Άσκηση 1

	1	3	2	Supply
1	25 (600)	(400)	(700)	950
2	11 (320)	29 (350)	(300)	~~40~~ 290
3	(500)	1 (450)	29 (480)	30 ~~250~~
4	(1000)	-	13 (1000)	~~13~~ 0
demand	360	~~350~~ 320	~~42~~ 13	

α) Με την μέθοδο north west corner έχουμε για feasible solution

$x_{11} = 25$, $x_{21} = 11$, $x_{22} = 29$, $x_{12} = 1$,

$x_{33} = 29$, $x_{43} = 13$

$z = 25 \cdot 600 + 11 \cdot 320 + 29 \cdot 350 + 450 + 29 \cdot 480 + 13 \cdot 1000$

$= 56.040$

ii) Ξεκινώντας με feasible solution το (i)

$u_1 = 0$, $u_1 + v_1 = 600 \Rightarrow v_1 = 600$ $\quad w_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 630 - 400 = 230$

$u_2 + v_1 = 320 \Rightarrow u_2 = -280$ $\quad w_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 660 - 700 < 0$

$u_2 + v_2 = 350 \Rightarrow v_2 = 630$ $\quad w_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -280 + 660 - 300 = 80$

$u_3 + v_2 = 450 \Rightarrow u_3 = -180$ $\quad w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -180 + 600 - 480 < 0$

$u_3 + v_3 = 480 \Rightarrow v_3 = 660$ $\quad w_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 340 + 600 - 1000 < 0$

$u_4 + v_3 = 1000 \Rightarrow u_4 = 340$

- Διαλέγουμε το (1,2) για enter variable με $\theta = 25$

	1	3	2
1	(600)	25 (400)	(700)
2	36 (320)	4 (350)	enter (300)
3	(500)	1 (450)	29 (480)
4	(1000)	-	13 (1000)

$u_1 = 0$, $u_1 + v_2 = 400 \Rightarrow v_2 = 400$ $\quad w_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 370 - 600 < 0$

$u_2 + v_2 = 350 \Rightarrow u_2 = -50$ $\quad w_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 430 - 700 < 0$

$u_2 + v_1 = 320 \Rightarrow v_1 = 370$ $\quad w_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -50 + 430 - 300 = 80$

$u_3 + v_2 = 450 \Rightarrow u_3 = 50$ $\quad w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 50 + 370 - 500 < 0$

$u_3 + v_3 = 480 \Rightarrow v_3 = 430$ $\quad w_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 570 + 370 - 1000 < 0$

$u_4 + v_3 = 1000 \Rightarrow u_4 = 570$

- Διαλέγουμε το (2,3) για enter variable με $\theta = 4$

	1	3	2
1	(600)	25 (400)	(700)
2	36 (320)	(350)	4 (300)
3	(500)	5 (450)	25 (480)
4	(1000)	-	13 (1000)

$u_1 = 0$, $u_1 + v_2 = 400 \Rightarrow v_2 = 400$ $\quad w_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 450 - 600 < 0$

$u_3 + v_2 = 450 \Rightarrow u_3 = 50$ $\quad w_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 430 - 700 < 0$

$u_3 + v_3 = 480 \Rightarrow v_3 = 430$ $\quad w_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -130 + 400 - 350 < 0$

$u_2 + v_3 = 300 \Rightarrow u_2 = -130$ $\quad w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 50 + 450 - 500 = 0$

$u_2 + v_1 = 320 \Rightarrow v_1 = 450$ $\quad w_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 570 + 450 - 1000 = 20$

$u_4 + v_3 = 1000 \Rightarrow u_4 = 570$

enter to (4,1)

	1	3	2	
1	600	25 400	700	
2	23 320	350	17 300	
3	500	5 450	25 480	
4	13 1000	-	1000	

$\delta = 13$

$u_1 = 0,\ u_1 + v_2 = 400 \Rightarrow \boxed{v_2 = 400}$

$u_3 + v_2 = 450 \Rightarrow \boxed{u_3 = 50}$

$u_3 + v_3 = 480 \Rightarrow \boxed{v_3 = 430}$

$u_2 + v_3 = 300 \Rightarrow \boxed{u_2 = -130}$

$u_2 + v_1 = 320 \Rightarrow \boxed{v_1 = 450}$

$u_4 + v_1 = 1000 \Rightarrow \boxed{u_4 = 550}$

$w_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 450 - 600 < 0$

$w_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 430 - 700 < 0$

$w_{22} = u_2 + v_2 - c_{23} = -130 + 400 - 350 < 0$

$w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 50 + 450 - 500 = 0$

$w_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 550 + 430 - 1000 < 0$

$Z = 25 \cdot 400 + 23 \cdot 320 + 17 \cdot 300 + 5 \cdot 450 + 25 \cdot 480 + 13 \cdot 1000 = 49710$

- Διαδέχομαι το (4,1) για enter variable με $\delta = 13$ $(\min\{13, 36\})$

	1	3	2
1	600	25 (400)	700
2	23 (320)	350	17 (300)
3	500	5 (450)	25 (480)
4	13 (1000)	-	1000

$u_1 = 0$, $u_1 + v_2 = 400 \Rightarrow v_2 = 400$

$u_3 + v_2 = 450 \Rightarrow u_3 = 50$

$u_3 + v_3 = 480 \Rightarrow v_3 = 430$

$u_2 + v_3 = 300 \Rightarrow u_2 = -130$

$u_2 + v_1 = 320 \Rightarrow v_1 = 450$

$u_4 + v_1 = 1000 \Rightarrow u_4 = 550$

$w_{11} = u_1 + v_1 - c_1 = 450 - 600 < 0$

$w_{13} = u_1 + v_3 - c_3 = 430 - 700 < 0$

$w_{22} = u_2 + v_2 - c_{23} = -130 + 400 - 350 < 0$

$w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 50 + 450 - 500 \neq 0$

$w_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 550 + 430 - 1000 < 0$

} Δρα optimal.

$Z = 25 \cdot 400 + 23 \cdot 320 + 17 \cdot 300 + 5 \cdot 450 + 25 \cdot 480 + 13 \cdot 1000 = 49.710$

(iii)

	1	2	3	S
1	600	700	400 25	~~25~~ 0
2	320 36	300 4	350	~~40~~ 4 0
3	500	480 25	450 5	~~30~~ ~~25~~ 0
4	1000	1000 13	-	~~13~~ 0
d	~~36~~ 0	~~42~~ ~~25~~ 25	~~30~~ 5	

Έχουμε P_i → το row penalty της i επανάληψης και P_i' το col penalty της i επανάληψης

	P_1	P_1'
1.	600-400=200	500-320=180
2.	320-300=20	480-300=180
3.	480-450=30	400-350=50
4.	1000-1000=0	

max: 180
min στήλης 1: 320
Άρα $x_{21} = 36$

	P_2	P_2'
1.	700-400=300	480-300=180
2.	350-300=50	400-350=50
3.	480-450=30	
4.	1000	

max: 1000
min γραμμής: 1000
Άρα $x_{42} = 13$

	P_3	P_3'
1.	300	-
2.	50	180
3.	30	50
4.	-	

max: 300
min γραμμής: 400
Άρα $x_{13} = 25$

	P_4	P_4'
	-	-
	50	180
	30	100
	-	

max: 180
min στήλης 2: 300
Άρα $x_{22} = 4$

P_5	P_5'
-	-
-	-
30	.
-	-

max 30
min γραμμής 3: 450
Άρα $x_{33} = 5$ και $x_{32} = 25$

$Z = 36 \cdot 320 + 4 \cdot 300 + 25 \cdot 400 + 25 \cdot 480 + 5 \cdot 450 + 13 \cdot 1000 = 49.970$

b)

	1	2	3	Supply
1	600	700	400 / 25	~~250~~
2	320 / 5	300 / 35	350	~~405~~
3	500 / 25	480	450	30
	~~30~~ 25	~~35~~ 0	~~25~~ 0	

Ο πίνακας πριν την αύξηση.

P_1	P_1'
200	180
20	180
30	50

Διαλέγουμε το (1,3) βάζουμε το λιγότερο που μπορούμε στο (1,3)

P_2	P_2'
-	-
20	180
20	180

Διαλέγουμε το (2,2)

P_3	P_3'
-	-

$$Z_2 = 25 \cdot 400 + 5 \cdot 320 + 35 \cdot 300 + 25 \cdot 500 = 34.600$$

Άρα με την αύξηση από το 1(iii) έχουμε $\Delta Z = Z - Z_2 =$

$= 49.970 - 34.600$

$= 15.370$

Άσκηση 2

Διυλιστήριο \ Περιοχή	1	2	3	S
1	120	180	-	6
2	300	100	80	5
3	200	250	120	8
D	4	8	7	

a) x_{ij} η ποσότητα βενζίνης που μεταφέρεται από το διυλιστήριο i στην περιοχή διανομής j

Περιορισμοί:

→ Η ποσότητα βενζίνης που μεταφέρεται από κάθε διυλιστήριο σε κάθε περιοχή δε θα πρέπει να υπερβαίνει την περίσσεια διαθεσιμότητα του διυλιστηρίου.

$$x_{11} + x_{12} \leq 6$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 8$$

→ η ποσότητα βενζίνης κάθε περιοχής δε θα πρέπει να ξεπερνά την ημερήσια ζήτηση της περιοχής

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 4$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 8$$
$$x_{31} + x_{32} \leq 7$$

→ οι ποσότητες αυτές δε θα είναι αρνητικές

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\min Z = 12 \cdot x_{11} + 18 \cdot x_{12} + 30 \cdot x_{21} + 10 \cdot x_{22} + 8 \cdot x_{23} + 20 \cdot x_{31} + 25 \cdot x_{32} + 12 \cdot x_{33}$$

b) (i)

	1	2	3	
1	4 [12]	2 [18]	- [L]	6 / 2 / 0
2	[30]	5 [10]	[18]	5 / 0
3	[20]	1 [25]	7 [12]	8 / 7 / 0
	4 / 0	8 / 6 / 1 / 0	7 / 0	

(1,1): $\min\{4,6\} = 4$

(1,2): $\min\{2,8\} = 2$

(2,2): $\min\{5,6\} = 5$

(3,2): $\min\{1,3\} = 1$

(3,3): $\min\{7,7\} = 7$

$Z = 243$

(ii) Έχουμε ως feasible solution το (i)

BV

$u_1 = 0$, $u_1 + v_1 = 12 \Rightarrow v_1 = 12$

$u_1 + v_2 = 18 \Rightarrow v_2 = 18$

$u_2 + v_2 = 10 \Rightarrow u_2 = -8$,

$u_3 + v_3 = 25 \Rightarrow u_3 = 7$, $u_3 + v_3 = 12 \Rightarrow v_3 = 5$

$Z = 243$.

NBV

$w_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -20$

$w_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -11$

$w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -1$

} όλα αρνητικά άρα η λύση είναι optimal

(iii)

	1	2	3	S
1	4 [12]	2 [18]	-	~~6~~ 2
2	[30]	5 [10]	[18]	5
3	[20]	1 [25]	7 [12]	~~8~~ 1
D	~~4~~ 0	8	~~7~~ 0	

Έκαψε τα penalty για τα rows και τα cols

	row1	col1
1	6	8
2	2	8
3	8	4

Διαλέγουμε το max από τον πίνακα (8)
Επειδή είχε 3 θα διαλέξουμε το row 3.
Στο row 3 βρίσκουμε το κελί με το μικρότερο κόστος (το [3,3]) και βάζουμε σε μέγιστη τιμή που μπορούμε. $\min\{7,8\} = 7$. Συνεχίζουμε με παρόμοιο τρόπο.

	row2	col2
1.	6	8
2.	2	8
3.	5	-

Διαλέγουμε το κελί (1,1) και βάζουμε το $\min\{4,6\} = 4$

	row 3	col3
1.	3	-
2	)	10
3.	)	-

Τώρα διαλέγουμε το ελάχιστο κόστος (10)
βάζουμε στο (2,2) : $\min\{5,3\} = 5$
μετά στο (1,2) : $\min\{2,3\} = 2$
και τέλος στο (3,2) : $\min\{1,1\} = 1$

$$Z = 4\cdot 12 + 2\cdot 18 + 5\cdot 10 + 1\cdot 25 + 7\cdot 12 = 243$$

Άσκηση 3

	I	II	III	
A	20	16	24	10
B	15	18	12	15
	6	9	10	

a) Έχουμε x_{ij} η ποσότητα barley από το silo i στο πρατήριο j

$$\min z = 20x_{11} + 16x_{12} + 24x_{13} + 15x_{21} + 18x_{22} + 12x_{23}$$

Περιορισμοί:
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 15$$
$$x_{11} + x_{21} \leq 6$$
$$x_{12} + x_{22} \leq 9$$
$$x_{13} + x_{23} \leq 10$$
$$x_{ij} \geq 0$$

	I	II	III	
A	1 (20)	9 (16)	- (24)	10
B	5 (15)	- (18)	10 (12)	15 / 5 / 0
	6 / 1	9 / 0	10 / 0	

$u_A = 0$, $u_A + v_1 = 20 \Rightarrow v_1 = 20$, $v_2 = 16$, $v_3 = 24$

$u_B + v_1 = 15 \Rightarrow u_B = -5$

$w_{A3} = u_A + v_3 - c_{A3} = 24 - 24 = 0$

$w_{B2} = u_B + v_2 - c_{B2} = -5 + 16 - 18 = -7 < 0$

Άρα είναι όχι optimal

β) Για να παραμείνει η λύση του (α) optimal θα πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί από το (α)

Θα χρησιμοποιήσουμε το reduced cost για την x_{21} από τη λύση του (α)

1. Έχουμε $z = 20x_{A1} + 16x_{AII} + 24x_{AIII} + 15x_{BI} + 18x_{BII} + 12x_{BIII} = 359$

2. Αυξάνουμε το transportation cost από το B στο 1 με ένα μικρό ποσ. (1)
$z = 20x_{A1} + 16x_{AII} + 24x_{AIII} + 16x_{BI} + 18x_{BII} + 12x_{BIII} = 364$

3. reduced cost $x_{21} = \Delta z - \lambda x_{21} = 364 - 359 - 1 \cdot 5 = -1$

4. Το reduced cost για το x_{21} είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι η λύση

Δεν είναι optimal πλάνο για κάποιο $\lambda >$ από το 15

Άρα έχουμε ότι η αρχική μας λύση είναι optimal μόνο για transportation costs από το B στο I μικρότερα ή ίσα του 15

γ)

	I	II	III	Supply
A	6 [20]	4 [16]	[24]	~~10~~ ~~4~~ 0
B	[15]	5 [18]	10 [12]	~~15~~ ~~10~~ 0
Γ	[18]	-	2 [16]	~~5~~ 3
Demand	6	~~9~~ 5	~~12~~ ~~2~~ 0	

Βρίσκουμε αυτή τη λύση με τη μέθοδο North West Corner

$u_1 = 0$, $u_1 + v_1 = 20 \Rightarrow \boxed{v_1 = 20}$, $u_1 + v_2 = 16 \Rightarrow \boxed{v_2 = 16}$

u_2, $u_2 + v_2 = 18 \Rightarrow u_2 = 18 - 16 \Rightarrow \boxed{u_2 = 2}$, $u_2 + v_3 = 12 \Rightarrow \boxed{v_3 = 10}$

u_3, $u_3 + v_3 = 16 \Rightarrow \boxed{u_3 = 6}$

$w_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 10 - 24 < 0$

$w_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + 20 - 15 = 7 > 0$

$w_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 6 + 20 - 13 = 8 > 0$

} Άρα δεν είναι optimal

Κάνουμε Vogel :

	I	II	III	
A	1 [20]	9 [16]	[24]	~~10~~ ~~1~~ 0
B	3 [15]	[18]	12 [12]	~~15~~ ~~3~~ 0
Γ	2 [18]	-	[16]	~~5~~ 3
	~~16~~ ~~5~~ 0	~~9~~ 0	~~12~~ 0	

row1	col1
4	3
3	2
2	4

Διαλέγουμε το κελί (1,2) και βάζουμε $\min\{9, 10\} = 9$

row2	col2
4	3
3	-
2	4

Διαλέγουμε το κελί (1,1) και βάζουμε $\min\{1, 6\} = 1$

row3	col3
-	3
3	-
2	4

Διαλέγουμε το κελί (2,3) και βάζουμε $\min\{12, 15\} = 12$

Συνεχίζοντας έτσι συμπληρώνουμε τον υπόλοιπο πίνακα. Ελέγχουμε αν είναι optimal η λύση μας.

$u_1 = 0$, $u_1 + v_1 = 20 \Rightarrow v_1 = 20$

$u_1 + v_2 = 16 \Rightarrow v_2 = 16$

$u_2 + v_1 = 15 \Rightarrow u_2 = -5$

$u_2 + v_3 = 12 \Rightarrow v_3 = 12 + 5 = 17$

$u_3 + v_1 = 18 \Rightarrow u_3 = -2$

$w_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 17 - 24 < 0$

$w_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -5 + 16 - 18 < 0$

$w_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 17 - 16 < 0$

Άρα η λύση είναι η optimal

Έχουμε

$$z = 20 + 9 \cdot 16 + 3 \cdot 15 + 12 \cdot 12 + 2 \cdot 18 = 389$$

Ενώ για το (α) έχουμε

$$z_A = 20 + 9 \cdot 16 + 5 \cdot 15 + 10 \cdot 12 = 359$$

Άρα όχι η λύση του (α) δεν παραμένει βέλτιστη