Hochschule RheinMain
Wintersemester 2021/22

Fachbereich DCSM
Prof. Dr. Adrian Ulges

Test 1 zur Veranstaltung

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nachname: Beispiel   Vorname: Lösung

Unterschrift: ____________   Punkte: ____________

Übungsgruppe *(bitte ankreuzen)*

☐ MO, 10:00 (Kaiser)
☐ DI, 10:00 (Kaiser)
☐ MI, 10:00 (Eversheim)
☐ keine
☐ DO, 14:15 (Ulges)
☐ FR, 11:45 (Ulges, online)
☐ FR, 14:15 (Eversheim)

☐ Ich habe das Seminar bereits bestanden und schreibe nur zu Übungszwecken mit.

Hinweise:

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 40 Minuten.*
- *Sie dürfen auch die Rückseiten der Blätter beschreiben.*
- *Geben Sie Ergebnisse als Bruch oder gerundet auf 3 Nachkommastellen an.*
- *Die alleinige Angabe eines Endergebnisses ist nicht ausreichend.*
  Geben Sie immer einen Rechenweg / eine Begründung an!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben ist folgende Stichprobe $(x_1, y_1), \ldots, (x_4, y_4)$:

x_i	2	4	5	6
y_i	0	8	5	4

(unsortiert → 0 Pkte.)

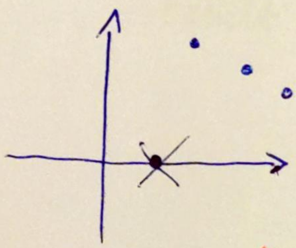
1. Bestimmen Sie $\tilde{y}_{30\%}$, das 30%-Quantil der $y-$Werte.

y-Werte sortiert: 0, 4, 5, 8

$\tilde{y}_{30\%} = y_{\lceil 0{,}3 \cdot 4 \rceil} = y_2 = 4.$

1

2. **Welchen Punkt** der obigen Stichprobe müsste man **entfernen** um eine **negative** Kovarianz s_{xy} zu erhalten? Begründen Sie knapp. Eine Rechnung ist nicht gefordert.



Punkt links unten (2,0) entfernen

→ fallende Tendenz.

1

(Falls prägnant argumentiert dass $(x_1-\bar{x})\cdot(y_1-\bar{y})$ größter Summand, auch 1 Pkt.)

3. Σ sei eine 5×5-Kovarianzmatrix. **Wieviele negative Werte** können sich höchstens in der Matrix befinden? Begründen Sie.

$$\begin{pmatrix} \times & & & & \\ & \times & & & \\ & & \times & & \\ & & & \times & \\ & & & & \times \end{pmatrix}$$

25 Werte insgesamt, 5 davon Varianzen (nicht-negativ).

→ maximal 20 negative Werte.

1

Aufgabe 2 (4 Punkte)

$$\begin{array}{cc} & 2 \\ n & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 7 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Nur ein Beispiel!

1. X sei eine Matrix, dargestellt als Numpy-Array mit shape $(n, 2)$. Schreiben Sie Numpy-Code, der das Skalarprodukt der **beiden Spalten** berechnet, z.B. in der Abbildung: $1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 36$. Vermeiden Sie Python-Schleifen.

```
x = X[:,0]
y = X[:,1]      1
result = np.sum(x * y)    1
    // oder np.dot(x,y)
```

2. Wir definieren die Ereignisse G ("Person ist geimpft"), S (Person ist Senior:in) und K (Person ist an COVID erkrankt). Drücken Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten in Form von **natürlichsprachlichen Sätzen** aus:

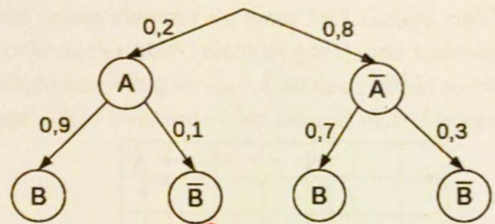
   - $P(K|S) = 0{,}01$

     Ein Prozent aller Senioren ist an COVID erkrankt. 1

   - $P(\bar{G}|S, K) = 0{,}8$

     80 Prozent aller an COVID erkrankten Senioren ~~ist~~ sind ungeimpft. 1

Aufgabe 3 (4 Punkte)



In dieser Form alleine nicht ausreichend. Für welche W'keiten stehen die Zahlen im Baum?

!

1. Berechnen Sie – gegeben den obigen Baum – die folgenden Wahrscheinlichkeiten. Geben Sie den Rechenweg mit **formalen Wahrscheinlichkeiten** an, nicht nur mit Zahlen.

 - $P(\bar{B})$

$$
\begin{aligned}
P(\bar{B}) &= P(A,\bar{B}) + P(\bar{A},\bar{B}) \\
&= P(A)\cdot P(\bar{B}|A) + P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}|\bar{A}) \\
&= 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \\
&= 0{,}26 \quad 0{,}5
\end{aligned}
$$

0,5

 - $P(A \cup B)$

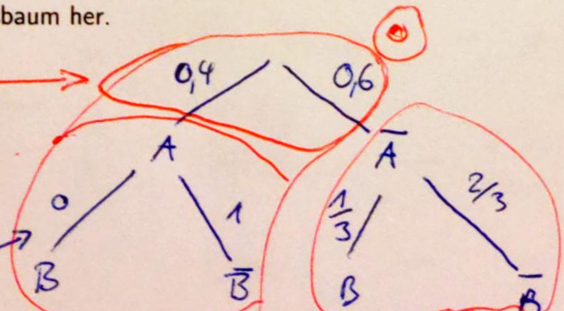
$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A,B) + P(A,\bar{B}) + P(\bar{A},B) \quad 0{,}5 \\
&= 0{,}2\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}8\cdot 0{,}7 \\
&= 0{,}76 \quad 0{,}5
\end{aligned}
$$

Falls oben gesehen dass W'keiten im Baum verstanden, hier ok.

2. Gegeben seien zwei Ereignisse A,B mit $P(A)$=0,4 und $P(\bar{B},\bar{A})$=0,4. Außerdem gilt, dass A und B **einander ausschließen**. Leiten Sie einen möglichst vollständigen Ereignisbaum her.

Keine Punkte für die 1. Ebene

0



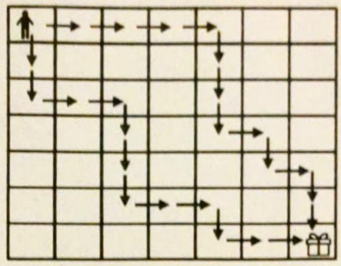
Begründung: Weil A und B einander ausschließen, gilt $P(A,B)=0$ und somit $P(B|A)=0$

Begründung:

$$
\begin{aligned}
P(\bar{B},\bar{A}) &= 0{,}4 \\
P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}|\bar{A}) &= 0{,}4 \\
0{,}6 \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) &= 0{,}4 \\
P(\bar{B}|\bar{A}) &= \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

1. Bob startet auf dem linken oberen Feld eines 7×7-Gitters und läuft mit jedem Schritt 1 Feld nach **rechts** oder nach **unten** (nicht diagonal, und nicht nach links oder oben). Mit **wievielen verschiedenen Wegen** kann Bob das Zielfeld rechts unten erreichen? Zwei der Wege sind abgebildet. Begründen Sie anhand einer Formel aus der Kombinatorik.



6x $\rightarrow$ 6x $\downarrow$

1

Falls Modell richtig 1 Pkt.

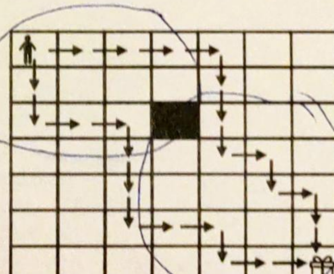
Permutation mit Duplikaten:

$$P(12;6,6) = \frac{12!}{6!\cdot 6!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \cancel{4620}\ 924$$

1

2. (knifflig) Wieviele Wege gibt es, wenn Bob **nicht** über das schwarze Hindernisfeld laufen darf?

3x rechts
2x unten



3x rechts
4x unten

$$\#\text{Pfade ohne Hindernis} = \#\text{Alle Pfade} - \#\text{Pfade mit Hindernis} \quad 1$$

$$= \cancel{4620}\ 924 \text{ (s.o.)} - \#\text{Teilpfade Start} \to \text{Hindernis} \times \#\text{Teilpfade Hindernis} \to \text{Ende}$$

$$= \cancel{4620}\ '' - \frac{5!}{2!\cdot 3!} \times \frac{7!}{3!\cdot 4!}$$

$$= \cancel{4620}\ '' - 10 \times 35$$

$$= \cancel{4270}\ 574 \quad 1$$