



Лекция 4. Расчет показателей надежности ВС для стационарного режима

Ткачёва Татьяна Алексеевна

преп. Кафедры вычислительных систем
Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики

Created by:

Пазников Алексей Александрович
к.т.н. доцент Кафедры вычислительных систем

Рассматривается ВС при длительной эксплуатации: $t \rightarrow \infty$

Выведем формулы для $R^*(t)$ и $U^*(t)$, характеризующих работу ВС в стационарном режиме. Пусть

$$Q_i(t) = P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \xi(\tau) \geq n \mid i \in E_0^N\}$$

является условной вероятностью события $\xi(\tau) \geq n$ в предположении, что в системе в момент времени $t = 0$ имеется $i \in E_n^N$ исправных ЭМ; τ – любой момент времени, принадлежащий $[0, t)$. Тогда, учитывая $R^*(t) = P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \xi(\tau) \geq n \mid P_i, i \in E_n^N\}$, по формуле полных вероятностей имеем

$$R^*(t) = \sum_{i=n}^N P_i Q_i(t) \quad (1)$$

где P_i определяется формулой $P_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(j, t)$

Рассчитаем функцию $Q_i(t)$. Для этого обозначим $\pi_r(t)$, $u_l(t)$ – вероятность того, что произойдёт соответственно r отказов и l восстановлений за время t , если в системе имеется $i \in E_n^N$ исправных машин. Тогда

$$Q_i(t) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(t) \sum_{r=0}^{i-n+l} \pi_r(t) \quad (2)$$

Если учесть, что число отказов ЭМ за время t подчиняется пуассоновскому закону (см. надёжность ЭВМ), то можно показать, что

$$\pi_r(t) = \frac{(i\lambda t)^r}{r!} e^{-i\lambda t} \quad (3)$$

$$u_l(t) = \frac{(\mu t)^l}{l!} [\Delta(N - i - m)m^l e^{-i\mu t} + \\ + \Delta(m - N + i)(N - i)^l e^{-(N-i)\mu t}] \quad (4)$$

где $r, l \in E_0^\infty$,

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

и считается, что $0^0 = 1$.

Таким образом, формулы (2)-(4) позволяют рассчитать условную вероятность $Q_i(t), i \in E_n^N$, с заданной точностью.

В некоторых случаях достаточно найти оценку $\tilde{R}^*(t)$ снизу для функции $R^*(t)$ ($l = 0$)

$$\tilde{R}^*(t) = \sum_{i=n}^N P_i \sum_{r=0}^{i-n} \pi_r(t)$$

Начальное значение функции $R^*(t)$, как это следует из $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \sum_{j=n}^N P_j = S$ и формул (1)-(4), равно коэффициенту готовности ВС, т.е.

$$R^*(0) = S$$

Можно показать, что

$$R^*(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} R^*(t) \approx \begin{cases} \sum_{i=n}^{N-1} P_i & \text{при } n < N \\ 0 & \text{при } n = N \end{cases} \quad (5)$$

В самом деле,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{N-1} \pi_r(t) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=N-n+1}^{\infty} \pi_r(t) = 0$$

(Так как при $i = N$ из (4) следует, что $u_l(t) = 0, l > 0$, $u_0(t) = 1$. Поскольку $N - n = \text{const}$, то при $t \rightarrow \infty$ в системе наиболее вероятными становятся количества отказов $r \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots\}$. Поэтому при $t \rightarrow \infty$ с достаточной для практики точностью можно считать, что $\sum_{r=N-n+1}^{\infty} \pi_r(t) \rightarrow 1$, и, следовательно, $Q_N(t) \rightarrow 0$.)

Далее из (4) видно, что при $i \in \{n, n + 1, \dots, N - 1\}$ и при большом t вероятности $u_l(t)$ будут больше отличаться от 0, чем больше будет l . Иначе говоря, если $i \in \{n, n + 1, \dots, N - 1\}$, то при большом t число восстановлений l в системе будет таким же большим, т.е. если $t \rightarrow \infty$, то и $l \rightarrow \infty$.

Если это так, то при $t \rightarrow \infty$ имеет место $\sum_{r=0}^{i-n+1} \pi_r(t) \rightarrow 1$ и, следовательно, $Q_i(t) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(t) \sum_{r=0}^{i-n+1} \pi_r(t)$, $Q_i(t) \rightarrow 1, i \in E_n^{N-1}$.

Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в $R^*(t) = \sum_{i=n}^N P_i Q_i(t)$ и учитывая поведение $Q_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$, получаем (5).

Действуя аналогично, находим, что функция

$$U^*(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} P_i \sum_{r=0}^{\infty} \pi_r(t) \sum_{l=0}^{n-i-1+r} u_l(t)$$

Очевидно, что $U^*(t) = S$, $U^*(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} U^*(t) = 1$.

Оценкой сверху для $U^*(t)$ будет функция

$$\tilde{U}^*(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} P_i \sum_{l=0}^{n-i-1} u_l(t)$$

Рассчитаем распределение вероятностей состояний ВС для стационарного режима функционирования $\{P_0, P_1, \dots, P_j, \dots, P_N\}$; это позволит вычислить функции оперативной надёжности и восстановимости.

Для расчёта P_j необходимо осуществить предельный переход $t \rightarrow \infty$ в

$$\begin{aligned}
 &P'_0(t) = -m\mu P_0(t) + \lambda P_1(t); \\
 &P'_j(t) = \begin{cases} m\mu P_{j-1}(t) - (j\lambda + m\mu)P_j(t) + (j+1)\lambda P_{j+1}(t), & 0 < j \leq (N-m); \\ [N - (j-1)]\mu P_{j-1}(t) - [j\lambda + (N-j)\mu]P_j(t) + (j+1)\lambda P_{j+1}(t), & (N-m) < j < N; \end{cases} \quad (5) \\
 &P'_N(t) = \mu P_{N-1}(t) - N\lambda P_N(t)
 \end{aligned}$$

Правые части всех уравнений (5) при $t \rightarrow \infty$ имеют пределы \Rightarrow Каждая из производных $P_j'(t)$ также имеет предел, и такой предел может быть только 0.

Доказательство. Если бы какая-нибудь производная $P_j'(t)$ стремилась к числу, отличному от 0, то соответствующее $|P_j(t)|$ при $t \rightarrow \infty$ неограниченно бы возрастало. Последнее противоречило бы физическому смыслу величин $P_j(t)$ и формуле (5). Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ имеет место $P_j'(t) \rightarrow 0$.

Следовательно, система дифференциальных уравнений преобразуется в систему алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -t\mu P_0 + \lambda P_1 \\ 0 = t\mu P_{j-1} - (j\lambda + t\mu)P_j + (j+1)\lambda P_{j+1}, \\ \quad 0 < j \leq (N-m) \\ 0 = (N-j+1)\mu P_{j-1} - [j\lambda + (N-j)\mu]P_j + (j+1)\lambda P_{j+1}, \\ \quad (N-m) < j < N \\ 0 = \mu P_{N-1} - N\lambda P_N \end{array} \right.$$

Если положить

$$\left\{ \begin{array}{ll} t\mu P_{j-1} - j\lambda P_j = z_j, & 0 < j \leq (N-m+1) \\ [N-(j-1)]\mu P_{j-1} - j\lambda P_j = z_j^*, & (N-m+1) \leq j \leq N \end{array} \right. \quad (6)$$

то систему можно переписать в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0; \\ z_j - z_{j+1} = 0, \quad 1 < j \leq (N - m); \\ z_{N-m+1} - z_{N-m+2}^* = 0; \\ z_j^* - z_{j+1}^* = 0, \quad (N - m + 2) \leq j < N; \\ z_j^* = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Из (7) следует, что $z_j = 0$, $0 < j \leq (N - m + 1)$, тогда, учитывая (6) и принимая $\alpha = \mu/\lambda$, получаем

$$P_j = \frac{m\mu}{j\lambda} P_{j-1} = \frac{\alpha m}{j} P_{j-1}; \quad P_j = \frac{m^j \alpha^j}{j!} P_0, \quad (8)$$

$$1 \leq j \leq (N - m + 1)$$

Распределение вероятностей состояний системы

Также из (7) следует, что $z_j^* = 0$, $(N - m + 1) \leq j \leq N$;

$$\begin{aligned}
 P_j &= \frac{[N - (j - 1)]\alpha}{j} P_{j-1} = \\
 &= \frac{[N - (j - 1)] \dots [N - (N - m)] \alpha^{j-N+m}}{j(j-1) \dots (N - m + 1)} P_{N-m} = \\
 &= \frac{\alpha^{j-N+m} m! (N - m)!}{(N - j)! j!} \cdot \frac{m^{N-m} \alpha^{N-m}}{(N - m)!} P_0 = \frac{m! m^{N-m} \alpha^j}{(N - j)! j!} P_0
 \end{aligned} \tag{9}$$

Используя условие нормировки, а также (8), (9), находим

$$P_0 = \left[\sum_{l=0}^{N-m} \frac{m^l m^l}{l!} + m! m^{N-m} \sum_{l=N-m+1}^N \frac{\alpha^l}{(N-l)! l!} \right]^{-1} \tag{10}$$

$$P_j = \frac{\alpha^j}{j!} \left[\Delta(N - m - j) m^j + \Delta(j - N + m) \frac{m! m^{N-m}}{(N - j)!} \right] P_0, j = 1 \dots N \tag{11}$$

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Заметим, что принято $0^0 = 1$

Рассмотрим два крайних случая: $m = 1, m = N$

- $m = 1$ (одно ВУ). Тогда (11) принимает вид:

$$P_j = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j \frac{1}{j!} \left[\sum_{l=0}^N \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^l \frac{1}{l!} \right]^{-1}, \quad j \in E_0^N \quad (12)$$

Если в (1) перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим вероятность того, что при $m = 1$ в стационарном режиме работы большемасштабной ВС исправно j машин, равна:

$$P_j = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j \frac{1}{j!} e^{-\mu/\lambda}, \quad j \in E_0^N \quad (13)$$

Распределение (13) является распределением Пуассона.

- $m = N$ (количество ВУ = количеству ЭМ в ВС). Тогда:

$$P_j = \frac{N!}{(N-j)!j!} \frac{\mu^j \lambda^{N-j}}{(\lambda + \mu)^N}, \quad j \in E_0^N \quad (13)$$

а коэффициент готовности ВС

$$S = 1 - \lambda^{N-n+1} (\lambda + \mu)^{-(N-n+1)} \quad (14)$$

Изучим влияние N при его неограниченном увеличении на потенциальную готовность ВС.

Известно, что коэффициент готовности ЭВМ рассчитывается по формуле

$$s = \lim_{t \rightarrow \infty} s(i, t) = \mu / (\lambda + \mu)$$

Опираясь на эту формулу, можно показать, что коэффициент готовности ВС

$$S > 1 - e^{-N\kappa}, \quad S = 1 - e^{-N\kappa + o(\ln N)} \quad (15)$$

где $\kappa = v \ln(vs^{-1}) + (1 - v) \ln[(1 - v)(1 - s)^{-1}]$. Из (15) следует, что ВС имеет высокую готовность при выполнении условия $v < s$.

- Наряду с монопрограммным режимом (на ВС решается 1 задача), широко используются и **мультипрограммные режимы**.
- При организации мультипрограммной работы ВС разбивается на *подсистемы*.
- Количество подсистем = количество одновременно решаемых задач.
- Количество ЭМ в подсистеме = количество ветвей в параллельной программе.

Каким образом параметры подсистем влияют на надёжность (коэффициент готовности) ВС в целом?

- Пусть ВС состоит из h подсистем, причём
- N_j – число ЭМ в подсистеме $j \in E_1^h$,
- n_j – минимально допустимое число исправных ЭМ в подсистеме $j \in E_1^h$.

$$\sum_{j=1}^h N_j = N; \quad v_j = (n_j - 1)N_j^{-1}; \quad \kappa_j = v_j \ln \frac{v_j}{s} + (1 - v_j) \ln \frac{1 - v_j}{1 - s}$$

Рассмотрим случай, когда все подсистемы важны для существования ВС. Тогда на основе (15)

$$S = \prod_{j=1}^h S_j \geq \prod_{j=1}^h (1 - e^{-N_j \kappa_j}) \quad (16)$$

где S_j – коэффициент готовности подсистемы $j \in E_1^h$

Требуется найти такое распределение $\{N_j^*\}, j \in E_1^h$ чисел в подсистемах, при котором нижняя оценка (16) достигает максимума.

Точное решение задачи методом множителей Лагранжа при больших значениях $N_j, j \in E_1^h$, асимптотически совпадает с решением, получающимся при значениях N_j , обеспечивающих постоянство сомножителей в оценке (16). Следовательно,

$$N_j^* = N \left[\kappa_j \sum_{l=1}^h \kappa_l^{-1} \right]^{-1} \quad (17)$$

при этом

$$S \geq [1 - e^{-\frac{N\bar{\kappa}}{h}}]^h; \quad \bar{\kappa} = \left[\frac{1}{h} \sum_{l=1}^h \kappa_l^{-1} \right]^{-1} \quad (18)$$

$\bar{\kappa}$ — средний гармонический коэффициент κ_j

Рассмотрим более общую ситуацию, когда оснащение ЭМ различно. Тогда l -я ЭМ будет иметь свой коэффициент готовности $s_l, l \in E_1^N$.

Можно показать, что в общем случае сохраняются все соотношения, если вместо s рассматривать величину

$$\bar{s} = N^{-1} \sum_{l=1}^N s_l \quad (19)$$

Исследуем поведение ВС в зависимости от степени разбиения на подсистемы. Пусть число N ЭМ растет вместе с количеством h её подсистем так, что

$$N = \frac{1 + \varepsilon}{\bar{\kappa}} h \ln h - \frac{1}{\bar{\kappa}} h \ln d, \quad (20)$$

где d, ε – произвольные действительные числа $d > 0$

Тогда из (18) следует, что

$$S \approx e^{-dh^{-\varepsilon}} \begin{cases} = e^{-dh^{|\varepsilon|}} & \text{при } \varepsilon < 0; \\ > 1 - dh^{-\varepsilon} & \text{при } \varepsilon > 0; \end{cases} \quad (21)$$

Следовательно, ВС имеет высокую готовность, если с увеличением h порядок роста N больше величины $h \ln h / \bar{\kappa}$. Из (17)-(21) видно, что для достижения высокой готовности ВС необходимо выполнение условия $N_j > \kappa_j^{-1} \ln h$, $j \in E_1^h$.

Выведем расчётные формулы для коэффициента готовности большемасштабных ВС ($N \rightarrow \infty$).

Функция готовности рассчитывается по формуле

$$S(t) = \sum_{j=n}^{\infty} P_j(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} P_j(t).$$

Полагая $x = \mathbf{0}$ в формуле (9.34) для расчёта $P_j(t)$

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l(t) x^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) (x e^{-\lambda t} + 1 - e^{-\lambda t})^l \quad (22)$$

находим

$$b_0(t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) (1 - e^{-\lambda t})^l, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b_0(t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) = 1 \quad (23)$$

Если положить в (22) $x = \mathbf{1}$, то

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l(t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) = 1$$

Из формул (22), (23) при $l \geq 1$ следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} b_l(t) = 0$.

Учитывая полученные ранее формулы P_j , последнюю формулу, получаем, что стационарными вероятностями ВС будут

$$P_j = \left(\frac{m\mu}{\lambda}\right) \frac{1}{j!} e^{-m\mu/\lambda}, \quad j \in E_0^\infty \quad (24)$$

Предельный переход в $S(t) = \sum_{j=n}^{\infty} P_j(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} P_j(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и результат (24) приводят к расчётной формуле:

$$S = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^j \frac{1}{j!} e^{-m\mu/\lambda} \quad (25)$$

При анализе большемасштабных ВС можно использовать статистику не от потока отказов в одной ЭМ, а об отказах ВС в целом. Тогда модель можно изменить след. образом.

Пусть задана не интенсивность λ отказов одной ЭМ системы, а интенсивность Λ потока отказавших ЭМ ВС – среднее количество отказавших ЭМ, поступающих на m ВУ в единицу времени.

Далее пусть \bar{P}_j - вероятность того, что в стационарном режиме в ВС имеется j отказавших машин. Действуя традиционно, получаем:

$$\begin{cases} -\Lambda\bar{P}_0 + \mu\bar{P}_1 = 0 \\ \Lambda\bar{P}_{j-1} - (\Lambda + j\mu)\bar{P}_j + (j+1)\mu\bar{P}_{j+1} = 0, & 1 \leq j < m \\ \Lambda\bar{P}_{j-1} - (\Lambda + m\mu)\bar{P}_j + m\mu\bar{P}_{j+1} = 0, & m \leq j \end{cases} \quad (26)$$

Как было показано (для ЭВМ), μ – среднее число восстановлений ЭМ, которое может произвести 1 ВУ в ед. времени.

Тогда производительность восстанавливающей системы будет характеризоваться величиной $m\mu$.

Очередь на восстановление ЭМ не будет расти безгранично и ресурсы будут эксплуатироваться с потенциально возможной эффективностью при условии $\Lambda \leq m\mu$.

Легко показать, что решениями (26) в этом случае будут:

$$\bar{P}_0 = \left[\sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{l!} \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)^l + \frac{\mu}{(m-1)! (m\mu - \Lambda)} \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)^m \right]^{-1} \quad (27)$$

$$\bar{P}_j = \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)^j \left[\Delta(m-j) \frac{1}{j!} + \Delta(j-m) \frac{1}{m! m^{j-m}} \right] \bar{P}_0, \quad j \in E_0^\infty \quad (28)$$

По определению n – количество ЭМ основной подсистемы со структурной избыточностью.

Целесообразно ввести \bar{n} – максимальное количество отказавших ЭМ, при котором производительность ВС не ниже предельно допустимой.

Следовательно, если ВС находится в состоянии $j \in E_0^{\bar{n}}$, где $E_0^{\bar{n}} = \{0, 1, 2, \dots, \bar{n}\}$, $E_0^{\bar{n}} \subset E_0^{\infty}$, то будем считать, что она в состоянии готовности.

Тогда коэффициент готовности ВС рассчитывают по формуле:

$$S = \sum_{j=0}^{\bar{n}} \bar{P}_j,$$

где величины \bar{P}_j определяются из (27) и (28).

Зная \bar{P}_j можно также вычислить среднее количество отказавших машин ВС, ожидающих начала восстановления:

$$M_1 = \frac{\Lambda}{t\mu(1 - \Lambda/t\mu)^2} \bar{P}_m$$

при условии $\Lambda \leq t\mu$.

Математическое ожидание количества отказавших машин

$$M_2 = M_1 + \bar{P}_0 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^j + \frac{m\bar{P}_m}{1 - \Lambda/t\mu}$$

Среднее число свободных восстанавливающих устройств

$$M_3 = \bar{P}_0 \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m-j}{j!} \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^j$$

Вероятность того, что все ВУ заняты ремонтом отказавших ЭМ

$$\Pi = \bar{P}_m (1 - \Lambda / m\mu)^{-1}$$

Закон распределения времени η ожидания начала восстановления отказавшей ЭМ или вероятность того, что время пребывания ЭМ в очереди на ремонт больше t

$$P\{\eta > t\} = \Pi e^{-(m\mu - \Lambda)t}$$

Мат. ожидание и дисперсия времени ожидания начала восстановления отказавшей ЭМ

$$M\eta = \frac{\Pi}{m\mu - \Lambda}; \quad D\eta = M\eta \left[\frac{2}{m\mu - \Lambda} - M\eta \right]$$

Основываясь на том факте, что производительность ВС $n\omega$, которая близка к суммарной производительности $N\omega$, можно считать, что $\bar{n} = N - n$, $\Lambda = N\lambda$.



П.Пикассо «Женщина с веером»

Больше – на <http://vk.com/public58918349>