

# БДЗ по прикладной криптографии

Фирсов Георгий, М21-507

8 мая 2022 г.

## Содержание

Задание 1 . . . . .	2
Задание 2 . . . . .	2
Задание 3 . . . . .	3
Задание 4 . . . . .	3
Задание 5 . . . . .	3
Задание 6 . . . . .	4
Задание 7 . . . . .	5
Задание 8 . . . . .	5
Задание 9 . . . . .	5
Задание 10 . . . . .	6
Задание 11 . . . . .	7
Задание 12 . . . . .	7

## Задание 1

Анна генерирует два числа  $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_1, y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ , после чего отправляет Борису тройку  $(A_0, A_1, A_2) = (g^x, g^y, g^{xy+a})$ .

Борис генерирует свои два числа  $r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q, s \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ , а затем отправляет Анне следующую пару:  $(B_1, B_2) = (A_1^r \cdot g^s, (A_2/g^b)^r \cdot A_0^s)$ . Заметим, что:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1^r \cdot g^s = g^y \cdot g^s = g^{y+s} \\ B_2 &= (A_2/g^b)^r \cdot A_0^s = g^{xy+a} \cdot g^{-b} \cdot g^{xs} = g^{x(y+s)+a-b} \end{aligned}$$

Если  $B_1$  возвести в степень  $x$  и затем умножить на обратный к полученному элемент число  $B_2$ , то получится  $g^{a-b}$ :

$$\begin{aligned} B_1^x &= (g^{y+s})^x = g^{x(y+s)} \\ B_2 \cdot (B_1^x)^{-1} &= g^{x(y+s)+a-b} \cdot g^{-x(y+s)} = g^{a-b} \end{aligned}$$

Если  $a = b$ , то  $g^{a-b} = g^0 = e_{\mathbb{G}}$ . Это свойство и можно использовать для проверки равенства чисел  $a$  и  $b$ .

**Ответ:** в) Анна проверяет равенство  $B_2/B_1^x = 1$ .

## Задание 2

Так как числа  $p, a, b$  общеизвестны, то считаю, что при разработке программы все *возможные* вычисления с данными параметрами выполняются заранее (то есть, собственно, на этапе разработки программы). Несложно увидеть, что:

$$\begin{aligned} H^{(n)}(x) &= \underbrace{H_{p,a,b}(H_{p,a,b}(\cdots H_{p,a,b}(x) \cdots))}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a(a(\cdots ax + b \cdots) + b)}_{n \text{ раз}} = \\ &= a^n x + b \sum_{j=0}^{n-1} a^j \pmod p \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} a' &:= a^n \pmod p \\ b' &:= b \sum_{j=0}^{n-1} a^j \pmod p \end{aligned}$$

Тогда:

$$H^{(n)}(x) = a'x + b' \pmod p$$

Значения  $a'$  и  $b'$  возможно вычислить предварительно на этапе разработки программы, что позволит вычислять функцию  $H^{(n)}$  так же быстро, как и  $H_{p,a,b}$ .

Но может случиться так, что числа  $p, a, b$  *заранее* не известны (например, меняются с течением времени). Таким образом, возникает потребность поддержки вычисления  $a', b'$  на лету. В таком случае заметим, что:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j = (a^n - 1) \cdot (a - 1)^{-1} \pmod p$$

При больших  $n$  возведение в степень  $n - 1$  потребует примерно столько же операций, сколько и возведение в степень  $n$ . Заметим, что возведение в степень можно производить, пользуясь следующей идеей:  $a^4 = a^2 \cdot a^2, a^8 = a^4 \cdot a^4$  и т.д. Данный алгоритм требует асимптотически  $\log_2(n)$  умножений.

**Ответ:** а)  $H^{(n)}$  может быть вычислена так же быстро, как  $H_{p,a,b}$  (в случае известных заранее значений  $p, a, b$ ); г) вычисление  $H^{(n)}$  требует времени  $O(\log n)$  (в случае неизвестных заранее значений  $p, a, b$ ).

### Задание 3

Рассмотрим по очереди все варианты, отобрав подходящие:

- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k'_1), p_3 = (k'_2)$ : владельцы долей  $p_2, p_3$  не смогут вдвоем восстановить ключ, так как  $k'_1 \oplus k'_2 = ???$ .
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_2, k'_2), p_3 = (k'_2)$ : владелец  $p_2$  может один восстановить ключ, так как  $k = k_2 \oplus k'_2$ .
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_1, k_2), p_3 = (k'_2)$ : владельцы  $p_1, p_2$  не смогут восстановить вдвоем ключ, так как никакая комбинация  $k_1, k_2$  в сумме не даст  $k$ .
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k'_1, k'_2), p_3 = (k'_2)$ : владельцы  $p_2, p_3$  не смогут восстановить вдвоем ключ, так как никакая комбинация  $k'_1, k'_2$  в сумме не даст  $k$ .
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k'_2), p_3 = (k'_1, k_2)$ : данный вариант подходит, так как:
  - $p_1, p_2$ :  $k_2 \oplus k'_2 = k$
  - $p_1, p_3$ :  $k_1 \oplus k'_1 = k$
  - $p_2, p_3$ :  $k'_2 \oplus k_2 = k$

При этом восстановление ключа ни одним участником единолично невозможно, так как ни один из них не обладает двумя частями с одинаковыми индексами.

**Ответ:** д)  $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k'_2), p_3 = (k'_1, k_2)$

### Задание 4

### Задание 5

1. Так как каждому участнику  $B_i, i \in \{1, \dots, n\}$  известен ключ  $k$ , то, например,  $B_2$  может создать некоторое сообщение и рассчитать имитовставку для него с использованием этого ключа. В таком случае участник  $B_1$ , получив сообщение, не может удостовериться, что оно создано участником  $A$ , а не  $B_2$ .
2. При условии, что участники  $B_i, i \in \{1, \dots, n\}$  не вступают друг с другом в сговор, атака из п. 1 становится неприменимой, если:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j \implies S_i \setminus S_j \neq \emptyset \quad (1)$$

Данное условие позволяет каждому участнику  $B_i$  иметь хотя бы один такой ключ  $k_m$ , которого нет у некоторого другого участника  $B_j, j \neq i$ . Такой ключ найдется у каждого  $B_i$  для каждого  $B_j$ . Таким образом, вероятность того, что подделанная имитовставка для данного ключа окажется верной, является пренебрежимо малой при условии, что метод расчета имитовставки является стойким.

В то же время участник  $A$  имеет все ключи и может рассчитать все имитовставки корректно.

Таблица 1: Состав подмножеств  $S_j, j \in \{1, \dots, 10\}$

Подмножество	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
$S_1$	+	+	+	—	—
$S_2$	+	+	—	+	—
$S_3$	+	+	—	—	+
$S_4$	+	—	+	+	—
$S_5$	+	—	—	+	+
$S_6$	+	—	+	—	+
$S_7$	—	+	+	+	—
$S_8$	—	+	+	—	+
$S_9$	—	+	—	+	+
$S_{10}$	—	—	+	+	+

3. В таблице 1 с помощью знака + обозначено вхождение ключа  $k_j, j \in \{1, \dots, 5\}$  в подмножество  $S_i, i \in \{1, \dots, 10\}$ , а знак — обозначает отсутствие ключа в подмножестве. Несложно заметить, что любые попарные разности являются непустыми, так как все подмножества имеют одинаковую мощность, равную трем, и попарно различны. Таким образом, условие (1) выполнено, что обозначает неприменимость атаки из п. 1 к данной системе (см. п. 2).
4. Пусть в сговор вступают, например,  $B_1$  и  $B_9$ . Заметим, что эти два участника вместе имеют в наличии все ключи  $k_1, \dots, k_5$ . Если они обмениваются недостающими ключами, то каждый из них может в таком случае рассчитать имитовставку для произвольного сообщения на каждом ключе и тем самым какой-либо другой участник не может быть уверен в том, что сообщение пришло от  $A$ , а не от  $B_1$  или  $B_9$ .

## Задание 6

Анне и Борису известны следующие величины:

- $v$
- $u = g^\alpha v^{-i}$
- Набор  $u_j = uv^j = g^\alpha v^{j-i}, j \in \{1, \dots, n\}$

Только Борису известны  $\alpha$  и индекс  $i$ . Заметим, что для  $j = i$ :  $u_i = g^\alpha$ .

Анна пересылает Борису следующие значения:

$$(a_j, b_j) = (g^{k_j}, m_j u_j^{k_j}), k_j \xleftarrow{R} \{1, 2, \dots, q-1\}$$

1. *Восстановление сообщения  $m_i$  из полученных данных.* Борис может расшифровать значение  $m_i$  (так как  $\alpha$  — закрытый ключ криптосистемы Эль-Гамала, соответствующий открытому ключу  $u_i$ ):

$$b_i a_i^{-\alpha} = m_i g^{\alpha k_i} g^{-k_i \alpha} = m_i$$

2. *Невозможность получения индекса  $i$  Анной.* Попробовать получить значение  $i$  Анна может из значений  $u = g^\alpha v^{-i}$  и  $u_j = g^\alpha v^{j-i}$ . Так как  $v \in \mathbb{G}$ , то  $v = g^k$  для некоторого  $k$ .  $u = g^{\alpha - ki}, u_j = g^{\alpha + k(j-i)}$ .

Заметим, что Анне неизвестны значения  $\alpha, g^\alpha$ . Отличить  $u_i = g^\alpha$  (даже если бы он был известен) от какого-то иного элемента группы вычислительно сложно, то есть перебирая  $j$  невозможно понять, когда  $u_j$  сравнивается с  $g^\alpha$  (то есть при  $j = i$ ).

Получить же  $i$  из значения  $u$  также вычислительно трудно, так как это предполагает нахождение дискретного логарифма (по  $u = g^{\alpha - ki}$  найти  $\alpha - ki$  трудно).

## Задание 7

## Задание 8

## Задание 9

Так как  $\text{ord } \mathbb{G} = q$  – простое число, то все элементы группы, не равные  $e_{\mathbb{G}}$ , являются образующими. Это значит, что взяв случайный неединичный элемент группы, гарантированно можно получить образующий.

1. Общеизвестными параметрами схемы мультикоммитмента являются: простое число  $q$ , группа  $\mathbb{G}$  порядка  $q$ , а также случайные  $(h, g_1, \dots, g_n)$ , для которых выполнено:

$$\begin{aligned} h &\in \mathbb{G}, h \neq e_{\mathbb{G}} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : g_i &\in \mathbb{G}, g_i \neq e_{\mathbb{G}} \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : g_i &\neq h; i \neq j \implies g_i \neq g_j \end{aligned}$$

Пусть  $r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ . Функция  $\text{Commit}_n$  выглядит следующим образом:

$$\text{Commit}_n(\mathbf{m}, r) = h^r \prod_{j=1}^n g_j^{m_j}, \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \quad (2)$$

Несложно показать свойство гомоморфизма:

$$\begin{aligned} \text{Commit}_n(\mathbf{m} + \mathbf{m}', r + r') &= h^{r+r'} \prod_{j=1}^n g_j^{m_j+m'_j} = h^r h^{r'} \left( \prod_{j=1}^n g_j^{m_j} \right) \left( \prod_{j=1}^n g_j^{m'_j} \right) = \\ &= \left( h^r \prod_{j=1}^n g_j^{m_j} \right) \left( h^{r'} \prod_{j=1}^n g_j^{m'_j} \right) = \text{Commit}_n(\mathbf{m}, r) + \text{Commit}_n(\mathbf{m}', r') \end{aligned}$$

2. Покажем, что схема, описанная в п. 1 обеспечивает совершенное сокрытие. Для этого следует показать, что для любых векторов  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$  и  $\mathbf{m}' = (m'_1, \dots, m'_n)$  равны распределения следующих случайных величин:

$$\begin{aligned} C &= \text{Commit}_n(\mathbf{m}, r), r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q \\ C' &= \text{Commit}_n(\mathbf{m}', r'), r' \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q \end{aligned}$$

где  $\text{Commit}_n$  определена согласно (2).

Обозначим через  $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}$  такие числа, что  $g_i^{\alpha_i} = h$  (такое число всегда найдется, так как  $g_i$  – образующий элемент группы  $\mathbb{G}$ ). Положим также:

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j m_j, \alpha' = \sum_{j=1}^n \alpha_j m'_j$$

Пусть  $r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ , тогда  $c = \text{Commit}_n(\mathbf{m}, r) = h^{r+\alpha}$  и  $c' = \text{Commit}_n(\mathbf{m}', r) = h^{r+\alpha'}$  ( $c$  – розыгрыш случайной величины  $C$ ,  $c'$  – величины  $C'$ ).

Из вычислительной сложности задачи дискретного логарифмирования следует, что  $c$  и  $c'$  отличить друг от друга так же вычислительно сложно, из чего, в свою очередь, следует равенство распределений случайных величин  $C$  и  $C'$ .

3. В п. 1 утверждалось, что  $h, g_i, i \in \{1, \dots, n\}$  – случайные неединичные элементы группы  $\mathbb{G}$ . Также в примечании перед п. 1 утверждается, что любой неединичный элемент из  $\mathbb{G}$  является образующим. Упомянутые элементы группы можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} h &= H(i_1) \\ g_j &= H(i_{j+1}), j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (3)$$

где  $H : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{G}$  – случайный оракул, а последовательность  $\{i_j\}_{j=1}^{n+1}$  составляется следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1 &= k_0 \\ i_{j+1} &= i_j + k_j \end{aligned}$$

где  $k_0$  – минимальное положительное число, при котором  $H(k_0) \neq e_{\mathbb{G}}$ ,  $k_j$  – минимальное положительное число, при котором  $H(i_j + k_j) \neq e_{\mathbb{G}}$ .

Таким образом, элементы, сгенерированные по формулам в (3) являются случайными образующими элементами группы  $\mathbb{G}$ , вероятность совпадений среди которых мала. Т.е. они удовлетворяют требованиям из п. 1.

Свойство сокрытия показано в п. 2. Свойство связывания следует из вычислительной сложности задачи логарифмирования: из этого следует отсутствие эффективного алгоритма для генерации таких  $r, r', \mathbf{m}, \mathbf{m}'$ , что  $\text{Commit}_n(\mathbf{m}, r) = \text{Commit}_n(\mathbf{m}', r')$ .

## Задание 10

1. *Некорректное хэширование.* Так как требуется подделка подписи для любого сообщения, то рассматривается модель стойкости UUF-CMA (Universal Unforgeability under Chosen Message Attack). Рассмотрим противника  $\mathcal{A}$ , действующего по следующему сценарию:

- $\mathcal{A}$  генерирует некоторое сообщение  $m \in \mathcal{M}$  (любое).
- $\mathcal{A}$  вычисляет хэш сообщения:  $c = H(m)$ .
- $\mathcal{A}$  вычисляет значение  $R = h^{-c}$  ( $h = pk$ ), значение  $z$  полагается равным 0.
- Подпись  $\sigma = (R, z) = (pk^{-H(m)}, 0)$  отправляется оракулу проверки подписи.

Заметим, что проверка этой подписи выполнится всегда:

$$\left. \begin{aligned} c &\leftarrow H(m) \\ g^z &= e_{\mathbb{G}} \\ R \cdot h^c &= h^{-H(m)} \cdot h^{H(m)} = h^0 = e_{\mathbb{G}} \end{aligned} \right\} \implies V(pk, m, \sigma) = \text{accept}$$

Таким образом:

$$\text{Adv}_{\text{SS}}^{\text{UUF-CMA}}(\mathcal{A}) = \Pr[V(pk, m, S(sk, m)) = \text{accept}] = 1$$

2. *Некорректная генерация случайных чисел.* Обозначим  $c_i = H(m_i, R_i), i \in \{0, 1\}$  и, зная, что  $\rho_1 = a\rho_0 + b$ , запишем:

$$\begin{cases} z_0 = \rho_0 + c_0\alpha \\ z_1 = a\rho_0 + b + c_1\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} az_0 = a\rho_0 + ac_0\alpha \\ z_1 = a\rho_0 + b + c_1\alpha \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} z_1 - az_0 &= b + \alpha(c_1 - ac_0) \\ \alpha &= (z_1 - az_0 - b)(c_1 - ac_0)^{-1} \end{aligned}$$

В общем-то  $(c_1 - ac_0)$  – некоторый случайный элемент из  $\mathbb{Z}_q$ , а так как  $q$  – простое число, то для обратимости элемента требуется только то, чтобы он был ненулевым. Вероятность того, что элемент  $(c_1 - ac_0)$  обратим, равна:

$$\Pr \left[ \begin{array}{c} \text{Элемент } (c_1 - ac_0) \\ \text{обратим в кольце } \mathbb{Z}_q \end{array} \right] = 1 - \frac{1}{|\mathbb{Z}_q|} = \frac{q-1}{q} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 1$$

3. *Атака по взаимосвязанным ключам.* Пусть  $pk_i = h \cdot g^i = g^\alpha \cdot g^i = g^{\alpha+i}$ , тогда через обозначим  $sk_i = \alpha_i = \alpha + i$  (согласно нотации криптосистемы). Введем также обозначение  $\Delta\alpha_{ij} := j - i$ .

Пусть для некоторого сообщения  $m$  имеется некоторая подпись  $\sigma_i = (R_i, z_i)$ , где  $z_i = \rho_i + c_i\alpha_i$ ,  $c_i = H(m, R_i)$ . Противник генерирует следующую подпись:  $\sigma_j = (R_i, z_j)$ , где  $z_j = \rho_i + c_i\alpha_i + c_i\Delta\alpha_{ij} = \rho_i + c_i\alpha_j$ .

Эта подпись является валидной для того же сообщения и успешно проверяется на ключе  $pk_j$ :

$$\left. \begin{aligned} c &= H(m, R_i) \\ g^{z_j} &= g^{\rho_i + c_i\alpha_j} = g^{\rho_i + c_i(\alpha+j)} \\ R_i \cdot pk_j^c &= g^{\rho_i} \cdot g^{c(\alpha+j)} = g^{\rho_i + c(\alpha+j)} \end{aligned} \right\} \implies V(pk_j, m, \sigma_j) = \text{accept}$$

**Задание 11**

**Задание 12**