Федеральное агентство связи
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра вычислительных систем

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к первой лабораторной работе по дисциплине
«Моделирование»

Выполнил:
студент гр. ИВ-621
Антипова Е.П.

Проверила:
Ассистент кафедры ВС
Петухова Я.В.

Новосибирск, 2020

Содержание

Задание

Моделирование генерации независимых случайных величин.

1. Непрерывное распределение методом отбраковки;
2. Дискретное распределение с возвратом;
3. Дискретное распределение без возврата.

Теория

Непрерывное распределение случайных величин методом отбраковки.

Существует несколько методов моделирования независимых случайных величин с заданным законом распределения. Один из таких методов является метод отбраковки. Используется, когда функция задана аналитически.

На ось *Y* и *X* подают случайное равномерно распределенное число из ГПСЧ. Если точка в пересечении этих двух координат лежит ниже кривой плотности вероятности, то событие *X* произошло, иначе нет.

Недостаток метода: точки, которые оказались выше кривой распределения плотности вероятности, отбрасываются как ненужные, и время, затраченное на их вычисление, оказывается напрасным. Метод применим только для аналитических функций плотности вероятности.

Алгоритм:

1. В цикле генерируется два случайных числа из диапазона от 0 до 1.
2. Числа масштабируются в шкалу *X* и *Y*, и проверяется попадание точки со сгенерированными координатами под график заданной функции *Y* = *f(X)*.
3. Если точка находится под графиком функции, то событие *X* произошло с вероятностью *Y*, иначе точка отбрасывается.

Моделирование выборок дискретных случайных величин

Случайная величина ξ называется дискретной, если она может принимать дискретное множество значений ($x_1\ x_2\ x_3 \dots\ x_n$).

Величина ξ определяется таблицей (распределением случайной величины ξ) или аналитически в виде формулы:

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 \dots & p_n \end{pmatrix}$$

где $(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_n)$ - возможные значения величины ξ;

а $(p_1\ p_2\ p_3\ \ldots\ p_n)$ соответствующие им вероятности:

$$P(\xi = x_i) = p_i$$

Числа $(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_n)$ могут быть любыми, а вероятности $(p_1\ p_2\ p_3\ \ldots\ p_n)$ удовлетворяют условиям:

1. $p_i > 0$;
2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Дискретная функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_k<x} P(x = x_k).$$

Наиболее общий случай построения генератора дискретных случайных величин основывается на следующем алгоритме. Пусть имеется таблица пар $(x_i\ p_i)$:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$

Тогда кумулятивную сумму можно представить полуинтервалом [0,1), разбитым на полуинтервалы $[vi{-}1, vi)$, $v0$ = 0, vn = 1 длины pi.

Случайная величина ξ принадлежит одному из этих полуинтервалов, определяя индекс дискретного значения. Поэтому номер полуинтервала, определяется как:

$$\min\{i|\xi < v_i\} = \min\{i|\xi < \sum_{j=1}^{i} p_i\}$$

Дискретное распределение без возврата

Есть n случайных величин с одинаковой вероятностью (при следующих выборках вероятность распределяется поровну между величинами), мы выбираем $3n$ / 4 следующих величин без повторений, проделываем это большое количество раз и считаем частоты этих значений.

Результаты

Для того, чтобы построить функцию распределения необходимо вычислить значение a функции плотности распределения. Сама наша плотность распределения $f(x)$ выглядит следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ a * x^2, & \text{при } 0 \le x \le 5; \\ 0, & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Известно, что несобственный интеграл от плотности вероятности есть вероятность достоверного события (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P\{-\infty < X < +\infty\} = P\{\cap\} = 1$$

Исходя из этого свойства, можем найти параметр а:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ a\dfrac{x^3}{3}, & \text{при } 0 \le x \le 5; \\ 0, & \text{при } x > 5, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{5} a\frac{x^3}{3}dx + \int_{5}^{+\infty} 0dx = 1,$$

$$\int_{0}^{5} a\frac{x^3}{3}dx = \frac{a}{3}(x^3)|_0^5 = \frac{a}{3}(5^3 - 0^3) = a\frac{125}{3},$$

$$a = \frac{3}{125}$$

тогда плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{3}{125} * \dfrac{x^3}{3}, & \text{при } 0 \le x \le 5; \\ 0, & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Далее продемонстрирован график функции плотности распределения непрерывных случайных величин:

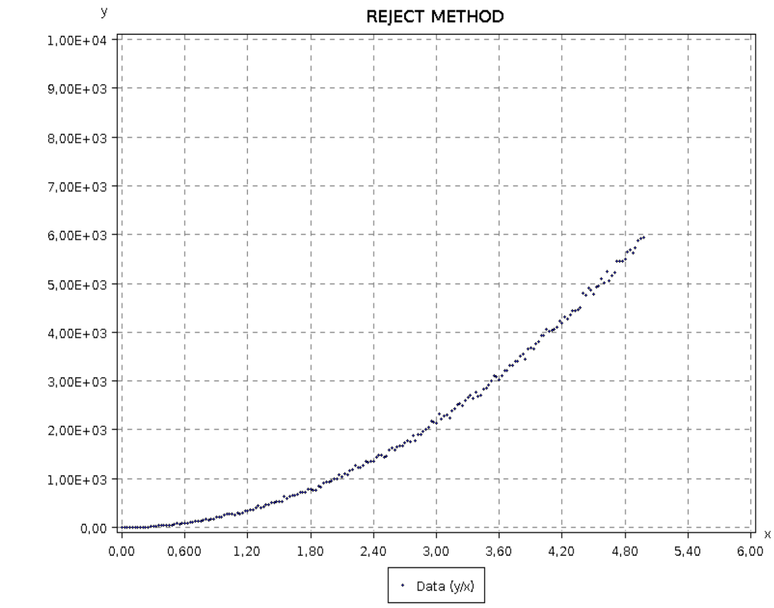

Рис.1 График значений *f(x)* случайных величин

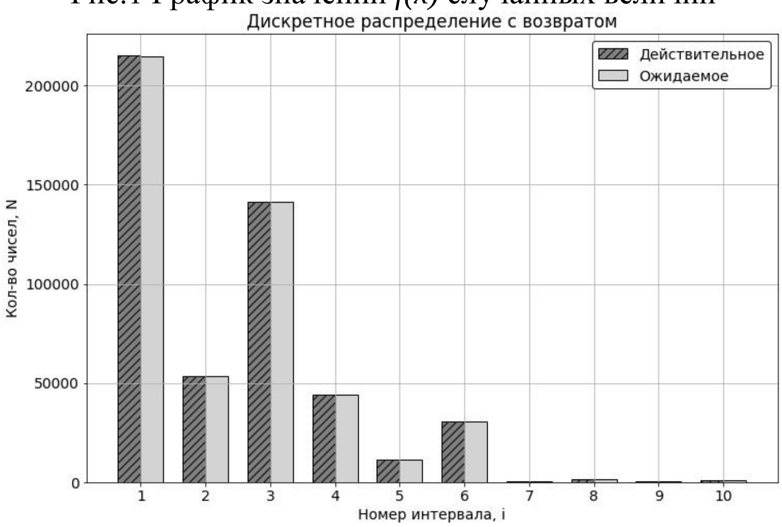

Рис.2. График дискретного распределения с возвратом

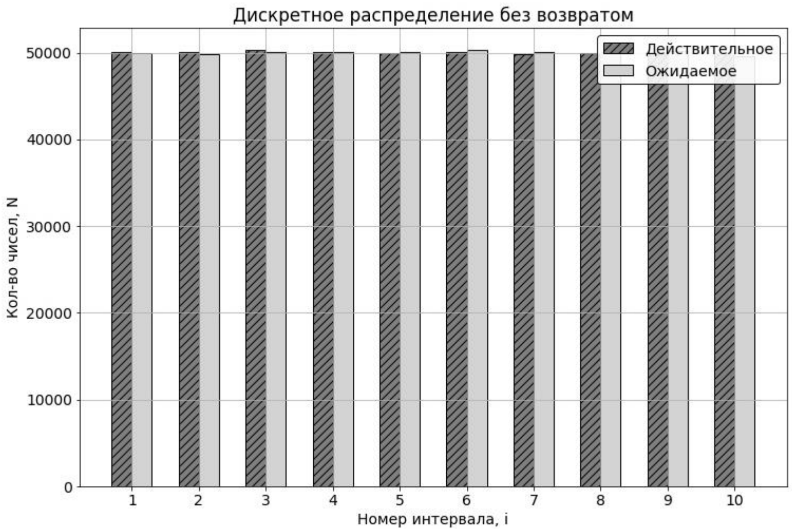

Рис.3. График дискретного распределения без возврата

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены методы моделирования случайных величин, реализованы алгоритмы с непрерывным распределением методом отбраковки и с дискретным распределением с возвратом и без возврата.

По результатам работы мы выяснили, что при генерации непрерывным распределением по методу отбраковки, значения соответствуют заданному закону распределения. Однако, результаты указывают на неэффективность метода отбраковки: данный метод отбрасывает большое количество значений в момент вычислений и время, затраченное на их вычисление, оказывается напрасным; метод применим только для аналитических функций, неэффективность алгоритма для распределений с длинными «хвостами» также очевидна, поскольку в этом случае часты повторные испытания.
При генерации дискретным распределением с возвратом и без него происходит расчет ряда вероятностей P. В случае с методом «с возвратов» рекомендуется один раз рассчитать все суммы вероятностей для полуинтервалов и затем использовать вектор накопленных вероятностей. Однако, для метода «без возврата» на каждом шаге выполняется пересчет значений. Это связано с тем, что вектор вероятностей изменяется после каждого выбора. Из-за этого в методе «без возврата» вероятность попадания приблизительно равна равномерному распределению в данном промежутке

Листинг программы

```
import java.util.Dictionary;
import java.util.Hashtable;
import java.util.Enumeration;
import java.util.List;
import java.util.Random;
import java.util.ArrayList;
import java.awt.*;
```

```
public class LabOne {
	//
		public static final double A = 3.0 / 125.0;
		public static final double UPPER_BORDER = 4.0;
		public static final int RAND_REJECTS = 10000;

		public static void main(String[] args) {
			continous();
		}

		public static double Fn(double x) {
			double returnValue = 0.0;
			if (x > 0.0 && x < 5.0) returnValue = A * x * x;
			else returnValue = 0.0;

			return returnValue;
		}
		public static double rejectMethod() {
			Random random = new Random();
			double a = 0.0, b = 5.0, c = 1.0;
			double x, y, leftHandSide, rightHandSide;
			do {
				x = random.nextDouble();
				y = random.nextDouble();
				leftHandSide = Fn(a + (b - a) * x);
				rightHandSide = c * y;
			} while(leftHandSide <= rightHandSide);

			return a + (b - a) * x;
		}

		public static void continous() {
			ArrayList<Long> vector = new ArrayList<Long>();
			for (int i = 0; i < RAND_REJECTS * 1000; i++) vector.add(0L);
			for (int i = 0; i < RAND_REJECTS * 1000; i++) {
				double pX = rejectMethod();
				//System.out.println("RAND PX: " + pX);
				int index = (int)(Math.floor(pX * 1000));
				//System.out.println("INDEX: " + index);
				if (index < 5000) {
					//System.out.println("FOUND!");
```

```
                        long val = vector.get(index);
                        val++;
                        vector.set(index, val);
                    }
                }
                double[] xData = new double[RAND_REJECTS];
        double[] yData = new double[RAND_REJECTS];

                for (int i = 0; i < 5000; i += 25) {
                    xData[i] = (double)(i) / 1000.0;
                    yData[i] = vector.get(i);
                    //System.out.println("xVal: " + xData[i] + "yVal: " +
yData[i]);
                }

                Plot plot = Plot.plot(Plot.plotOpts().
         title("REJECT METHOD").
         legend(Plot.LegendFormat.BOTTOM)).
        xAxis("x", Plot.axisOpts().
         range(0, 6)).
        yAxis("y", Plot.axisOpts().
         range(0, 10000)).
        series("Data", Plot.data().
         xy(xData, yData),
         Plot.seriesOpts().
             marker(Plot.Marker.CIRCLE).
             markerColor(Color.BLUE).
             color(Color.BLACK).line(Plot.Line.NONE));
                try {
                    plot.save("sample", "png");
                } catch(Exception ex) {
                    ex.printStackTrace();
                }
        }
}
```

Список использованной литературы

1. https://habr.com/ru/post/265321/
2. https://www.matematicus.ru/teoriya-veroyatnosti/zakon-raspredeleniya-diskretnoj-sluchajnoj-velichiny
3. https://math.semestr.ru/math/expectation-discrete.php
4. http://stratum.ac.ru/education/textbooks/modelir/lection24.html