

4.2 Part 2

Here is eigenvalue and eigenvectors of the original matrix A:

```
Here are all the eigenvalues: [ 0.0058684  0.02343915  0.05260915  0.09320722  0.1449951  0.20766889
 0.28086079  0.36414128  0.45702164  0.55895681  0.6693486  0.78754918
 0.9128649  1.04456036  1.18186273  1.2396624  1.470037  1.61921778
1.77063315  1.92339453  2.07660547  2.22936685  2.38078222  2.529963
2.67603376  2.81183727  2.95543964  3.0871351  3.21245082  3.3306514
3.44104319  3.54297836  3.63585872  3.71913921  3.79233111  3.8550049
3.90679278  3.94739085  3.97656085  3.9941316 ]
```

Figure 1: eigenvalues

0.17565081 0.0169069 0.15315362 0.22070098 -0.14052245 -0.03371459 0.18538481 0.21296797 -0.09800132 -
 0.08256238 -0.20786306 0.1940309 0.05032442 0.12706664 0.21940582 0.16488602] [-0.17565081 0.21296797 -
 0.08256238 0.11286515 -0.21940582 -0.15315362 -0.03371459 0.1940309 -0.20153833 -0.05032442 -0.14052245 -
 0.22070098 0.12706664 -0.06663893 -0.20786306 0.18538481 0.0169069 -0.16488602 0.2168231 0.09800132 0.09800132
 -0.2168231 0.16488602 0.0169069 -0.18538481 -0.20786306 0.06663893 -0.12706664 0.22070098 -0.14052245 -
 0.05032442 -0.20153833 0.1940309 -0.03371459 0.15315362 -0.21940582 -0.11286515 -0.08256238 -0.21296797
 -0.17565081] [-0.18538481 0.20153833 -0.03371459 0.16488602 -0.21296797 -0.06663893 -0.14052245 0.21940582
 -0.09800132 0.11286515 -0.22070098 -0.12706664 -0.08256238 -0.2168231 -0.15315362 -0.05032442 -0.20786306 -
 0.17565081 -0.0169069 -0.1940309 0.1940309 -0.0169069 -0.17565081 0.20786306 -0.05032442 0.15315362 -0.2168231
 -0.08256238 -0.12706664 0.22070098 -0.11286515 0.09800132 -0.21940582 0.14052245 -0.06663893 0.21296797
 0.16488602 0.03371459 0.20153833 0.18538481] [-0.1940309 0.18538481 0.0169069 0.20153833 -0.17565081 0.03371459
 -0.20786306 0.16488602 0.05032442 0.21296797 -0.15315362 0.06663893 -0.2168231 -0.14052245 0.08256238 -
 0.21940582 -0.12706664 0.09800132 -0.22070098 -0.11286515 0.22070098 -0.09800132 -0.12706664
 0.21940582 0.08256238 0.14052245 0.2168231 -0.06663893 -0.15315362 0.21296797 0.05032442 0.16488602 -
 0.20786306 -0.03371459 -0.17565081 -0.20153833 0.0169069 -0.18538481 -0.1940309] [-0.20153833 0.16488602
 0.06663893 0.21940582 -0.11286515 0.12706664 -0.2168231 0.05032442 0.17565081 0.1940309 0.0169069 0.20786306
 -0.15315362 0.08256238 0.22070098 -0.09800132 0.14052245 0.21296797 -0.03371459 0.18538481 -0.18538481 -
 0.03371459 0.21296797 -0.14052245 -0.09800132 -0.22070098 0.08256238 -0.15315362 0.20786306 -0.0169069 -
 0.1940309 -0.17565081 -0.05032442 0.2168231 0.12706664 0.11286515 0.21940582 -0.06663893 0.16488602 0.20153833]
 [-0.20786306 0.14052245 0.11286515 0.2168231 -0.03371459 0.1940309 -0.16488602 -0.08256238 0.22070098 0.06663893
 0.17565081 0.18538481 0.05032442 0.21940582 0.09800132 0.15315362 0.20153833 -0.0169069 0.21296797 0.12706664
 0.12706664 -0.21296797 0.0169069 0.20153833 -0.15315362 0.09800132 -0.21940582 -0.05032442 -0.18538481
 0.17565081 0.06663893 0.22070098 -0.08256238 -0.16488602 -0.1940309 -0.03371459 -0.2168231 0.11286515 -
 0.14052245 -0.20786306] [-0.21296797 0.11286515 0.15315362 0.1940309 0.05032442 0.22070098 -0.06663893 -
 0.18538481 0.16488602 -0.09800132 0.2168231 0.0169069 0.20786306 0.12706664 -0.14052245 0.20153833 -0.03371459
 -0.21940582 0.08256238 -0.17565081 0.17565081 0.08256238 -0.21940582 0.03371459 0.20153833 0.14052245 0.12706664
 0.20786306 0.0169069 -0.2168231 0.09800132 -0.16488602 0.18538481 0.06663893 0.22070098 -0.05032442 0.1940309
 -0.15315362 0.11286515 0.21296797] [-0.2168231 0.08256238 0.18538481 0.15315362 0.12706664 0.20153833 0.05032442
 -0.22070098 0.03371459 -0.20786306 0.11286515 -0.16488602 0.17565081 -0.09800132 -0.21296797 -0.0169069
 -0.21940582 -0.06663893 -0.1940309 -0.14052245 -0.14052245 0.1940309 0.06663893 -0.21940582 0.0169069 -
 0.21296797 0.09800132 -0.17565081 0.16488602 0.11286515 -0.20786306 0.03371459 -0.22070098 0.05032442 -
 0.20153833 0.12706664 -0.15315362 0.18538481 -0.08256238 -0.2168231] [-0.21940582 0.05032442 0.20786306
 0.09800132 0.18538481 0.14052245 0.15315362 -0.17565081 -0.11286515 -0.20153833 -0.06663893 -0.2168231 -
 0.0169069 -0.22070098 -0.03371459 -0.21296797 -0.08256238 0.1940309 -0.12706664 0.16488602 -0.16488602 -
 0.12706664 0.1940309 0.08256238 -0.21296797 0.03371459 -0.22070098 -0.0169069 -0.2168231 0.06663893 0.20153833
 0.11286515 0.17565081 -0.15315362 0.14052245 -0.18538481 0.09800132 -0.20786306 0.05032442 0.21940582]
 [-0.22070098 0.0169069 0.21940582 0.03371459 0.2168231 0.05032442 0.21296797 -0.06663893 -0.20786306 -
 0.08256238 -0.20153833 -0.09800132 -0.1940309 -0.11286515 0.18538481 -0.12706664 0.17565081 0.14052245
 0.16488602 0.15315362 0.15315362 -0.16488602 -0.14052245 0.17565081 0.12706664 0.18538481 0.11286515 0.1940309
 0.09800132 -0.20153833 -0.08256238 -0.20786306 -0.06663893 0.21296797 -0.05032442 0.2168231 -0.03371459
 0.21940582 -0.0169069 -0.22070098] [-0.22070098 -0.0169069 0.21940582 -0.03371459 0.2168231 -0.03371459 0.2168231 -0.05032442
 0.09800132 0.18538481 0.14052245 0.15315362 -0.17565081 -0.11286515 0.20153833 -0.06663893 -0.2168231 -
 0.0169069 -0.22070098 -0.03371459 -0.21296797 -0.08256238 0.1940309 -0.12706664 0.16488602 -0.16488602 -
 0.12706664 0.1940309 0.08256238 -0.21296797 0.03371459 -0.22070098 -0.0169069 -0.2168231 0.06663893 0.20153833
 0.11286515 0.17565081 0.15315362 0.14052245 0.18538481 0.09800132 0.20786306 0.05032442 -0.21940582]
 [-0.2168231 -0.08256238 0.18538481 -0.15315362 0.12706664 -0.20153833 0.05032442 0.22070098 0.03371459 0.20786306
 0.11286515 0.16488602 0.17565081 0.09800132 -0.21296797 0.0169069 -0.21940582 0.06663893 -0.1940309 0.14052245
 -0.14052245 -0.1940309 0.06663893 0.21940582 0.0169069 0.21296797 0.09800132 0.17565081 0.16488602 -0.11286515
 -0.20786306 -0.03371459 -0.22070098 -0.05032442 -0.20153833 -0.12706664 -0.15315362 -0.18538481 -0.08256238
 0.2168231] [-0.21296797 -0.11286515 0.15315362 -0.1940309 0.05032442 -0.22070098 -0.06663893 0.18538481
 0.16488602 0.09800132 0.2168231 -0.0169069 0.20786306 -0.12706664 -0.14052245 -0.20153833 -0.03371459 0.21940582
 0.08256238 0.17565081 -0.17565081 -0.08256238 -0.21940582 -0.03371459 0.20153833 -0.14052245 0.12706664 -
 0.20786306 0.0169069 0.2168231 0.09800132 0.16488602 0.18538481 -0.06663893 0.22070098 0.05032442 0.1940309
 0.15315362 0.11286515 -0.21296797] [-0.20786306 -0.14052245 0.11286515 0.09800132 0.21940582 -0.03371459 0.11286515 -0.1940309
 -0.16488602 0.08256238 0.22070098 -0.06663893 0.17565081 -0.18538481 0.05032442 -0.21940582 0.09800132 -
 0.15315362 0.20153833 0.0169069 0.21296797 -0.12706664 0.12706664 0.21296797 0.0169069 -0.20153833 -0.15315362
 -0.09800132 -0.21940582 0.05032442 -0.18538481 -0.17565081 0.06663893 -0.22070098 -0.08256238 0.16488602

-0.1940309 0.03371459 -0.2168231 -0.11286515 -0.14052245 0.20786306] [-0.20153833 -0.16488602 0.06663893
 -0.21940582 -0.11286515 -0.12706664 -0.2168231 -0.05032442 0.17565081 -0.1940309 0.0169069 -0.20786306 -
 0.15315362 -0.08256238 0.22070098 0.09800132 0.14052245 -0.21296797 -0.03371459 -0.18538481 -0.18538481
 0.03371459 0.21296797 0.14052245 -0.09800132 0.22070098 0.08256238 0.15315362 0.20786306 0.0169069 -0.1940309
 0.17565081 -0.05032442 -0.2168231 0.12706664 -0.11286515 0.21940582 0.06663893 0.16488602 -0.20153833] [-
 0.1940309 -0.18538481 0.0169069 -0.20153833 -0.17565081 -0.03371459 -0.20786306 -0.16488602 0.05032442 -
 0.21296797 -0.15315362 -0.06663893 -0.2168231 0.14052245 0.08256238 0.21940582 -0.12706664 -0.09800132 -
 0.22070098 0.11286515 -0.11286515 -0.22070098 -0.09800132 0.12706664 0.21940582 -0.08256238 0.14052245
 -0.2168231 -0.06663893 0.15315362 0.21296797 -0.05032442 0.16488602 0.20786306 -0.03371459 0.17565081 -
 0.20153833 -0.0169069 -0.18538481 0.1940309] [-0.18538481 -0.20153833 -0.03371459 -0.16488602 -0.21296797
 0.06663893 -0.14052245 -0.21940582 -0.09800132 -0.11286515 -0.22070098 0.12706664 -0.08256238 0.2168231 -
 0.15315362 0.05032442 -0.20786306 0.17565081 -0.0169069 0.1940309 0.1940309 0.0169069 -0.17565081 -0.20786306
 -0.05032442 -0.15315362 -0.2168231 0.08256238 -0.12706664 -0.22070098 -0.11286515 -0.09800132 -0.21940582
 -0.14052245 -0.06663893 -0.21296797 0.16488602 -0.03371459 0.20153833 -0.18538481] [-0.17565081 -0.21296797
 -0.08256238 -0.11286515 -0.21940582 0.15315362 -0.03371459 -0.1940309 -0.20153833 0.05032442 -0.14052245
 0.22070098 0.12706664 0.06663893 -0.20786306 -0.18538481 0.0169069 0.16488602 0.2168231 -0.09800132 0.09800132
 0.2168231 0.16488602 -0.0169069 -0.18538481 0.20786306 0.06663893 0.12706664 0.22070098 0.14052245 -0.05032442
 0.20153833 0.1940309 0.03371459 0.15315362 0.21940582 -0.11286515 0.08256238 -0.21296797 0.17565081] [-
 0.16488602 -0.21940582 -0.12706664 -0.05032442 -0.1940309 0.20786306 0.08256238 -0.09800132 -0.21296797
 0.18538481 0.03371459 0.14052245 0.22070098 -0.15315362 -0.0169069 -0.17565081 0.2168231 -0.11286515 0.06663893
 -0.20153833 -0.20153833 -0.06663893 0.11286515 0.2168231 0.17565081 -0.0169069 0.15315362 -0.22070098 -
 0.14052245 0.03371459 0.18538481 -0.21296797 -0.09800132 0.08256238 -0.20786306 -0.1940309 0.05032442 -
 0.12706664 0.21940582 -0.16488602 -0.16488602] [-0.15315362 -0.22070098 -0.16488602 0.0169069 -0.14052245 0.21940582
 0.17565081 0.03371459 -0.12706664 0.2168231 0.18538481 -0.05032442 0.11286515 -0.21296797 0.1940309 0.06663893
 0.09800132 -0.20786306 -0.20153833 0.08256238 -0.08256238 -0.20153833 -0.20786306 -0.09800132 0.06663893
 -0.1940309 -0.21296797 0.11286515 -0.05032442 -0.18538481 -0.2168231 0.12706664 -0.03371459 -0.17565081
 0.21940582 0.14052245 0.0169069 0.16488602 -0.22070098 0.15315362] [-0.14052245 -0.2168231 -0.1940309 0.08256238
 -0.06663893 0.18538481 0.21940582 0.15315362 0.0169069 0.12706664 0.21296797 -0.20153833 -0.09800132 -
 0.05032442 0.17565081 0.22070098 -0.16488602 0.03371459 -0.11286515 0.20786306 0.20786306 0.11286515 -
 0.03371459 -0.16488602 -0.22070098 0.17565081 0.05032442 0.09800132 0.20153833 0.21296797 0.12706664 0.0169069
 0.15315362 0.21940582 -0.18538481 -0.06663893 -0.08256238 -0.1940309 0.2168231 -0.12706664 -0.14052245] [-0.12706664 -
 0.20786306 -0.21296797 0.14052245 0.0169069 0.11286515 0.20153833 0.2168231 0.15315362 -0.03371459 0.09800132
 -0.1940309 -0.21940582 0.16488602 -0.05032442 0.08256238 -0.18538481 0.22070098 -0.17565081 -0.06663893
 0.06663893 0.17565081 0.22070098 0.18538481 0.08256238 0.05032442 0.16488602 -0.21940582 -0.1940309 -
 0.09800132 0.03371459 -0.15315362 -0.2168231 -0.20153833 0.11286515 -0.0169069 0.14052245 0.21296797 -
 0.20786306 0.12706664] [-0.11286515 -0.1940309 -0.22070098 0.18538481 0.09800132 0.0169069 0.12706664 0.20153833
 0.21940582 -0.17565081 -0.08256238 -0.03371459 -0.14052245 0.20786306 -0.2168231 -0.16488602 0.06663893
 0.05032442 0.15315362 -0.21296797 -0.15315362 -0.05032442 0.06663893 0.16488602 -0.2168231 -
 0.20786306 0.14052245 0.03371459 -0.08256238 -0.17565081 0.21940582 0.20153833 0.12706664 -0.0169069 0.09800132
 -0.1940309 -0.21296797 0.14052245 0.0169069 0.11286515 0.20153833 0.2168231 0.15315362 -0.03371459 0.09800132
 -0.17565081 -0.22070098 0.17565081 0.05032442 0.09800132 0.20153833 0.21296797 0.12706664 0.0169069
 0.15315362 0.21940582 -0.18538481 -0.06663893 -0.08256238 -0.1940309 0.2168231 -0.12706664 -0.14052245] [-0.12706664 -
 0.20786306 -0.21296797 0.14052245 0.0169069 0.11286515 0.20153833 0.2168231 0.15315362 -0.03371459 0.09800132
 -0.1940309 -0.21940582 0.16488602 -0.05032442 0.08256238 -0.18538481 0.22070098 -0.17565081 -0.06663893
 0.06663893 0.17565081 0.22070098 0.18538481 0.08256238 0.05032442 0.16488602 -0.21940582 -0.1940309 -
 0.09800132 0.03371459 -0.15315362 -0.2168231 -0.20153833 0.11286515 -0.0169069 0.14052245 0.21296797 -
 0.20786306 0.12706664] [-0.12706664 -0.17565081 -0.08256238 -0.03371459 -0.14052245 0.20786306 -0.2168231 -0.16488602
 0.06663893 0.17565081 0.22070098 0.18538481 0.08256238 0.05032442 0.16488602 -0.21940582 -0.1940309 -
 0.09800132 0.03371459 0.09800132 0.15315362 0.1940309 0.2168231 -0.21940582 -0.20153833 0.16488602
 0.11286515 0.05032442 -0.0169069 0.08256238 0.14052245 0.18538481 -0.21296797 -0.22070098 0.20786306 0.17565081
 -0.12706664 0.06663893] [-0.05032442 -0.09800132 -0.14052245 0.17565081 0.20153833 -0.2168231 -0.22070098
 -0.21296797 -0.1940309 0.16488602 0.12706664 -0.08256238 -0.03371459 -0.0169069 0.06663893 0.11286515 -
 0.15315362 0.18538481 0.20786306 -0.21940582 -0.21940582 -0.20786306 -0.18538481 -0.15315362 -0.11286515
 0.06663893 0.0169069 0.03371459 0.08256238 0.12706664 0.16488602 -0.1940309 -0.21296797 -0.22070098 0.2168231
 0.20153833 -0.17565081 -0.14052245 0.09800132 -0.05032442] [-0.03371459 -0.06663893 -0.09800132 0.09800132 0.15315362
 0.1940309 0.2168231 0.22070098 0.21940582 -0.21296797 -0.20153833 0.16488602 -0.21296797 -0.20153833 0.18538481
 -0.16488602 -0.14052245 0.11286515 -0.08256238 -0.05032442 0.0169069 -0.0169069 -0.05032442 -0.08256238
 -0.11286515 -0.14052245 0.16488602 0.18538481 -0.20153833 -0.21296797 -0.21940582 -0.22070098 0.2168231
 0.20786306 0.1940309 -0.17565081 -0.15315362 0.12706664 0.09800132 -0.06663893 0.03371459] [-0.0169069 -
 0.03371459]

```

0.03371459 -0.05032442 0.06663893 0.08256238 -0.09800132 -0.11286515 -0.12706664 -0.14052245 0.15315362
0.16488602 -0.17565081 -0.18538481 0.1940309 -0.20153833 -0.20786306 0.21296797 -0.2168231 -0.21940582 0.22070098
0.22070098 0.21940582 0.2168231 0.21296797 0.20786306 -0.20153833 -0.1940309 0.18538481 0.17565081 0.16488602
0.15315362 -0.14052245 -0.12706664 -0.11286515 0.09800132 0.08256238 -0.06663893 -0.05032442 0.03371459 -
0.0169069 ]]

```

Here is 3rd, 6th and 10th eigenvectors of A scaled by the supremum norm:

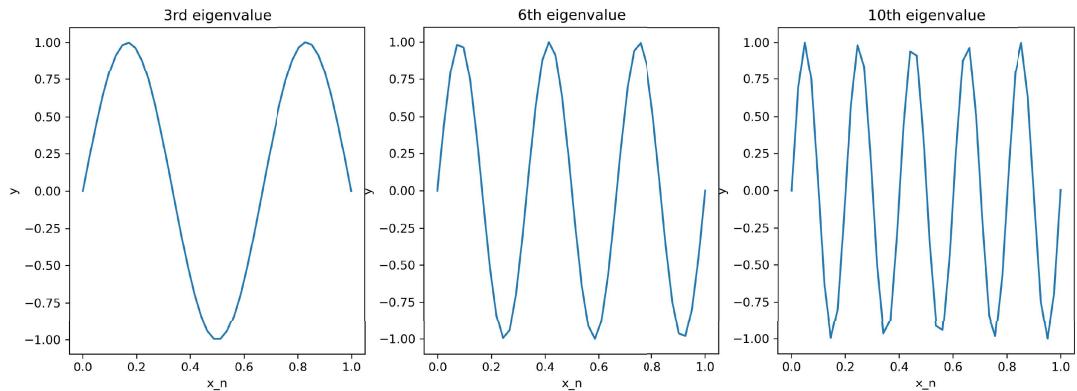


Figure 2: eigenvector of A

We can see the factor the eigenvectors of A coincide with the eigenfunction of the second order ODE we are solving in part A. However, as the eigenvalue getting bigger, the estimated eigenvector is slightly different to the eigenfunctions.

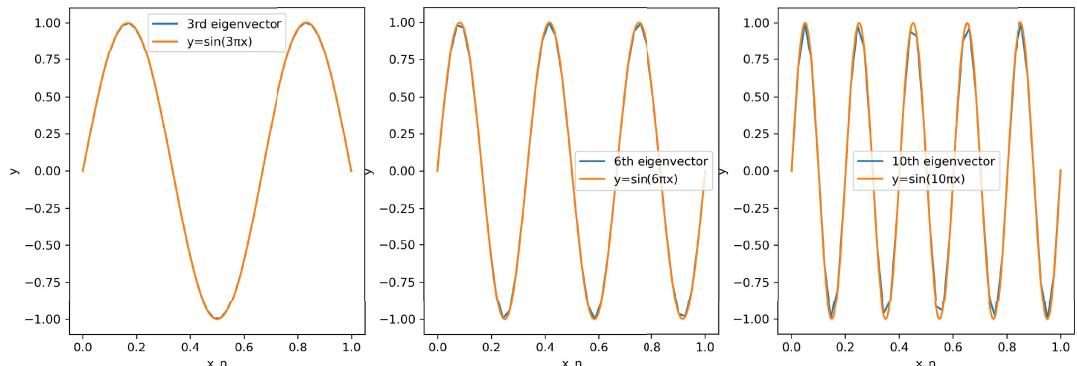


Figure 3: comparation between solution of ODE and A

We can see the error gets bigger as the eigenvalues getting bigger.

```

Here is the eigenvalues of A [ 88.43598492 349.0913975 939.60640231]
Here is the eigenvalues of solving ODE [ 88.82643961 355.30575844 986.96044011]
Here is the percentage error of eigenvalues A to eigenvalues of solving ODEs repectively [0.43957034 1.7490178 4.79796716] %

```

Figure 4: eigenvalue error of 3rd,6th and 10th

Here is the percentage error of all eigenvalues:

```

Here is the eigenvalues of A [ 9.86477642 39.40121525 88.43598492 156.68132991 243.73675939
349.0913975 472.12698131 612.1214891 768.25337744 939.60640231
1125.17499604 1323.87016833 1534.5258969 1755.90597016 1986.71124183
2225.58725479 2471.13218961 2721.90509099 2976.43432381 3233.22620933
3490.77379067 3747.56567619 4002.09490901 4252.86781039 4498.41274521
4737.28875817 4968.09402984 5189.4741031 5400.12983167 5598.82500396
5784.39359769 5955.74662256 6111.8785109 6251.87301869 6374.9086025
6480.26324061 6567.31867009 6635.56401508 6684.59878475 6714.13522358]
Here is the eigenvalues of solving ODE [9.869604401089358, 39.47841760435743, 88.82643960980423, 157.91367041742973, 246.74011002723395, 355.3057584392169,
483.61061565337855, 631.6546816697189, 799.437956488238, 986.9604401089358, 1194.2221325318121, 1421.2230337568676, 1667.9631437841017, 1934.4424626135142,
2220.660990245105, 2526.618726678756, 2852.3156719148246, 3197.751825952952, 3562.9271887932578, 3947.8417604357433, 4352.495540880407, 4776.8885301272485,
5221.02072817627, 5684.89213502747, 6168.502750680849, 6671.852575136407, 7194.941608394141, 7737.769850454057, 8300.33730131615, 8882.64396098042,
9484.689829446872, 10106.474906715503, 10747.999192786312, 11409.262687659299, 12090.265391334462, 12791.007303811808, 13511.488425091331,
14251.708755173031, 15011.668294056912, 15791.367041742973]

Here is the percentage error of eigenvalues A to eigenvalues of solving ODEs repectively [4.89176732e-02 1.95555847e-01 4.39570345e-01 7.80388742e-01
1.21721216e+00 1.74901780e+00 2.37456209e+00 3.09238467e+00
3.90081291e+00 4.79796716e+00 5.78176661e+00 6.84993580e+00
8.00001171e+00 9.22935140e+00 1.05351402e+01 1.19144004e+01
1.33640006e+01 1.48806649e+01 1.64609837e+01 1.81014234e+01
1.97983373e+01 2.15479773e+01 2.33465041e+01 2.51899999e+01
2.70744794e+01 2.89959017e+01 3.09501828e+01 3.29332068e+01
3.49408387e+01 3.69689360e+01 3.90133605e+01 4.10699905e+01
4.31347323e+01 4.52035316e+01 4.72723849e+01 4.93373502e+01
5.13945580e+01 5.34402216e+01 5.54706469e+01 5.74822420e+01] %

```

Figure 5: eigenvalue error