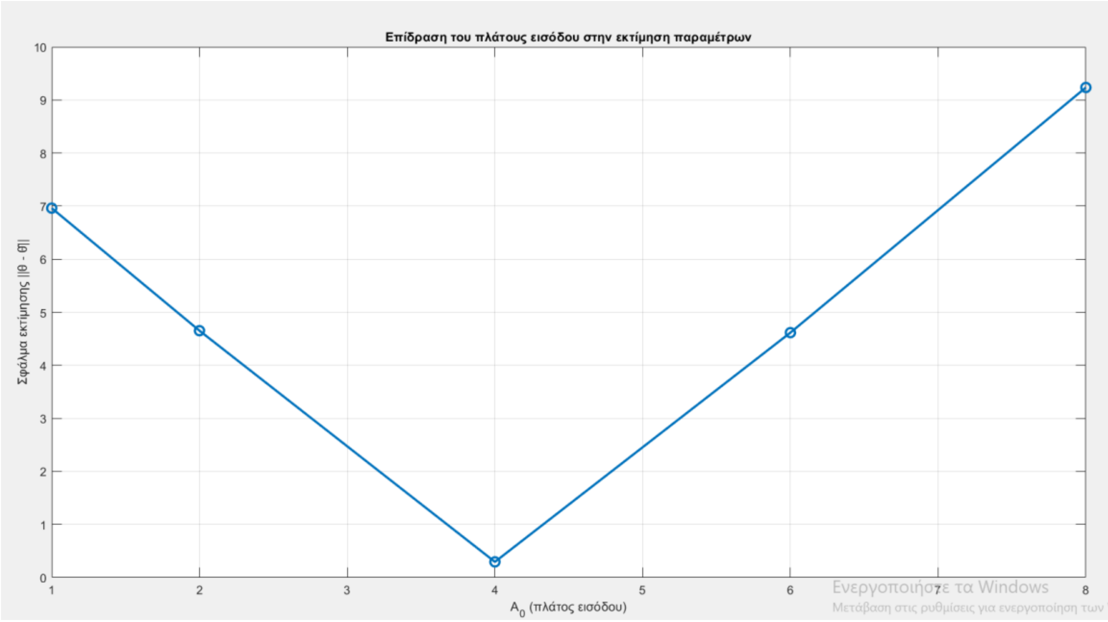
3.β) Σε αυτό το ερώτημα μας ζητείται να μεταβάλουμε την περίοδο δειγματοληψίας T_s.



- Το γράφημα δείχνει ότι όσο αυξάνεται το T_s, τόσο χειρότερη γίνεται η εκτίμηση.

- Το σφάλμα εκτίμησης κυμαίνεται από πολύ μικρές τιμές (T_s=0.05 sec, έχω σφάλμα 0,19) μέχρι και σημαντικά υψηλές τιμές ($T_s = 0{,}5sec$, έχω σφάλμα 1,8) πράγμα το οποίο δείχνει ότι με μικρή αύξηση της δειγματοληψίας (βήμα) έχω έντονες μεταβολές στο σφάλμα.

3.γ) Εδώ διατηρούμε σταθερή την δειγματοληψία στα 0,1 sec και μεταβάλουμε το πλάτος της εισόδου A_0. Το πλάτος της εισόδου επηρεάζει άμεσα την "διέγερση" του συστήματος και, κατά συνέπεια, τα δυναμικά του χαρακτηριστικά.



Σχόλια:

- Για **χαμηλά πλάτη** (π.χ. $A_0 = 1$), η εκτίμηση είναι κακής ποιότητας. Το σύστημα δεν "διεγείρεται" αρκετά για να παράξει διακριτά και πληροφοριακά σήματα, με αποτέλεσμα η εκτίμηση να είναι ασταθής.
- Καθώς το A_0αυξάνεται, η **ακρίβεια βελτιώνεται σημαντικά**, καθώς το σύστημα αποκτά ισχυρότερη δυναμική απόκριση.(Το σφάλμα μικραίνει)
- Στο $A_0 = 4$ το σύστημα έχει την βέλτιστη συμπεριφορά καθώς το σφάλμα είναι ελάχιστο και έχουμε καλή διέγερση του συστήματος.
- Για πολύ μεγάλα ($A_0 = 6$ ή 8) αντίθετα με το αναμενόμενο, το σφάλμα αρχίζει να αυξάνεται ξανά. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε παραβίαση υπόθεσης γραμμικοποίησης. Ειδικότερα, η εξίσωση έχει γραμμικοποιηθεί με την παραδοχή ότι: sin(q)≈q (για μικρές γωνίες). Όταν το A_0 είναι μεγάλο → το q(t) φτάνει υψηλές τιμές → η προσέγγιση για το q από την εκφώνηση **δεν ισχύει πλέον**.