

ЛЕКЦИЯ 3. Расчет показателей надежности ВС для переходного режима

Ткачёва Татьяна Алексеевна

преп. Кафедры вычислительных систем
Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики

Created by:

Пазников Алексей Александрович
к.т.н. доцент Кафедры вычислительных систем

Получим оценки функции надёжности ВС для фиксированного числа n машин основной подсистемы при $N \rightarrow \infty$.

- Пусть параметры ВС изменяются в моменты времени $1, 2, \dots, \tau, \dots, t, \dots$;
- $r(\tau)$ – вероятность безотказной работы одной ЭМ или вероятность того, что ЭМ в момент τ исправна;
- $N(\tau)$ – общее число ЭМ в момент τ .

Можно доказать справедливость формул:

$$R(t) \begin{cases} \geq 1 - B^{-1}(1 - t^{-B}); \\ \leq \frac{2}{1+t}; \\ \approx e^{-\Lambda t}; \end{cases} \quad \text{при } N(t) \begin{cases} \geq \frac{1+B}{K} \ln(\tau + 1); \\ \leq \frac{1}{K} \ln(\tau + 1); \\ = N = \text{const}; \end{cases} \quad (1)$$

где B – произвольное число;

$$K = \max_{1 \leq \tau \leq t} \kappa(\tau), \quad k = \min_{1 \leq \tau \leq t} \kappa(\tau);$$

$$\kappa(\tau) = v(\tau) \ln \frac{v(\tau)}{r(\tau)} + [1 - v(\tau)] \ln \frac{1 - v(\tau)}{1 - r(\tau)}, \quad v(\tau) = \frac{n - 1}{N(\tau)}$$

для константы Λ справедливо неравенство

$$\ln[1 - e^{-KN}] \geq \Lambda \geq \ln[1 - e^{-kN}]$$

- Таким образом, чтобы невосстанавливаемая ВС имела достаточно высокий уровень надёжности ($R(t) \rightarrow 1$) сколь угодно продолжительное время ($t \rightarrow \infty$), необходимо, по крайней мере, логарифмический рост во времени числа её ЭМ.
- Из (1) следует, что вероятность безотказной работы системы, в которой $N = \text{const}$, экспоненциально с ростом t стремится к нулю.
- Скорость уменьшения $R(t)$ зависит от параметра Λ , т.е. от интенсивности отказов ВС. Надёжность ВС может быть повышена за счёт уменьшения Λ .

- Применение **классического способа** расчёта мат. ожидания T и Θ **затруднено** из-за сложных расчётов функций $R(t)$ и $U(t)$.
- Вычисления функций $R(t)$ и $U(t)$ основываются на **моделях ТМО и методах приближённых вычислений**.
- Трудоёмкость такого расчёта повышается с ростом N , кроме того, **не удаётся получить аналитические формулы** для расчёта T и Θ .
- Для расчёта T и Θ удобно использовать **«частотный» метод**.

Легко установить, что среднее время безотказной работы ВС при $n \neq N$ и при $n = N$ равно:

$$\Theta = \sum_{j=n+1}^N \frac{1}{j\lambda} \prod_{l=n}^{j-1} \frac{\mu_l}{l\lambda} + \frac{1}{n\lambda}; \quad \Theta = \frac{1}{N\lambda} \quad (2)$$

Среднее время восстановления ВС при $n \neq 1$ и $n = 1$:

$$T = \frac{1}{\mu_0} \prod_{l=1}^{n-1} \frac{l\lambda}{\mu_l} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j\lambda} \prod_{l=j}^{n-1} \frac{l\lambda}{\mu_l}; \quad T = \frac{1}{\mu_0} \quad (3)$$

В формулах (2), (3)

$$\mu_l = \begin{cases} (N - l)\mu, & \text{если } (N - m) \leq l \leq N; \\ t\mu, & \text{если } 0 \leq l < (N - m); \end{cases}$$

где λ^{-1} – среднее время безотказной работы ЭМ;

m – число восстанавливающих устройств;

μ^{-1} – среднее время восстановления отказавшей ЭМ одним ВУ.

Для простоты обозначим

$$P_j(t) = P\{\xi(t) = j \mid i \in E_0^N\}, \quad j \in E_0^N.$$

Для вывода дифференциальных уравнений воспользуемся формулой полных вероятностей:

$$P_j(t + \Delta t) = \sum_{l=0}^N P_l(t) P_{lj}(\Delta t)$$

где $P_{lj}(\Delta t)$ – условная вероятность того, что ВС, находящаяся в некоторый момент $t \geq 0$ в состоянии l , т.е. $\xi(t) = l$, перейдёт по истечении времени Δt в состояние j , т.е. $\xi(t + \Delta t) = j$

Известно (из формулы вероятности отказов для ЭВМ), что вероятность появления за Δt одного отказа в ЭМ – есть величина порядка $\lambda \Delta t$, а вероятность появления более одного отказа – величина $o(\Delta t)$.

Тогда вероятность появления за время Δt хотя бы одного отказа в ВС, находящейся в состоянии $l \in E_0^N$, есть величина $l\lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

Из функции восстановимости для ЭВМ следует, что вероятность восстановления за время Δt отказавшей машины одним восстанавливающим устройством равна

$$\underline{\mu\Delta t + o(\Delta t)}$$

Если ВС находится в состоянии $l \in E_0^N$ и восстановлением занято k устройств, то вероятность восстановления за время Δt одной отказавшей ЭМ:

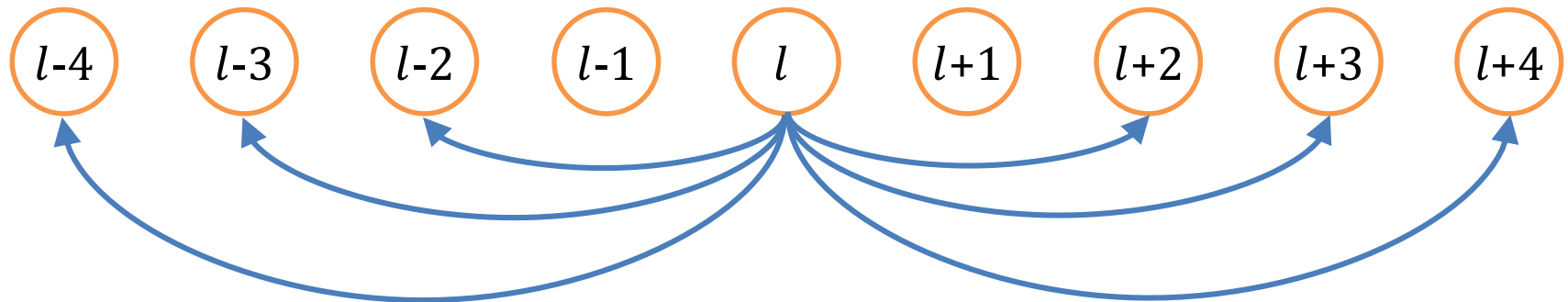
$$k\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

где $k = (N - l)$ при $(N - m) \leq l$ и $k = m$ при $(N - m) > l$

1. Переход системы из состояния l в состояние j при $|l - j| > 1$ требует наступления двух событий (или двух отказов или двух восстановлений).

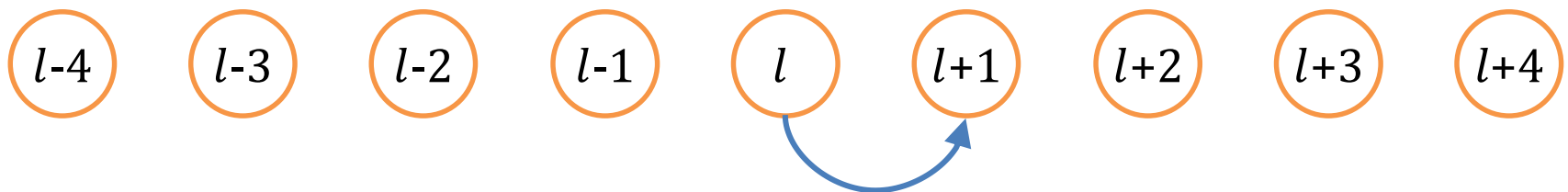
Следовательно:

$$P_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad |l - j| \geq 2, \quad l, j \in E_0^N$$



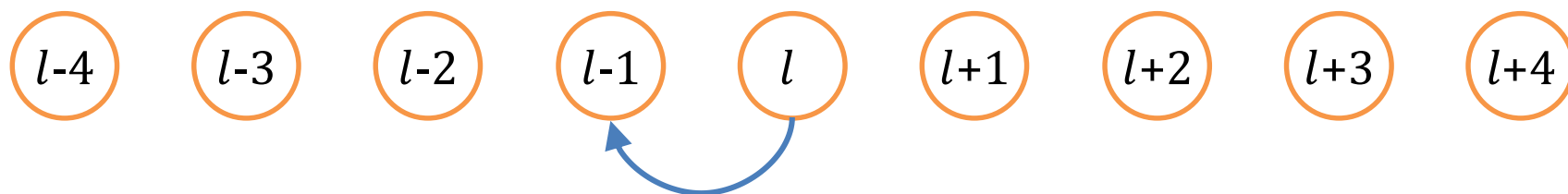
2. Для перехода ВС из состояния $0 \leq l < N$ в состояние $l + 1$ требуется, чтобы произошло одно восстановление или наступило несколько событий, поэтому:

$$P_{l,l+1}(\Delta t) = \begin{cases} m\mu\Delta t + o(\Delta t), & 0 \leq l \leq (N - m) \\ (N - l)\mu\Delta t + o(\Delta t), & (N - m) < l < N \end{cases}$$



3. Очевидно, что:

$$P_{l,l-1}(\Delta t) = l\lambda\Delta t + o(\Delta t), \quad 0 < l \leq N$$



4. Наконец, учитывая пп.1-3, имеем:

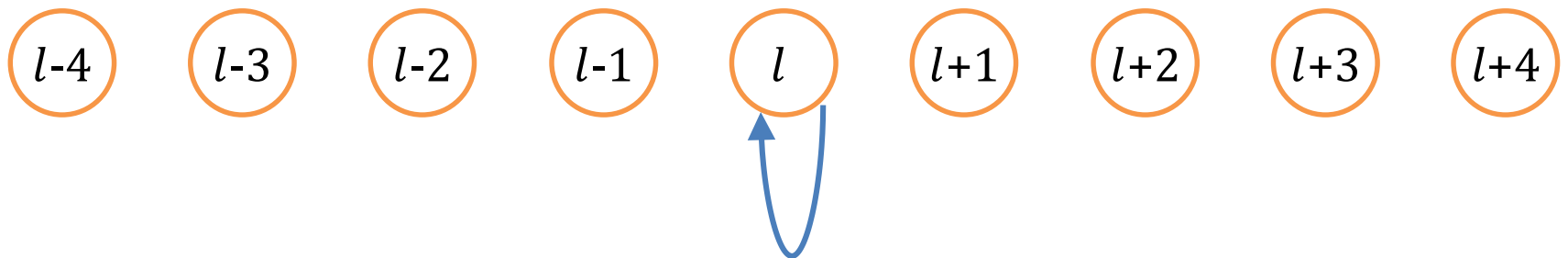
$$P_{ll}(\Delta t) = 1 - P_{l,l+1}(\Delta t) - P_{l,l-1}(\Delta t) + o(\Delta t), 0 \leq l \leq N$$

где при $l = N$ второй, а при $l = 0$ третий член правой части надо заменить на 0. Следовательно,

$$P_{00} = 1 - m\mu\Delta t + o(\Delta t);$$

$$P_{ll}(\Delta t) = \begin{cases} 1 - l\lambda\Delta t - m\mu\Delta t + o(\Delta t), & 0 < l \leq (N - m); \\ 1 - l\lambda\Delta t - (N - l)\mu\Delta t + o(\mu\Delta t), & (N - m) < l < N; \end{cases}$$

$$P_{NN}(\Delta t) = 1 - N\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$



Подставляя в $P_j(t + \Delta t) = \sum_{l=0}^N P_l(t)P_{lj}(\Delta t)$ полученные асимптотические оценки, получаем:

$$\begin{aligned} P_0(t + \Delta t) &= P_0(t)P_{00}(\Delta t) + P_1(t)P_{10}(\Delta t) + o(\Delta t) = \\ &= (1 - m\mu\Delta t)P_0(t) + \lambda\Delta tP_1(t) + o(\Delta t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_j(t + \Delta t) &= P_{j-1}(t)P_{j-1,j}(\Delta t) + P_j(t)P_{jj}(\Delta t) + \\ &+ P_{j+1}(t)P_{j+1,j}(\Delta t) + o(\Delta t) = \\ &= \{m\mu\Delta tP_{j-1}(t) + [1 - (j\lambda + m\mu)\Delta t]P_j(t) + \\ &= \begin{cases} m\mu\Delta tP_{j-1}(t) + [1 - (j\lambda + m\mu)\Delta t]P_j(t) + \\ \quad + (j+1)\lambda\Delta tP_{j+1}(t) + o(\Delta t), & 0 < j \leq (N-m); \\ [N - (j-1)]\mu\Delta tP_{j-1}(t) + \{1 - [j\lambda + (N-j)\mu]\Delta t\}P_j(t) + \\ \quad + (j+1)\lambda\Delta tP_{j+1}(t) + o(\Delta t), & (N-m) < j < N; \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P_N(t + \Delta t) &= P_{N-1}(t)P_{N-1,N}(\Delta t) + P_N(t)P_{NN}(\Delta t) + o(\Delta t) = \\ &= m\mu\Delta tP_{N-1}(t) + (1 - N\lambda\Delta t)P_N(t) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Перенеся $P_j(t), j \in E_0^N$ в левую часть последний равенств, разделив на Δt и перейдя в к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -m\mu P_0(t) + \lambda P_1(t); \\ P'_j(t) &= \begin{cases} m\mu P_{j-1}(t) - (j\lambda + m\mu)P_j(t) + (j+1)\lambda P_{j+1}(t), & 0 < j \leq (N-m); \\ [N-(j-1)]\mu P_{j-1}(t) - [j\lambda + (N-j)\mu]P_j(t) + (j+1)\lambda P_{j+1}(t), & (N-m) < j < N; \end{cases} \\ P'_N(t) &= \mu P_{N-1}(t) - N\lambda P_N(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия могут быть заданы в следующем виде:

$$P_j(0) = 0, \quad j \neq i, \quad P_i(0) = 1, \quad i, j \in E_0^N$$

Задача интегрирования системы уравнений относительно неизвестных функций $P_j(t), j \in E_0^N$, разрешима. Практически отыскание решения при заданных начальных условиях - численными методами и по описанной ранее схеме. Расчет $P_j(t)$ для большемасштабных ВС трудоёмок.

При изучении поведения большемасштабных ВС можно строить математические модели с числом ЭМ, равным бесконечности ($N \rightarrow \infty$). Это существенно упрощает расчёт функции готовности. Модернизируем обозначения.

Пусть $E_0^\infty = \{0, 1, 2, \dots\}$ – пространство состояния системы; $P_j(t)$ – вероятность того, что ВС в момент времени $t \geq 0$ имеет $j \in E_0^N$ исправных машин. Тогда для расчёта функции готовности ВС следует вместо $S(t) = \sum_{j=n}^N P_j(i, t)$ использовать формулу:

$$S(t) = \sum_{j=n}^{\infty} P_j(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} P_j(t)$$

Очевидно, что $N \rightarrow \infty$ число отказавших ЭМ системы будет больше числа m ВУ. Тогда при любом состоянии ВС и для любого момента времени будет занято m ВУ:

$$P_{l,l+1}(\Delta t) = m\mu\Delta t + o(\Delta t), \quad l \in E_0^\infty$$

Учёт полученной формулы позволяет преобразовать систему (4) к более простому виду:

$$\begin{cases} P'_0(t) = -m\mu P_0(t) + \lambda P_1(t) \\ P'_j(t) = m\mu P_{j-1}(t) - (j\lambda + m\mu)P_j(t) + (j+1)\lambda P_{j+1}(t), & j \geq 1 \end{cases}$$

При этом нормировочное условие принимает вид $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) = 1$

Решение однородной системы (5) обыкновенных линейных ДУ первого порядка может быть найдено **методом производящих функций**

$$P_j(t) = e^{-\frac{m\mu}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})} \sum_{l=0}^j b_l(t) \frac{\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^{j-l} (1-e^{-\lambda t})^{j-l}}{(j-l)!}$$

где $b_l(t)$ определяются из неравенства

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l(t) x^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) (xe^{-\lambda t} + 1 - e^{-\lambda t})^l,$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) = 1, \quad |x| \leq 1, \quad j \in E_0^{\infty}$$

Данные формулы позволяют анализировать готовность ВС с массовым параллелизмом.



П.Мондриан. Серое дерево