Лекция 8
Расчет функции потенциальной живучести вычислительных систем

Ткачёва Татьяна Алексеевна

преп. Кафедры вычислительных систем

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики

Created by:

Пазников Алексей Александрович

к.т.н. доцент Кафедры вычислительных систем

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

$\mathcal{N}(i,t) = n(i,t)/N$ и $\mathcal{M}(i,t) = m(i,t)/m \Rightarrow$

расчёт функций $\mathcal{N}(i,t)$ и $\mathcal{M}(i,t)$ сводится к выявлению **мат. ожиданий** числа $n(i,t)$ исправных ЭМ и числа $m(i,t)$ занятых ВУ в момент времени $t \geq 0$ при условии, что в начальный момент $t = 0$ было $i \in E_0^N$ работоспособных машин.

Прежде чем вывести дифференциальные уравнения для $n(i,t)$ и $m(i,t)$, получим *вспомогательные оценки*. Учитывая формулы для вероятности отказов в ЭВМ, найдём вероятность того, что в ЭМ произойдёт не менее одного отказа за время Δt:

$$1 - r(\Delta t) = r_1(\Delta t) + \sum_{k=2}^{\infty} r_k(\Delta t) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \cdot \Delta t} + o(\Delta t) =$$

$$= \lambda \Delta t [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t) = \lambda(\Delta t) + o(\Delta t) =$$

$$= r_1(\Delta t) + o(\Delta t)$$

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Следовательно, в машине за время Δt может произойти только один отказ с вероятностью $\lambda\Delta t$; вероятность появления за Δt более одного отказа есть величина порядка $o(\Delta t)$.

λ – среднее число отказов, появляющихся в машине за единицу времени, следовательно, $n(i,t)\lambda\Delta t$ является средним числом отказов, возникающих в системе на промежутке времени $[t, t + \Delta t)$.

За Δt в машине может произойти не более одного отказа, то $n(i,t)\lambda\Delta t$ будет средним числом ЭМ, вышедших из строя на промежутке времени $[t, t + \Delta t)$.

Аналогично, $m(i,t)\mu\Delta t$ – среднее число восстановленных ЭМ на промежутке времени $[t, t + \Delta t)$, $i \in E_0^N$.

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Легко заметить, что мат. ожидание числа исправных ЭМ в ВС в момент $(t + \Delta t)$ равно числу исправных ЭМ в момент t, уменьшенному на среднее число отказавших ЭМ и увеличенному на среднее число восстановленных ЭМ в последующие Δt единиц времени

$$n(i, i + \Delta t) = n(i, t) - n(i, t)\lambda\Delta t + m(i, t)\mu\Delta t + o(\Delta t) \qquad (22)$$

Перенеся $n(i, t)$ в левую часть (22), разделив на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим уравнение

$$\frac{d}{dt} n(i, t) = -\lambda n(i, t) + \mu m(i, t) \qquad (23)$$

причём

$$m(i, t) = \begin{cases} m \text{ при } N - n(i, t) > m; \\ N - n(i, t) \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (24)$$

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Найдём решение уравнения (23) при начальном условии $n(i,0) = i,\ i \in E_0^N$ для всех практически важных случаев.

Случай 1. Восстанавливающая система имеет высокую производительность, т.е. для любого $t \geq 0$ выполняется

$$N - n(i,0) \leq m, \tag{25}$$

где $i \in E_{N-m}^N = \{N-m, N-m+1, \dots, N\}$.

Область определения устанавливается из следующего: неравенство (25) должно выполняться и при $t = 0$, а в начальный момент $n(i,0) = i$, значит (25) превращается в неравенство $N - i \leq m$.

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

В рассматриваемом случае уравнение (23), как легко установить из (24), (25), трансформируется к виду

$$\frac{d}{dt}n(i,t) = N\mu - (\lambda + \mu)n(i,t),\; n(i,0) = i,\; i \in E_{N-m}^{N} \qquad (26)$$

Применив преобразование Лапласа-Карсона, вместо (26) можно записать алгебраическое уравнение

$$p[\bar{n}(i,p) - n(i,0)] = N\mu - (\lambda + \mu)\bar{n}(i,p),$$

где p – комплексный параметр; $\bar{n}(i,p)$ - изображение функции $n(i,t), i \in E_{N-m}^{N}$. Из последнего уравнения следует, что

$$\bar{n}(i,p) = \frac{ip + N\mu}{[p + (\lambda + \mu)]}. \qquad (27)$$

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Формула обращения преобразования Лапласа-Карсона

$$\frac{\alpha p+\beta}{p+a} \sim \frac{\beta}{a} + \frac{\alpha a-\beta}{a} e^{-at}$$

позволяет вместо (27) записать решение уравнения (26)

$$n(i,t) = \frac{N\mu}{\lambda+\mu} + \frac{i\lambda-(N-i)\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \tag{28}$$

$$i \in \{N-m, N-m+1, \dots, N\}$$

В результате подстановок легко убедиться, что решение (28) удовлетворяет начальному условию и уравнению (26). Учитывая (24), получаем

$$m(i,t) = \frac{N\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{i\lambda-(N-i)\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{29}$$

$$i \in \{N-m, N-m+1, \dots, N\}$$

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

В стационарном режиме математические ожидания числа работоспособных ЭМ и числа занятых ВУ не зависят от начального состояния ВС $i \in E_{N-m}^{N}$ и соответственно равны:

$$\mathcal{n} = \lim_{t \to \infty} \mathcal{n}(i,t) = \frac{N\mu}{\lambda + \mu} \qquad (30)$$

$$\mathcal{m} = \lim_{t \to \infty} \mathcal{m}(i,t) = \frac{N\lambda}{\lambda + \mu} \qquad (31)$$

Введём условие, при котором (25) выполняется на всём промежутке времени $[0, \infty)$. Очевидно, что функция (28) – монотонная. Если функция $\mathcal{n}(i,t)$ убывающая, то выполнение (25) на всём промежутке времени обеспечивается заданием начального состояния $i \in E_{N-m}^{N}$. Если же функция $\mathcal{n}(i,t)$ возрастающая, то (25) должно выполняться и при $t \to \infty$. Тогда из (25) и (30) следует, что

$$N\lambda \leq m(\lambda + \mu) \qquad (32)$$

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Таким образом, при заданных параметрах ВС N и λ *неравенство (32) является условием высокой производительности восстанавливающей системы.* Для средств ВТ практически всегда выполняется неравенство $\lambda \ll \mu$, поэтому вместо (32) можно записать

$$N\lambda \leq m\mu \qquad (33)$$

Из (33) видно, что восстанавливающая система может быть отнесена к высокопроизводительным, если среднее число отказов, появляющихся в единицу времени, не превышает среднего числа восстановлений. Величина $m\mu$ является количественной характеристикой производительности восстанавливающей системы.

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Условия (32) или (33), как правило, удовлетворяются, поэтому для расчёта функций потенциальной живучести ВС (3) и занятости ВУ (4) можно пользоваться формулами:

$$\mathcal{N}(i,t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{i\lambda - (N - i)\mu}{N(\lambda + \mu)} e^{-(\lambda+\mu)t}; \tag{34}$$

$$\mathcal{M}(i,t) = \frac{N\lambda}{m(\lambda + \mu)} - \frac{i\lambda - (N - i)\mu}{m(\lambda + \mu)} e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{35}$$

а для вычисления коэффициентов потенциальной живучести ВС (13) и занятости ВУ (14) – формулами:

$$\mathcal{N} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \;\; \mathcal{M} = \frac{N\lambda}{m(\lambda + \mu)} \tag{36}$$

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Случай 2. Восстанавливающая система имеет невысокую производительность, т.е. при любом $t \geq 0$

$$N - n(i,t) > m, \qquad i \in E_0^{N-m-1} = \{0,1,\dots,N-m-1\} \tag{37}$$

Очевидно, что в этом случае $m(i,t) = m$, а уравнение (23) принимает вид

$$\frac{d}{dt}n(i,t) = m\mu - \lambda n(i,t), \qquad n(i,0) = i, \qquad i \in E_0^{N-m-1} \tag{38}$$

Решением (38) является

$$n(i,t) = \frac{m\mu}{\lambda} + \frac{i\lambda - m\mu}{\lambda}e^{-\lambda t}, \qquad i \in E_0^{N-m-1} \tag{39}$$

а условия малой производительности восстанавливающей системы (37) будут неравенства, обратные (32), (33)

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Функция и коэффициент потенциальной живучести ВС соответственно равны:

$$\mathcal{N}(i,t) = \frac{m\mu}{N\lambda} + \frac{i\lambda - m\mu}{N\lambda} e^{-\lambda t},$$
$$i \in E_0^{N-m-1};\ \mathcal{N} = \frac{m\mu}{N\lambda} \qquad (40)$$

Функция занятости восстанавливающей системы равны константе: $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M} = 1$

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Случай 3. Восстанавливающая система имеет невысокую производительность, но $n(i,0)=i$, $i \in E_{N-m}^{N}$. В этом случае до момента времени t^*, когда впервые нарушится условие (25), будут справедливы формулы (34), (35). С момента t^* будет справедлива формула (40), в которой следует положить $i=N-m-1$.

Случай 4. Восстанавливающая система имеет высокую производительность, однако $n(i,0) = i,\ i \in E_0^{N-m-1}$. В этом случае будет справедлива формула (40); с момента t^*, когда впервые нарушится условие (37), справедливыми станут уже формулы (34), (35), в которых $i = N - m$.

Расчёт функции потенциальной живучести ВС

Вероятность ситуации, соответствующей случаю 1, **существенно выше** вероятности случая 2. Случаи **3 и 4** практически **маловероятны**.

Полученные результаты свидетельствует о диалектическом единстве ЭВМ и ВС, позволяют глубже понять физический смысл $\mathcal{N}(i,t)$ потенциальной живучести ВС.

Формулы для функции готовности ЭВМ являются частными результатами по отношению к формуле (34). (Достаточно подставить в (34) $i = N$ или $i = 0$)

Следовательно, всё семейство кривых $\mathcal{N}(i,t)$ (34) для $i = 0,1,\dots,N$ заключено между $s(0,t)$ и $s(1,t)$, т.е. имеет место неравенство

$$s(0,t) \le \mathcal{N}(i,t) \le s(1,t), \qquad \forall i \in E_0^N$$

Связь с функцией готовности ЭВМ

Далее, коэффициент (26) готовности является среднем временем пребывания ЭВМ в работоспособном состоянии. Коэффициент готовности ЭВМ полностью совпадает с коэффициентом (13) потенциальной живучести ВС.

Значит, коэффициент потенциальной живучести ВС даёт информацию о средней доле времени функционирования каждой ЭМ с потенциально возможной производительностью.

Из вышесказанного и из (2), (28)-(31), (39) следует, что мат. ожидания производительности ВС и производительности восстанавливающей системы к моменту t равны:

$$\bar{\Omega}(i,t) = n(i,t)\omega, \qquad m(i,t)\mu, \qquad i \in E_0^N$$

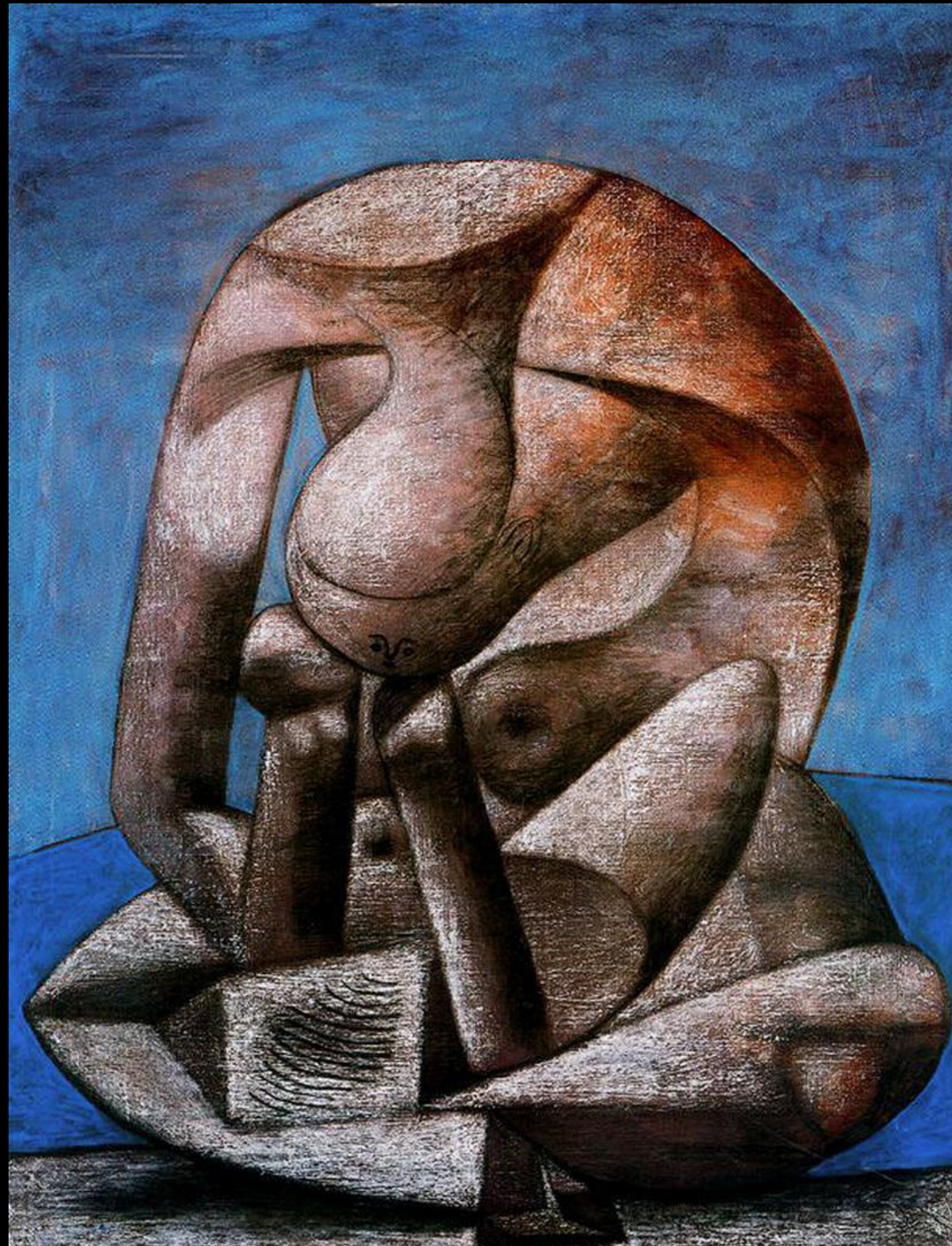
а в стационарном режиме при выполнении (33) –

$$\bar{\Omega} = n\omega = \frac{N\mu}{\lambda+\mu}\omega, \qquad \frac{N\lambda\mu}{\lambda+\mu}$$

где ω – производительность (ёмкость памяти) одной ЭМ.

Анализ

1. Живучие ВС являются обобщением ВС со структурной избыточностью.
2. Предложенные показатели качества функционирования живучих ВС и методы их расчёта вполне приемлемы в инженерной практике.
3. Численный анализ живучести большемасштабных ВС показывает, что они входят в стационарный режим работы за время, не превышающее 10 ч.
4. Установлено, что организация работы ВС как живучих ВС позволяет достичь живучести, близкой к готовности одной ЭМ.
5. В условиях современной элементной базы большемасштабные ВС являются производительными, высоконадёжными и живучими средствами обработки информации.



П.Пикассо «Студент, изучающий ТФРВС по учебнику В.Г. Хорошевского»