ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ - ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Σαράφογλου Γεωργία sdi1900168

Βασιλείου Ρηγίνος sdi1900019

Άσκηση 1

	1	3	2	Supply
1	25 [600]	[400]	[700]	~~25~~ 0
2	11 [320]	29 [350]	[300]	~~40~~ ~~29~~ 0
3	[500]	1 [450]	29 [480]	30 ~~29~~ 0
4	[1000]	-	13 [1000]	~~13~~ 0
demand	36	~~30~~ 1 0	~~42~~ 13 0	

i) Με τη μέθοδο north west corner έχουμε για feasible solution

$x_{11}=25,\ x_{21}=11,\ x_{22}=29,\ x_{32}=1,$

$x_{33}=29,\ x_{43}=13$

$z = 25\cdot600+11\cdot320+29\cdot350+450+29\cdot480+13\cdot1000$

$= 56.040$

ii) Ξεκινώντας με feasible solution το (i)

$u_1=0,\ u_1+v_1=600 \Rightarrow v_1=600$ $\quad w_{12}=u_1+v_2-c_{12}=630-400=230$

$u_2+v_1=320 \Rightarrow u_2=-280$ $\quad w_{13}=u_1+v_3-c_{13}=660-700<0$

$u_2+v_2=350 \Rightarrow v_2=630$ $\quad w_{23}=u_2+v_3-c_{23}=-280+660-300=80$

$u_3+v_2=450 \Rightarrow u_3=-180$ $\quad w_{31}=u_3+v_1-c_{31}=-180+600-480<0$

$u_3+v_3=480 \Rightarrow v_3=660$ $\quad w_{41}=u_4+v_1-c_{41}=340+600-1000<0$

$u_4+v_3=1000 \Rightarrow u_4=340$

- Διαλέγουμε το (1,2) για enter variable με $\theta=25$

	1	3	2
1	[600]	25 [400]	[700]
2	36 [320]	4 [350]	enter [300]
3	[500]	1 [450]	29 [480]
4	[1000]	-	13 [1000]

$u_1=0,\ u_1+v_2=400 \Rightarrow v_2=400$ $\quad w_{11}=u_1+v_1-c_{11}=370-600<0$

$u_2+v_2=350 \Rightarrow u_2=-50$ $\quad w_{13}=u_1+v_3-c_{13}=430-700<0$

$u_2+v_1=320 \Rightarrow v_1=370$ $\quad w_{23}=u_2+v_3-c_{23}=-50+430-300=80$

$u_3+v_2=450 \Rightarrow u_3=50$ $\quad w_{31}=u_3+v_1-c_{31}=50+370-500<0$

$u_3+v_3=480 \Rightarrow v_3=430$ $\quad w_{41}=u_4+v_1-c_{41}=570+370-1000<0$

$u_4+v_3=1000 \Rightarrow u_4=570$

- Διαλέγουμε το (2,3) για enter variable με $\theta=4$

	1	3	2
1	[600]	25 [400]	[700]
2	36 [320]	[350]	4 [300]
3	[500]	5 [450]	25 [480]
4	[1000]	-	13 [1000]

$u_1=0,\ u_1+v_2=400 \Rightarrow v_2=400$ $\quad w_{11}=u_1+v_1-c_{11}=450-600<0$

$u_3+v_2=450 \Rightarrow u_3=50$ $\quad w_{13}=u_1+v_3-c_{13}=430-700<0$

$u_3+v_3=480 \Rightarrow v_3=430$ $\quad w_{22}=u_2+v_2-c_{22}=-130+400-350<0$

$u_2+v_3=300 \Rightarrow u_2=-130$ $\quad w_{31}=u_3+v_1-c_{31}=50+450-500=0$

$u_2+v_1=320 \Rightarrow v_1=450$ $\quad w_{41}=u_4+v_1-c_{41}=570+450-1000=20$

$u_4+v_3=1000 \Rightarrow u_4=570$

- Διαλέγουμε το (4,1) για enter variable με $\theta = 13$ (min{13, 36})

	1	3	2
1	[600]	25 [400]	[700]
2	23 [320]	[350]	17 [300]
3	[500]	5 [450]	25 [480]
4	13 [1000]	-	[1000]

$u_1 = 0$, $u_1 + v_2 = 400 \Rightarrow v_2 = 400$

$u_3 + v_2 = 450 \Rightarrow u_3 = 50$

$u_3 + v_3 = 480 \Rightarrow v_3 = 430$

$u_2 + v_3 = 300 \Rightarrow u_2 = -130$

$u_2 + v_1 = 320 \Rightarrow v_1 = 450$

$u_4 + v_1 = 1000 \Rightarrow u_4 = 550$

$$\left.\begin{array}{l} w_{11} = u_1 + v_1 - c_1 = 450 - 600 < 0 \\ w_{13} = u_1 + v_3 - c_3 = 430 - 700 < 0 \\ w_{22} = u_2 + v_2 - c_{23} = -130 + 400 - 350 < 0 \\ w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 50 + 450 - 500 \neq 0 \\ w_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 550 + 430 - 1000 < 0 \end{array}\right\} \text{Άρα optimal}$$

$$Z = 25 \cdot 400 + 23 \cdot 320 + 17 \cdot 300 + 5 \cdot 450 + 25 \cdot 480 + 13 \cdot 1000 = 49.710$$

(iii)

	1	2	3	s
1	$\boxed{600}$	$\boxed{700}$	25 $\boxed{400}$	$\cancel{25}$ 0
2	36 $\boxed{320}$	4 $\boxed{300}$	$\boxed{350}$	$\cancel{40}$ $\cancel{4}$ 0
3	$\boxed{500}$	25 $\boxed{430}$	5 $\boxed{450}$	$\cancel{30}$ $\cancel{25}$ 0
4	$\boxed{1000}$	13 $\boxed{1000}$	-	$\cancel{13}$ 0
d	$\cancel{36}$ 0	$\cancel{42}$ $\cancel{25}$ 25	$\cancel{30}$ 5	

Έχουμε $p_i \to$ το row penalty της i επανάληψης και p_i' το col penalty της i επανάληψης

	p_1	p_1'
1.	600-400=200	500-320=180
2.	320-300=20	430-300=180
3.	430-450=30	400-350=50
4.	1000-1000=0	

max: 180

min στήλης 1 : 320

Άρα $x_{21} = 36$

	p_2	p_2'
1.	700-400=300	430-300=130
2.	350-300=50	400-350=50
3.	480-430=30	
4.	1000	

max: 1000

min γραμμής : 1000

Άρα $x_{42} = 13$

	p_3	p_3'
1.	300	-
2.	50	130
3.	30	50
4.	-	

max: 300

min γραμμής : 400

Άρα $x_{13} = 25$

p_4	p_4'
-	-
50	180
30	100
-	

max: 180

min στήλης 2 : 300

Άρα $x_{22} = 4$

p_5	p_5'
-	-
-	-
30	-
-	-

max 30

min γραμμής 3 : 450

Άρα $x_{33} = 5$ και $x_{32} = 25$

$Z = 36 \cdot 320 + 4 \cdot 300 + 25 \cdot 400 + 25 \cdot 430 + 5 \cdot 450 + 13 \cdot 1000 = 49.970$

b)

	1	2	3	Supply
1	$\boxed{600}$	$\boxed{700}$	25 $\boxed{400}$	~~25~~ 0
2	5 $\boxed{320}$	35 $\boxed{300}$	$\boxed{350}$	~~40~~ 5
3	25 $\boxed{500}$	$\boxed{480}$	$\boxed{450}$	30
	~~30~~ ~~25~~ 0	~~35~~ 0	~~25~~ 0	

Ο πίνακας πριν την αύξηση.

P_1	P_1'
200	180
20	180
30	50

Διαλέγουμε το (1,3) βάζουμε το μέγιστο που μπορούμε στο (1,3)

P_2	P_2'
-	-
20	180
20	180

Διαλέγουμε το (2,2)

P_3	P_3'
-	-

$$Z_2 = 25 \cdot 400 + 5 \cdot 320 + 35 \cdot 300 + 25 \cdot 500 = 34.600$$

Άρα με την αύξηση από το 1(iii) έχουμε $\Delta Z = Z - Z_2 =$

$= 49.970 - 34.600$

$= 15.370$

Άσκηση 2

Διυλιστήριο \ Περιοχή	1	2	3	S
1	120	180	-	6
2	300	100	80	5
3	200	250	120	8
D	4	8	7	

a) x_{ij} η ποσότητα βενζίνης που μεταφέρεται από το διυλιστήριο i στην περιοχή διανομής j

Περιορισμοί:

→ Η ποσότητα βενζίνης που μεταφέρεται από κάθε διυλιστήριο σε κάθε περιοχή δε θα πρέπει να υπερβαίνει την ημερήσια δυναμικότητα του διυλιστηρίου.

$$x_{11} + x_{12} \leq 6$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 8$$

→ η ποσότητα βενζίνης κάθε περιοχής δε θα πρέπει να ξεπερνά την ημερήσια ζήτηση της περιοχής

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 4$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 8$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 7$$

→ οι ποσότητες αυτές δε θα είναι αρνητικές

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\min Z = 12 \cdot x_{11} + 18 \cdot x_{12} + 30 \cdot x_{21} + 10 \cdot x_{22} + 8 \cdot x_{23} + 20 \cdot x_{31} + 25 \cdot x_{32} + 12 \cdot x_{33}$$

b) (i)

	1	2	3	
1	4 $\boxed{12}$	2 $\boxed{18}$	-	~~6~~ ~~2~~ 0
2	$\boxed{30}$	5 $\boxed{10}$	$\boxed{8}$	~~5~~ 0
3	$\boxed{20}$	1 $\boxed{25}$	7 $\boxed{12}$	~~8~~ ~~7~~ 0
	~~4~~ 0	~~8~~ ~~6~~ ~~1~~ 0	~~7~~ 0	

(1,1) : min{4,6} = 4

(1,2) : min{2,8} = 2

(2,2) : min{5,6} = 5

(3,2) : min{1,8} = 1

(3,3) : min{7,7} = 7

Z = 243

(ii) Έχοντας ως feasible solution το (i)

BV

$u_1 = 0$, $u_1 + v_1 = 12 \Rightarrow v_1 = 12$

$u_1 + v_2 = 18 \Rightarrow v_2 = 18$

$u_2 + v_2 = 10 \Rightarrow u_2 = -8$,

$u_3 + v_2 = 25 \Rightarrow u_3 = 7$, $u_3 + v_3 = 12 \Rightarrow v_3 = 5$

Z = 243.

NBV

$w_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -20$

$w_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -11$

$w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -1$

όλα αρνητικά άρα η λύση είναι optimal

(iii)

	1	2	3	S
1	4 $\boxed{12}$	2 $\boxed{18}$	-	~~6~~ 2
2	$\boxed{30}$	5 $\boxed{10}$	$\boxed{8}$	5
3	$\boxed{20}$	1 $\boxed{25}$	7 $\boxed{12}$	~~8~~ 1
D	~~4~~ 0	8	~~7~~ 0	

Έχουμε τα penalty για τα rows και τα cols

	row1	col1
1	6	8
2	2	8
3	8	4

Διαλέγουμε το max από τον πίνακα (8)
Επειδή έχει 3 θα διαλέξουμε το row 3
Στο row 3 βρίσκουμε το κελί με το μικρότερο κόστος (το [3,3]) και βάζουμε τη μέγιστη τιμή που μπορούμε. $\min\{7,8\} = 7$. Συνεχίζουμε με παρόμοιο τρόπο.

	row2	col2
1.	6	8
2.	2	8
3.	5	-

Διαλέγουμε το κελί (1,1) και βάζουμε το $\min\{4,6\} = 4$

	row3	col3
1.	[illegible]	[illegible] -
2	[illegible]	10
3.	[illegible]	-

Τώρα διαλέγουμε το ελάχιστο κόστος (10)
βάζουμε στο (2,2) : $\min\{5,3\} = 5$
μετά στο (1,2) : $\min\{2,3\} = 2$
και τέλος στο (3,2) : $\min\{1,1\} = 1$

$$Z = 4 \cdot 12 + 2 \cdot 18 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 25 + 7 \cdot 12 = 243$$

Άσκηση 3

	I	II	III	
A	20	16	24	10
B	15	18	12	15
	6	9	10	

a) Έχουμε x_{ij} η ποσότητα βενζίνης από το διυλιστήριο i στο πρατήριο j

$$\min z = 20x_{11} + 16x_{12} + 24x_{13} + 15x_{21} + 18x_{22} + 12x_{23}$$

Περιορισμοί:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 15$$
$$x_{11} + x_{21} \leq 6$$
$$x_{12} + x_{22} \leq 9$$
$$x_{13} + x_{23} \leq 10$$
$$x_{ij} \geq 0$$

	I	II	III	
A	1 [20]	9 [16]	- [24]	10
B	5 [15]	- [18]	10 [12]	~~15~~ ~~5~~ 0
	~~6~~	~~9~~	~~10~~	
	~~1~~	0	0	

$u_A = 0,\ u_A + v_1 = 20 \Rightarrow v_1 = 20,\ v_2 = 16,\ v_3 = 24$

$u_B + v_1 = 15 \Rightarrow u_B = -5$

$w_{A3} = u_A + v_3 - c_{A3} = 24 - 24 = 0$

$w_{B2} = u_B + v_2 - c_{B2} = -5 + 16 - 18 = -7 < 0$

Άρα είναι optimal

b) Για να παραμείνει η λύση του (a) optimal θα πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί από το (a)

Θα χρησιμοποιήσουμε το reduced cost για την x_{21} από τη λύση του (a)

1. Έχουμε $z = 20x_{AI} + 16x_{AII} + 24x_{AIII} + 15x_{BI} + 18x_{BII} + 12x_{BIII} = 359$

2. Αυξάνουμε το transportation cost από το B στο 1 με ένα μικρό ποσ. (1)

$z = 20x_{AI} + 16x_{AII} + 24x_{AIII} + 16x_{BI} + 18x_{BII} + 12x_{BIII} = 364$

3. reduced cost $x_{21} = \Delta Z - \Delta x_{21} = 364 - 359 - 1 \cdot 5 = -1$

4. Το reduced cost για το x_{21} είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι η λύση

Δεν είναι optimal πλέον για κάποιο $\lambda >$ από το 15

Άρα έχουμε ότι η αρχική μας λύση είναι optimal μόνο για transportation costs από το B στο I μικρότερα ή ίσα του 15

j)

	I	II	III	Supply
A	6 [20]	4 [16]	[24]	~~10~~ ~~4~~ 0
B	[15]	5 [18]	10 [12]	~~15~~ ~~10~~ 0
Γ	[18]	-	2 [16]	~~5~~ 3
Demand	6	~~9~~ 5	~~12~~ ~~2~~ 0	

Βρίσκουμε αυτή τη λύση με τη μέθοδο NorthWest Corner

$u_1 = 0$, $u_1 + v_1 = 20 \Rightarrow \boxed{v_1 = 20}$, $u_1 + v_2 = 16 \Rightarrow \boxed{v_2 = 16}$

u_2, $u_2 + v_2 = 18 \Rightarrow u_2 = 18 - 16 \Rightarrow \boxed{u_2 = 2}$, $u_2 + v_3 = 12 \Rightarrow \boxed{v_3 = 10}$

u_3, $u_3 + v_3 = 16 \Rightarrow \boxed{u_3 = 6}$

$$\left.\begin{aligned} w_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 10 - 24 < 0 \\ w_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + 20 - 15 = 7 > 0 \\ w_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 6 + 20 - 18 = 8 > 0 \end{aligned}\right\} \text{Άρα δεν είναι optimal}$$

Κάνουμε Vogel:

	I	II	III	
A	1 [20]	9 [16]	[24]	~~10~~ ~~1~~ 0
B	3 [15]	[18]	12 [12]	~~15~~ ~~3~~ 0
Γ	2 [18]	-	[16]	~~5~~ 3
	~~6~~ ~~5~~ 0	~~9~~ 0	~~12~~ 0	

row1	col1
4	3
3	2
2	4

Διαλέγουμε το κελί (1,2) και βάζουμε $\min\{9,10\} = 9$

row2	col2
4	3
3	-
2	4

Διαλέγουμε το κελί (1,1) και βάζουμε $\min\{1,6\} = 1$

row3	col3
-	3
3	-
2	4

Διαλέγουμε το κελί (2,3) και βάζουμε $\min\{12,15\} = 12$

Συνεχίζοντας έτσι συμπληρώνουμε τον υπόλοιπο πίνακα. Ελέγχουμε αν είναι optimal η λύση μας.

$u_1 = 0, \quad u_1 + v_1 = 20 \Rightarrow v_1 = 20$

$u_1 + v_2 = 16 \Rightarrow v_2 = 16$

$u_2 + v_1 = 15 \Rightarrow u_2 = -5$

$u_2 + v_3 = 12 \Rightarrow v_3 = 12 + 5 = 17$

$u_3 + v_1 = 18 \Rightarrow u_3 = -2$

$w_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 17 - 24 < 0$

$w_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -5 + 16 - 13 < 0$

$w_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 17 - 16 < 0$

Άρα η λύση είναι η optimal

Έχουμε

$$z = 20 + 9 \cdot 16 + 3 \cdot 15 + 12 \cdot 12 + 2 \cdot 18 = 389$$

Ενώ για το (α) έχουμε

$$z_A = 20 + 9 \cdot 16 + 5 \cdot 15 + 10 \cdot 12 = 359$$

Άρα όχι η λύση του (α) δεν παραμένει βέλτιστη

Άσκηση 4

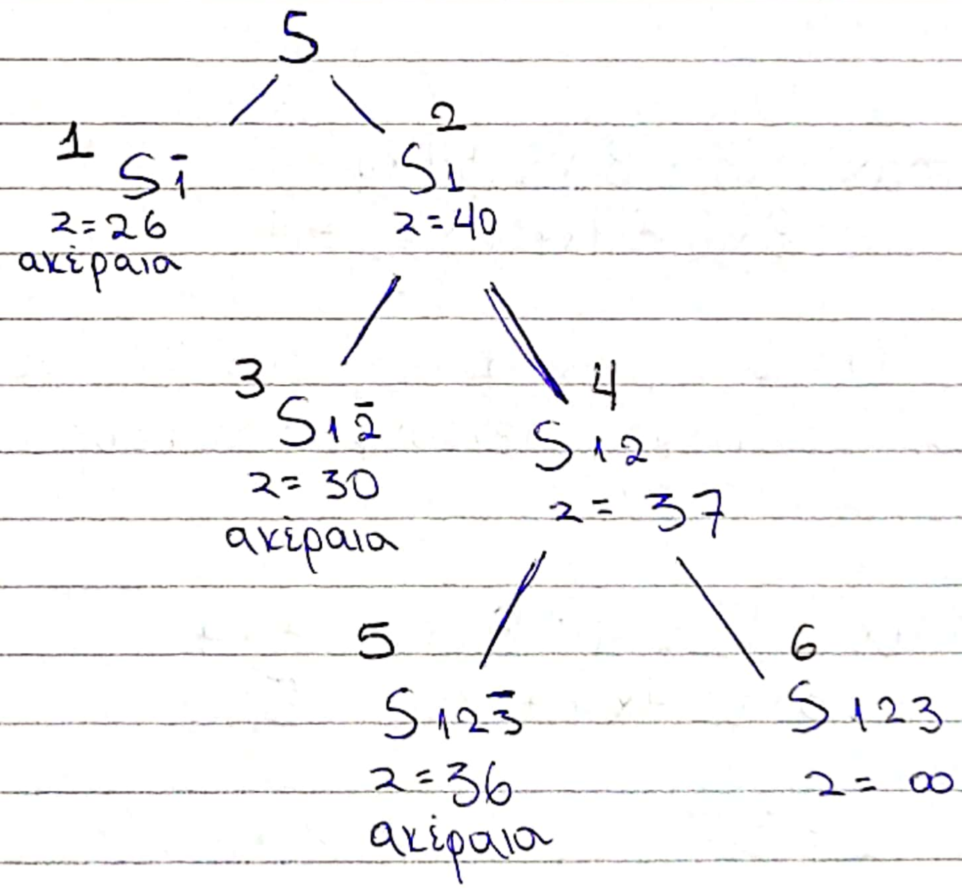
maximize $z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$

subject to $18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$

$x_i \in \{0,1\}$

a) Deapth First Search

Ανάλυση του δέντρου αναζήτησης. (οι αριθμοί δείχνο τη σειρά της ανάλυσης κόμβων)



Για να υπολογίσουμε τις συνεχείς λύσεις χαλαρώνουμε τους περιορισμούς $x_i \in \{0,1\}$ σε $x_i \in [0,1]$.

$S_{\bar{1}}$: $\max \; 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$

$$14x_2 + 8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$$

$x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 26$

ακέραια λύση

=> δεν επεκτείνουμε τον κόμβο παραπάνω.

S_1 : $\max \; 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$

$$14x_2 + 8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 19$$

$x_2 = 1$, $x_3 = \frac{5}{8}$, $z = 40$

$S_{1\bar{2}}$: $\max \; 18 + 8x_3 + 4x_4$

$$8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 19$$

$x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 30$ ακέραια λύση

δεν επεκτείνουμε το κόμβο άλλο.

S_{12} : $\max \; 18 + 14 + 8x_3 + 4x_4$

$$8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 5$$

$x_3 = \frac{5}{8}$, $z = 37$, $37 >$ από την βέλτιστη ακέραια λύση άρα επεκτείνουμε το κόμβο

$S_{12\bar{3}}$: max $18 + 14 + 4x_4$

$4x_4 + x_5 \leq 5$

$x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 36 \rightarrow$ ακέραια λύση

δεν επεκτείνουμε το κόμβο

S_{123} : max $18 + 14 + 8 + 4x_4$

$4x_4 + x_5 \leq -3$

δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς, $z = \infty$

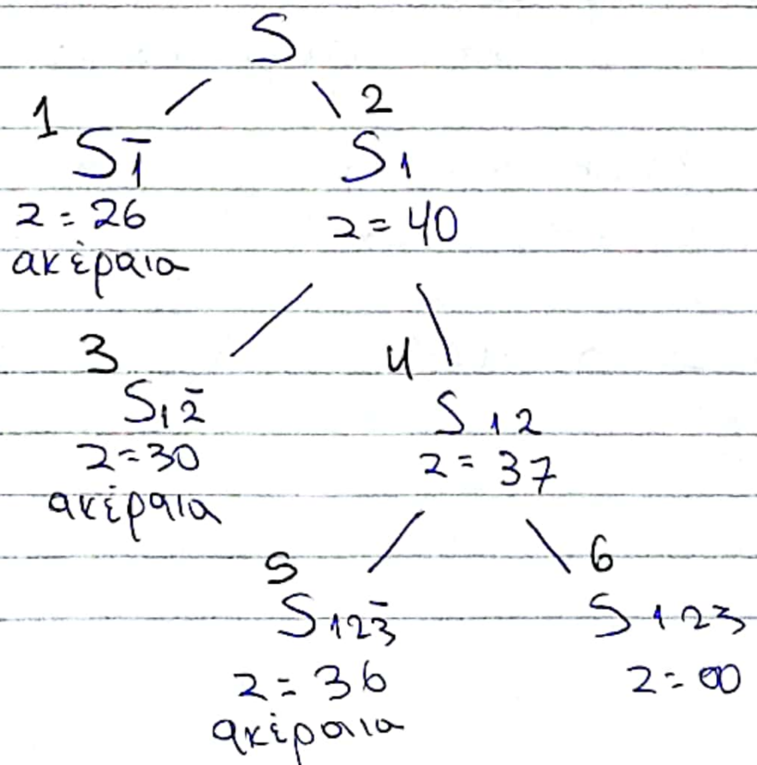
δεν επεκτείνουμε το κόμβο

Τελικά η βέλτιστη ακέραια λύση είναι η: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$

με $z = 36$

β) Breadth First Search

Δέντρο αναζήτησης:



$S_{\bar{1}}$ max $14x_2 + 8x_3 + 4x_4$

$14x_2 + 8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$

$x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 26$

ακέραια λύση

δεν θα επεκτείνουμε το κόμβο ξανά

S_1: max $14x_2 + 8x_3 + 4x_4$

$14x_2 + 8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 19$

$x_2 = 1$, $x_3 = \frac{5}{8}$, $z = 40$

$S_{1\bar{2}}$: max $18 + 8x_3 + 4x_4$

$8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 19$

$x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 30$ ακέραια λύση

S_{12}: max $18 + 14 + 8x_3 + 4x_4$

$8x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 5$

$x_3 = \frac{5}{8}$, $z = 37$

$S_{12\bar{3}}$: max $18 + 14 + 4x_4$

$4x_4 + x_5 \leq 5$

$x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 36$ ακέραια λύση

S_{123}: max $18 + 14 + 8 + 4x_4$

$4x_4 + x_5 \leq -3$ $z = \infty$

Τελικά η βέλτιστη ακέραια λύση είναι η $\underline{z = 36}$ με:

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$

Άσκηση 5

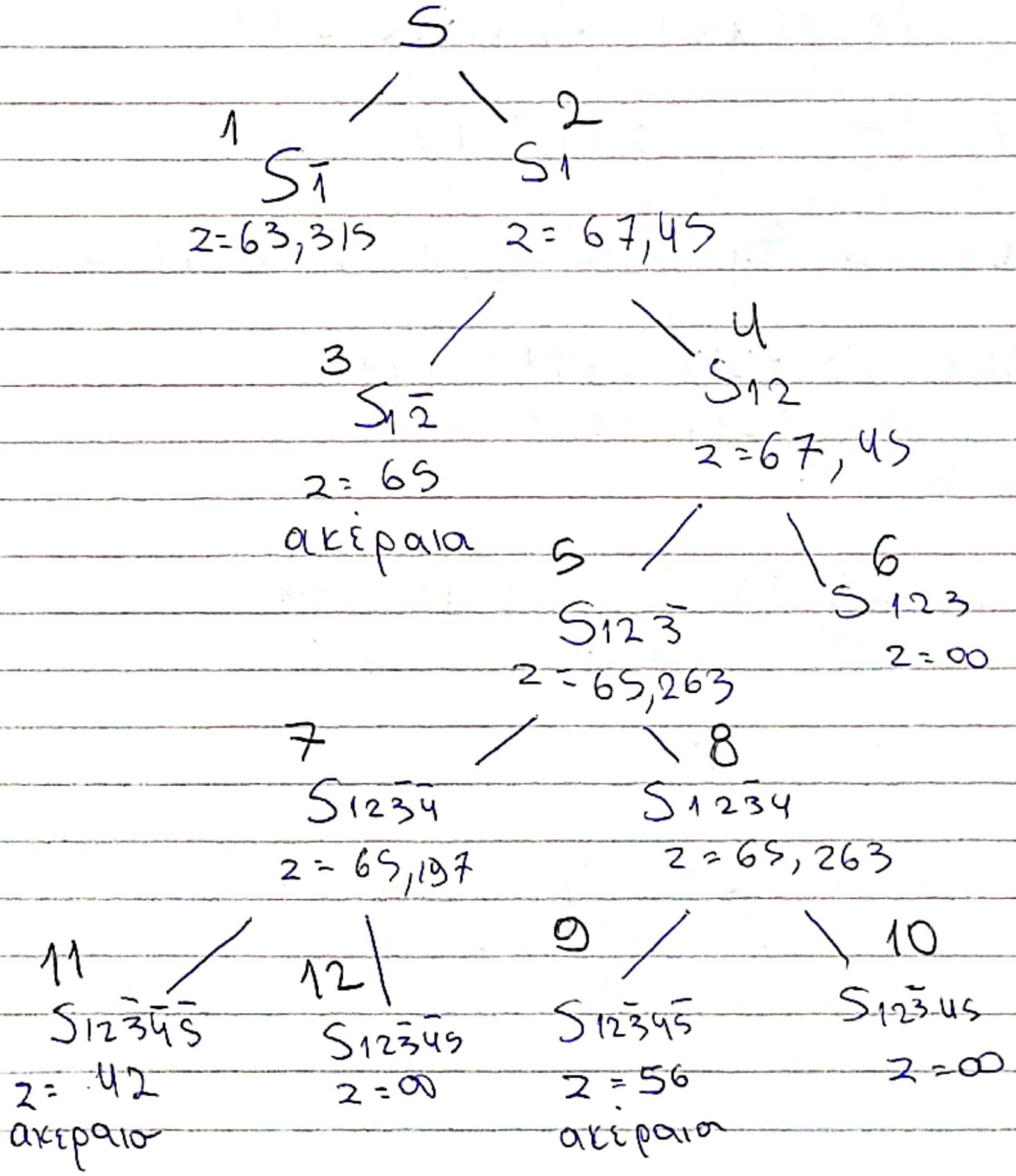
maximize $z = 23x_1 + 19x_2 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$

subject to $8x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 25$

$x_i \in \{0,1\}$

α) Best First Search

Ανάλυση δέντρου αναζήτησης



Για να υπολογίσουμε τις συνεχείς λύσεις χαλαρώνουμε τους περιορισμούς $x_i \in \{0,1\}$ σε $x_i \in [0,1]$.

$S_{\bar{1}}$: $\max\ 19x_2 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$
$7x_2 + 11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 25$

$x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = \frac{1}{19}$, $z = 63,315$

S_1: $\max\ 23 + 19x_2 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$
$7x_2 + 11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 17$

$x_2 = 1$, $x_3 = \frac{10}{11}$, $z = 67,45$

Επεκτείνουμε τον S_1 που είναι ο βέλτιστος.

$S_{1\bar{2}}$: $\max\ 23 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$
$11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 17$
$x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $z = 65$

S_{12}: $\max\ 23 + 19 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$
$11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 10$

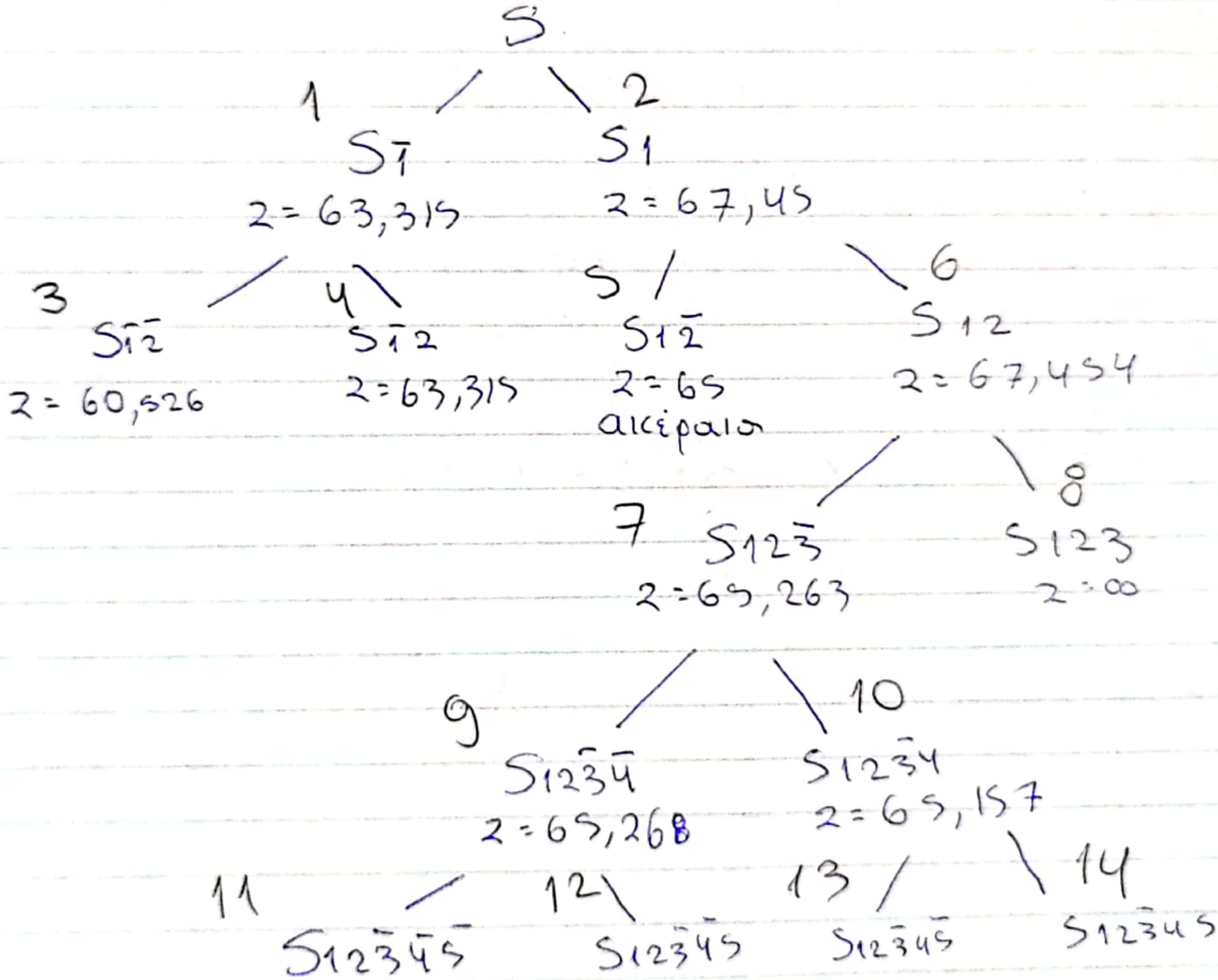
$x_3 = \frac{10}{11}$ $z = 67,45$

$S_{12\bar{3}}$: $\max\ 23 + 19 + 14x_4 + 44x_5$
$6x_4 + 19x_5 \leq 10$
$x_4 = 1$, $x_5 = 4/19$, $z = 65,263$

τελικά max $z=65$ και

$x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=1$, $x_5=0$

β) Breadth First Search



S_{123}: $\max\ 23+19+28+14x_4+44x_5$

$6x_4+19x_5 \leq -1$

$z=\infty$

$S_{12\bar{3}\bar{4}}$: $\max\ 23+19+44x_5$

$19x_5 \leq 10$

$x_5=\frac{10}{19}$, $z=65{,}197$

$S_{12\bar{3}4}$: $\max\ 23+19+14+44x_5$

$19x_5 \leq 4$

$x_5=\frac{4}{19}$ $z=65{,}263$

$S_{12\bar{3}45}$: $\max\ 23+19+14+44$

$19 \leq 4$ δεν ισχύει

$z=\infty$

$S_{12\bar{3}4\bar{5}}$: $\max\ 23+19+14$

$z=56$

$S_{12\bar{3}\bar{4}5}$: $\max\ 23+19+44$

δεν ικανοποιούνται οι περιορισμοί

$z=\infty$

$S_{12\bar{3}\bar{4}\bar{5}}$: $\max\ 23+19$

$0 \leq 10$

$z=42$

Δεν επεκτείνουμε τον $S_{\bar{1}}$ γιατί έχει μικρότερο z από τη βέλτιστη διαδική λύση.

$$S_{\bar{1}}: \max z = 19x_2 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$$
$$7x_2 + 11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 25$$

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = \frac{1}{19}, \quad z = 63{,}315$$

$$S_1: \max z = 23 + 19x_2 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$$
$$7x_2 + 11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 17$$

$$x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{10}{11}, \quad z = 67{,}45$$

$$S_{\bar{1}2}: \max z: 19 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$$
$$11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 18$$

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = \frac{1}{19}, \quad z = 63{,}315$$

$$S_{\bar{1}\bar{2}}: \max z: 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$$
$$11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 25$$

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = \frac{8}{19}, \quad z = 60{,}526$$

$$S_{1\bar{2}}: \max z: 23 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$$
$$11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 17$$

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0, \quad z = 65$$

$$S_{12}: \max z = 23 + 19 + 28x_3 + 14x_4 + 44x_5$$
$$11x_3 + 6x_4 + 19x_5 \leq 10$$

$$x_3 = \frac{10}{11}, \quad z = 67{,}454$$

$S_{1\bar{2}\bar{3}}$: $\max z = 23 + 14x_4 + 44x_5$

$6x_4 + 19x_5 \leq 17$

$x_4 = 1$, $x_5 = \frac{11}{19}$, $z = 62{,}473$

$S_{1\bar{2}3}$: $\max z = 23 + 28 + 14x_4 + 44x_5$

$6x_4 + 19x_5 \leq 6$

$x_4 = 1$, $z = 65$

$S_{12\bar{3}}$: $\max z = 23 + 19 + 14x_4 + 44x_5$

$6x_4 + 19x_5 \leq 10$

$x_4 = 1$, $x_5 = \frac{4}{19}$, $z = 65{,}263$

S_{123}: $\max z = 23 + 19 + 28 + 14x_4 + 44x_5$

$6x_4 + 19x_5 \leq -1$, $z = \infty$

$S_{12\bar{3}4}$: $\max z = 23 + 19 + 14 + 44x_5$

$19x_5 \leq 4$

$x_5 = \frac{4}{19}$, $z = 65{,}263$

$S_{12\bar{3}\bar{4}}$: $\max z = 23 + 19 + 44x_5$

$19x_5 \leq 10$

$x_5 = \frac{10}{19}$, $z = 65{,}157$

$S_{1 2 \bar{3} \bar{4} \bar{5}}$: $\max z = 23 + 19$

$8 + 7 \leq 25$

$z = 42$

$S_{1 2 \bar{3} \bar{4} 5}$: $\max z = 23 + 19 + 44$

$8 + 7 + 19 \leq 25$

$34 \leq 25$ δεν ισχύει

$z = \infty$

$S_{1 2 \bar{3} 4 \bar{5}}$: $\max z = 23 + 19 + 14$

$8 + 7 + 6 \leq 25$

$z = 56$

$S_{1 2 \bar{3} 4 5}$ $\max z = 23 + 19 + 14 + 44$

$8 + 7 + 6 + 19 \leq 25$ δεν ισχύει

$z = \infty$

Τελικά η βέλτιστη λύση είναι η $z = 65$ με

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$

Άσκηση 6

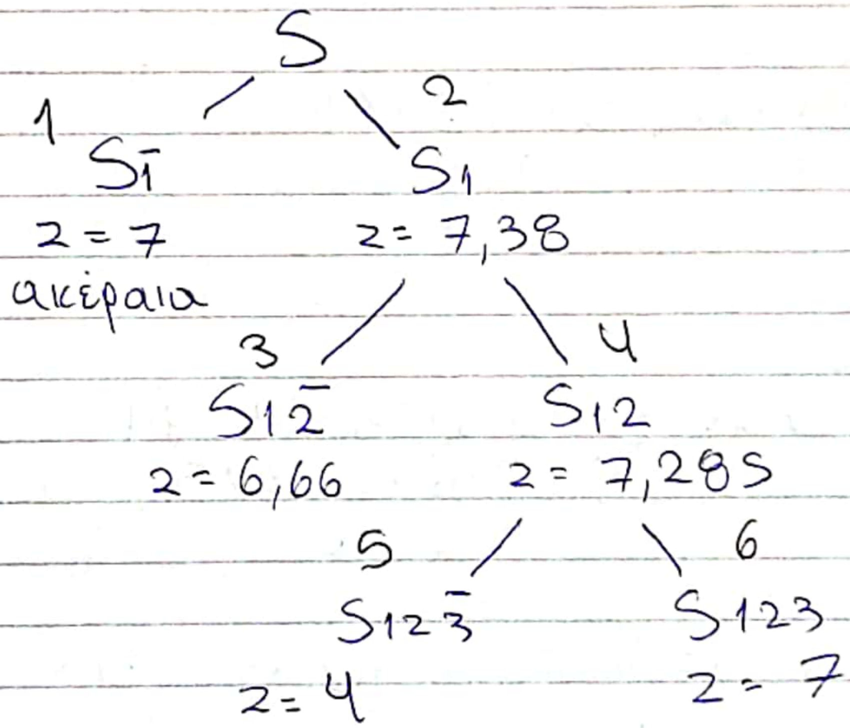
maximize $z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5$

subject to

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \le 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \le 0$$

Best First Search:



$S_{\bar{1}}$: $\max z = -x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5$

$$-2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \le 6$$

$$-x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \le 0$$

$x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 7$

S_1: $\max z = 2 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5$

$$-2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \le 3$$
$$-x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \le -1$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{6}{7}$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 7{,}28$

$S_1\bar{2}$: $\max z = 2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5$

$$7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \le 3$$
$$2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \le -1$$

$x_3 = \frac{2}{3}$, $x_4 = 1$, $x_5 = \frac{5}{6}$ $\quad z = 6{,}666$

S_{12}: $\max z \quad 1 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5$

$$7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \le 5$$
$$2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \le 0$$

$x_3 = \frac{6}{7}$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $z = 7{,}285$

$S_{12}\bar{3}$: $\max z \quad 1 - 2x_4 + 4x_5$

$$-5x_4 + 4x_5 \le 5$$
$$-4x_4 + 2x_5 \le 0$$

$x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = 1$ $\quad z = 4$

$S123$: $\max z = 6 - 2x_4 + 4x_5$

$$-5x_4 + 4x_5 \le -2$$
$$-4x_4 + 2x_5 \le -2$$

$x_4 = 1$, $x_5 = \frac{3}{4}$, $z = 7$

· Άρα $\max z = 7$ με
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$