НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Компютърни архитектури CSCB008

Логически функции и логически елементи
Булева алгебра

доц. д-р Ясен Горбунов

2021

НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Логически функции и логически елементи. Булева алгебра

Някои термини

логическа константа – истина (true) и неистина (false), 1 и 0, HIGH и LOW

Някои термини

логическа константа – истина (true) и неистина (false), 1 и 0, HIGH и LOW

логическа променлива – аргумент от двоичното множество $x_0, x_1, \dots, x_n \in B$

набор от логически променливи – съчетание от стойности (всяка логическа променлива може да приема една стойност – **права** или **инверсна**)

Логически функции и логически елементи. Булева алгебра

Някои термини

логическа константа – истина (true) и неистина (false), 1 и 0, HIGH и LOW

логическа променлива – аргумент от двоичното множество $x_0, x_1, \ldots, x_n \in B$

набор от логически променливи – съчетание от стойности (всяка логическа променлива може да приема една стойност – **права** или **инверсна**)

логическа функция

Една функция $f\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right)$ се нарича булева ако тя и който и да е от нейните аргументи приемат само двоични стойности.

непълно определена логическа функция (НОЛФ)

За определени набори функцията има стойности, които не са дефинирани.

Таблица на истинност

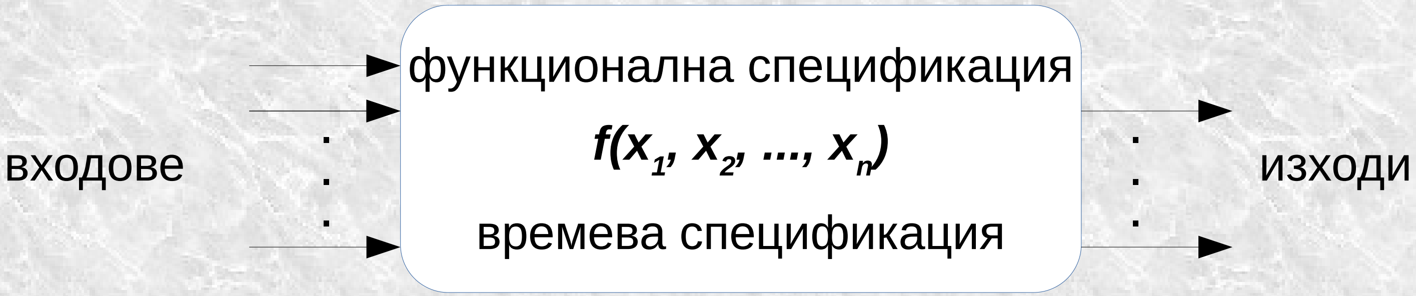
пример за функция на 3 променливи

номер на набора	x_2	x_1	x_0	функция $f(x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	X
7	1	1	1	X

X – don’t care
може да бъде 0 или 1

Видове логически схеми

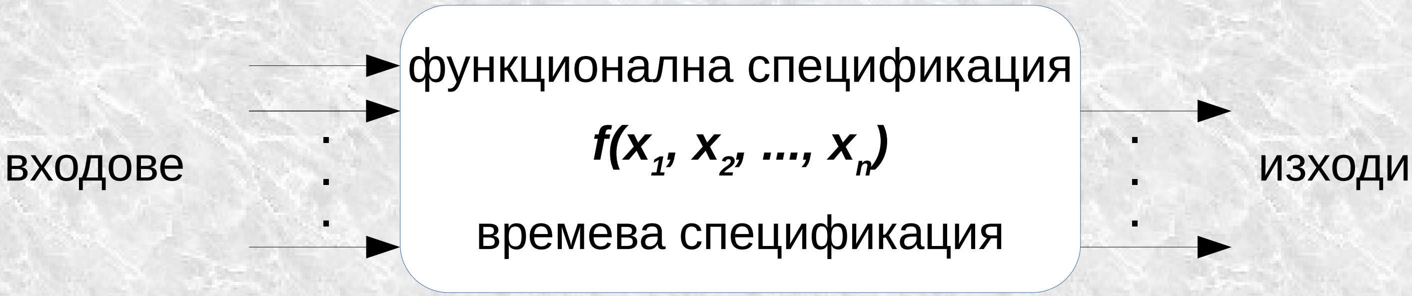
комбинационни – без памет



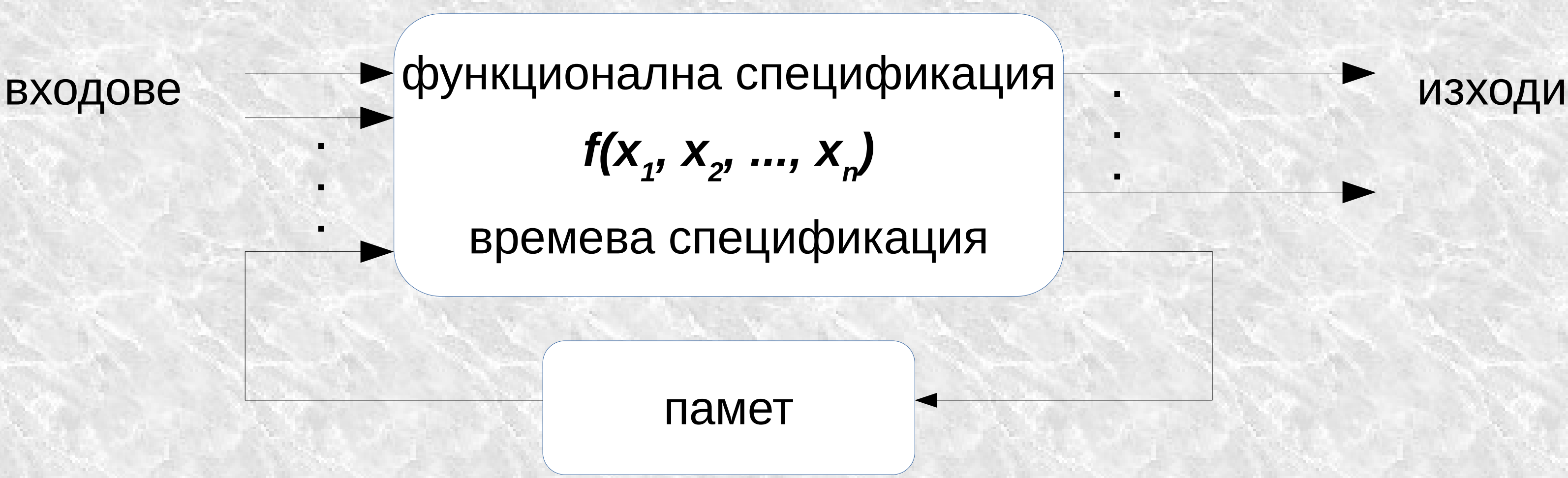
Видове логически схеми

Видове логически схеми

комбинационни – без памет



последователностни – с обратни връзки



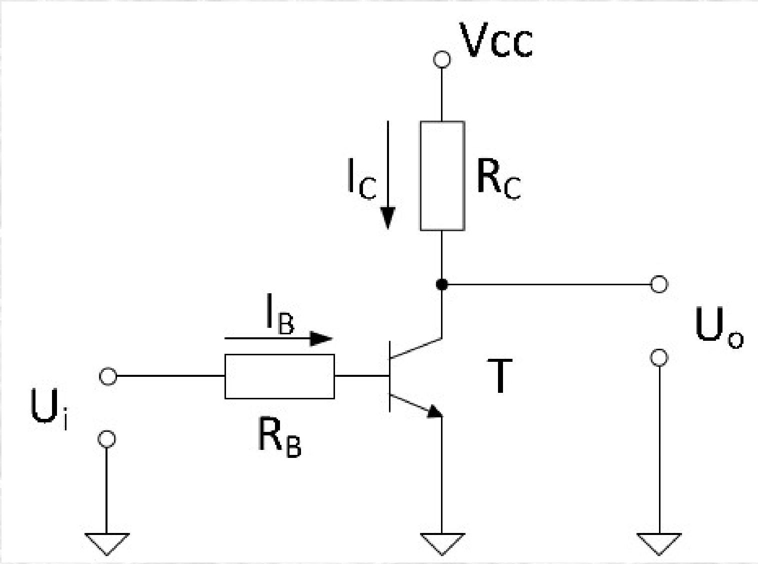
Логически елементи (gates)
таблици на истинност (truth tables)

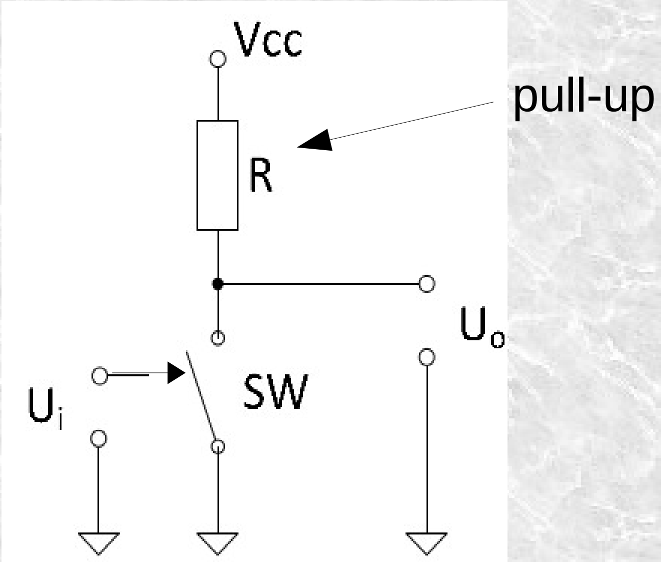
Инвертор

транзисторът като цифров ключ

линеен режим – отделяне на активна мощност ($P = I^2.R$)

ключов режим – напълно отпушен или запушен – работа без загуби

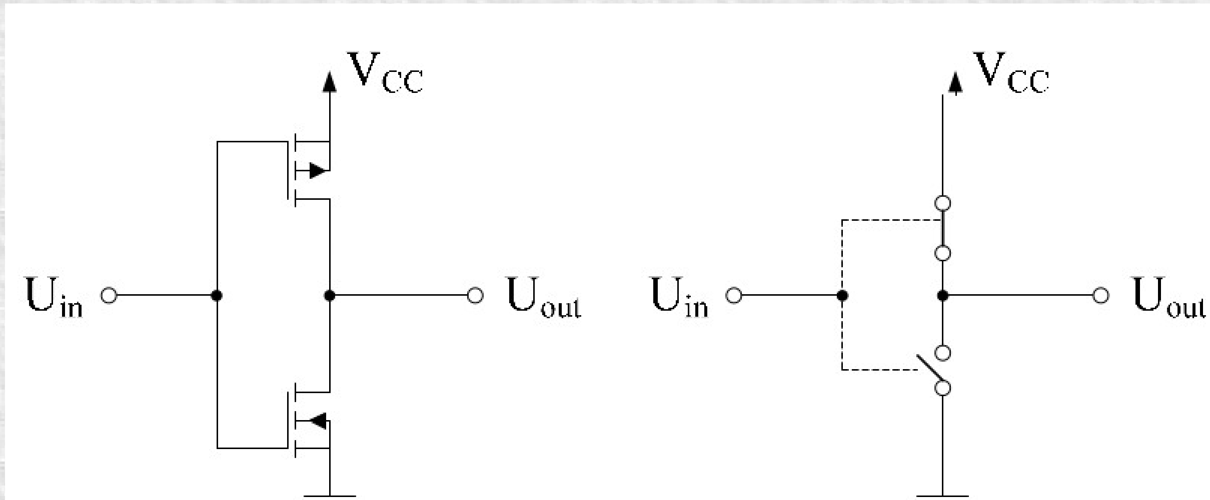




BJT – Bipolar Junction Transistor

R_{on} = ~ 5 – 50 Ω

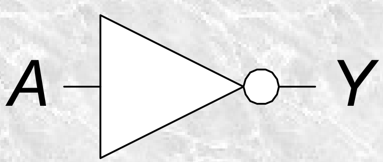
Инвертор



CMOS – Complementary Metal-Oxide-Semiconductor

R_{on} = ~ 0.005 – 10 Ω

NOT



$Y = \overline{A}$

таблица на истинност

A	Y
0	1
1	0

функционална спецификация

НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Инвертор – бързодействие на логическите елементи

динамични характеристики – два вида закъснение:

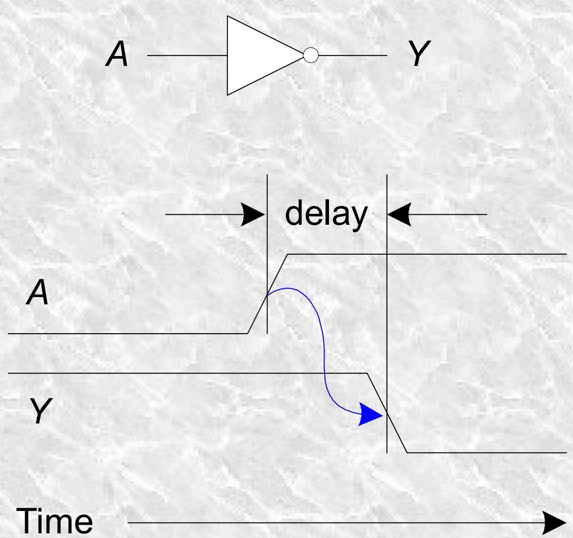
времева спецификация

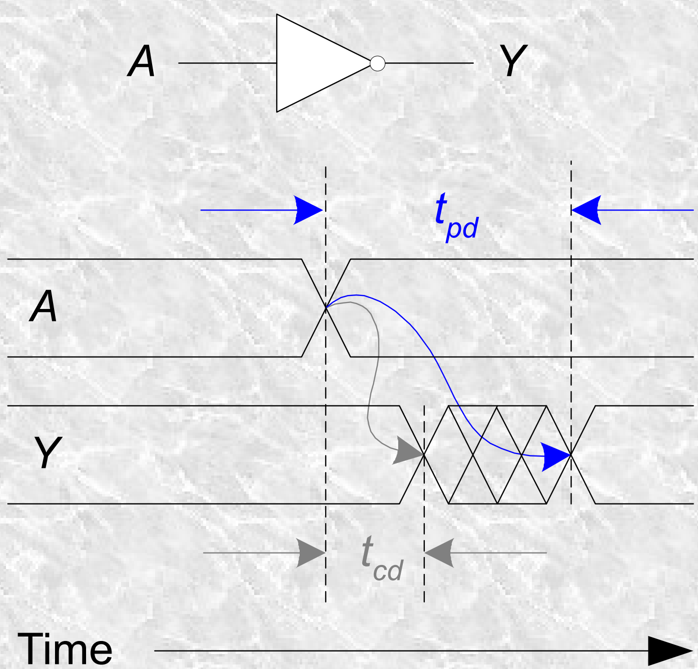
най-дълъг път (propagation delay)

t_{pd} = максимално закъснение от входа към изхода

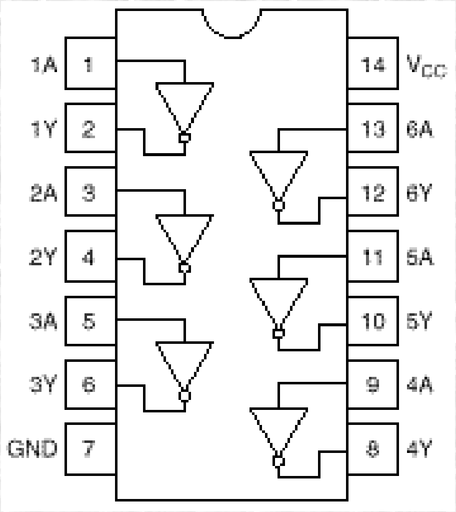
най-къс път (contamination delay)

t_{cd} = минимално закъснение от входа към изхода





Инвертор – 74HC04 (CMOS), 74HCT04 (TTL)



разположение на изводите
(pinout)

DIP корпус
(Dual In-line Package)

SMD корпус
(Surface Mount Device)

Логически елементи (gates)
таблици на истинност (truth tables)

Елементарни логически функции и логически елементи

- зависят от 1 или 2 аргумента
- за пълнота към тях се прибавят константите 0 и 1

Основни операции в Булевата алгебра:

- една едноместна (унарна) операция – **отрицание** (НЕ, NOT) означение $\bar{\ }$ $\neg$
- две двуместни (бинарни) операции

конюнкция - логическо И (AND) означение $*$ $\cdot$ $\wedge$

дизюнкция - логическо ИЛИ (OR) означение $+$ $\vee$

други означения

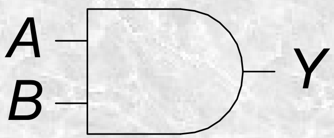
!	логическо отрицание	x = 010 → !x = 0
~	побитово отрицание	x = 010 → ~x = 101
&&	логическо И (Булево И)	x = 10 → (1 && x) = true
&	побитово И	x_1 = 10, x_2 = 01 → x_1 & x_2 = 00; &x_1 = 0 (съкращаване)
||	логическо ИЛИ (Булево ИЛИ)	x = 10 → (0 || x) = true
|	побитово ИЛИ	x = 10 → (1 | x) = 11; (0 | x) = 10; | x = 1 (съкращаване)

Логически елементи (gates) таблици на истинност (truth tables)

Елементарни логически функции и логически елементи

И

AND



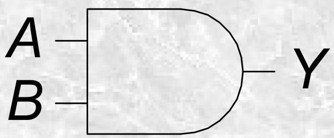
$Y = AB$

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Елементарни логически функции и логически елементи

И

AND

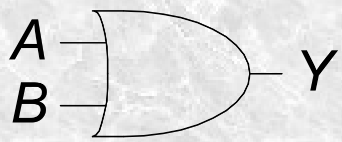


$Y = AB$

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ИЛИ

OR



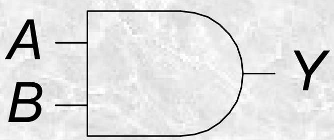
$Y = A + B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Елементарни логически функции и логически елементи

И

AND

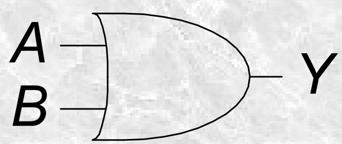


$Y = AB$

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ИЛИ

OR

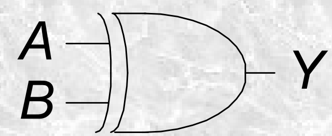


$Y = A + B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Изкл. ИЛИ

XOR



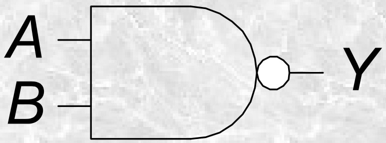
$Y = A \oplus B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Елементарни логически функции и логически елементи

И-НЕ

NAND

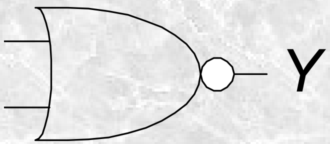


$$Y = \overline{AB}$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ИЛИ-НЕ

NOR

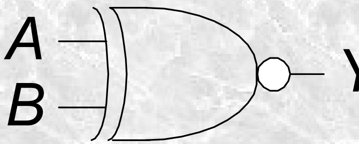


$$Y = \overline{A + B}$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Изкл. ИЛИ-НЕ

XNOR



$$Y = \overline{A \oplus B}$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логически елементи (gates)

Елементарни логически функции и логически елементи – приоритет на логическите операции

(1) скоби - най-висок приоритет

(2) NOT - в тривиалната алгебра операцията NOT не съществува

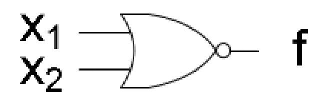
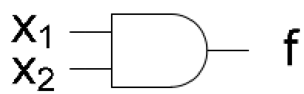
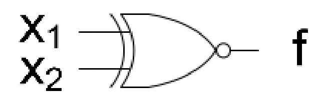
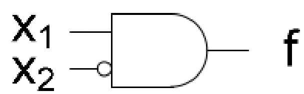
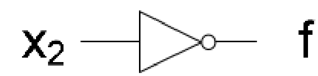
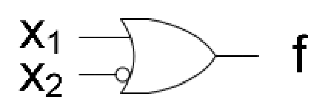
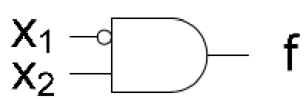
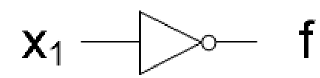
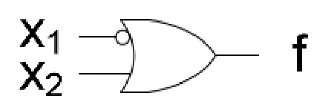
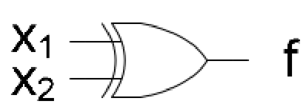
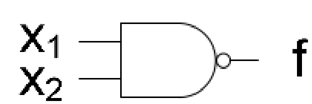
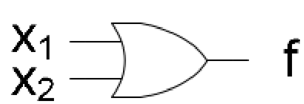
(3) AND - конюнкция

(4) OR - дизюнкция

Логически елементи (gates)
таблици на истинност (truth tables)

Елементарни логически функции и логически елементи

логически функции при брой на аргументите n ≤ 2 ➡ $N_f = 2^{2^2} = 2^4 = 16$

функция	означение	функция	означение
$f_0 = 0$	$0 \longrightarrow f$	$f_8 = \overline{x_1 + x_2}$	
$f_1 = x_1 \cdot x_2$		$f_9 = x_1.x_2 + \overline{x_1}.\overline{x_2}$	
$f_2 = x_1 \cdot \overline{x_2}$		$f_{10} = \overline{x_2}$	
$f_3 = x_1$	$x_1 \longrightarrow f$	$f_{11} = x_1 + \overline{x_2}$	
$f_4 = \overline{x_1} \cdot x_2$		$f_{12} = \overline{x_1}$	
$f_5 = x_2$	$x_2 \longrightarrow f$	$f_{13} = \overline{x_1} + x_2$	
$f_6 = x_1.\overline{x_2} + \overline{x_1}.x_2$		$f_{14} = \overline{x_1 \cdot x_2}$	
$f_7 = x_1 + x_2$		$f_{15} = 1$	$1 \longrightarrow f$

означения по стандарта на IEEE

Закони на Булевата алгебра

закон	дизюнкция	конюнкция
постулат	$x_1+0=x_1$	$x_1\cdot 1=x_1$
постулат	$x_1+\overline{x_1}=1$	$x_1\cdot\overline{x_1}=0$
теорема	$x_1+x_1=x_1$	$x_1\cdot x_1=x_1$
теорема	$x_1+1=1$	$x_1\cdot 0=0$
теорема за степенуване	$\overline{\left(\overline{x_1}\right)}=x_1$	-

НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Закони на Булевата алгебра

закон	дизюнкция	конюнкция
постулат	$x_1+0=x_1$	$x_1\cdot 1=x_1$
постулат	$x_1+\overline{x_1}=1$	$x_1\cdot\overline{x_1}=0$
теорема	$x_1+x_1=x_1$	$x_1\cdot x_1=x_1$
теорема	$x_1+1=1$	$x_1\cdot 0=0$
теорема за степенуване	$\overline{\left(\overline{x_1}\right)}=x_1$	-
постулат за комутативност	$x_1+x_2=x_2+x_1$	$x_1\cdot x_2=x_2\cdot x_1$
теорема за асоциативност	$\left(x_1+x_2\right)+x_3=x_1+\left(x_2+x_3\right)$	$\left(x_1\cdot x_2\right)\cdot x_3=x_1\cdot\left(x_2\cdot x_3\right)$
постулат за дистрибутивност	$x_1\cdot\left(x_2+x_3\right)=x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3$	$x_1+\left(x_2\cdot x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)\cdot\left(x_1+x_3\right)$

Закони на Булевата алгебра

закон	дизюнкция	конюнкция
постулат	$x_1+0=x_1$	$x_1\cdot 1=x_1$
постулат	$x_1+\overline{x_1}=1$	$x_1\cdot\overline{x_1}=0$
теорема	$x_1+x_1=x_1$	$x_1\cdot x_1=x_1$
теорема	$x_1+1=1$	$x_1\cdot 0=0$
теорема за степенуване	$\overline{\left(\overline{x_1}\right)}=x_1$	-
постулат за комутативност	$x_1+x_2=x_2+x_1$	$x_1\cdot x_2=x_2\cdot x_1$
теорема за асоциативност	$\left(x_1+x_2\right)+x_3=x_1+\left(x_2+x_3\right)$	$\left(x_1\cdot x_2\right)\cdot x_3=x_1\cdot\left(x_2\cdot x_3\right)$
постулат за дистрибутивност	$x_1\cdot\left(x_2+x_3\right)=x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3$	$x_1+\left(x_2\cdot x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)\cdot\left(x_1+x_3\right)$
теорема за инвертирането (правило на Де Морган)	$\overline{\left(x_1+x_2\right)}=\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$	$\overline{\left(x_1\cdot x_2\right)}=\overline{x_1}+\overline{x_2}$
теорема за поглъщане	$x_1+x_1\cdot x_2=x_1$	$x_1\cdot\left(x_1+x_2\right)=x_1$
закон за слепване	$x_1\cdot x_2+x_1\cdot\overline{x_2}=x_1$	$\left(x_1+x_2\right)\cdot\left(x_1+\overline{x_2}\right)=x_1$
закон за съкращаване	$x_1+\overline{x_1}\cdot x_2=x_1+x_2$	$x_1\cdot\left(\overline{x_1}+x_2\right)=x_1\cdot x_2$

Функционална пълнота

Функционално пълна система от функции – база (базис)

Съвкупност от такива функции, чрез които може да бъде записана произволна логическа функция от n аргумента, тоест да се реализират произволни крайни функционални преобразувания.

Пример.: Базисът на Бул включва AND, OR и NOT

Минимална база

Такава, от която не може да се изключи нито една функция, без това да наруши условието за функционална пълнота.

Най-удобни в практиката са базите **И-НЕ (NAND)** и **ИЛИ-НЕ (NOR)**.

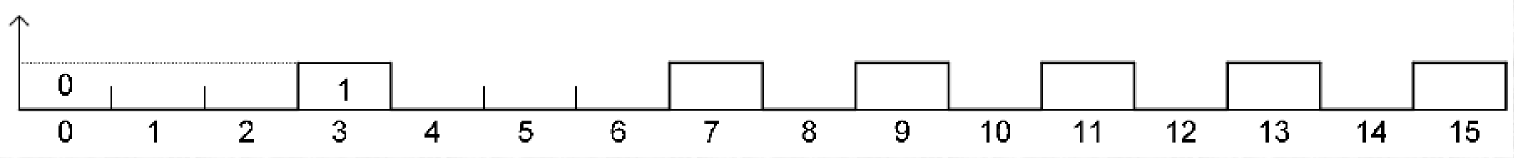
Начини на задаване на логическите функции

символно изобразяване $$11010_{(2)} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \cdot \overline{x_5} \Leftarrow 26_{(10)} \Leftarrow 32_{(8)} \Leftarrow 1A_{(16)}$$

стандартен ред $$f\left(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}\right) \Leftarrow \sum_{0}^{3} (0, 1, 2)$$

1. Задаване чрез диаграма

$$f = \sum_{0}^{15} (3, 7, 9, 11, 13, 15)$$



2. Таблично задаване

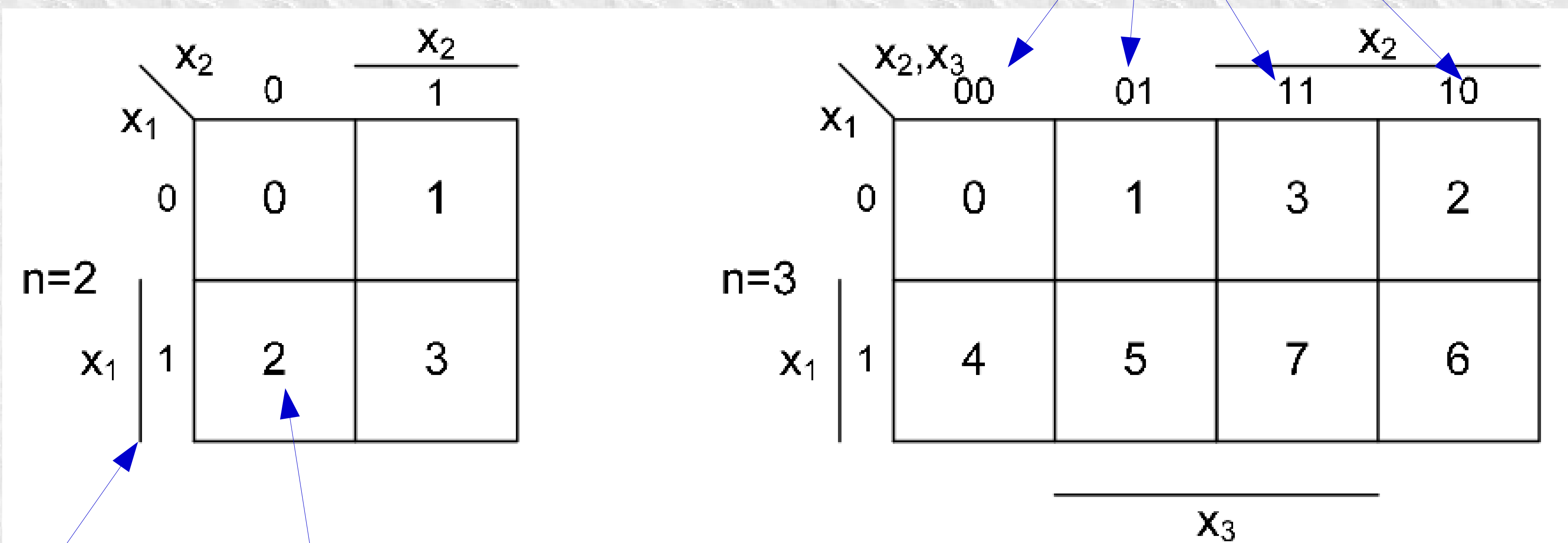
$$f = \sum_{0}^{7} (1, 2, 3, 6, 7)$$

x_1	x_2	x_3		f
$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	0 0 0	0
$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	x_3	0 0 1	1
$\overline{x_1}$	x_2	$\overline{x_3}$	0 1 0	1
$\overline{x_1}$	x_2	x_3	0 1 1	1
x_1	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	1 0 0	0
x_1	$\overline{x_2}$	x_3	1 0 1	0
x_1	x_2	$\overline{x_3}$	1 1 0	1
x_1	x_2	x_3	1 1 1	1

Начини на задаване на логическите функции

3. Равнинно изобразяване (карти на Карно, **K-Map**)

подредба в код на Грей



област на покритие

набор

Начини на задаване на логическите функции

4. Аналитично задаване

конституент на единицата (**minterm**)
f=1 за един набор от аргументите

x_1	x_2	k_0^1	k_1^1	k_2^1	k_3^1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

конституент на нулата (**maxterm**)
f=0 за един набор от аргументите

x_1	x_2	k_0^0	k_1^0	k_2^0	k_3^0
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

участват всички променливи

функционално пълни системи

стойността на ф-ята
в *i*-тия набор

СДНФ – съвършена дизюнктивна нормална форма
(SOP – Sum of Products, Сума от произведения)

$$f=\sum_{i=0}^{2n-1} k_i^1 \cdot A_i$$

СКНФ – съвършена конюнктивна нормална форма
(POS – Product of Sums, Произведение от суми)

$$f=\prod_{i=0}^{2n-1} \left(k_i^0 + A_i\right)$$

Пример за аналитично задаване в СДНФ

x_1	x_2	x_3		f
$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	0 0 0	0
$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	x_3	0 0 1	1
$\overline{x_1}$	x_2	$\overline{x_3}$	0 1 0	1
$\overline{x_1}$	x_2	x_3	0 1 1	1
x_1	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	1 0 0	0
x_1	$\overline{x_2}$	x_3	1 0 1	0
x_1	x_2	$\overline{x_3}$	1 1 0	1
x_1	x_2	x_3	1 1 1	1

заместване: 0 → ~x (инверсна форма)
1 → x (права форма)

СДНФ $f=\sum_{i=0}^{2n-1} k_i^1 \cdot A_i \Rightarrow \sum_{i=0}^{2n-1} (1,2,3,6,7) = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3 + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3} + x_1\cdot x_2\cdot x_3$

Пример за аналитично задаване в СКНФ

x_1	x_2	x_3		f
$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	0 0 0	0
$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	x_3	0 0 1	1
$\overline{x_1}$	x_2	$\overline{x_3}$	0 1 0	1
$\overline{x_1}$	x_2	x_3	0 1 1	1
x_1	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	1 0 0	0
x_1	$\overline{x_2}$	x_3	1 0 1	0
x_1	x_2	$\overline{x_3}$	1 1 0	1
x_1	x_2	x_3	1 1 1	1

заместване: 0 → x (права форма)
1 → ~x (инверсна форма)

СКНФ $$f = \prod_{i=0}^{2n-1} \left(k_i^1 + A_i\right) \Rightarrow \prod_{i=0}^{2n-1} (0,4,5) = (x_1 + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$$