Remarci:

1. Proiectele se realizează în echipă de 2-4 persoane. Fiecare echipă va desemna un lider care va fi precizat în documentație.

2. Liderul echipei va trimite pe adresa `andriciucalexandra@yahoo.com` până la data de 1 februarie 2025 ora 22:00 o singură arhivă care va conține fișierele sursă ale proiectului împreună cu documentația.

3. Documentația este obligatorie și lipsa ei atrage necorectarea proiectului.

4. Documentația trebuie să conțină:

   - Numele membrilor echipei
   - Descrierea problemei
   - Aspecte teoretice folosite în rezolvarea problemei care depășesc nivelul cursului
   - Reprezentări grafice și orice altă formă multimedia oportună proiectului
   - Precizări privind pachete software folosite și surse de inspirație
   - Codul și comentarea acestuia, precum și a soluției prezentate
   - Identificarea unor eventuale dificultăți în realizarea cerințelor
   - Probleme care au rămas deschise în urma implementării actuale
   - Concluzii

   OBS: Documentația se dorește o prezentare completă a proiectului astfel încât evaluarea acestuia să poată fi făcută facil și nu o documentație uzuală pentru un produs software.

Problem 1. *Obiectivul acestui exercițiu este de a simula un vector aleator (X_1, X_2) repartizat uniform pe discul unitate $D(1)$ (discul de centru $(0,0)$ și de rază 1). Densitatea acestuia este:*

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi} 1_{D(1)}(x_1,x_2).$$

Pentru aceasta, vom folosi două metode. O primă metodă este metoda de simulare prin acceptare și respingere. Această metodă este des utilizată pentru generarea unei v.a. repartizate uniform pe o mulțime oarecare E. Metoda constă în generarea unei v.a. X repartizată uniform pe o mulțime $F \supseteq E$, mai simplă decât E, apoi testăm dacă X se află în E sau nu. În caz afirmativ, păstrăm X, altfel generăm o nouă realizare a lui X pe F.

1. *Justificați teoretic că putem simula un vector (cuplu) aleator repartizat uniform pe pătratul $[-1,1]^2$ plecând de la două v.a. independente repartizate uniform pe segmentul $[-1,1]$.*

2. *Prin metoda acceptării și respingerii, simulați $N = 1000$ de puncte independente repartizate uniform pe discul unitate $D(1)$. Reprezentați grafic punctele (X_i, Y_i) din interiorul discului unitate cu albastru și pe celelalte cu roșu.*

3. *Calculați media aritmetică a distanței care separă cele N puncte de origine. Comparați rezultatul cu media teoretică a variabilei corespunzătoare.*

O a doua metodă de simulare a unui punct (X, Y) repartizat uniform pe $D(1)$ constă în folosirea schimbării de variabilă în coordonate polare: $X = R\cos(\theta)$ și $Y = R\sin(\theta)$.

4. *Plecând de la densitatea cuplului (X, Y), găsiți densitatea v.a. R și θ.*

5. *Simulați $N = 1000$ de puncte prin această metodă și ilustrați grafic aceste puncte (inclusiv conturul cercului).*

Problem 2. *Construiți o aplicație **Shiny** în care să reprezentați grafic funcțiile de repartiție pentru următoarele variabile aleatoare:*

1. $X, 3+2X, X^2, \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2$, *unde* $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1)$, *iar n este fixat, $n \in \mathbb{N}$.*

2. $X, 3+2X, X^2, \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2$, *unde* $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, *cu $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, iar n este fixat, $n \in \mathbb{N}$.*

3. $X, 2-5X, X^2, \sum_{i=1}^n X_i$, *unde* $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim}$ *Exp*(λ), *cu $\lambda > 0$, iar n este fixat, $n \in \mathbb{N}$.*

4. $X, 3X+2, X^2, \sum_{i=1}^n X_i$, *unde* $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim}$ *Pois*(λ), *cu $\lambda > 0$, iar n este fixat, $n \in \mathbb{N}$.*

5. $X, 5X+4, X^3, \sum_{i=1}^n X_i$, *unde* $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim}$ *Binom*(r, p), *cu $r \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$, iar n este fixat, $n \in \mathbb{N}$.*

Problem 3. *Pentru următoarele subpuncte rezolvările trebuie să fie abordate din două perspective, adică atât dpdv teoretic, cât și prin intermediul simulărilor. Have fun!*

a) *Pe un plan sunt trasate liniile $y = n$ (cu $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$) și un ac de lungime 1 este aruncat aleator pe acest plan. Arătați că probabilitatea ca acul să intersecteze vreo linie este egală cu $\frac{2}{\pi}$.*

b) *Planul este secționat ca mai sus, de liniile $y = n$ (unde $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$), iar pe plan aruncăm o cruce formată prin unirea mijloacelor a două ace perpendiculare, de lungime 1. Notăm cu Z numărul de intersecții ale crucii cu liniile de pe plan. Arătați că $\mathbb{E}[Z/2] = \frac{2}{\pi}$, iar $Var(Z/2) = \frac{3-\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$. Dacă ați avea de ales între a folosi acul sau crucea (deci unul din acești doi algoritmi aleatori) pentru a estima valoarea lui π, ce ați alege? De ce?*

c1) Considerați acum o valoarea d fixată și un plan pe care sunt trasate liniile $y = n \cdot d$ (unde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Un ac de lungime $L(< d)$ este aruncat la întâmplare pe acest plan. Arătați că probabilitatea ca acul să intersecteze vreo linie din plan este egală cu $\frac{2L}{\pi d}$.

c2) Mai departe, fixați acum poziția acului și considerați un cerc C de diamentru d, centrat în mijlocul acului. Fie λ o linie ale cărei direcție și distanță față de centrul lui C sunt independente și uniform distribuite pe $[0, 2\pi]$ și, respectiv, $[0, d/2]$. Arătați că probabilitatea ca acul să se intersecteze cu linia (aleatoare) λ este egală (tot cu) $\frac{2L}{\pi d}$.

d) Pe un plan se consideră următorul grid format cu 2 seturi de linii paralele suprapuse: primul set conține linii la distanță d_1 unele de altele, iar al doilea set conține linii la distanță d_2 unele de altele și perpendiculare pe cele din primul set. Un ac de lungime $L < \min\{d_1, d_2\}$ este aruncat la întâmplare pe acest plan. Arătați că probabilitatea ca acesta să intersecteze planul este egală cu $\frac{L(2d_1+2d_2-L)}{\pi d_1 d_2}$.

e) În cadrul simulărilor pentru această problemă ce tip de strategie aleatoare a fost implementată: Las Vegas sau Monte Carlo? Justificați sumar și dați un exemplu de algoritm aleator (cu implementare) din cealaltă categorie.