Лекция 14. Методы решения матричных игр в смешанных стратегиях

Ткачёва Татьяна Алексеевна

преп. Кафедры вычислительных систем

Сибирский государственный университет

телекоммуникаций и информатики

Created by:

Пазников Алексей Александрович

к.т.н. доцент Кафедры вычислительных систем

Методы решения матричных игр:

- Поиск седловой точки (решение в чистых стратегиях)
- Составление системы уравнений (если $n = m$)
- Графический метод (если $n \leq 2$ или $m \leq 2$)
- Сведение матричной игры к задаче линейного программирования
- Метод Брауна
- и др.

Графический метод

Хотя бы один игрок имеет две чистые стратегии

Рассмотрим игру $2 \times n$, в которой игрок A имеет две стратегии.

$$
\begin{array}{rl|cccc|}
 & & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\
 & & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\
\hline
x_1: & A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
1-x_1: & A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\hline
\end{array}
$$

Графический метод

Игрок A выбирает стратегии A_1 и A_2 с вероятностями x_1 и $1–x_1$.

Игрок B выбирает стратегии $B_1, B_2, \ldots, B_n$ с вероятностями $y_1, \; y_2, \ldots, y_n$, где $y_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$

Ожидаемый выигрыш игрока A, соответствующий j-й стратегии игрока B:

$$x_1 a_{1j} + (1\text{-}x_1)a_{2\mathrm{j}}, \;\; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2\mathrm{j}}, \;\; j = 1, 2, \ldots, n$$

Следовательно, игрок A ищёт величину x_1, которая максимизирует минимум ожидаемого выигрыша

$$\max_{x_1} \min_j \{(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}\}$$

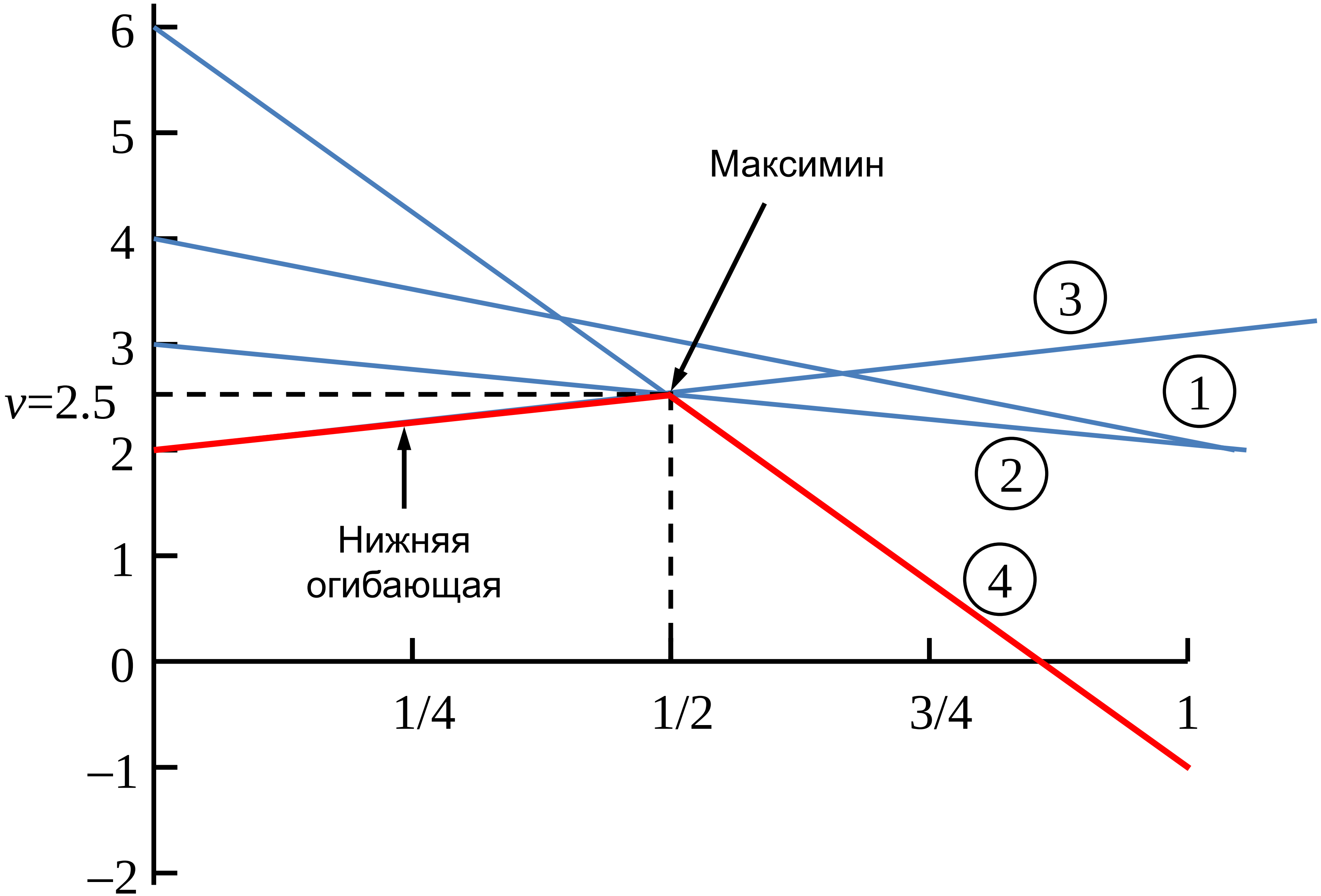
Графический метод. Пример

Рассмотрим игру 2×4 между ВЦ (A) и диспетчером (B), в которой платежи выплачиваются вычислительному центру.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	–1
A_2	4	3	2	6

Чистые стратегии B	Ожидаемые выигрыши A
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

Графический метод. Пример



Графический метод. Пример

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 3,} \\ -7\left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 4.} \end{cases}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определяется двумя стратегиями B_3 и B_4, формирующими нижнюю огибающую графика $\Rightarrow$

$$y_1 = y_2 = 0 \text{ и } y_4 = 1 - y_3$$

Ожидаемые платежи игрока В:

Чистые стратегии A	Ожидаемые выигрыши B
1	$4y_3 - 1$
2	$-4y_3 + 6$

Графический метод. Пример

Оптимальные стратегии игрока *B*?

Наилучшее решение из наихудших для игрока *B* – точка минимум *верхней* огибающей заданных двух прямых:

Чистые стратегии A	Ожидаемые платежи B
1	$3y_3 - 1(1 - y_3) = 4y_3 - 1$
2	$2y_3 + 6(1 - y_3) = -4y_3 + 6$

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6 \Rightarrow y_3 = 7/8$$

Цена игры: $v = 4 \times (7/8) - 1 = 5/2$

Оптимальные стратегии игрока B:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 7/8,\ y_4 = 1/8$$

Сведение к задаче линейного программирования

Оптимальные значения вероятностей x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ игрока A:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{im}x_i\right)\right\}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Сведение к задаче линейного программирования

Чтобы сформулировать в виде задачи линейного программирования:

$$v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{im}x_i\right)$$

Отсюда следует, что:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq v, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Сведение к задаче линейного программирования

Задача игрока A может быть записана в виде:

$$z = v \to \max$$

при ограничениях

$$v - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

v не ограничена в знаке!

Сведение к задаче линейного программирования

Оптимальные стратегии $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ игрока B определяются путём решения задачи

$$\min_{y_i}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}y_j,\sum_{j=1}^{n}a_{2j}y_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}y_j\right)\right\}$$

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=1$$

$$y_j\geq 0,\quad j=1,2,\ldots,m$$

Сведение к задаче линейного программирования

Используя описанную процедуру, запишем задачу для игрока *B* в виде:

$$\omega = v \to \min$$

при ограничениях

$$v - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$$

$$y_j \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

v не ограничена в знаке

v – **цена игры**

Сведение к задаче линейного программирования. Пример

Имеется игра между ВЦ (игрока *A*) и диспетчером (*B*)

	B_1	B_2	B_3	Минимумы строк
A_1	3	–1	–3	–3
A_2	–2	–4	–1	**–2**
A_2	–5	–6	2	–6
Максимумы столбцов	3	4	2	

Сведение к задаче линейного программирования. Пример

Значение цены игры находится между –2 и 2.

Задача линейного программирования для *A*:

$$z = v \to \max$$

при ограничениях

$$v - 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 0$$

$$v + x_1 - 4x_2 + 6x_3 \le 0$$

$$v + 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Оптимальное решение:

$x_1 = 0{,}39$, $x_2 = 0{,}31$, $x_3 = 0{,}29$ и $v = -0{,}91$

Итеративный метод Брауна

Пусть $C = \|c_{ij}\|$ есть $(n \times m)$-матрица; $C_{i\cdot}$ означает i-ю строку, $C_{\cdot j}$ – j-й столбец.

Рассмотрим последовательности векторов:

$$X(0),\ X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(l),\ \ldots$$

$$Y(0),\ Y(1),\ Y(2),\ \ldots,\ X(l),\ \ldots$$

где

$$X(l) = \{x_0(\mathrm{l}), x_1(\mathrm{l}), \ldots, x_n(l)\}$$

$$Y(l) = \{y_0(\mathrm{l}), y_1(\mathrm{l}), \ldots, y_n(l)\}$$

$x_i(l),\ i \in E$ – относительная оценка выигрыша ВЦ, если он на l-й итерации выбирает i-ю строку матрицы

Итеративный метод Брауна

$x_i(l)$, $i \in E$ – относительная оценка выигрыша ВЦ, если он на l-й итерации выбирает i-ю строку матрицы

$y_j(l)$, $i \in E$ – относительная оценка выигрыша диспетчера, если он в l-й итерации выбирает j-й столбец матрицы C.

В l-й итерации ВЦ и диспетчер выбирают соответственно строку i и столбец j, для которых

$$x_i(l) = \max_{0 \le i \le n} x_i(l) = \max X(l)$$

$$y_j(l) = \min_{0 \le j \le m} y_i(l) = \min Y(l)$$

Итеративный метод Брауна

Учитывая найденные i и j, игроки пересматривают свои оценки значений строк и столбцов для $(l+1)$-й итерации:

$$X(l+1) = X(l) + C_{\cdot j}, \quad Y(l+1) = Y(l) + C_{i\cdot}$$

Очевидно, что

$$X(l) = X(0) + \sum_{j=0}^{n} l\pi_j(l) C_{\cdot j}$$

$$Y(l) = Y(0) + \sum_{i=0}^{n} lp_i(l) C_{i\cdot}$$

где $l\pi_j(l)$ – число выборов столбца j,

$lp_i(l)$ – число выборов строки i.

Итеративный метод Брауна

Тогда

$P(l) = \{p_0(l), p_1(l),\ldots, p_n(l)\},$

$\Pi(l) = \{\pi_0(l), \pi_1(l),\ldots, \pi_n(l)\}$

– оценки смешанных стратегий ВЦ и диспетчера, которые сходятся к оптимальным стратегиям P^* и Π^*.

Практически можно положить

$$X(0) = Y(0) = 0$$

$l^{-1}X(l)$ – среднее взвешенное столбцов,

$l^{-1}Y(l)$ – среднее взвешенное строк матрицы C.

$$\Rightarrow l^{-1}\min Y(l) \le V \le l^{-1}\max X(l)$$

Итеративный метод Брауна

Доказано, что

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\min Y(l)}{l}=\lim_{l\to\infty}\frac{\min X(l)}{l}=V$$

Итак, при больших l:

$$P^* \approx P(l), \Pi^* \approx \Pi(l),$$

$$V \approx (2l)^{-1}[\max X(l)-\min Y(l)] \leq V(l)$$

В качестве меры близости $V(l)$ к V можно взять

$$l^{-1}[\max X(l)-\min Y(l)] \leq \varepsilon$$

где $l > 0$

Итеративный метод Брауна

Скорость сходимости итеративного процесса:

$$V(l) - V < \delta l^{-1/2(n-1)}$$

где V – истинное значение цены игры,

$V(l)$ – значение цены игры после l-й итерации,

δ - некоторый постоянный масштабный коэффициент.

Скоро зима!