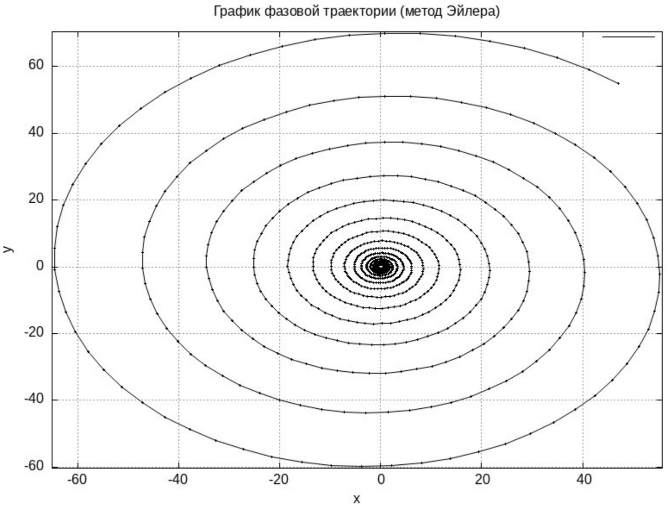
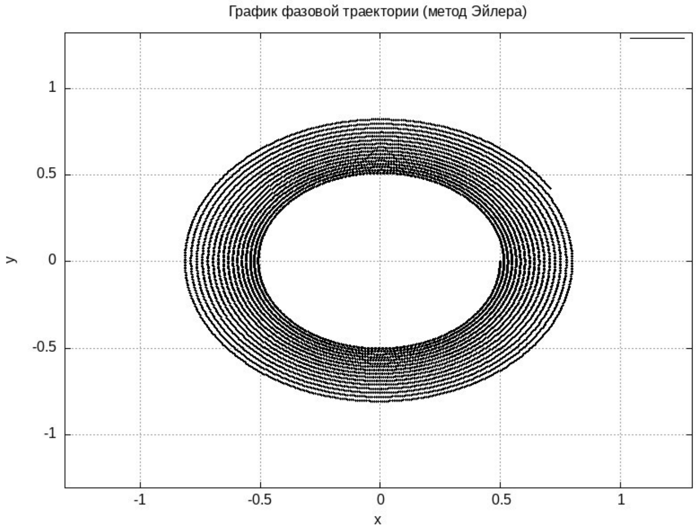
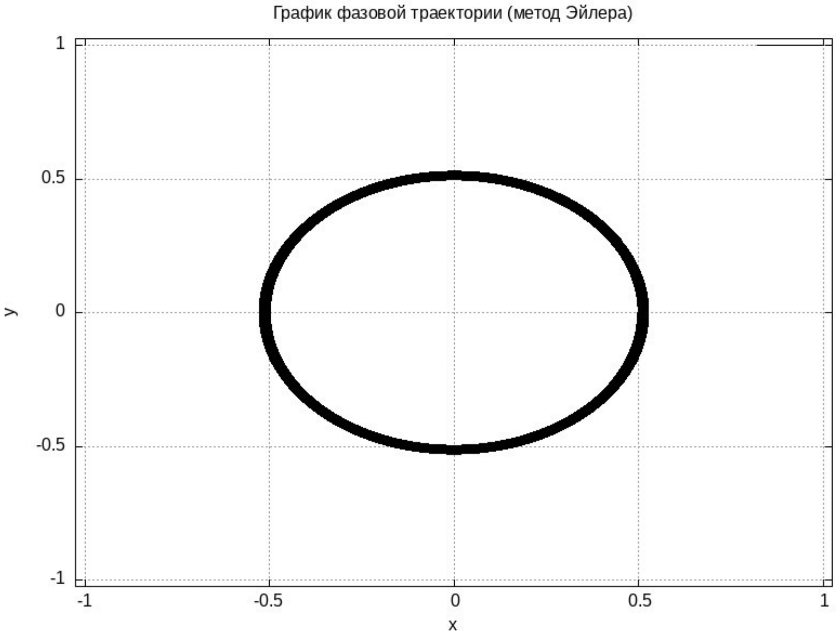
Исследование точностей методов численного интегрирования осциллятора Ван дер Поля

Метод Эйлера

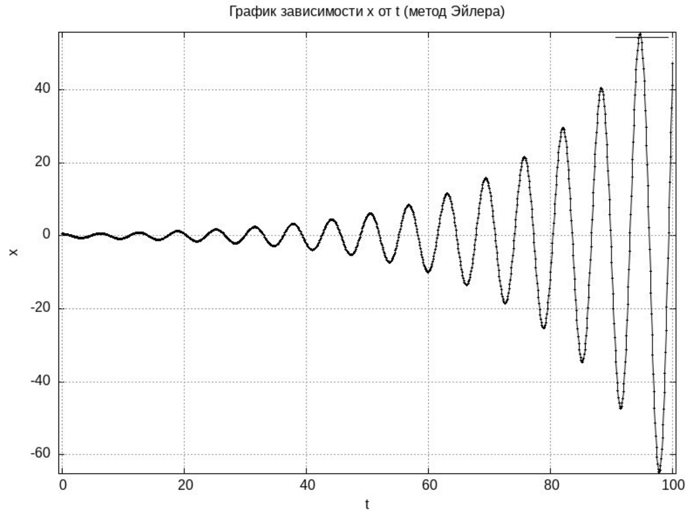
Данный метод является простейшим явным методом и наименеее точным из всех рассмотренных методов, порядок метода – 1, глобальная ошибка – O(h). Построим графики фазовый траекторий и графики зависимости x от t при различных h (0.1, 0.01 и 0.001) μ = 0 и μ = 2. При μ = 0 получаем:

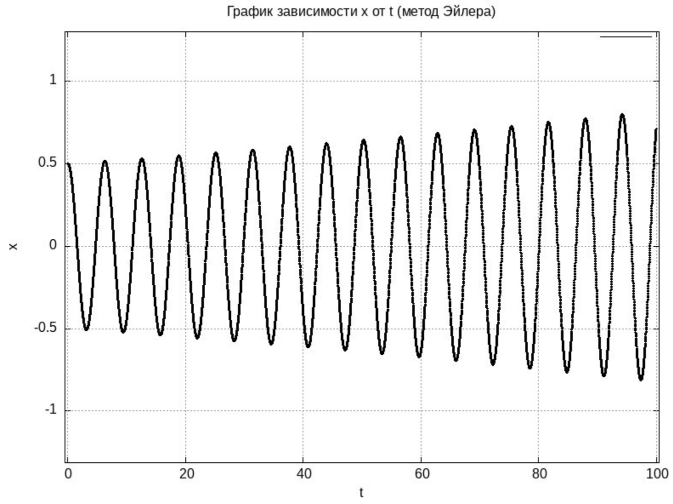






При большом значении h (0.1 и 0.01) график фазовой траектории при μ = 0 совсем не похож на эллипс, при h = 0.001 график можно назвать эллипсом, но он имеет очень толстые линии.





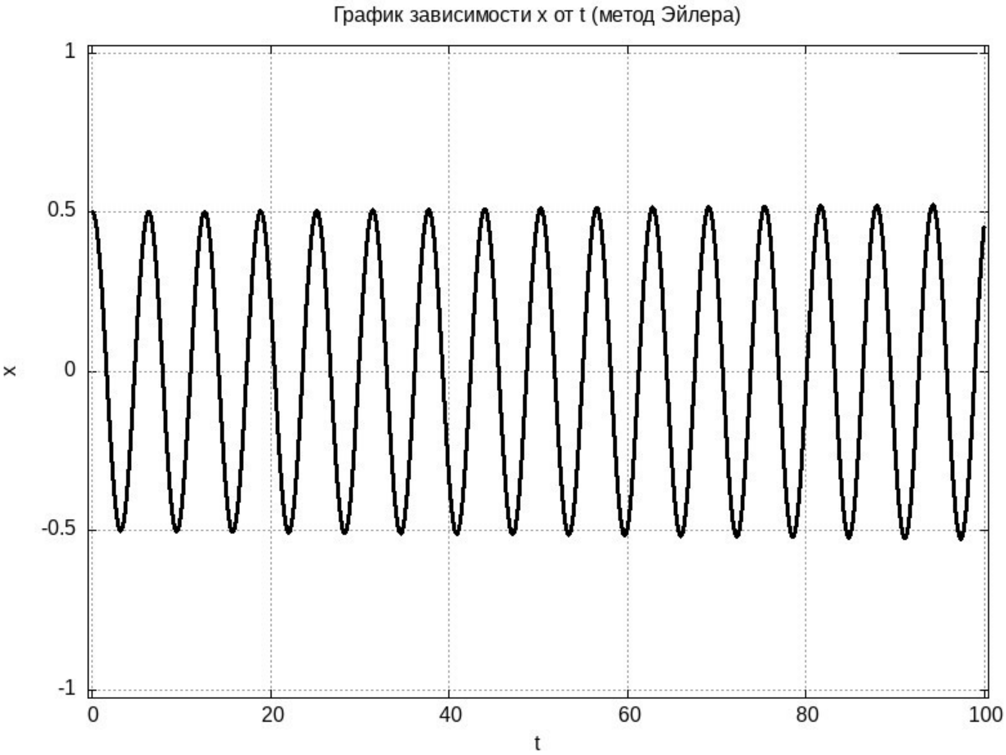
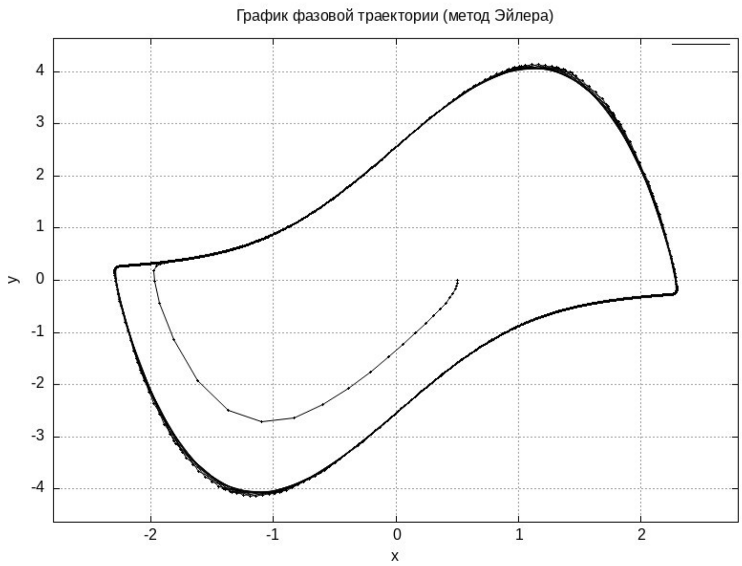
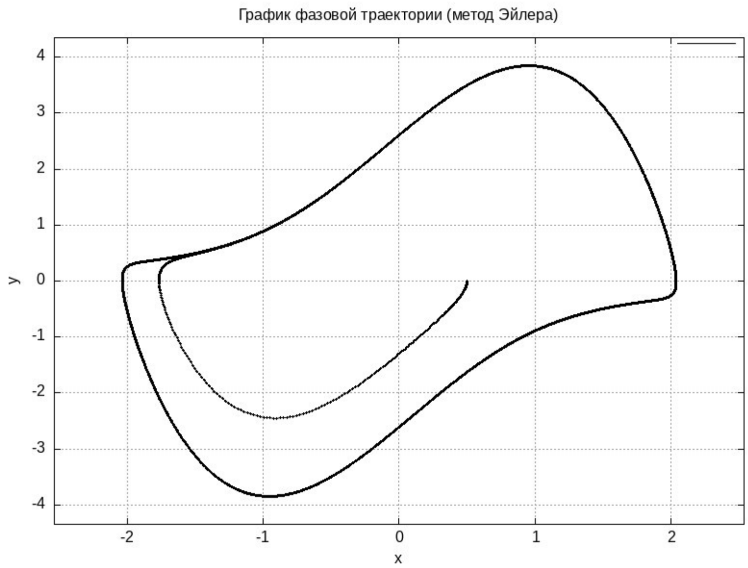
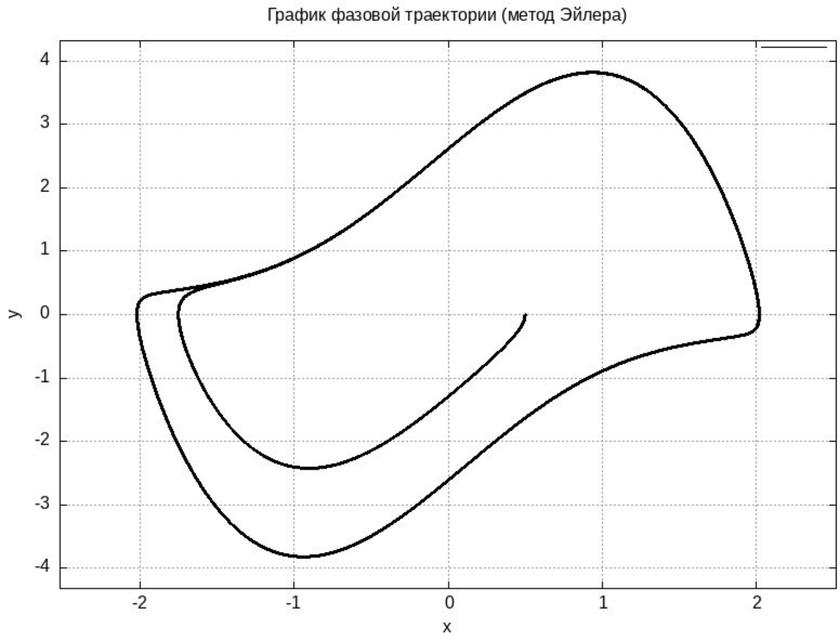


График зависимости x от t при h = 0.1 достаточно быстро теряет периодичность и уходит за пределы отрезка [-0.5, 0.5]. При h = 0.01 график начинает выходить за пределы отрезка при t > 10. Если же h = 0.001, то метод показывает результат получше, но всё же при увеличении t видно, что значения x немного выходят из промежутка.

При μ = 2 получаем следующие графики:



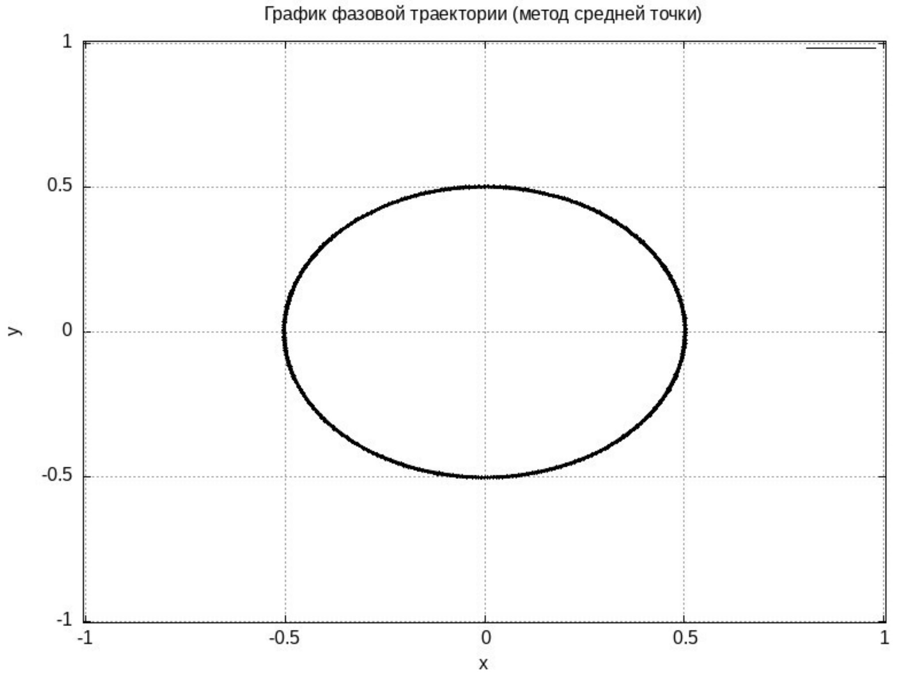




При уменьшении значения h график всё больше начинает быть похожим на график осциллятора, при больших значениях h на графиках видны участки, где толщина линии больше, то есть на каком-то этапе метод прошёл по другой траектории.
Графики для зависимости x от t можно посмотреть в паке research/images, аналогично графикам при μ = 2 при уменьшении h лучше сохраняют периодичность и содержатся в отрезке [-2, 2], хотя стоит отметить, что при большом h значения не так сильно увеличиваются, как это было при μ = 0.

Явный метод средней точки

Порядок метода – 1, глобальная ошибка – O(h^2).
Построим графики фазовый траекторий и графики зависимости x от t при различных h (0.1, 0.01 и 0.001) μ = 0 и μ = 2. При μ = 0 получаем:



Даже при большом h = 0.1 получаем график эллипса, видна большая разница в сравнении с методом Эйлера.

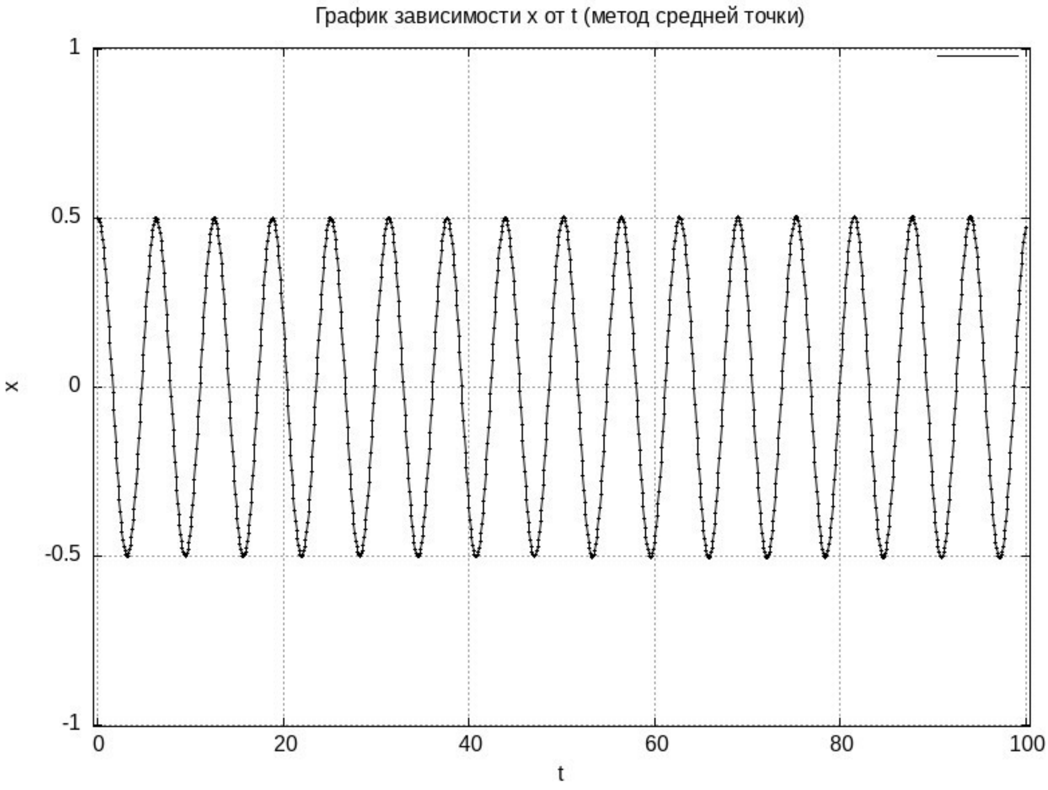
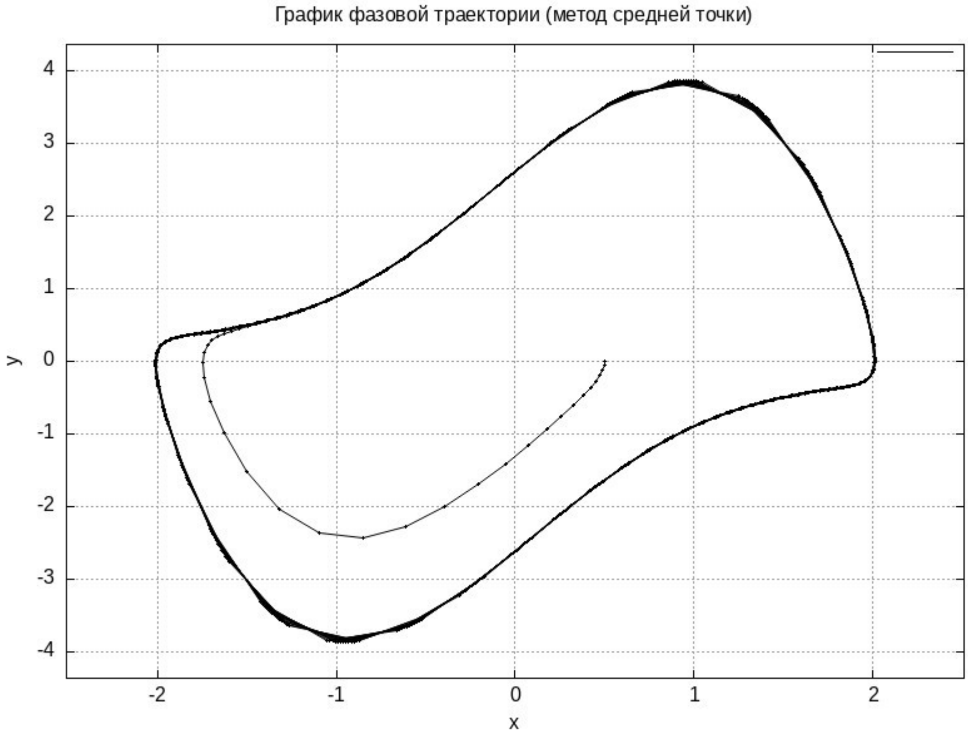
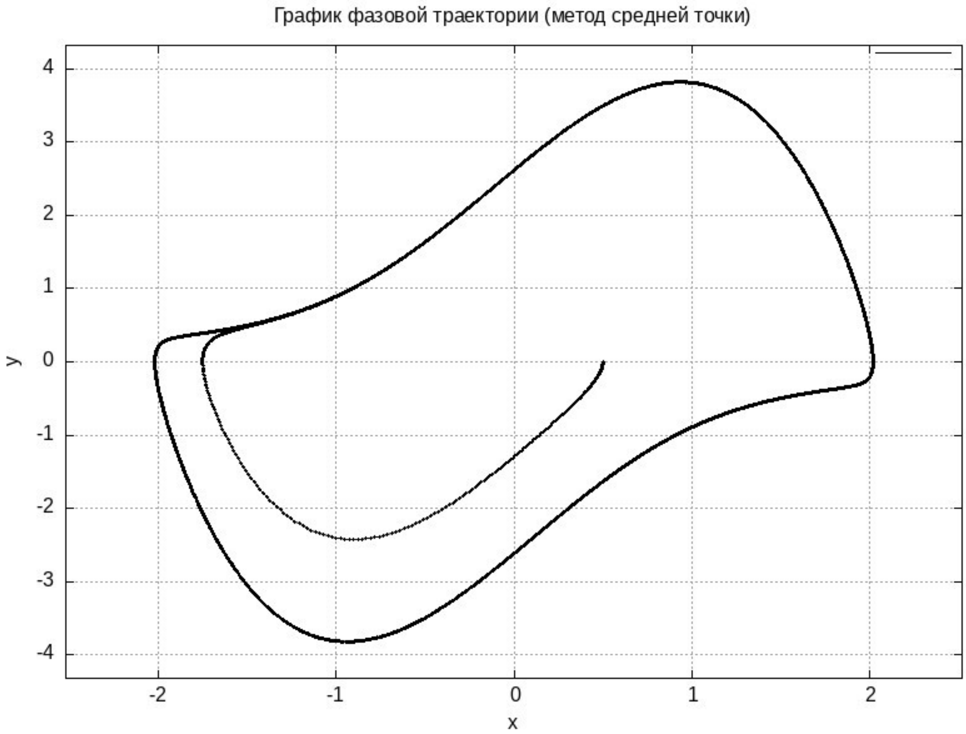


График зависимости x от t сохраняет имеет периодичность и не уходит в бесконечность при увеличении t, значения содержатся в нужном отрезке.
Графики при меньших значениях h можно посмотреть в папке research/images, они не представляют сильный интерес, т.к. не отличаются от данных графиков, на них значения становятся точнее.
Графики при h = 0.1, h = 0.01 и $\mu = 2$:

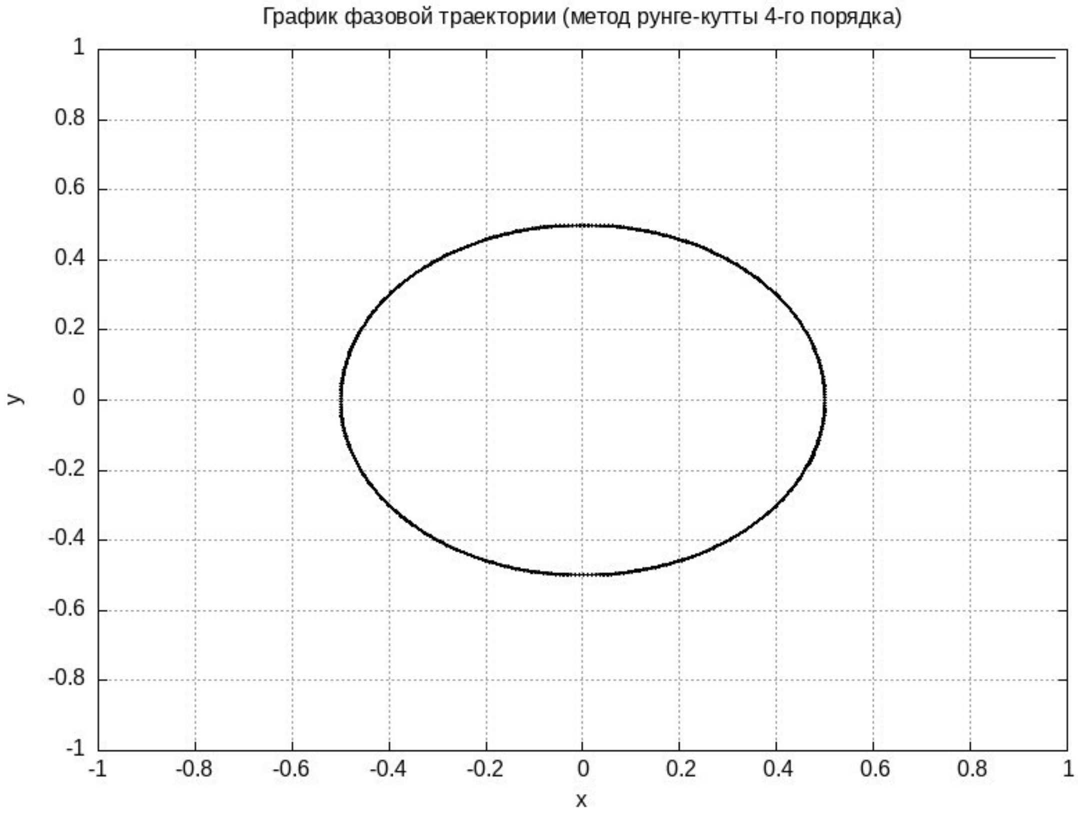


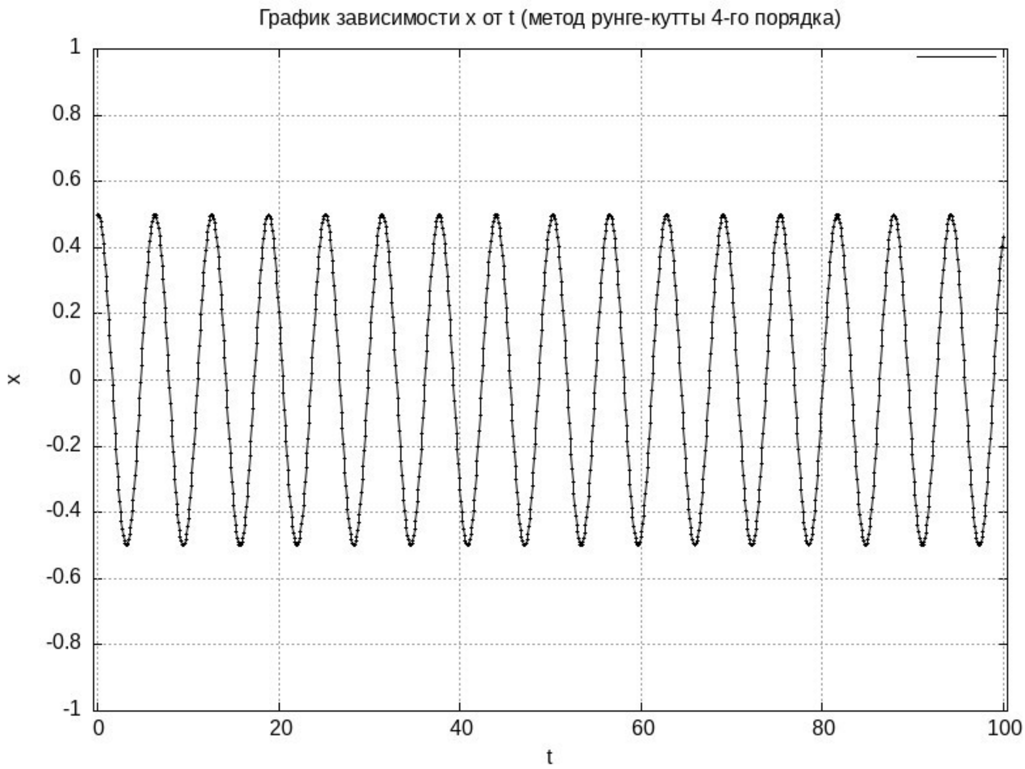


При h = 0.1 график всё также имеет неточности, при h = 0.01 становится лучше.

Классический метод Рунге-Кутты 4 порядка

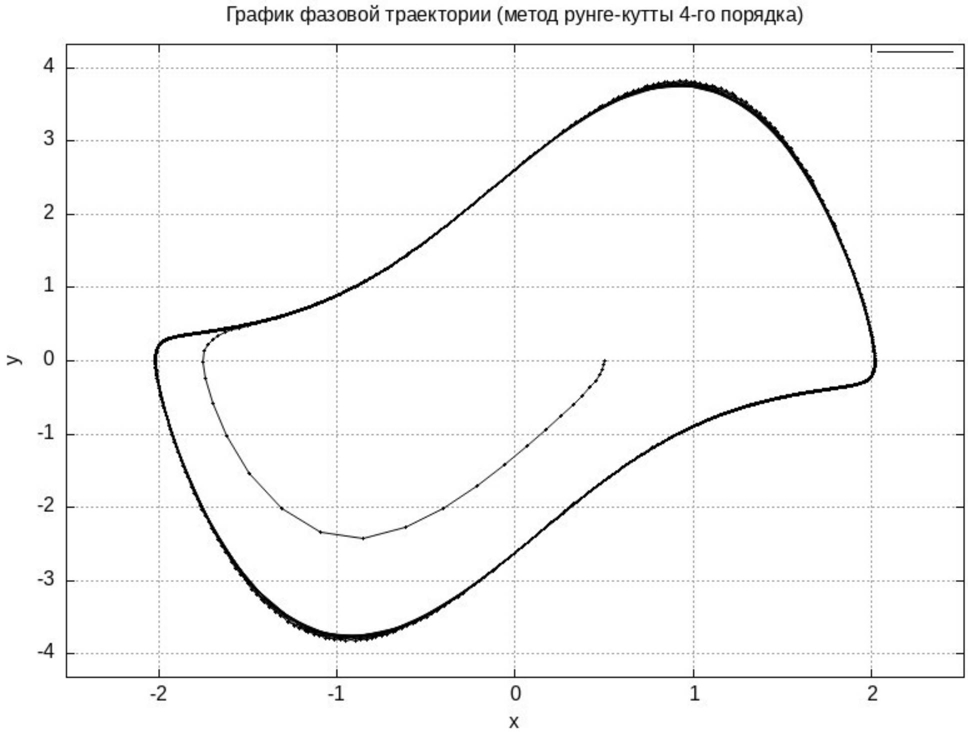
Порядок метода – 4, глобальная ошибка – $O(h^4)$.
Построим графики фазовый траекторий и графики зависимости x от t при различных h (0.1, 0.01 и 0.001) μ = 0 и μ = 2. При μ = 0 получаем:

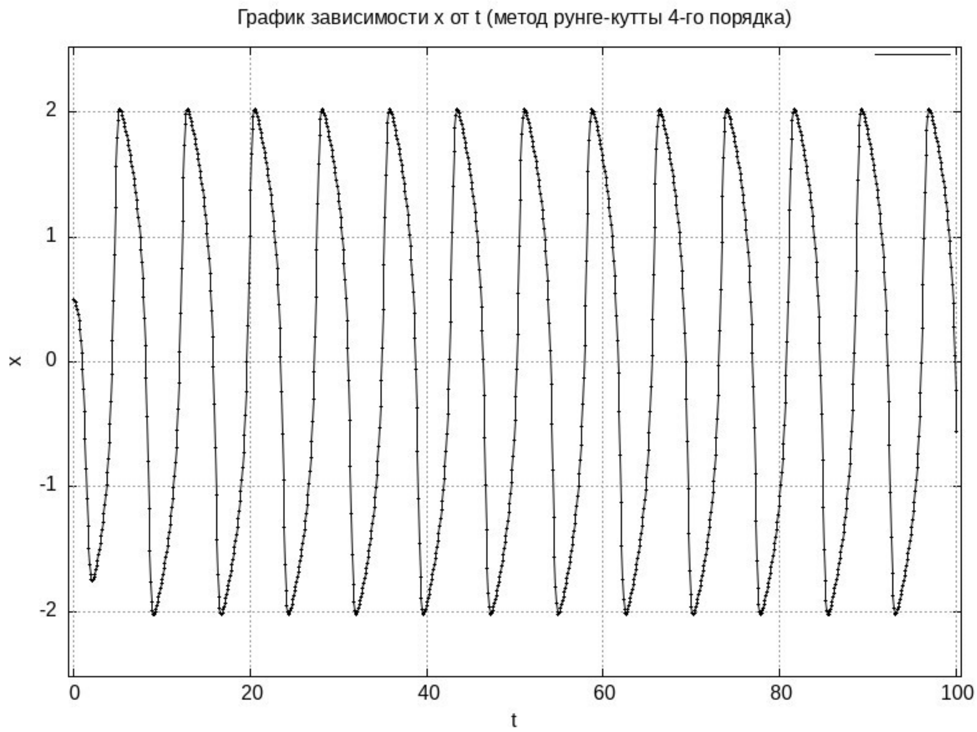




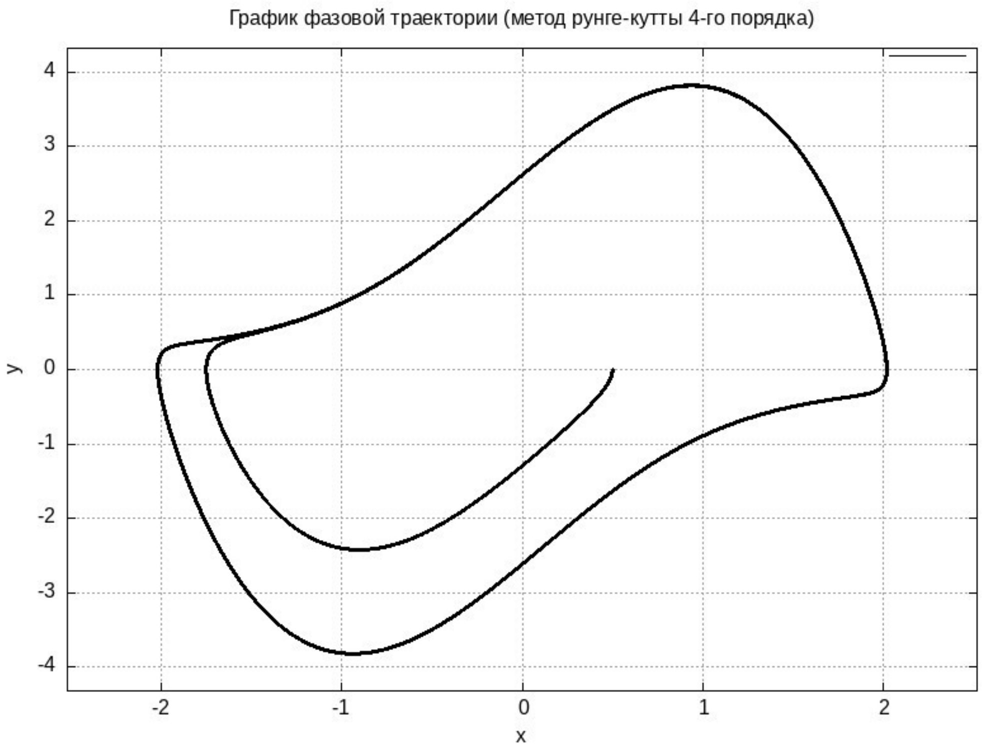
Даже при большом значении h графики выглядят хорошо, т.к. метод имеет большой порядок и маленькую ошибку.

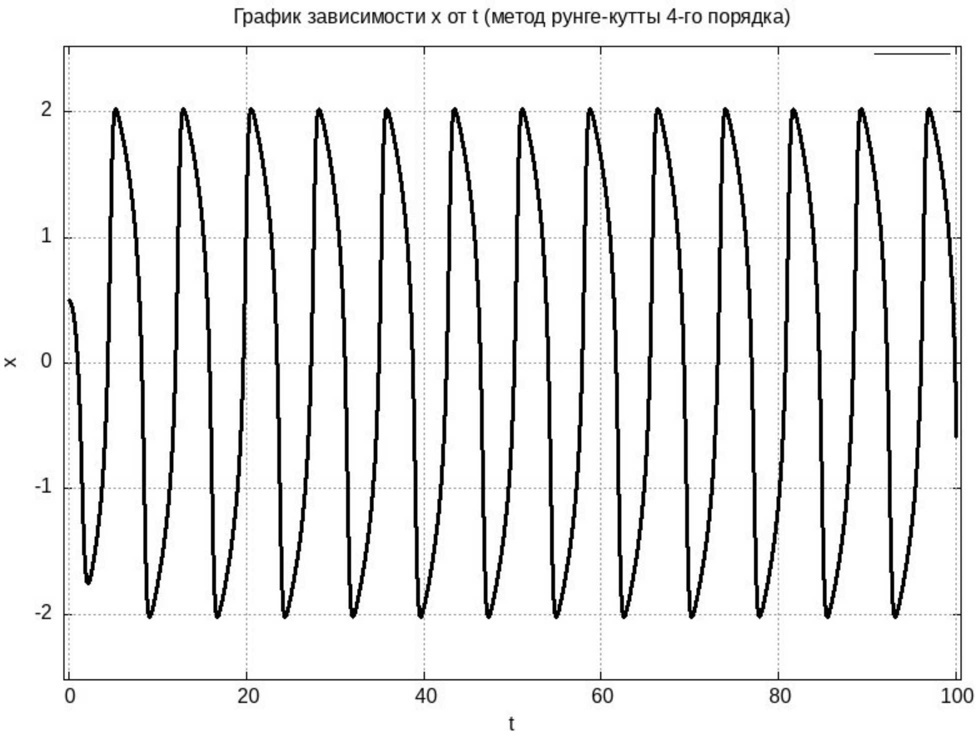
При μ = 2 и h = 0.1 получаем:





При μ = 2 и h = 0.001 получаем:





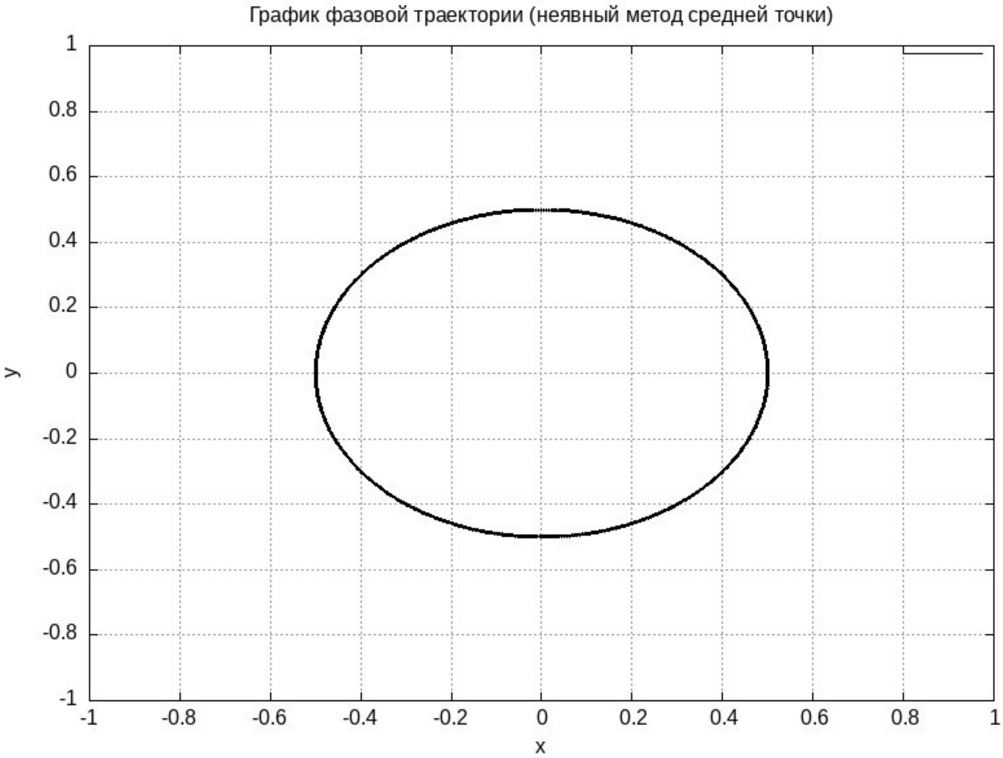
Неявный метод средней точки и неявный метод трапеций

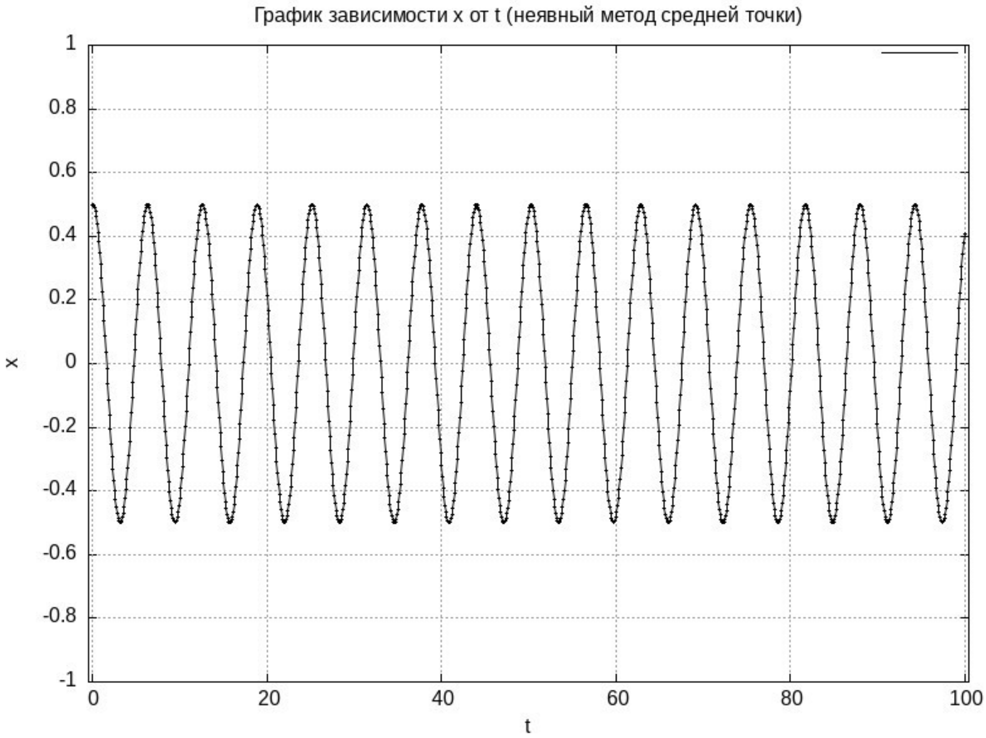
Порядок методов – 2, глобальная ошибка – $O(h^2)$.

Неявные методы Рунге-Кутты применяются для «жестких» систем ОДУ, в которых применение явных методов Рунге-Кутты приводит к проблемам с устойчивостью.

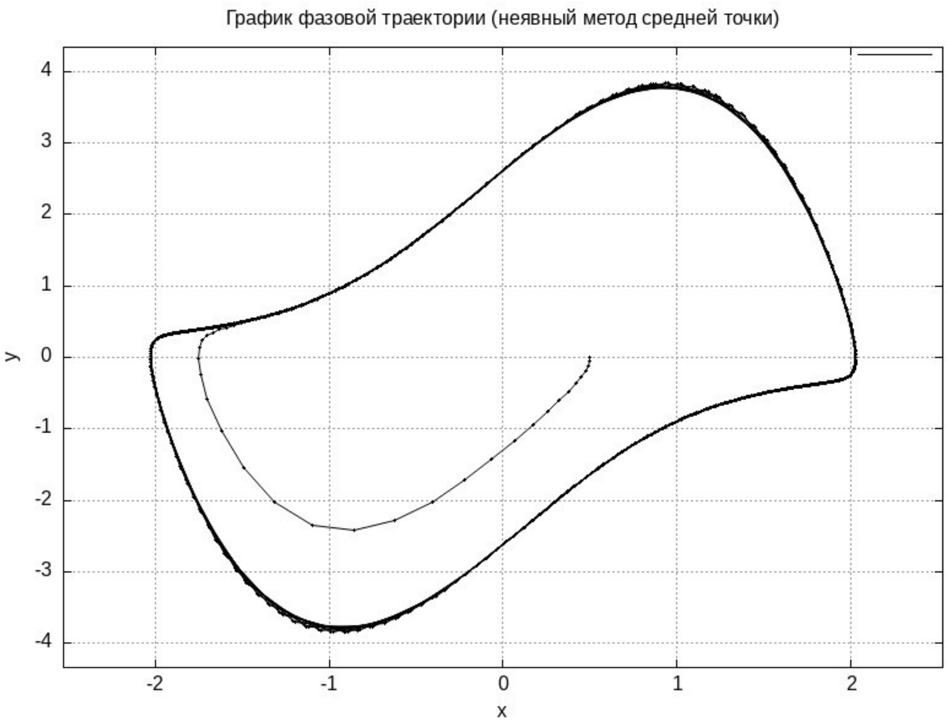
Построим графики фазовый траекторий и графики зависимости x от t при различных h (0.1, 0.01 и 0.001) μ = 0 и μ = 2.

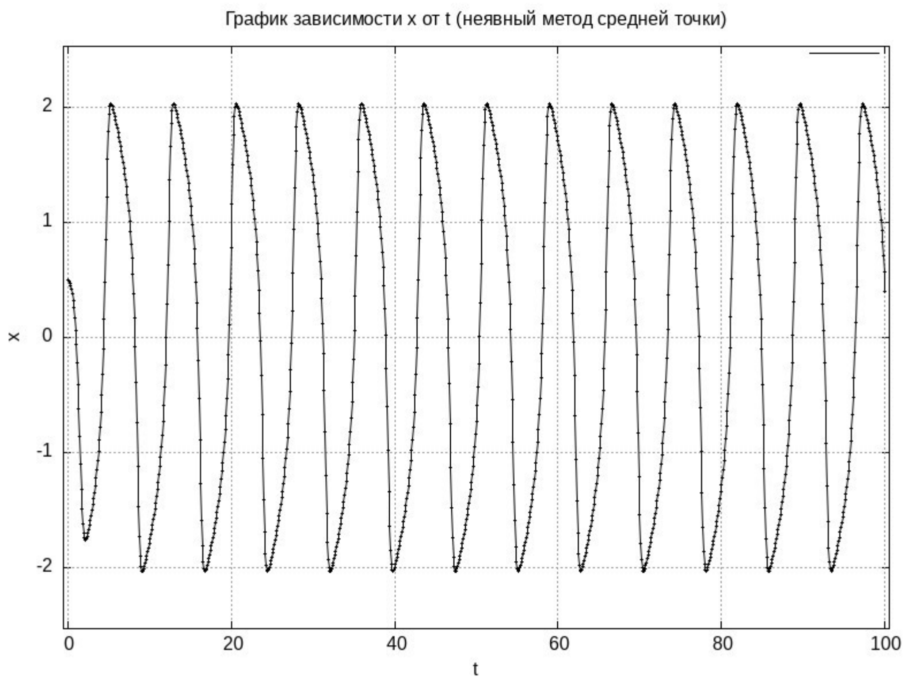
При μ = 0 и h = 0.1 получаем:



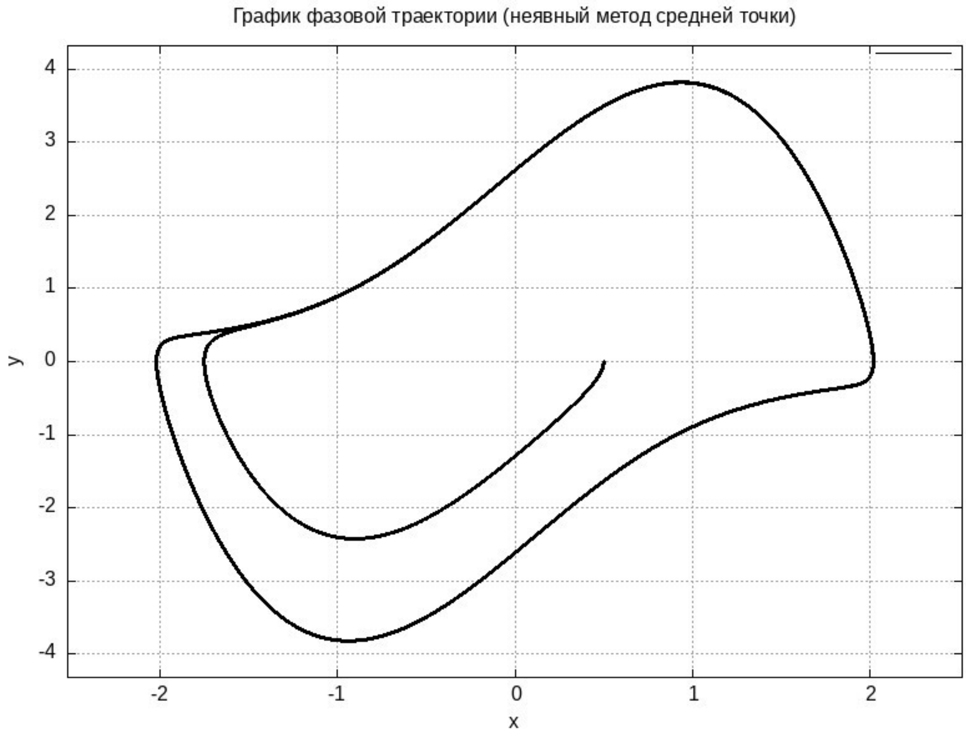


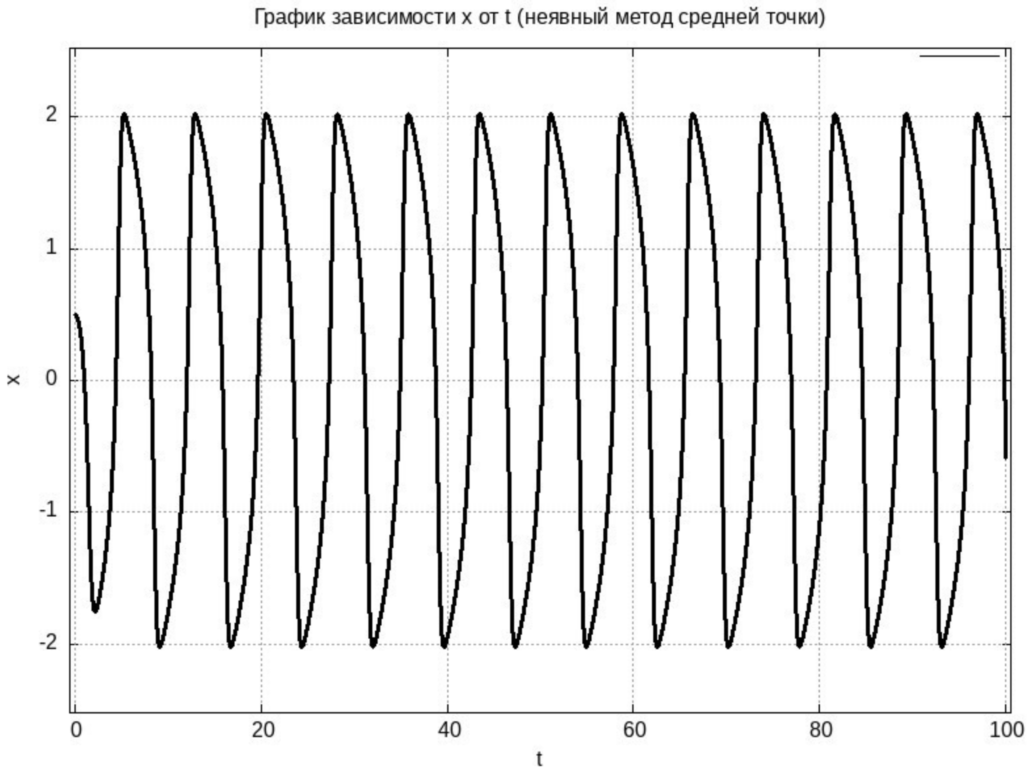
При μ = 2 и h = 0.1 получаем:





При μ = 2 и h = 0.001 получаем:





Графики для неявного метода трапеций схожи с данными графиками, они расположены в research/images/ellipse и research/images/graphics.

Метод Адамса-Башфорта-Мултона 2 порядка

Порядок метода – 2, глобальная ошибка – $O(h^2)$.

Является многошаговым методом, что увеличивает константу ошибки по сравнению с одношаговыми методами второго порядка.

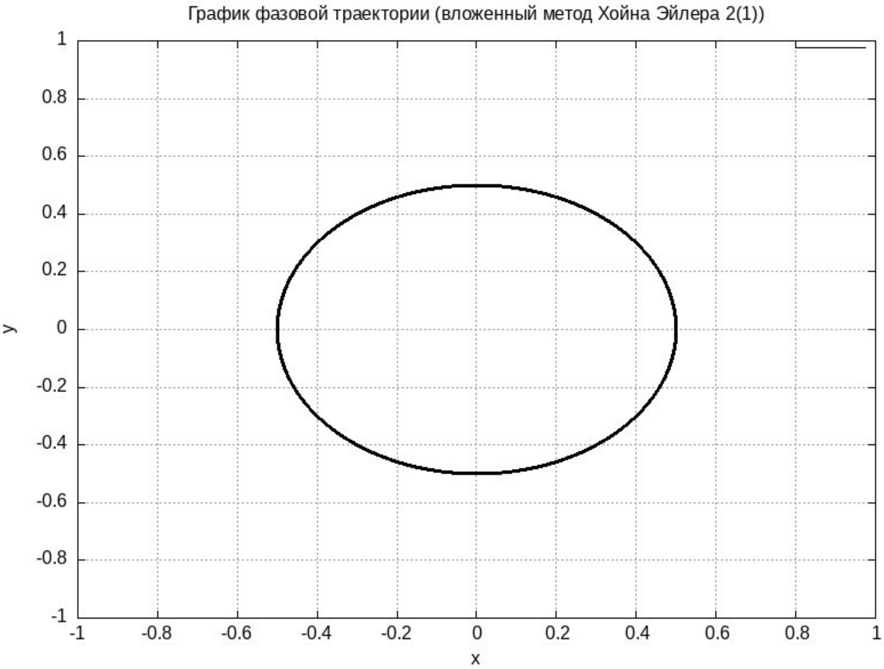
Построим графики фазовых траекторий и графики зависимости x от t при различных h (0.1, 0.01 и 0.001) $\mu = 0$ и $\mu = 2$. Графики расположены в research/images/ellipse и research/images/graphics, ABM2_1 при h = 0.1, ABM2_2 при h = 0.01 и AMB2_3 при h = 0.001.

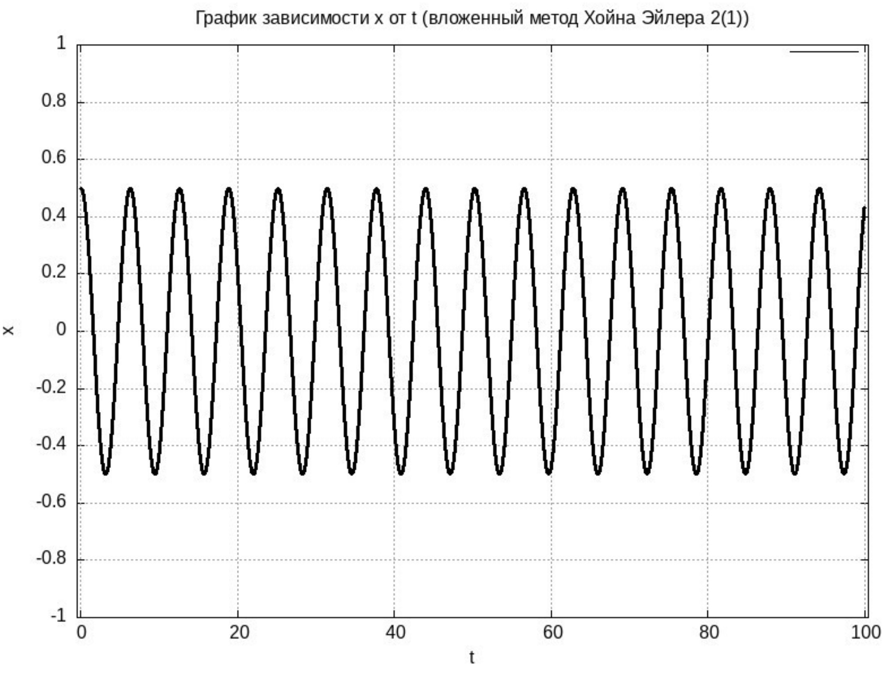
Метод Адамса-Башфорта-Мултона 4 порядка

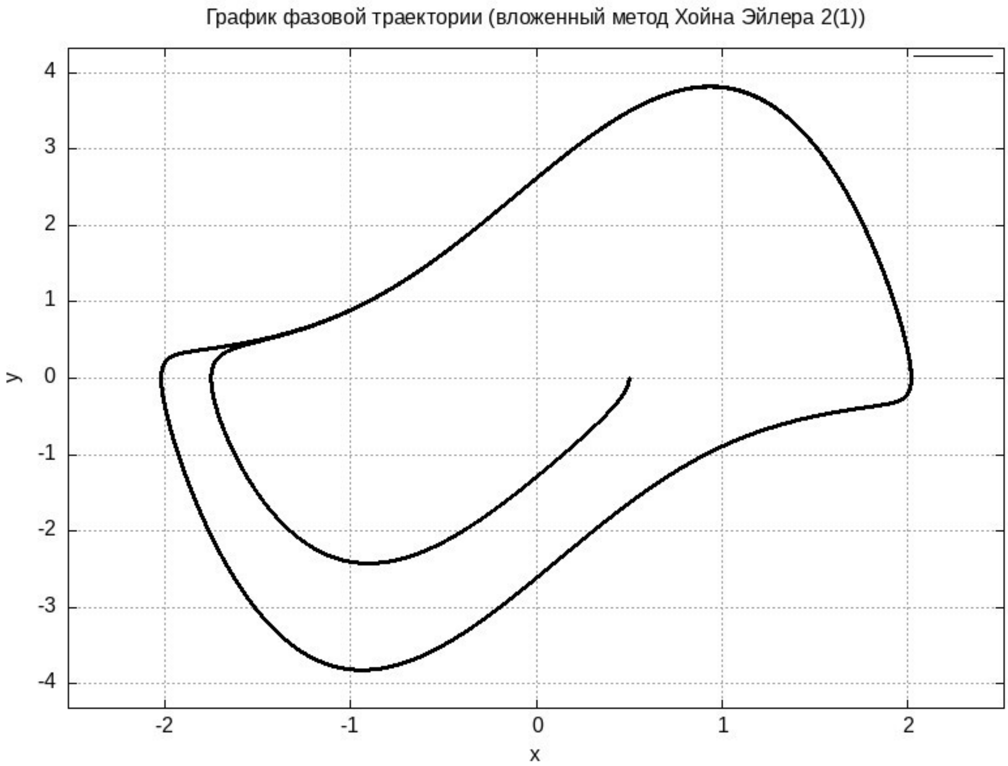
Порядок метода – 4, глобальная ошибка – O(h^4).
Является многошаговым методом, что увеличивает константу ошибки по сравнению с одношаговыми методами четвертого порядка.
Построим графики фазовых траекторий и графики зависимости x от t при различных h (0.1, 0.01 и 0.001) μ = 0 и μ = 2. Графики расположены в research/images/ellipse и research/images/graphics, ABM4_1 при h = 0.1, ABM2_4 при h = 0.01 и AMB4_3 при h = 0.001.

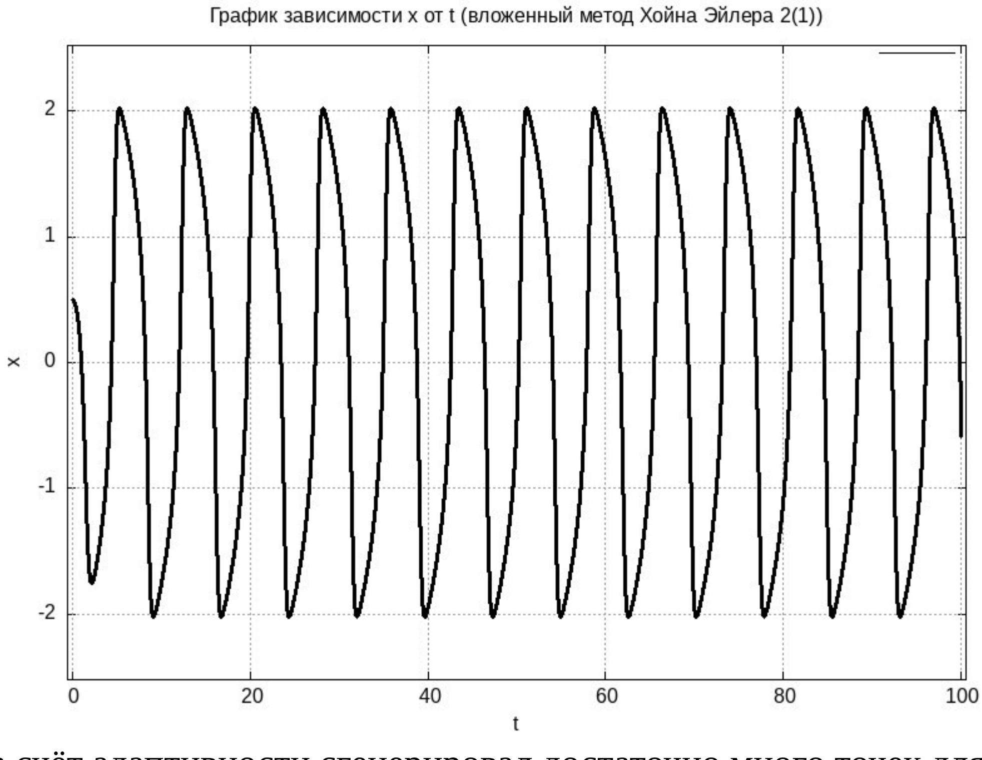
Метод Хойна-Эйлера с адаптивным шагом

Порядок метода – 2, глобальная ошибка – O(h^2).
Адаптивность позволяет снизить ошибку эффективнее, чем методы второго порядка с фиксированным шагом, но асимптотически уступает методам 4 порядка.







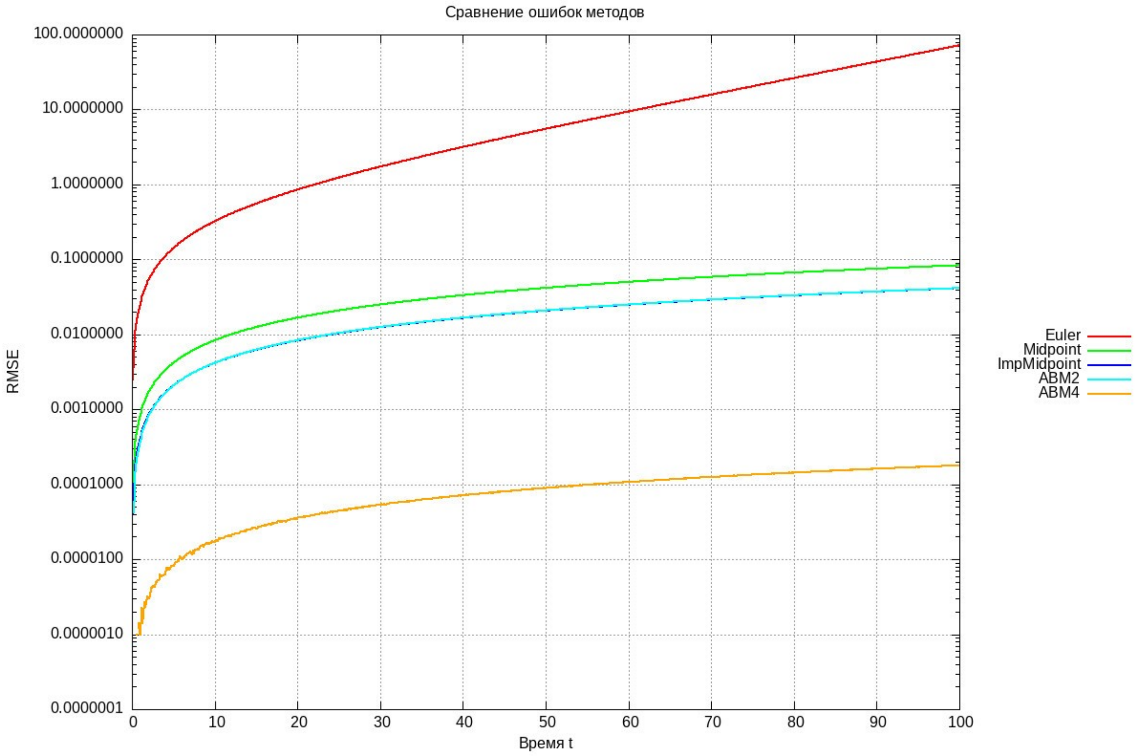


Метод за счёт адаптивности сгенерировал достаточно много точек для μ = 2 – 193985, меньше для μ = 0 – 62501.

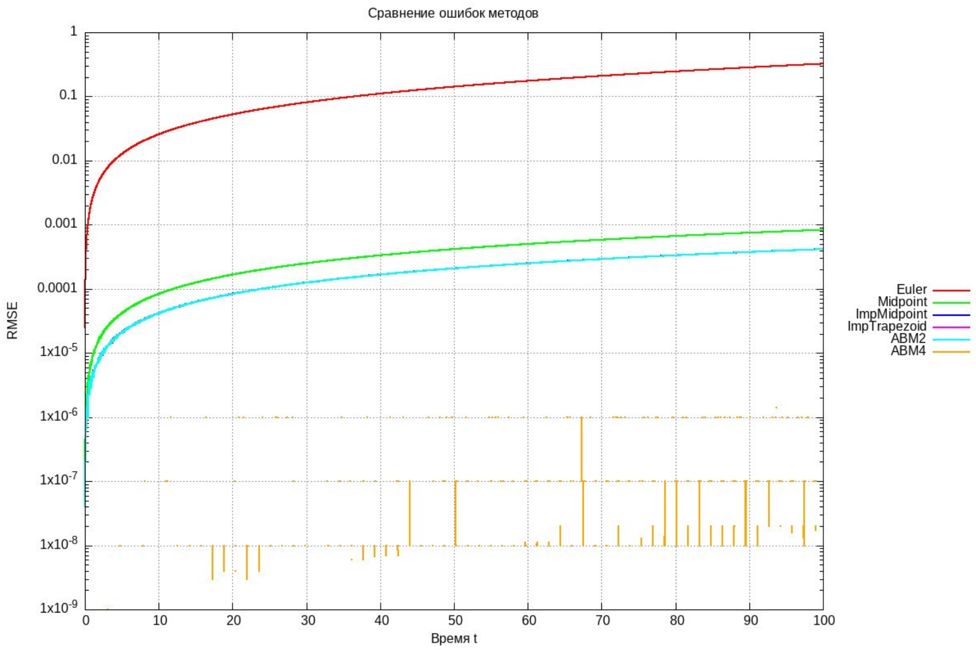
Сравнение методов

Среди реализованных методов самую лучшую асимптотику ошибки имеет классический метод Рунге-Кутты 4 порядка и метод Адамса-Башфорта-Мултона 4 порядка, но метод Адамса-Башфорта-Мултона является многошаговым, поэтому любые погрешности в предыдущих шагах влияют на все последующие

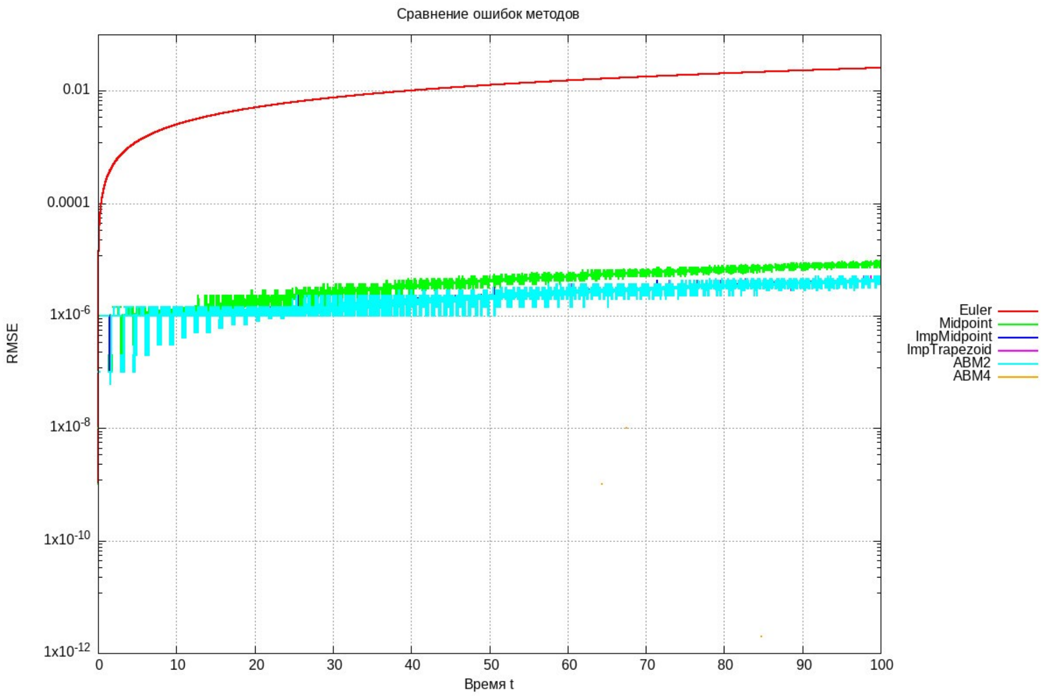
расчёты. Для сравнения методов за эталонные значения будем считать значения, полученные методом Рунге-Кутты 4 порядка.
Вычислим среднеквадратичную разницу между численным и эталонным решением для каждого метода.
Построим график при h = 0.1 и μ = 0:



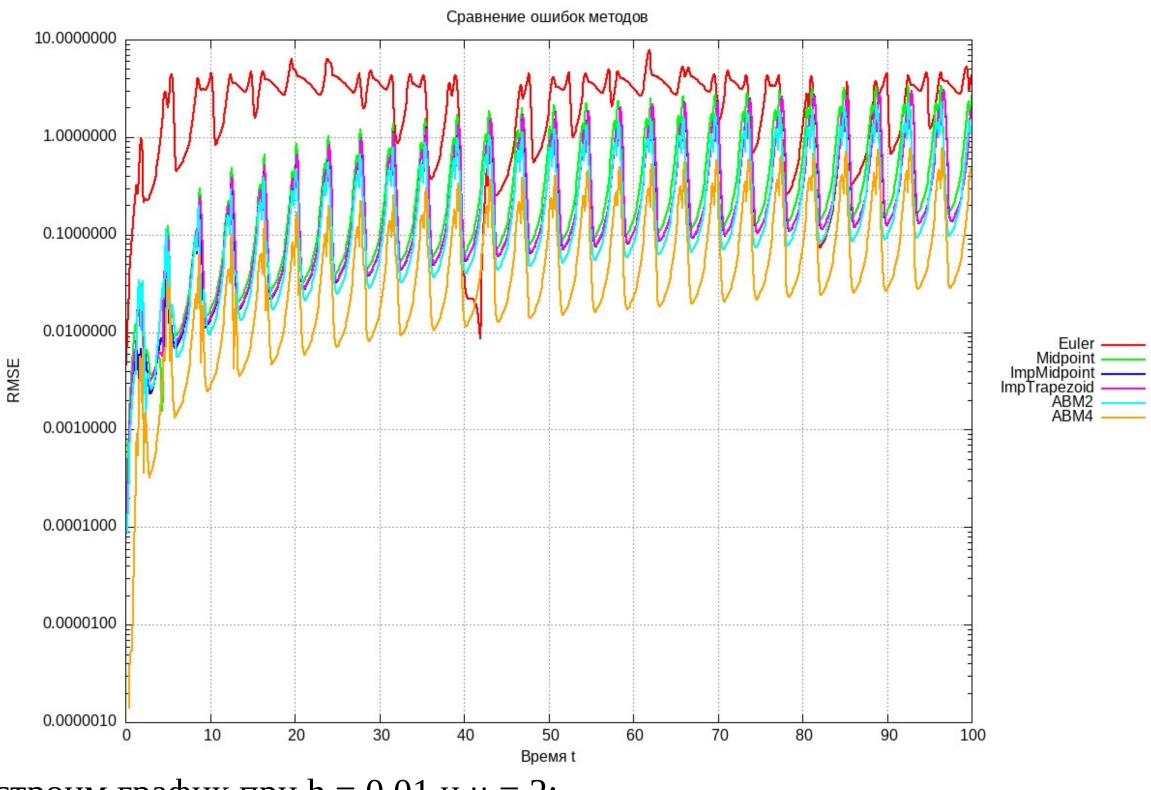
Построим график при h = 0.01 и μ = 0:



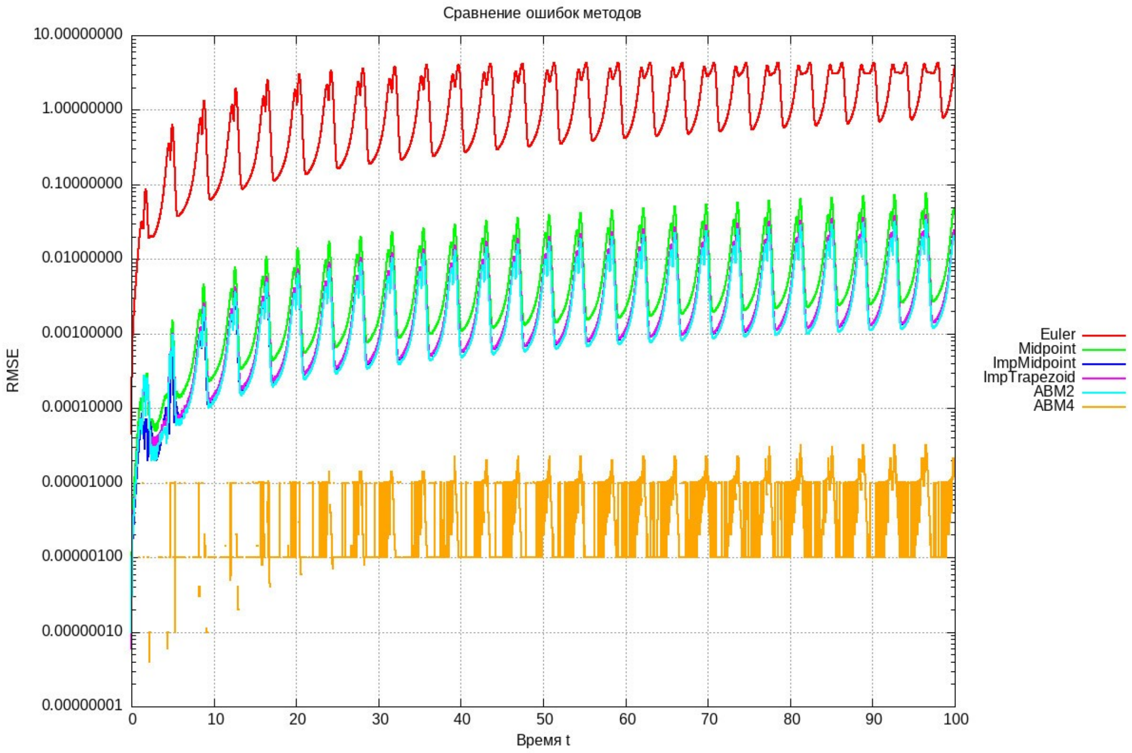
Построим график при h = 0.001 и μ = 0:



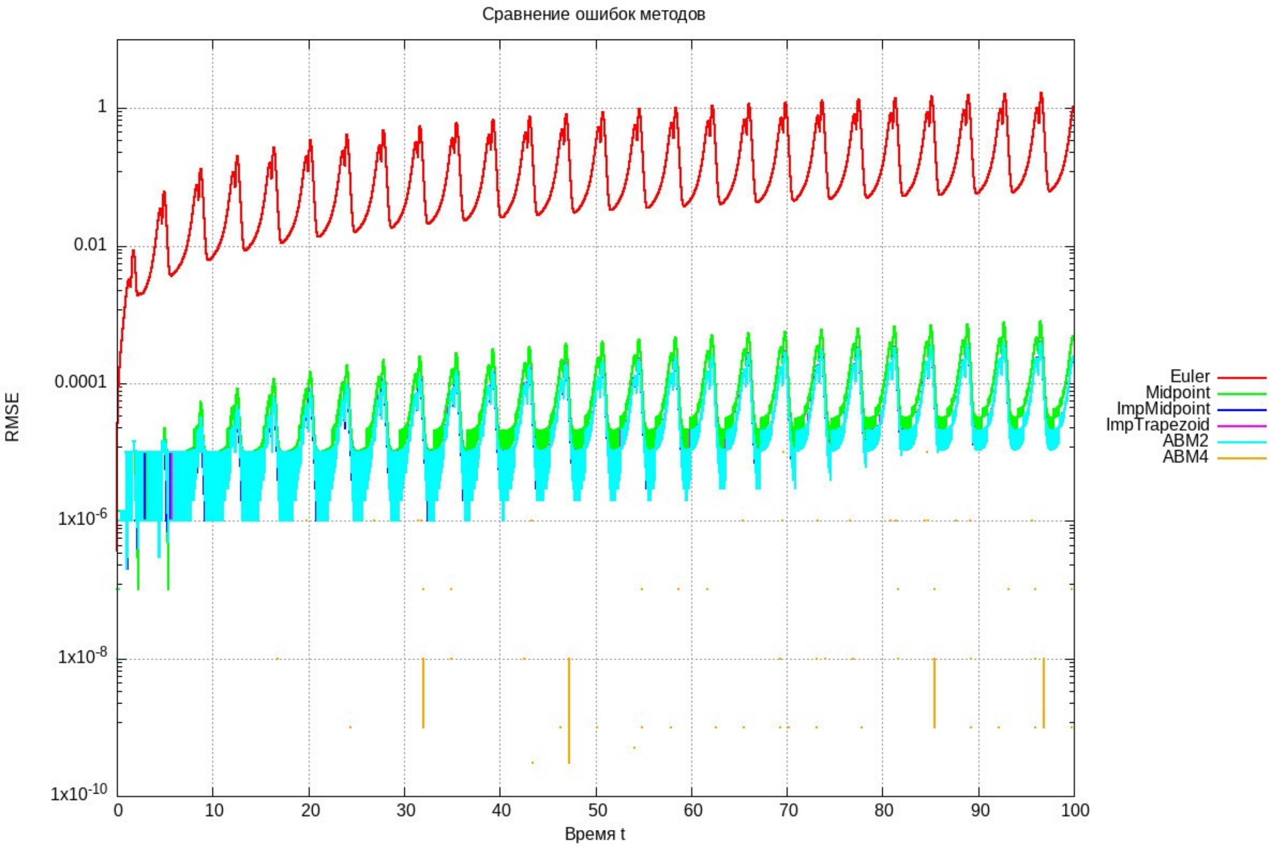
Построим график при h = 0.1 и μ = 2:



Построим график при h = 0.01 и μ = 2:



Построим график при h = 0.001 и μ = 2:



На графиках видно, что метод Адамса-Башфорта-Мултона 4 порядка наиболее похож на Рунге-Кутты 4 порядка, что логично, потом идёт метод Адамса-Башфорта-Мултона 2 порядка, который примерно на одном уровне с неявным методом трапеций, после идёт неявный и явный метод средней точки, самым неточным оказался метод Эйлера, что тоже логично, даже если основываться только на асимптотике ошибки.