# БДЗ по прикладной криптографии

Фирсов Георгий, М21-507

7 мая 2022 г.

## Содержание

## Задание 1

Анна генерирует два числа $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_1, y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$, после чего отсылает Борису тройку $(A_0, A_1, A_2) = (g^x, g^y, g^{xy+a})$.

Борис генерирует свои два числа $r \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q, s \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$, а затем отправляет Анне следующую пару: $(B_1, B_2) = (A_1^r \cdot g^s, (A_2/g^b)^r \cdot A_0^s)$. Заметим, что:

$$B_1 = A_1^r \cdot g^s = g^y \cdot g^s = g^{y+s}$$
$$B_2 = (A_2/g^b)^r \cdot A_0^s) = g^{xy+a} \cdot g^{-b} \cdot g^{xs} = g^{x(y+s)+a-b}$$

Если $B_1$ возвести в степень $x$ и затем умножить на обратный к полученному элемент число $B_2$, то получится $g^{a-b}$:

$$B_1^x = \left(g^{y+s}\right)^x = g^{x(y+s)}$$
$$B_2 \cdot (B_1^{-x}) = g^{x(y+s)+a-b} \cdot g^{-x(y+s)} = g^{a-b}$$

Если $a = b$, то $g^{a-b} = g^0 = e_{\mathbb{G}}$. Это свойство и можно использовать для проверки равенства чисел $a$ и $b$.

**Ответ:** в) Анна проверяет равенство $B_2/B_1^x = 1$.

## Задание 2

Так как числа $p, a, b$ общеизвестны, то считаю, что при разработке программы все *возможные* вычисления с данными параметрами выполняются заранее (то есть, собственно, на этапе разработки программы). Несложно увидеть, что:

$$H^{(n)}(x) = \underbrace{H_{p,a,b}(H_{p,a,b}(\cdots H_{p,a,b}(x)\cdots))}_{\text{n раз}} = \underbrace{a(a(\cdots\ ax+b\ \cdots)+b)+b}_{\text{n раз}} =$$
$$= a^n x + b\sum_{j=0}^{n-1} a^j \mod p$$

Обозначим:

$$a' := a^n \mod p$$
$$b' := b\sum_{j=0}^{n-1} a^j \mod p$$

Тогда:

$$H^{(n)}(x) = a'x + b' \mod p$$

Значения $a'$ и $b'$ возможно вычислить предварительно на этапе разработки программы, что позволит вычислять функцию $H^{(n)}$ так же быстро, как и $H_{p,a,b}$.

Но может случиться так, что числа $p, a, b$ *заранее* не известны (например, меняются с течением времени). Таким образом, возникает потребность поддержки вычисления $a', b'$ на лету. В таком случае заметим, что:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j = (a^{n-1} - 1) \cdot (a-1)^{-1} \mod p$$

При больших $n$ возведение в степень $n-1$ потребует примерно столько же операций, сколько и возведение в степень $n$. Заметим, что возведение в степень можно производить, пользуясь следующей идеей: $a^4 = a^2 \cdot a^2, a^8 = a^4 \cdot a^4$ и т.д. Данный алгоритм требует асимптотически $\log_2(n)$ умножений.

**Ответ:** а) $H^{(n)}$ может быть вычислена так же быстро, как $H_{p,a,b}$ (в случае известных заранее значений $p, a, b$); г) вычисление $H^{(n)}$ требует времени $O(\log n)$ (в случае неизвестных заранее значений $p, a, b$).

## Задание 3

Рассмотрим по очереди все варианты, отобрав подходящие:

- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_1'), p_3 = (k_2')$: владельцы долей $p_2, p_3$ не смогут вдвоем восстановить ключ, так как $k_1' \oplus k_2' = ???$.
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_2, k_2'), p_3 = (k_2')$: владелец $p_2$ может один восстановить ключ, так как $k = k_2 \oplus k_2'$.
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_1, k_2), p_3 = (k_2')$: владельцы $p_1, p_2$ не смогут восстановить вдвоем ключ, так как никакая комбинация $k_1, k_2$ в сумме не даст $k$.
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_1', k_2'), p_3 = (k_2')$: владельцы $p_2, p_3$ не смогут восстановить вдвоем ключ, так как никакая комбинация $k_1', k_2'$ в сумме не даст $k$.
- $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_2'), p_3 = (k_1', k_2)$: данный вариант подходит, так как:
  - $p_1, p_2$: $k_2 \oplus k_2' = k$
  - $p_1, p_3$: $k_1 \oplus k_1' = k$
  - $p_2, p_3$: $k_2' \oplus k_2 = k$

  При этом восстановление ключа ни одним участником единолично невозможно, так как ни один из них не обладает двумя частями с одинаковыми индексами.

**Ответ:** д) $p_1 = (k_1, k_2), p_2 = (k_2'), p_3 = (k_1', k_2)$

## Задание 4

## Задание 5

## Задание 6

Анне и Борису известны следующий величины:

- $v$
- $u = g^{\alpha} v^{-i}$
- Набор $u_j = uv^j = g^{\alpha} v^{j-i}, j \in \{1, ..., n\}$

Только Борису известны $\alpha$ и индекс $i$. Заметим, что для $j = i$: $u_i = g^{\alpha}$.
Анна пересылает Борису следующие значения:

$$(a_j, b_j) = \left(g^{k_j}, m_j u_j^{k_j}\right), k_j \xleftarrow{R} \{1, 2, ..., q-1\}$$

1. *Восстановление сообщения $m_i$ из полученных данных.* Борис может расшифровать значение $m_i$ (так как $\alpha$ – закрытый ключ криптосистемы Эль-Гамаля, соответствующий открытому ключу $u_i$):

$$b_i a_i^{-\alpha} = m_i g^{\alpha k_i} g^{-k_i \alpha} = m_i$$

2. *Невозможность получения индекса $i$ Анной.* Попробовать получить значение $i$ Анна может из значений $u = g^{\alpha}v^{-i}$ и $u_j = g^{\alpha}v^{j-i}$. Так как $v \in \mathbb{G}$, то $v = g^k$ для некоторого $k$. $u = g^{\alpha - ki}, u_j = g^{\alpha + k(j-i)}$.

   Заметим, что Анне неизвестны значения $\alpha, g^{\alpha}$. Отличить $u_i = g^{\alpha}$ (даже если бы он был известен) от какого-то иного элемента группы вычислительно сложно, то есть перебирая $j$ невозможно понять, когда $u_j$ сравняется с $g^{\alpha}$ (то есть при $j = i$).

   Получить же $i$ из значения $u$ также вычислительно трудно, так как это предполагает нахождение дискретного логарифма (по $u = g^{\alpha - ki}$ найти $\alpha - ki$ трудно).

## Задание 7

## Задание 8

## Задание 9

## Задание 10

1. *Некорректное хэширование.* Так как требуется подделка подписи для любого сообщения, то рассматривается модель стойкости UUF-CMA (Universal Unforgeability under Chosen Message Attack). Рассмотрим противника $\mathcal{A}$, действующего по следующему сценарию:

   - $\mathcal{A}$ генерирует некоторое сообщение $m \in \mathcal{M}$ (любое).
   - $\mathcal{A}$ вычисляет хэш сообщения: $c = H(m)$.
   - $\mathcal{A}$ вычисляется значение $R = h^{-c}$ ($h = pk$), значение $z$ полагается равным 0.
   - Подпись $\sigma = (R, z) = (pk^{-H(m)}, 0)$ отправляется оракулу проверки подписи.

   Заметим, что проверка этой подписи выполнится всегда:

$$\left.\begin{array}{l} c \leftarrow H(m) \\ g^z = e_{\mathbb{G}} \\ R \cdot h^c = h^{-H(m)} \cdot h^{H(m)} = h^0 = e_{\mathbb{G}} \end{array}\right\} \implies V(pk, m, \sigma) = \text{accept}$$

   Таким образом:

$$\mathbf{Adv}_{\text{SS}}^{\text{UUF-CMA}}(\mathcal{A}) = \Pr[V(pk, m, S(sk, m)) = \text{accept}] = 1$$

2. *Некорректная генерация случайных чисел.* Обозначим $c_i = H(m_i, R_i), i \in \{0, 1\}$ и, зная, что $\rho_1 = a\rho_0 + b$, запишем:

$$\begin{cases} z_0 = \rho_0 + c_0\alpha \\ z_1 = a\rho_0 + b + c_1\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} az_0 = a\rho_0 + ac_0\alpha \\ z_1 = a\rho_0 + b + c_1\alpha \end{cases}$$

   Тогда:

$$\begin{array}{l} z_1 - az_0 = b + \alpha(c_1 - ac_0) \\ \alpha = (z_1 - az_0 - b)(c_1 - ac_0)^{-1} \end{array}$$

   В общем-то $(c_1 - ac_0)$ – некоторый случайный элемент из $\mathbb{Z}_q$, а так как $q$ – простое число, то для обратимости элемента требуется только то, чтобы он был ненулевым. Вероятность того, что элемент $(c_1 - ac_0)$ обратим, равна:

$$\Pr\left[\begin{array}{c} \text{Элемент } (c_1 - ac_0) \\ \text{обратим в кольце } \mathbb{Z}_q \end{array}\right] = 1 - \frac{1}{|\mathbb{Z}_q|} = \frac{q-1}{q} \xrightarrow[q \to \infty]{} 1$$

3. *Атака по взаимосвязанным ключам.* Пусть $pk_i = h \cdot g^i = g^\alpha \cdot g^i = g^{\alpha+i}$, тогда через обозначим $sk_i = \alpha_i = \alpha + i$ (согласно нотации криптосистемы). Введем также обозначение $\Delta\alpha_{ij} := j - i$.

   Пусть для некоторого сообщения $m$ имеется некоторая подпись $\sigma_i = (R_i, z_i)$, где $z_i = \rho_i + c_i\alpha_i$, $c_i = H(m, R_i)$. Противник генерирует следующую подпись: $\sigma_j = (R_i, z_j)$, где $z_j = \rho_i + c_i\alpha_i + c_i\Delta\alpha_{ij} = \rho_i + c_i\alpha_j$.

   Эта подпись является валидной для того же сообщения и успешно проверяется на ключе $pk_j$:

$$\left.\begin{array}{l} c = H(m, R_i) \\ g^{z_j} = g^{\rho_i + c_i\alpha_j} = g^{\rho_i + c_i(\alpha+j)} \\ R_i \cdot pk_j^c = g^{\rho_i} \cdot g^{c(\alpha+j)} = g^{\rho_i + c(\alpha+j)} \end{array}\right\} \implies V(pk_j, m, \sigma_j) = \text{accept}$$

## Задание 11
## Задание 12