БДЗ по прикладной криптографии

Фирсов Георгий, М21-507

8 мая 2022 г.

Содержание

Задание 1

Анна генерирует два числа $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_1, y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$, после чего отсылает Борису тройку $(A_0, A_1, A_2) = (g^x, g^y, g^{xy+a})$.

Борис генерирует свои два числа $r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q, s \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$, а затем отправляет Анне следующую пару: $(B_1, B_2) = (A_1^r \cdot g^s, (A_2/g^b)^r \cdot A_0^s)$. Заметим, что:

$$B_1 = A_1^r \cdot g^s = g^y \cdot g^s = g^{y+s}$$
$$B_2 = (A_2/g^b)^r \cdot A_0^s) = g^{xy+a} \cdot g^{-b} \cdot g^{xs} = g^{x(y+s)+a-b}$$

Если B_1 возвести в степень x и затем умножить на обратный к полученному элемент число B_2, то получится g^{a-b}:

$$B_1^x = \left(g^{y+s}\right)^x = g^{x(y+s)}$$
$$B_2 \cdot (B_1^{-x}) = g^{x(y+s)+a-b} \cdot g^{-x(y+s)} = g^{a-b}$$

Если $a = b$, то $g^{a-b} = g^0 = e_{\mathbb{G}}$. Это свойство и можно использовать для проверки равенства чисел a и b.

Ответ: в) Анна проверяет равенство $B_2/B_1^x = 1$.

Задание 2

Так как числа p, a, b общеизвестны, то считаю, что при разработке программы все *возможные* вычисления с данными параметрами выполняются заранее (то есть, собственно, на этапе разработки программы). Несложно увидеть, что:

$$H^{(n)}(x) = \underbrace{H_{p,a,b}(H_{p,a,b}(\cdots H_{p,a,b}(x)\cdots))}_{\text{n раз}} = \underbrace{a(a(\cdots\ ax+b\ \cdots)+b)+b}_{\text{n раз}} =$$
$$= a^n x + b\sum_{j=0}^{n-1} a^j \mod p$$

Обозначим:

$$a' := a^n \mod p$$
$$b' := b\sum_{j=0}^{n-1} a^j \mod p$$

Тогда:

$$H^{(n)}(x) = a'x + b' \mod p$$

Значения a' и b' возможно вычислить предварительно на этапе разработки программы, что позволит вычислять функцию $H^{(n)}$ так же быстро, как и $H_{p,a,b}$.

Но может случиться так, что числа p, a, b *заранее* не известны (например, меняются с течением времени). Таким образом, возникает потребность поддержки вычисления a', b' на лету. В таком случае заметим, что:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j = (a^{n-1} - 1) \cdot (a-1)^{-1} \mod p$$

При больших n возведение в степень $n-1$ потребует примерно столько же операций, сколько и возведение в степень n. Заметим, что возведение в степень можно производить, пользуясь следующей идеей: $a^4 = a^2 \cdot a^2, a^8 = a^4 \cdot a^4$ и т.д. Данный алгоритм требует асимптотически $\log_2(n)$ умножений.

Ответ: а) $H^{(n)}$ может быть вычислена так же быстро, как $H_{p,a,b}$ (в случае известных заранее значений p, a, b); г) вычисление $H^{(n)}$ требует времени $O(\log n)$ (в случае неизвестных заранее значений p, a, b).

Задание 3

Рассмотрим по очереди все варианты, отобрав подходящие:

- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_1'), p_3 = (k_2')$: владельцы долей p_2, p_3 не смогут вдвоем восстановить ключ, так как $k_1' \oplus k_2' = ???$.
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_2, k_2'), p_3 = (k_2')$: владелец p_2 может один восстановить ключ, так как $k = k_2 \oplus k_2'$.
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_1, k_2), p_3 = (k_2')$: владельцы p_1, p_2 не смогут восстановить вдвоем ключ, так как никакая комбинация k_1, k_2 в сумме не даст k.
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_1', k_2'), p_3 = (k_2')$: владельцы p_2, p_3 не смогут восстановить вдвоем ключ, так как никакая комбинация k_1', k_2' в сумме не даст k.
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_2'), p_3 = (k_1', k_2)$: данный вариант подходит, так как:
  - p_1, p_2: $k_2 \oplus k_2' = k$
  - p_1, p_3: $k_1 \oplus k_1' = k$
  - p_2, p_3: $k_2' \oplus k_2 = k$

  При этом восстановление ключа ни одним участником единолично невозможно, так как ни один из них не обладает двумя частями с одинаковыми индексами.

Ответ: д) $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_2'), p_3 = (k_1', k_2)$

Задание 4

Задание 5

1. Так как каждому участнику $B_i, i \in \{1, ..., n\}$ известен ключ k, то, например, B_2 может создать некоторое сообщение и рассчитать имитовставку для него с использованием этого ключа. В таком случае участник B_1, получив сообщение, не может удостовериться, что оно создано участником A, а не B_2.

2. При условии, что участники $B_i, i \in \{1, ..., n\}$ не вступают друг с другом в сговор, атака из п. 1 становится неприменимой, если:

   $$\forall i, j \in \{1, ..., n\} : i \neq j \implies S_i \setminus S_j \neq \varnothing \tag{1}$$

   Данное условие позволяет каждому участнику B_i иметь хотя бы один такой ключ k_m, которого нет у некоторого другого участника $B_j, j \neq i$. Такой ключ найдется у каждого B_i для каждого B_j. Таким образом, вероятность того, что подделанная имитовставка для данного ключа окажется верной, является пренебрежимо малой при условии, что метод расчета имитовставки является стойким.

   В то же время участник A имеет все ключи и может рассчитать все имитовставки корректно.

Таблица 1: Состав подмножеств $S_j, j \in \{1, ..., 10\}$

Подмножество	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
S_1	+	+	+	−	−
S_2	+	+	−	+	−
S_3	+	+	−	−	+
S_4	+	−	+	+	−
S_5	+	−	−	+	+
S_6	+	−	+	−	+
S_7	−	+	+	+	−
S_8	−	+	+	−	+
S_9	−	+	−	+	+
S_{10}	−	−	+	+	+

3. В таблице 1 с помощью знака + обозначено вхождение ключа $k_j, j \in \{1, ..., 5\}$ в подмножество $S_i, i \in \{1, ..., 10\}$, а знак − обозначает отсутствие ключа в подмножестве.

   Несложно заметить, что любые попарные разности являются непустыми, так как все подмножества имеют одинаковую мощность, равную трем, и попарно различны. Таким образом, условие (1) выполнено, что обозначает неприменимость атаки из п. 1 к данной системе (см. п. 2).

4. Пусть в сговор вступают, например, B_1 и B_9. Заметим, что эти два участника вместе имеют в наличии все ключи $k_1, ..., k_5$. Если они обменяются недостающими ключами, то каждый из них может в таком случае рассчитать имитовставку для произвольного сообщения на каждом ключе и тем самым какой-либо другой участник не может быть уверен в том, что сообщение пришло от A, а не от B_1 или B_9.

Задание 6

Анне и Борису известны следующий величины:

- v
- $u = g^\alpha v^{-i}$
- Набор $u_j = uv^j = g^\alpha v^{j-i}, j \in \{1, ..., n\}$

Только Борису известны α и индекс i. Заметим, что для $j = i$: $u_i = g^\alpha$.
Анна пересылает Борису следующие значения:

$$(a_j, b_j) = \left(g^{k_j}, m_j u_j^{k_j}\right), k_j \xleftarrow{R} \{1, 2, ..., q-1\}$$

1. *Восстановление сообщения m_i из полученных данных.* Борис может расшифровать значение m_i (так как α – закрытый ключ криптосистемы Эль-Гамаля, соответствующий открытому ключу u_i):

$$b_i a_i^{-\alpha} = m_i g^{\alpha k_i} g^{-k_i \alpha} = m_i$$

2. *Невозможность получения индекса i Анной.* Попробовать получить значение i Анна может из значений $u = g^\alpha v^{-i}$ и $u_j = g^\alpha v^{j-i}$. Так как $v \in \mathbb{G}$, то $v = g^k$ для некоторого k. $u = g^{\alpha - ki}, u_j = g^{\alpha + k(j-i)}$.

Заметим, что Анне неизвестны значения α, g^α. Отличить $u_i = g^\alpha$ (даже если бы он был известен) от какого-то иного элемента группы вычислительно сложно, то есть перебирая j невозможно понять, когда u_j сравняется с g^α (то есть при $j = i$).

Получить же i из значения u также вычислительно трудно, так как это предполагает нахождение дискретного логарифма (по $u = g^{\alpha - ki}$ найти $\alpha - ki$ трудно).

Задание 7

Задание 8

Задание 9

Так как $\operatorname{ord} \mathbb{G} = q$ – простое число, то все элементы группы, не равные $e_{\mathbb{G}}$, являются образующими. Это значит, что взяв случайный неединичный элемент группы, гарантированно можно получить образующий.

1. Общеизвестными параметрами схемы мультикоммитмента являются: простое число q, группа $\mathbb{G}$ порядка q, а также случайные $(h, g_1, ..., g_n)$, для которых выполнено:

$$\begin{aligned} & h \in \mathbb{G}, h \neq e_{\mathbb{G}} \\ & \forall i \in \{1, ..., n\} : g_i \in \mathbb{G}, g_i \neq e_{\mathbb{G}} \\ & \forall i, j \in \{1, ..., n\} : g_i \neq h; i \neq j \implies g_i \neq g_j \end{aligned}$$

   Пусть $r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$. Функция $Commit_n$ выглядит следующим образом:

$$Commit_n(\mathbf{m}, r) = h^r \prod_{j=1}^{n} g_j^{m_j}, \mathbf{m} = (m_1, ..., m_n) \tag{2}$$

   Несложно показать свойство гомоморфизма:

$$\begin{aligned} Commit_n(\mathbf{m} + \mathbf{m}', r + r') = h^{r+r'} \prod_{j=1}^{n} g_j^{m_j + m'_j} = h^r h^{r'} \left(\prod_{j=1}^{n} g_j^{m_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{n} g_j^{m'_j} \right) = \\ = \left(h^r \prod_{j=1}^{n} g_j^{m_j} \right) \left(h^{r'} \prod_{j=1}^{n} g_j^{m'_j} \right) = Commit_n(\mathbf{m}, r) + Commit_n(\mathbf{m}', r') \end{aligned}$$

2. Покажем, что схема, описанная в п. 1 обеспечивает совершенное сокрытие. Для этого следует показать, что для любых векторов $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_n)$ и $\mathbf{m}' = (m'_1, ..., m'_n)$ равны распределения следующих случайных величин:

$$\begin{aligned} C = Commit_n(\mathbf{m}, r), r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q \\ C' = Commit_n(\mathbf{m}', r'), r' \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q \end{aligned}$$

   где $Commit_n$ определена согласно (2).

   Обозначим через $\alpha_i, i \in \{1, ..., n\}$ такие числа, что $g_i^{\alpha_i} = h$ (такое число всегда найдется, так как g_i – образующий элеемент группы $\mathbb{G}$). Положим также:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j, \ \alpha' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m'_j$$

   Пусть $r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$, тогда $c = Commit_n(\mathbf{m}, r) = h^{r+\alpha}$ и $c' = Commit_n(\mathbf{m}', r) = h^{r+\alpha'}$ (c – розыгрыш случайной величины C, c' – величины C').

   Из вычислительной сложности задачи дискретного логарифмирования следует, что c и c' отличить друг от друга так же вычислительно сложно, из чего, в свою очередь, следует равенство распределений случайных величин C и C'.

3. В п. 1 утверждалось, что $h, g_i, i \in \{1, ..., n\}$ – случайные неединичные элементы группы $\mathbb{G}$. Также в примечании перед п. 1 утверждается, что любой неединичный элемент из $\mathbb{G}$ является образующим. Упомянутые элементы группа можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} &h = H(i_1) \\ &g_j = H(i_{j+1}), j \in \{1, ..., n\} \end{aligned} \tag{3}$$

где $H : \mathbb{Z}_q \to \mathbb{G}$ – случайный оракул, а последовательность $\{i_j\}_{j=1}^{n+1}$ составляется следующим образом:

$$\begin{aligned} &i_1 = k_0 \\ &i_{j+1} = i_j + k_j \end{aligned}$$

где k_0 – минимальное положительное число, при котором $H(k_0) \neq e_{\mathbb{G}}$, k_j – минимальное положительное число, при котором $H(i_j + k_j) \neq e_{\mathbb{G}}$.

Таким образом, элементы, сгенерированные по формулам в (3) являются случайными образующими элементами группы $\mathbb{G}$, вероятность совпадений среди которых мала. Т.е. они удовлетворяют требованиям из п. 1.

Свойство сокрытия показано в п. 2. Свойство связывания следует из вычислительной сложности задачи логарифмирования: из этого следует отсутствие эффективного алгоритма для генерации таких $r, r', \mathbf{m}, \mathbf{m}'$, что $Commit_n(\mathbf{m}, r) = Commit_n(\mathbf{m}', r')$.

Задание 10

1. *Некорректное хэширование.* Так как требуется подделка подписи для любого сообщения, то рассматривается модель стойкости UUF-CMA (Universal Unforgeability under Chosen Message Attack). Рассмотрим противника $\mathcal{A}$, действующего по следующему сценарию:

   - $\mathcal{A}$ генерирует некоторое сообщение $m \in \mathcal{M}$ (любое).
   - $\mathcal{A}$ вычисляет хэш сообщения: $c = H(m)$.
   - $\mathcal{A}$ вычисляется значение $R = h^{-c}$ $(h = pk)$, значение z полагается равным 0.
   - Подпись $\sigma = (R, z) = (pk^{-H(m)}, 0)$ отправляется оракулу проверки подписи.

   Заметим, что проверка этой подписи выполнится всегда:

$$\left.\begin{aligned} &c \leftarrow H(m) \\ &g^z = e_{\mathbb{G}} \\ &R \cdot h^c = h^{-H(m)} \cdot h^{H(m)} = h^0 = e_{\mathbb{G}} \end{aligned}\right\} \implies V(pk, m, \sigma) = \text{accept}$$

   Таким образом:

$$\mathbf{Adv}_{\text{SS}}^{\text{UUF-CMA}}(\mathcal{A}) = \Pr[V(pk, m, \sigma) = \text{accept}] = 1$$

2. *Некорректная генерация случайных чисел.* Обозначим $c_i = H(m_i, R_i), i \in \{0, 1\}$ и, зная, что $\rho_1 = a\rho_0 + b$, запишем:

$$\begin{cases} z_0 = \rho_0 + c_0\alpha \\ z_1 = a\rho_0 + b + c_1\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} az_0 = a\rho_0 + ac_0\alpha \\ z_1 = a\rho_0 + b + c_1\alpha \end{cases}$$

Тогда:

$$
\begin{aligned}
&z_1 - az_0 = b + \alpha(c_1 - ac_0)\\
&\alpha = (z_1 - az_0 - b)(c_1 - ac_0)^{-1}
\end{aligned}
$$

В общем-то $(c_1 - ac_0)$ – некоторый случайный элемент из $\mathbb{Z}_q$, а так как q – простое число, то для обратимости элемента требуется только то, чтобы он был ненулевым. Вероятность того, что элемент $(c_1 - ac_0)$ обратим, равна:

$$\Pr\left[\begin{array}{c}\text{Элемент } (c_1 - ac_0)\\ \text{обратим в кольце } \mathbb{Z}_q\end{array}\right] = 1 - \frac{1}{|\mathbb{Z}_q|} = \frac{q-1}{q} \xrightarrow[q\to\infty]{} 1$$

3. *Атака по взаимосвязанным ключам.* Пусть $pk_i = h \cdot g^i = g^\alpha \cdot g^i = g^{\alpha+i}$, тогда через обозначим $sk_i = \alpha_i = \alpha + i$ (согласно нотации криптосистемы). Введем также обозначение $\Delta\alpha_{ij} := j - i$.

   Пусть для некоторого сообщения m имеется некоторая подпись $\sigma_i = (R_i, z_i)$, где $z_i = \rho_i + c_i\alpha_i$, $c_i = H(m, R_i)$. Противник генерирует следующую подпись: $\sigma_j = (R_i, z_j)$, где $z_j = \rho_i + c_i\alpha_i + c_i\Delta\alpha_{ij} = \rho_i + c_i\alpha_j$.

   Эта подпись является валидной для того же сообщения и успешно проверяется на ключе pk_j:

$$\left.\begin{aligned}
&c = H(m, R_i)\\
&g^{z_j} = g^{\rho_i + c_i\alpha_j} = g^{\rho_i + c_i(\alpha+j)}\\
&R_i \cdot pk_j^c = g^{\rho_i} \cdot g^{c(\alpha+j)} = g^{\rho_i + c(\alpha+j)}
\end{aligned}\right\} \implies V(pk_j, m, \sigma_j) = \text{accept}$$

Задание 11

Задание 12