Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №0

По дисциплине «Моделирование»

Выполнил:
Студент гр. ИВ-622
Ольман Р. Ю.

Проверила:
Ассистент Кафедры ВС
Петухова Я. В.

Новосибирск 2020

Оглавление

Постановка задачи 3
Теоретические сведения 3
Ход работы 5
Заключение 8
Листинг 8

Постановка задачи

Необходимо взять готовую реализацию трех генераторов псевдослучайных чисел на отрезке [0, 1] и убедиться в их равномерном распределении, используя такие параметры, как распределение Пирсона и автокорреляции.

Теоретические сведения

Пусть X – исследуемая случайная величина. Требуется проверить гипотезу H_0 о том, что данная случайная величина подчиняется закону распределения $F(x)$. Для этого необходимо произвести выборку из n независимых наблюдений над случайной величиной $X: X^n = (x_1, \dots , x_n), x_i \in [a, b], \forall_i = 1 \dots n$, и по ней построить эмпирический закон распределения *F'(x)* случайной величины X.

Критерий согласия Пирсон – метод, который позволяет оценить значимость различий между фактическим (выявленным в результате исследования) количеством исходов или качественных характеристик выборки, попадающих в каждую категорию, и теоретическим количеством, которое можно ожидать в изучаемых группах при справедливости нулевой гипотезы.

Процедура проверки гипотез с использованием критериев типа χ^2 предусматривает группирование наблюдений. Область определения случайной величины разбивают на k непересекающихся интервалов граничными точками $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$, где x_0 – нижняя грань области определения случайной величины; x_k – верхняя грань. В соответствии с заданным разбиением подсчитывают число n_i выборочных значений, попавших в i-й интервал, и вероятности попадания в интервал, соответствующие теоретическому закону с функцией распределения. Рассчитывается критерий «хи-квадрат» по формуле:

$$x^2 = \frac{(n_1 - p_1 N)^2}{p_1 N} + \frac{(n_2 - p_2 N)^2}{p_2 N} + \dots + \frac{(n_k - p_k N)^2}{p_k N}$$

- p_i – теоретическая вероятность попадания чисел в i-ый интервал

- k – количество интервалов
- N – общее количество сгенерированных чисел
- n_i – количество попавших чисел в интервал
- x^2 – критерий, который позволяет определить, удовлетворяет ли генератор случайных чисел требованиям равномерного распределения или нет

Если $x^2_{\text{эксп}} \le x^2_{\text{таб}}$, то гипотеза не противоречит опытным данным, иначе отвергается.

Условие применения критерия Пирсона является наличие в каждом интервале не менее пяти наблюдений. И следует помнить, что для равномерного распределение все значения вероятности одинаковы. Далее надо провести корреляционный анализ. Корреляционный анализ – популярный метод статистического исследования, который используется для выявления степени зависимости одного показателя от другого.

Автокорреляция – статистическая взаимосвязь между последовательностями величин одного ряда, взятыми со сдвигом, например, для случайного процесса – со сдвигом по времени.

$$a(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau}(x_i - Ex) * (x_{i+\tau} - Ex)}{(N - \tau) * S^2(x)}$$

$E\ (x)$ – математическое ожидание – среднее значение случайной величины при стремлении количества выборок или количества ее измерений:

$$E(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$S^2(x)$ – выборочная дисперсия случайной величины – это оценка теоретической дисперсии распределения, рассчитанная на основе данных выборки:

$$S^2(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (x)^2$$

$x_{i+\tau}$ – множество значений другой случайной величины (полученной из значений прошлой случайной величины, но с некоторым смещением) n – мощность множества случайных величин τ – смещение последовательности Генераторы случайных чисел:

Ход работы

Для выполнения данной лабораторной работы было выбрано три генератора случайных чисел, независящих друг от друга:

- В качестве первого генератора был взят генератор случайных чисел из стандартной библиотеки random() языка программирования Python.
- Вторым генератором случайных чисел был генератор rand() из библиотеки модуля NumPy для Python.
- А третьим генератором стал SystemRandom().

Была рассчитана автокорреляция для каждого ГСЧ при N = 1.000.000 и k = 1.000, где $\alpha(\tau)$ – автокорреляция, τ– смещение интервалов.

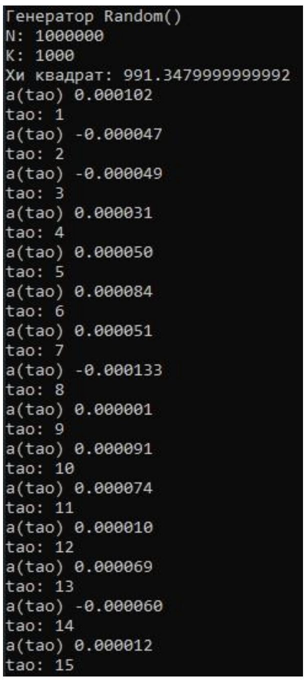
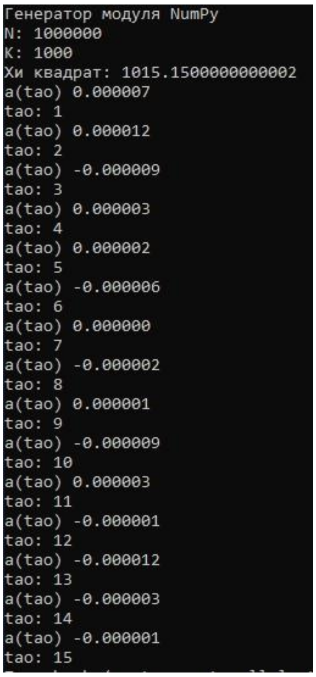
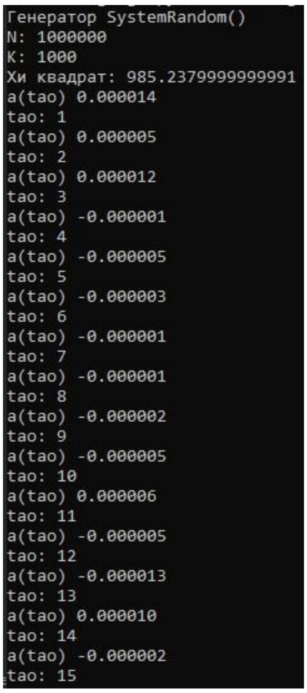


Рисунок 1 –Random



```
Генератор модуля NumPy
N: 1000000
K: 1000
Хи квадрат: 1015.1500000000002
a(tao) 0.000007
tao: 1
a(tao) 0.000012
tao: 2
a(tao) -0.000009
tao: 3
a(tao) 0.000003
tao: 4
a(tao) 0.000002
tao: 5
a(tao) -0.000006
tao: 6
a(tao) 0.000000
tao: 7
a(tao) -0.000002
tao: 8
a(tao) 0.000001
tao: 9
a(tao) -0.000009
tao: 10
a(tao) 0.000003
tao: 11
a(tao) -0.000001
tao: 12
a(tao) -0.000012
tao: 13
a(tao) -0.000003
tao: 14
a(tao) -0.000001
tao: 15
```

Рисунок 2 –Rand()



```
Генератор SystemRandom()
N: 1000000
K: 1000
Хи квадрат: 985.2379999999991
a(tao) 0.000014
tao: 1
a(tao) 0.000005
tao: 2
a(tao) 0.000012
tao: 3
a(tao) -0.000001
tao: 4
a(tao) -0.000005
tao: 5
a(tao) -0.000003
tao: 6
a(tao) -0.000001
tao: 7
a(tao) -0.000001
tao: 8
a(tao) -0.000002
tao: 9
a(tao) -0.000005
tao: 10
a(tao) 0.000006
tao: 11
a(tao) -0.000005
tao: 12
a(tao) -0.000013
tao: 13
a(tao) 0.000010
tao: 14
a(tao) -0.000002
tao: 15
```

Рисунок 3 –SystemRand()

Исходя из этих данных можно сделать вывод, что числа действительно являются случайными, так как значения $\alpha(\tau)$ стремятся к нулю.

Далее было несколько попыток генерации случайных чисел каждым ГСЧ с изменением количества чисел и количества интервалов. Все результаты показаны в таблице 1.

Таблица 1 – показатели критерия «хи квадрат» при разных N и k

ГСЧ	N = 1.000.000 k = 1.000	N = 1.000.000 k = 100	N = 10.000 k = 1.000
Random()	χ^2 = 978.865	χ^2 = 89.26	χ^2 = 979.199
NumPy Rand()	χ^2 = 967.755	χ^2 = 87.353	χ^2 = 923
SystemRamdom()	χ^2 = 952.463	χ^2 = 93.321	χ^2 = 956.4
Табличное значение χ^2	χ^2 = 1142.848	χ^2 = 134,642	χ^2 = 1142.848

Заключение

В данной лабораторной работе были найдены три независимых друг от друга генератора случайных чисел языка программирования Python и реализованы три программы для генерации псевдослучайных чисел, расчетов автокорреляции и критерия согласия Пирсона.

Из результатов опытов следует сказать, что критерии «хи квадрат» которые равны χ^2 = 991.347, χ^2 = 1015.15 и χ^2 = 985.237 соответственно для каждого из них принимается гипотеза о равновероятном распределении в ГСЧ, исходя из табличных значений для каждого из случая. Так же было выявлено какую информацию дает Критерий согласия Пирсона, а именно:

1. Чем больше отклонение, тем менее равномерным становится распределение чисел на интервалах.

2. Так как значение, используемое в критерии согласия Пирсона, не превышало критического значения, следует, что гипотезу о равномерном распределении нельзя отвергнуть.

Основываясь на проведённых опытах видно, что функция автокорреляции стремится к нулю при каждом изменении τ (смещение последовательности). Это говорит о слабой силе корреляции. Так же стоит заметить, что коэффициент автокорреляции напрямую зависит от количества точек на интервалах. К примеру, если уменьшить количество интервалов, то, следовательно, точек на меньшем количестве интервалов будет больше и коэффициент автокорреляции будет стремиться к нулю. А если увеличить количество интервалов, а точек уменьшить, то на каждый интервал будет попадать неравное количество точек и как следствие коэффициент автокорреляции будет возрастать.

Листинг

gen_1.py

```
import random

```

```
N = int(input("N: "))
K = int(input("K: "))
y = range(N)
x_1 = []
numbers_1 = [0] * K
ksi = 0


def gen_1():
    for k in y:
        rand_1 = random.uniform(0, 1)
        x_1.append(rand_1)
        inter_1 = rand_1 / (1 / K)
        numbers_1[int(inter_1)] += 1
    print(f'Генератор Random()'
          f'Всего точек: {len(x_1)}')

    p_i = 1 / K
    i = 0
    ksi = 0
    while i != K:
        ksi += (((numbers_1[i] - p_i * N) ** 2) / (p_i * N))
        i += 1
    print(f'Хи квадрат: {ksi}')

    i = 0
    Ex = 0
    while i != N:
        Ex += x_1[i]
        i += 1
    Ex = (1 / N) * Ex

    i = 0
    S2x = 0
    while i != N:
        S2x += ((x_1[i]) ** 2) - (Ex ** 2)
        i += 1
    S2x = S2x / N

    offset = 1
    while offset <= K / 2:
        a = 0
        i = 0
        while i < N - offset:
            a += (x_1[i] - Ex) * (x_1[i + offset] - Ex)
            i += 1
        a = a / (N - offset) * S2x
        print(f'a(tao) %f' % a)
        print(f'tao: {offset}')
        offset += 1

```

gen_2.py

```
from numpy.random import rand

N = int(input("N: "))
K = int(input("K: "))
y = range(N)
```

```
x_2 = []
numbers_2 = [0] * K
ksi = 0
offset = 1


def gen_2():
    for k in y:
        rand_2 = rand()
        x_2.append(rand_2)
        inter_2 = rand_2 / (1 / K)
        numbers_2[int(inter_2)] += 1
    print(f'Генератор модуля NumPy'
          f'Всего точек: {(len(x_2))}')

    p_i = 1 / K
    i = 0
    ksi = 0
    while i != K:
        ksi += (((numbers_2[i] - p_i * N) ** 2) / (p_i * N))
        i += 1
    print(f'Хи квадрат: {ksi}')

    i = 0
    Ex = 0
    while i != N:
        Ex += x_2[i]
        i += 1
    Ex = (1 / N) * Ex

    i = 0
    S2x = 0
    while i != N:
        S2x += ((x_2[i]) ** 2) - (Ex ** 2)
        i += 1
    S2x = S2x / N

    offset = 1
    while offset <= K / 2:
        a = 0
        i = 0
        while i < N - offset:
            a += (x_2[i] - Ex) * (x_2[i + offset] - Ex)
            i += 1
        a = a / (N - offset) * S2x
        print(f'a(tao) %f' % a)
        print(f'tao: {offset}')
        offset += 1

```

gen_3.py

```
import random

print(f'Генератор SystemRandom()')
N = int(input("N: "))
```

```
K = int(input("K: "))
y = range(N)
x_3 = []
numbers_3 = [0] * K
ksi = 0


def gen_3():
    for k in y:
        rand_3 = random.SystemRandom().random()
        x_3.append(rand_3)
        inter_3 = rand_3 / (1 / K)
        numbers_3[int(inter_3)] += 1

    p_i = 1 / K
    i = 0
    ksi = 0
    while i != K:
        ksi += (((numbers_3[i] - p_i * N) ** 2) / (p_i * N))
        i += 1
    print(f'Хи квадрат: {ksi}')

    i = 0
    Ex = 0
    while i != N:
        Ex += x_3[i]
        i += 1
    Ex = (1 / N) * Ex

    i = 0
    S2x = 0
    while i != N:
        S2x += ((x_3[i]) ** 2) - (Ex ** 2)
        i += 1
    S2x = S2x / N

    offset = 1
    while offset <= K / 2:
        a = 0
        i = 0
        while i < N - offset:
            a += (x_3[i] - Ex) * (x_3[i + offset] - Ex)
            i += 1
        a = a / (N - offset) * S2x
        print(f'a(tao) %f' % a)
        print(f'tao: {offset}')
        offset += 1
```