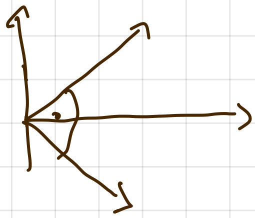
Предавање 8

09.12.2022

Дводимензионални сигнали во опсег - фазна модулација



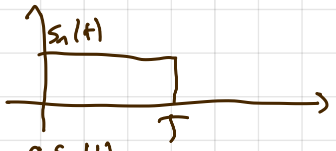
$u_m(t) = s_m(t)\cos 2\pi f_0 t$

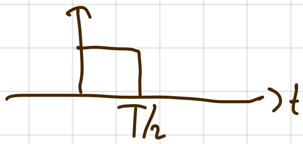
$s_m(t)$ се ортогонални во основен опсег

$m = 1, \dots, M$

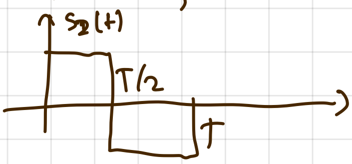
$\int_0^T s_m(t)\, s_n(t)\, dt = 0 \qquad m \neq n$

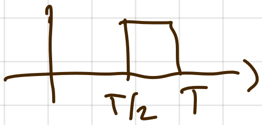
$\Rightarrow \int_0^T u_m(t)\, u_n(t)\, dt = 0$





$\int_0^T \underbrace{s_m(t) s_n(t)}_{\text{споро растечки}} \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt = 0$





$\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(4\pi f_0 t)\right]$

Фазна модулација

- Информацијата е во фазата на сигналот

$u_m(t) = g_T(t)\cos\left[2\pi f_0 t + \frac{2\pi(m-1)}{M}\right] \qquad m = 1, \dots, M$

зависи од m (од информацијата)

$m = 1$ фаза 0

$\vdots$

$m = M$ фаза $\frac{2\pi}{M}(M-1)$

$k = \log_2 M$

пр. $M = 8$, $k = 3$

$0, \frac{2\pi}{M}, \frac{4\pi}{M}, \dots, \frac{2\pi}{M}(M-1)$

Phase Shift Keying

$g_T(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \qquad 0 \le t \le T$

$u_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left[2\pi f_0 t + \frac{2\pi}{M}(m-1)\right] \qquad m = 1, \dots, M$

$\int_0^T u_m^2(t)\, dt = \frac{2E_s}{T}\int_0^T \cos^2\left[2\pi f_0 t + \frac{2\pi}{M}(m-1)\right] dt = E_s$

$E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_m = E_s$

$E_{av} = E_s$

$$u_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \left[\cos \frac{2\pi}{M}(m-1) \cos 2\pi f_0 t - \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \sin 2\pi f_0 t\right]$$

$$A_{mc} = \cos\left[\frac{2\pi}{M}(m-1)\right]$$

$$A_{ms} = \sin\left[\frac{2\pi}{M}(m-1)\right]$$

$g_T(t)$ е во базис ф-јата

Во општ случај:

$$u_m(t) = g_T(t) \cos 2\pi f_0 t \cdot A_{mc} - g_T(t) \sin 2\pi f_0 t \cdot A_{ms}$$

базис:

$$\varphi_1(t) = \frac{g_T(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t}{\sqrt{E_{g\cos}}}$$

PAM во опсег $E_{g\cos} = \frac{E_g}{2}$

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g_T(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\varphi_2(t) = -\frac{g_T(t) \sin(2\pi f_0 t)}{\sqrt{E_{g\sin}}}$$

$$E_{g\sin} = \int_0^T g_T^2(t) \sin^2(2\pi f_0 t)\, dt = \frac{E_g}{2}$$

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g_T(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\int_0^T \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)\, dt = 0$$

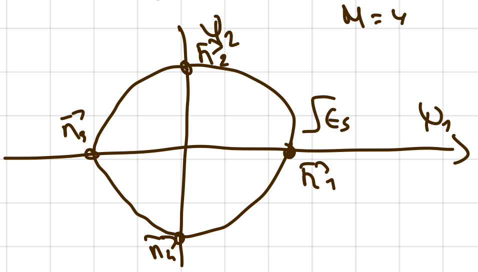
$\sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$$\frac{2}{E_g} \int_0^T g_T^2(t) \sin 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 t\, dt = 0$$ - ортогонални

$$u_m(t) = A_{mc}\sqrt{\frac{E_g}{2}}\, \varphi_1(t) + A_{ms}\sqrt{\frac{E_g}{2}}\, \varphi_2(t)$$

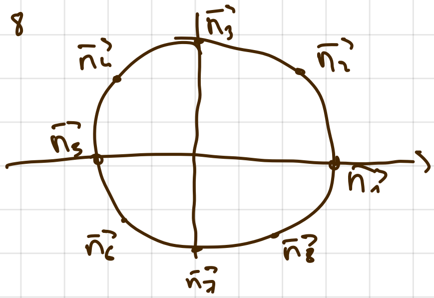
- дводимензионални сигнали $N=2$
- Сигналните точки се: $\vec{M_m} = \left(A_{mc}\sqrt{\frac{E_g}{2}}, A_{ms}\sqrt{\frac{E_g}{2}}\right)$, лежат на кружница со радиус $\sqrt{E_s}$

$M=4$ $\quad 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

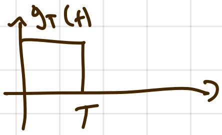


Енергијата се добива како радиусот на квадрат

$M=8$



BPSK - Binary PSK



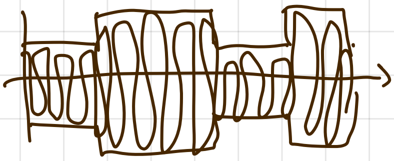
$M=2$

фазите се 0 и π

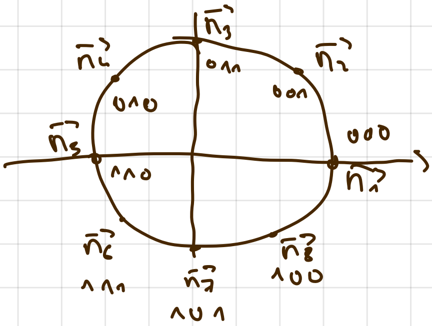
на "0" → фаза 0

на "1" → фаза π

$M=4$ M-арна PAM во општ



скокови во амплитудите



— Gray-ово кодирање на битите кои се мапираат во сигнали

секои два соседни се разликуваат за еден бит

Квадратурна амплитудска модулација - QAM
Quadrature Amplitude Modulation

· Дводимензионална модулација

$$u_m(t) = A_{mc}\, g_T(t)\cos(2\pi f_0 t) + A_{ms}\, g_T(t)\sin(2\pi f_0 t)$$ информација

$$\varphi_1(t) = \frac{g_T(t)\cos(2\pi f_0 t)}{\sqrt{E_{g\cos}}} = \sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g_T(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

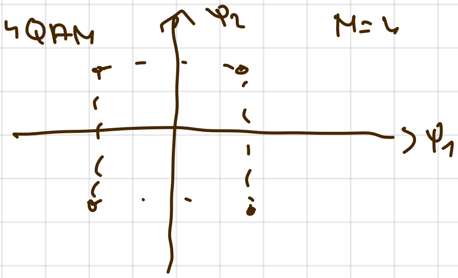
$E_g/2$

$$\varphi_2(t) = \frac{g_T(t)\sin(2\pi f_0 t)}{\sqrt{E_{g\sin}}} = \sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g_T(t)\sin 2\pi f_0 t$$

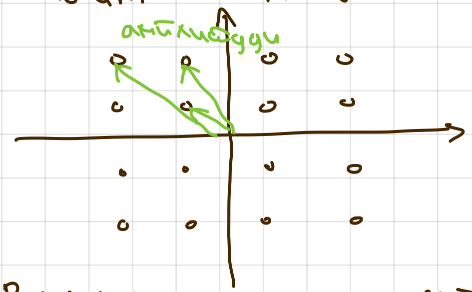
$$u_m(t) = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\, A_{mc}\,\varphi_1(t) + \sqrt{\frac{E_g}{2}}\, A_{ms}\,\varphi_2(t)$$

$$\vec{u_m} = \left(\sqrt{\frac{E_g}{2}}\, A_{mc},\ \sqrt{\frac{E_g}{2}}\, A_{ms}\right)$$

4QAM $\quad M=4$



16 QAM $\quad M = 16$



$g_T(t) \to E_g$

$k = 4$

· Различни амплитуди на сигналите

· сигналите кои се блиску да се разл. за што помалку бити

· За разлика од фазна модулација, рамнината е подобро покриена (средната енергија е помала во споредба со фазна модулација)

$\vec{r} = \vec{s_m} + \vec{n} \leftarrow$ шумот

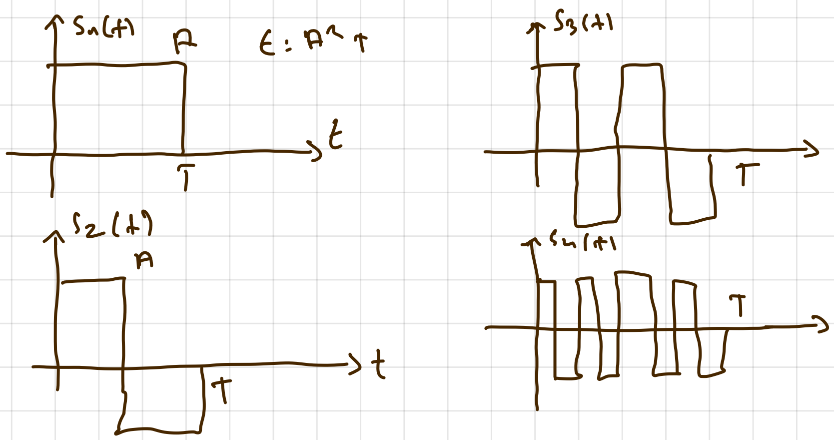
$\min \|\vec{r} - \vec{s_m}\|$ - Minimum Distance $\quad$ MAP, ML, MD

$E_m = \|\vec{u_m}\|^2 \qquad \vec{u_m} = (u_{m1}, u_{m2}) \qquad E_{av} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} E_m$

Повеќе димензионални модулации $\quad N=M$

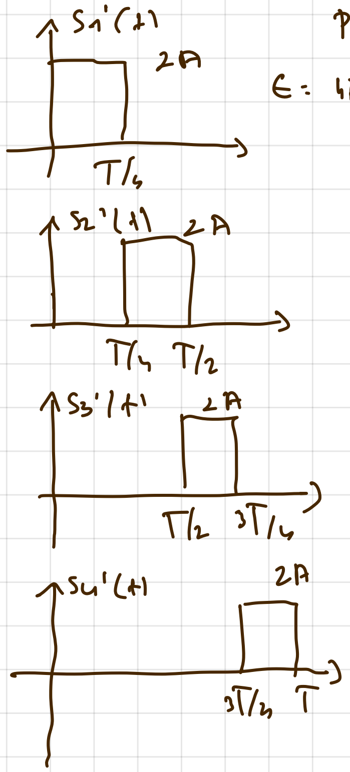
1. Во основен опсег

$E = A^2 T$



PPM - Pulse Position Modulation

$$\mathcal{E} = \frac{4A^2T}{4} = A^2T$$



$M=4 \qquad k=2$

$$\int_0^T s_m(t)\, s_n(t)\, dt = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_0^T s_m'(t)\, s_n'(t)\, dt = 0 \qquad m \neq n$$

$N=4$

$$\varphi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_i}} \qquad , i = 1, \dots, M$$

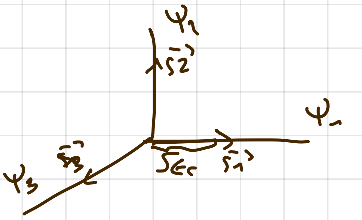
$$\int_0^T \varphi_i^2(t)\, dt = 1 \qquad \text{ортогонален базис}$$

$$s_m(t) = \sqrt{\mathcal{E}_m}\, \varphi_{m s_1}(t) \qquad , m = 1, \dots, M$$

$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_s$

$\vec{s_1} = (\sqrt{\mathcal{E}_s}, 0, 0, 0)$
$\vec{s_2} = (0, \sqrt{\mathcal{E}_s}, 0, 0)$
$\vec{s_3} = (0, 0, \sqrt{\mathcal{E}_s}, 0)$
$\vec{s_4} = (0, 0, 0, \sqrt{\mathcal{E}_s})$

$M-1$ нули $\qquad N = M$
$1 \leq N \leq M$



$$\mathcal{E}_{av} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_s$$

Фреквенциска модулација

- Може да се добијат повеќе димензионални сигнали во опсег од повеќе дим. во основен опсег со множење со $\cos(2\pi f_0 t)$

$$u_m(t)=s_m(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$$

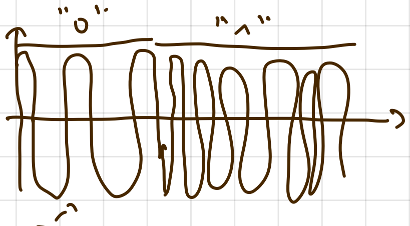
FSK - Frequency Shift Keying

Бинарни $(M=2)$

$$u_1(t)=\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos(2\pi f_1 t)$$

$$u_2(t)=\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos(2\pi f_2 t)$$

BFSK информ. во фрекв.



помала фрекв.

M-арна FSK M фрекв. $N=M$

$$u_m(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos\left[2\pi f_0 t+2\pi(m-1)\Delta f t\right]\quad 0\le t\le T$$

$m=1,\dots,M$

$T=kT_b \qquad k=\log_2 M$

$$\cos\left\{2\pi\left[\underbrace{f_0+(m-1)\Delta f}_{\text{фрекв.}}\right]t\right\}$$

$$u_m(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos\left[2\pi f_0 t+2\pi(m-1)\Delta f t\right]=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos\left[2\pi\left[f_0+(m-1)\Delta f\right]t\right]\quad m=1,\dots,M$$

Треба да постигнеме сигналите да се ортогонални

$$\int_0^T u_m(t)\,u_n(t)\,dt=0\qquad m\neq n$$

Δf треба да се избере од овој услов

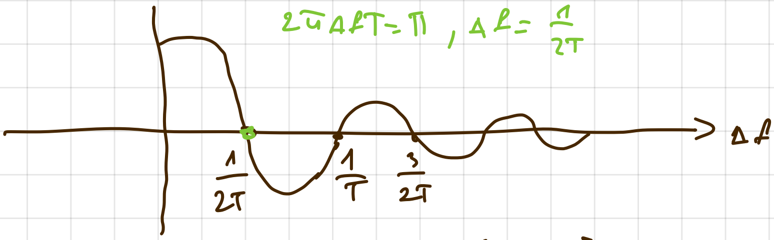
$$\frac{2E_s}{T}\int_0^T\cos\left\{2\pi\left[f_0+(m-1)\Delta f\right]t\right\}\cdot\cos\left\{2\pi\left[f_0+(n-1)\Delta f\right]t\right\}dt=$$

$$=\frac{2E_s}{T}\frac{1}{2}\int_0^T\cos\left[2\pi(m-n)\Delta f t\right]dt=\frac{E_s}{T}\,\frac{\sin\left[2\pi(m-n)\Delta f t\right]\Big|_0^T}{2\pi(m-n)\Delta f}=$$

$$=E_s\,\frac{\sin\left[2\pi(m-n)\Delta f T\right]}{2\pi(m-n)\Delta f T}$$

$$\frac{\sin x}{x}$$

$$E_s \frac{\sin 2\pi \Delta f T}{2\pi \Delta f T}$$



ја земаме најмалата

MSK - Minimum Shift Keying

Базис ф-ции:

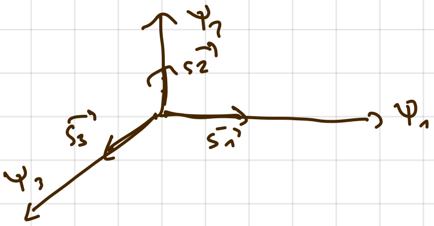
$$\varphi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\sqrt{E_s}}, \quad i = 1, \dots, M$$

$$s_m(t) = \sqrt{E_s}\, \varphi_m(t)$$

$$\vec{s_m} = (0, \dots, 0, \underbrace{\sqrt{E_s}}_{m}, 0, \dots, 0)$$

$E_{av} = E_s$

$M = N = 3$

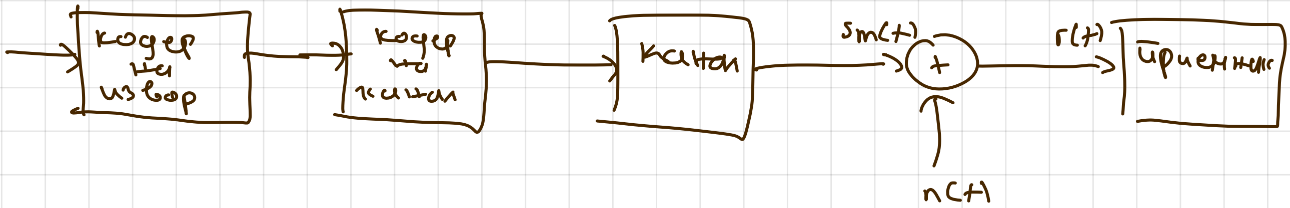


$B = M \Delta f = M \frac{1}{2T}$

↑ опсегот

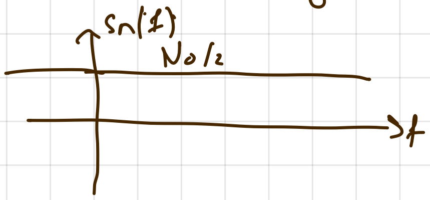
$M \uparrow$ $E_{av} \uparrow$ B е исто

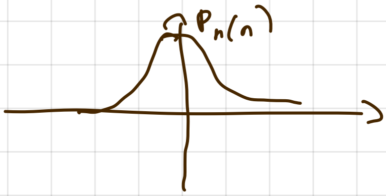
Глава 6: Оптимален приемник и детектор за диг. мод. сигнали



декодер на канал - демодулатор и детектор

n(t) - Адитивен бел Гаусов шум





$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ $\quad$ $S_n(f) = \mathcal{F}\{R_n(\tau)\}$

Корелациски приемник

$\vec{s_m} = (s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN})$ $\quad m = 1, \dots, M$

N димензии

Шум:

$n(t) = \sum_{i=1}^{N} n_i \psi_i(t)$ $\quad$ n(t) е во бесконечно димензионален простор

$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots n_N)$ - во теорија само

$\boxed{n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \psi_i(t)}$

$r(t) = s_m(t) + n(t)$

$r(t) = \sum_{i=1}^{N} (s_{mi} + n_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{N} r_i \psi_i(t)$

$\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$

$s_1, \dots, s_M$

Приемникот одлучува кое $s_m(t)$ е испратено

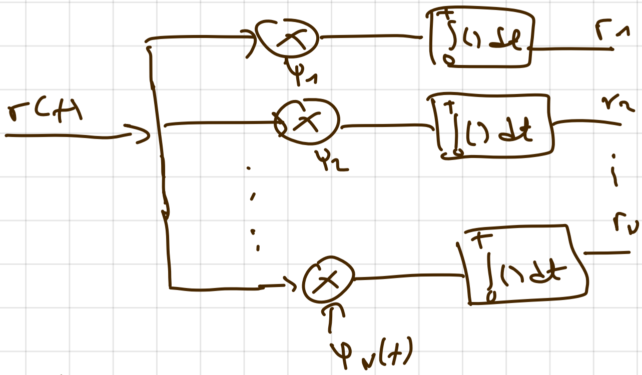
нема шум

$r(t) = s_m(t)$

сега има шум

$r(t) = s_m(t) + n(t)$

Како да го добиеме $\vec{r}$?



$\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$

i-та гранка

$\int_0^T r(t)\,\psi_i(t)\,dt =$

$= \int_0^T [s_m(t) + n(t)]\,\psi_i(t)\,dt =$

$= s_{mi} + n_i \to r_i$

$n_i = \int_0^T n(t)\,\varphi_i(t)\,dt$ случаен процес на шумот

n_i – случајни променливи – Гаусова со ср. вр. нула и варијанса $\frac{N_0}{2}$

$$E[n_i] = E\int_0^T n(t)\,\psi_i(t)\,dt = \int_0^T E[n(t)]\,\psi_i(t)\,dt = 0$$

$$\sigma_n^2 = E[n_i^2] - \{E[n_i]\}^2$$

$$E[n_i n_j] = E\left[\int_0^T n(t)\,\psi_i(t)\,dt \int_0^T n(\tau)\,\psi_j(\tau)\,d\tau\right] =$$

$$= \int_0^T \cdots \int_0^T E[n(t)\,n(\tau)]\,\psi_i(t)\,\psi_j(\tau)\,dt\,d\tau$$

$$\int_0^T \frac{N_0}{2}\,\psi_i(t)\,\psi_j(t)\,dt$$

$$\int f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0)$$

$$\begin{cases} \frac{N_0}{2} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$i = j$ $E[n_i^2] = \frac{N_0}{2}$

$i \neq j$ $E[n_i n_j] = 0$

некорелирани и независни

$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots n_N)$

$p(n_1, \dots, n_N) = p(n_1)\,p(n_2) \dots p(n_N)$ здружени веројатности