4. Mathematische Behandlung von Zuverlässigkeits-Problemen

Methoden zur Bestimmung der Zuverlässigkeitsmerkmalen von IT-Systeme können wie folgt klassifiziert werden:

- ***Experimentelle Methoden**:* Bei experimentellen Methoden werden Messungen an **realen** Systemen durchgeführt, z. B. in Form eines Labor- oder Feldversuchs.
- ***Simulative Methoden**:* Mit einer beliebig genauen Modellierung des zu untersuchenden Systems wird diese geeignet nachgebildet und numerisch ausgewertet.
- ***Analytische Methoden**:* Analytische Methoden setzen vereinfachte Modellannahmen voraus und liefern einen formelmäßigen Ausdruck für die gesuchten Merkmale und Kenngrößen (wegen der hohen Systemkomplexität oft nur Abschätzungen).

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Zufallsexperiment („Versuch“): Beliebig oft wiederholbarer Vorgang, der nach einer ganz bestimmten Vorschrift ausgeführt wird und dessen Ergebnis vom **Zufall** abhängt.

Elementarereignisse („Ereignis“): Einfache, nicht weiter zerlegbare und sich gegenseitig ausschließende Ereignisse eines **Zufallsexperiments**.

Elementarereignisraum: Menge aller Elementarereignisse eines **Zufallsexperiments**:

$$\Omega := \{\mathrm{e} \mid \mathrm{e} = \mathrm{Elementarereignis}\}$$

Ereignisraum: Teilmenge der Potenzmenge von Ω:

$$A \subset \mathbf{P}(\Omega)$$

Zufälliges Ereignis („Ereignis“): Element des **Ereignisraums** = Teilmenge von **Elementarereignissen**.

$$a \in A$$

Absolute Häufigkeit: Anzahl $H_n(a)$, mit der ein **Ereignis *a*** in ***n* Versuchen** auftritt.

Relative Häufigkeit: **Absolute Häufigkeit *Hn(a)*** dividiert durch ***n***.

$$h_n(a) = \frac{H_n(a)}{n}$$

Wahrscheinlichkeit: Jedem **Ereignis** eines **Zufallsexperiments** wird eine reelle Zahl ***P(a)*** so zugeordnet, dass

$$P : A \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad P(a) := \lim_{n \to \infty} h_n(a)$$

Gesetz der großen Zahlen (Bernoulli): Die Wahrscheinlichkeit, dass die **relative Häufigkeit** eines Ereignisses ***a*** von der Wahrscheinlichkeit ***P(a)*** um mehr als eine beliebige Zahl $\varepsilon \geq 0$ abweicht, strebt für $n \to \infty$ gegen **Null**:

$$\mathrm{P}\left(\, | P(a) - h_n(a) | \geq \varepsilon \, \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{für} \quad \forall \varepsilon \geq 0$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von ***a***, falls ***b*** eingetreten ist. ($\rightarrow$ durch **b** wird das Zufallsexperiment verändert.)

$$P(a \mid b) = \frac{P(a \cap b)}{P(b)}$$

Disjunkte Ereignisse: Die Ereignisse ***a*** und ***b*** treten **nie** gemeinsam auf, d. h. $a \cap b = \{\}$

Stochastisch unabhängige Ereignisse: Das Auftreten des Ereignisses ***b*** beeinflusst **nicht** die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von ***a***.

$$P(a \mid b) = P(a)$$

Wichtige Rechenregeln (Kolmogorov):

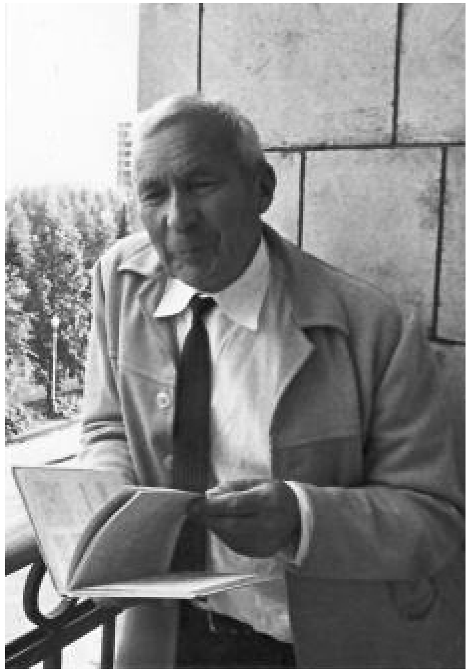
$$0 \leq P(a) \leq 1; \quad P(\Omega) = 1; \quad P(\{\}) = 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{Komplement:} & P(\overline{a}) = 1 - P(a) \\ \text{Summenregel:} & P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b) \\ \text{Additionstheorem:} & P(a \cup b) = P(a) + P(b) \quad \text{falls} \quad a \cap b = \{\} \\ \text{Produktregel:} & P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b) \quad \text{falls} \\ & \qquad \text{stochastisch unabhängige Ereignisse} \end{array}$$

Satz: Disjunkte Ereignisse sind stochastisch abhängig!!!

Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov

- sowjetischer Mathematiker
- einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts
- lieferte wesentliche Beiträge auf den Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie
- gilt als Begründer der Algorithmischen Komplexitätstheorie
- seine bekannteste mathematische Leistung war die **Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie**
- publizierte außerdem über Logik und **Fourierreihen**
- später über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der klassischen Mechanik



* 1903 in Tambow (RUS) † 20. Okt. 1987 in Moskau

Kombinatorik:

Soll die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses **A** berechnet werden, kommt es darauf an, die für **A** günstigen Ereignisse und die beim Experiment insgesamt möglichen Ereignisse abzuzählen.

1. Die Auswahl einer Stichprobe von **n** Elementen aus einer Grundmenge von **N** Elementen
   a) Auswahl **ohne** Zurücklegen → ohne Wiederholungen
   b) Auswahl **mit** Zurücklegen → mit Wiederholungen
2. Die Anordnung der Elemente in der Stichprobe
   a) **Geordnete** Stichprobe → Beachtung der Reihenfolge
   b) **Ungeordnete** Stichprobe → Reihenfolge spielt keine Rolle

Permutation:

Jede Anordnung von **n** Elementen in einer bestimmten Reihenfolge, heißt **Permutation** dieser Elemente.

a) Alle **n** Elemente sind voneinander verschieden

b) Es existieren **k** Klassen von je $n_1, n_2, ..., n_k$ gleichen Elementen, wobei $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

	alle Elemente sind verschieden	je $n_1, n_2, ..., n_k$ Elemente sind gleich
Anzahl der Permutationen	$n!$	$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$

Anzahl der möglichen Stichproben:

Stichproben vom Umfang **n** aus einer Grundgesamtheit von **N** Elementen.

	mit Beachtung der Reihenfolge	**ohne** Beachtung der Reihenfolge
ohne Zurücklegen	$\dfrac{N\,!}{(N-n)\,!}$	$\binom{N}{n}$
mit Zurücklegen	N^n	$\binom{N+n-1}{n}$

Verteilungsfunktionen und Erwartungswerte:

Zufallsvariable („Zufallsgröße"): Ist eine reellwertige Abbildung (Funktion), die jedem Elementarereignis $\boldsymbol{e} \in \Omega$ eine reelle Zahl $\boldsymbol{Z(e)}$ zuordnet.

$$Z : \Omega \rightarrow \mathbf{R}\,; \quad Z : e \in \Omega \rightarrow Z(e)$$

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen Z: Gibt für jede Realisierung $\boldsymbol{z}$ die Wahrscheinlichkeit an, mit der $\boldsymbol{Z \leq z}$ ist.

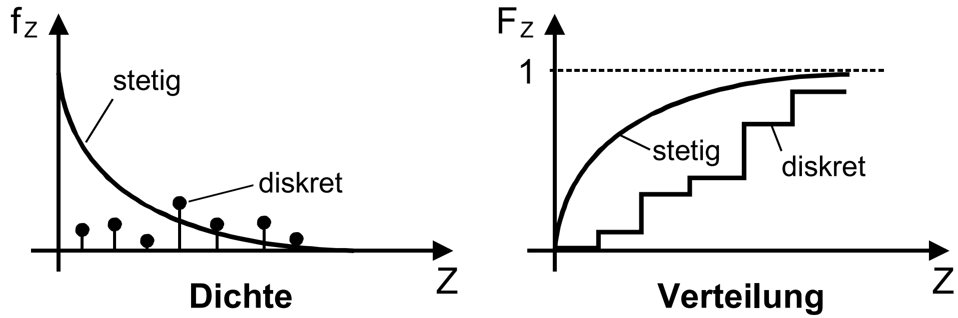
$$F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

Diskrete Verteilung: $\boldsymbol{F_Z}$ hat nur endlich viele Funktionswerte

Stetige Verteilung: $\boldsymbol{F_Z}$ besitzt in jedem Punkt $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}$ eine **nicht-negative Ableitung** (→ **sog. (Verteilungs-)Dichtefunktion**)

Dichtefunktion: $\boldsymbol{f_Z}$ ist die Ableitung der Verteilungsfunktion $\boldsymbol{F_Z}$

$$f_Z(z) = \frac{d\,F_Z(z)}{d\,z}\,; \qquad F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(\tau)\,d\,\tau$$



Normierungsbedingung:

$$F_Z(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(\tau)\,d\,\tau = 1$$

Erwartungswert: Gewichtetes arithmetisches Mittel aller möglichen Realisierungen der Zufallsvariablen ***Z*** ($\rightarrow$ **zu erwatender „durchschnittlicher“ Wert, auch: Anfangsmoment 1. Ordnung genannt**)

Für stetige Verteilungen:

$$E(Z) := \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot f_Z(z)\, d\, z$$

Dabei wird die Existenz des Integrals vorausgesetzt!

Für diskrete Verteilungen:

$$E(Z) := \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot P(Z = z_i)$$

Dabei wird die Konvergenz der Summe vorausgesetzt!

Rechenregeln zum Erwartungswert:

Linearität:

$$E(a \cdot Z_1 + Z_2) = a \cdot E(Z_1) + E(Z_2)$$

Bei **stochastischer Unabhängigkeit:**

$$E(Z_1 \cdot Z_2) = E(Z_1) \cdot E(Z_2)$$

Wichtiger Spezialfall:

Für **nicht-negative Verteilungsfunktionen**, d. h. wenn $F_Z(z) = 0$ ist für $\forall z \leq 0$ (z. B. Lebensdauer eines Systems), gilt:

$$E(Z) := \int_0^{+\infty} z \cdot f_Z(z)\, d\, z = \int_0^{+\infty} [1 - F_Z(z)]\, d\, z$$

Spezielle Verteilungsfunktionen:

Gleichverteilung: Verteilung innerhalb vorgegebener Grenzen ist konstant!

$$f(z_i) = \begin{cases} \text{konst.} & \text{für} \quad a \leq z_i \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- konst. ergibt sich aus der Normierungsbedingung
- oft zur Approximation komplexer Verteilungsfunktionen benutzt

Binomialverteilung: (Stichprobe vom Umfang ***n*** **mit** Zurücklegen)

Bernoulli-Versuch: Wenn Zufallsvariable ***Z*** nur die beiden Werte ***0*** oder ***1*** annehmen kann.

1 „Treffer" mit der Wahrscheinlichkeit ***p***, wobei ***p := P(Z = 1)***
0 „Niete" mit der Wahrscheinlichkeit ***q = 1 – p***
n Anzahl Versuche
k Trefferzahl

$$f_Z(k) = P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k} \quad \text{mit} \quad q = 1 - p$$

Binomialverteilung: (Stichprobe vom Umfang ***n*** **mit** Zurücklegen)

Mittelwert und Varianz:

Hierzu fassen wir eine Zufallsgröße **X** als die Summe von **n unabhängigen** Zufallsgrößen X_i auf, wobei X_i im i-ten Versuch nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann.

$\Rightarrow E(X_i) = p$ und $Var(X_i) = p\,(1 - p)$

Wegen der Unabhängigkeit der X_i und insgesamt n Versuchen:

$\Rightarrow E(\mathbf{X}) = n \cdot E(X_i) = n \cdot p$ und $Var(\mathbf{X}) = n \cdot Var(X_i) = n \cdot p\,(1 - p)$

Ergebnis:

$$E(\mathbf{X}) = \mu = n \cdot p$$

$$Var(\mathbf{X}) = \sigma^2 = n \cdot p\,(1 - p)$$

Poisson-Verteilung: (gute Näherung für die Binomialverteilung bei großem ***n*** und kleinem ***p***)

$$f_Z(k) = P(Z = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \; ; \quad k = 0, 1, \ldots$$

- $k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot k = (k-1)! \cdot k \, ;$ $\qquad 0! = 1! := 1$
- gerne für analytische Rechnungen oder für die Approximation komplexer Verteilungsfunktionen benutzt

Poisson-Verteilung: (gute Näherung für die Binomialverteilung bei großem ***n*** und kleinem ***p***)

- Diskrete, asymmetrische Verteilung mit $\lambda := n \cdot p$ sowie $\lim p \to 0$ und $\lim n \to \infty$.
- Beispiele: radioaktiver Zerfall, elektronisches Rauschen etc.
- Auch als Verteilung seltener Ereignisse bekannt.

Mittelwert und Varianz:

$$E(\mathbf{X}) = \mu = \lambda$$

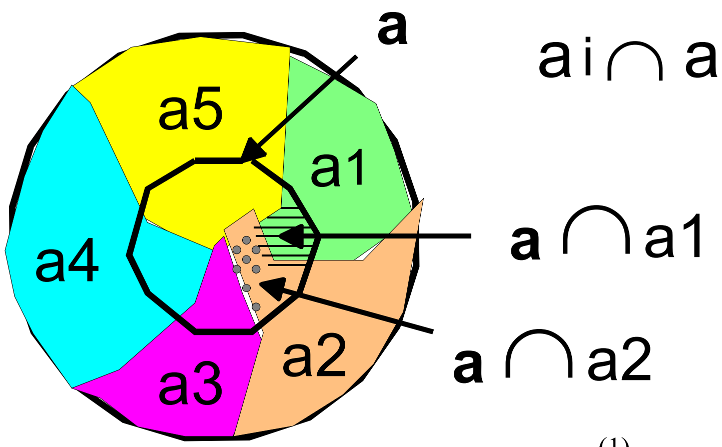
$$Var(\mathbf{X}) = \sigma^2 = \lambda$$

Poisson-Verteilung: (gute Näherung für die Binomialverteilung bei großem ***n*** und kleinem ***p***) $\rightarrow$ **Poissonsche Annahmen:**

- Innerhalb des Raum- oder Zeitintervalls Δs bzw. Δt gibt es **höchstens ein Ereignis** und beliebig viele Momente, in denen **nichts** geschieht (**Seltenheit**).
- Die Wahrscheinlichkeit, ein Ereignis im Raum- oder Zeitintervalls Δs bzw. Δt zu finden, ist **proportional** zur Länge des Intervalls – jedoch **unabhängig** vom Raum- oder Zeitkontinuum s bzw. t, wo das Bernoulli-Experiment sehr oft durchgeführt wird.
- Das Eintreten eines Ereignisses im Raum- oder Zeitintervalls Δs bzw. Δt wird nicht beeinflusst von Ereignissen, die in der Vergangenheit stattgefunden haben (**Gedächtnislosigkeit**).

Regel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Zum Beweis über die obige Regel muss man ***a*** gemäß dem skizzierten Venndiagramm aus **disjunkten Teilmengen *a*i** zusammensetzen.



$a_i \cap a_j = \{\ \}$ für $i <> j$

1. Summenregel für einander ausschließende Ereignisse
2. Definition für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(\mathbf{a}) \overset{(1)}{=} P(\mathbf{a} \cap a_1) + P(\mathbf{a} \cap a_2) + \ldots + P(\mathbf{a} \cap a_5) = \sum_{i=1}^{5} P(\mathbf{a} \cap a_i)$$

Mit

$$P(\mathbf{a} \cap a_i) \overset{(2)}{=} P(\mathbf{a} \mid a_i) \cdot P(a_i)$$

folgt:

$$P(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{5} \left[P(\boldsymbol{a} \mid a_i) \cdot P(a_i) \right]$$

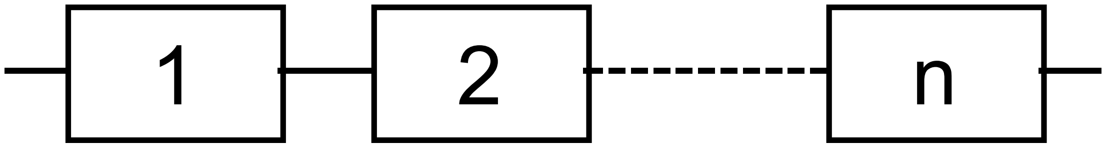
Speziell für ***n* = 2** und infolge dessen:

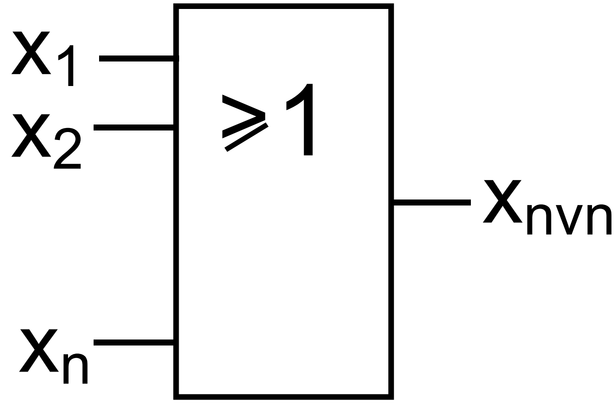
$$P(a_1) + P(a_2) = 1$$

gilt:

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{a}) &= P(\boldsymbol{a} \mid a_1) \cdot P(a_1) + P(\boldsymbol{a} \mid a_2) \cdot P(a_2) \\ &= P(\boldsymbol{a} \mid a_1) \cdot P(a_1) + P(\boldsymbol{a} \mid \overline{a}_1) \cdot P(\overline{a}_1) \end{aligned}$$

Seriensysteme:

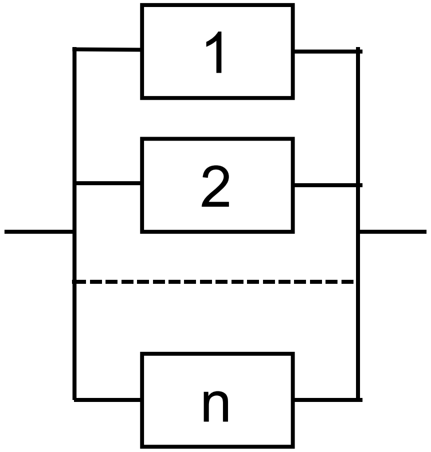


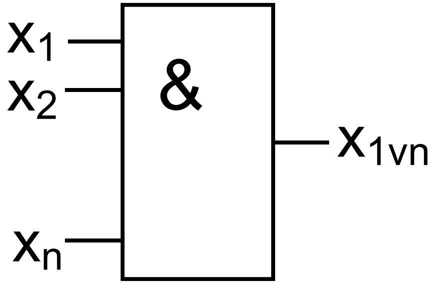


$$x_{nvn} = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$$

$$V_S^{nvn} = \prod_{1 \le i \le n} V_i \qquad U_S^{nvn} = 1 - \prod_{1 \le i \le n} (1 - U_i) \approx \sum_{1 \le i \le n} U_i \quad \text{für} \quad U_i << 1$$

Parallelsysteme:

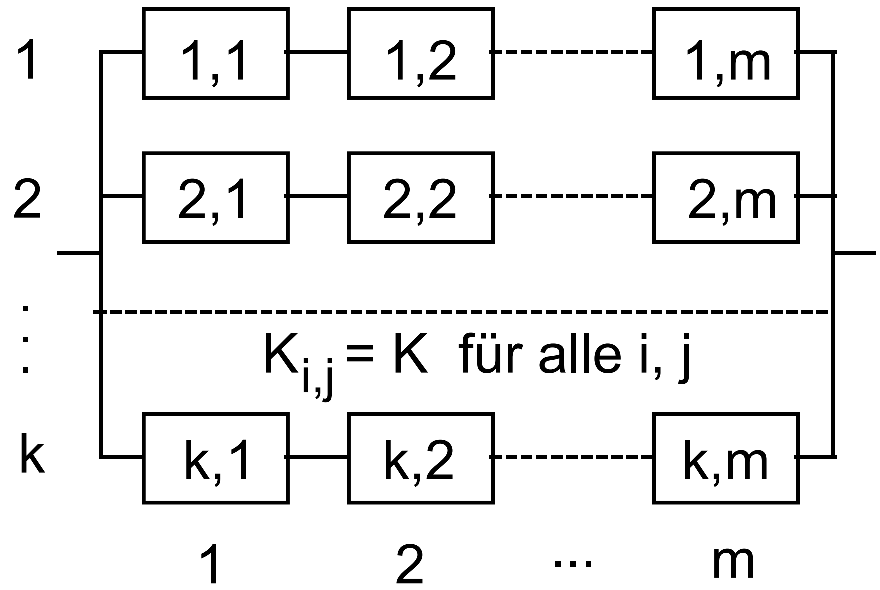




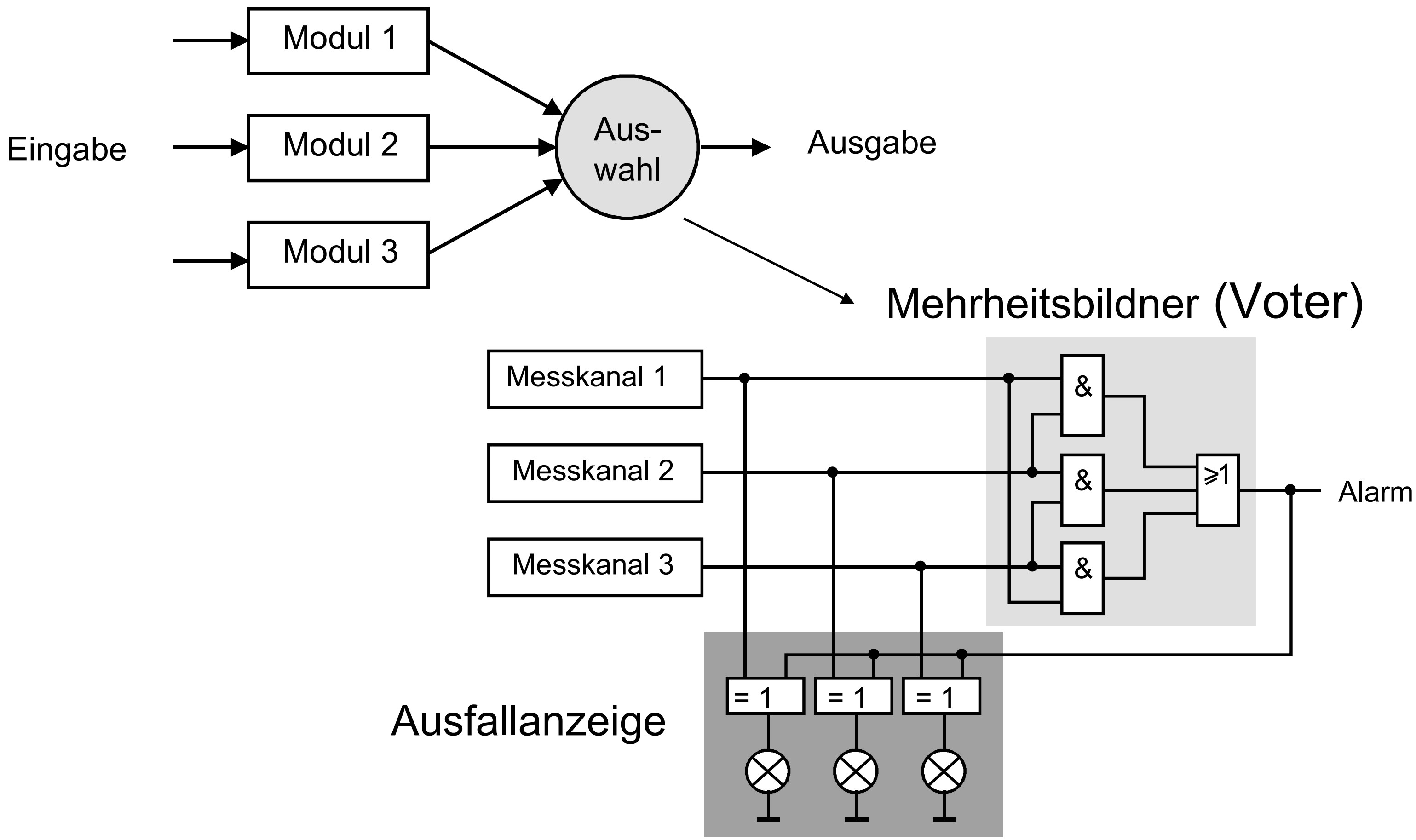
$$x_{1vn} = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$$

$$V_S^{1vn} = 1 - \prod_{1 \le i \le n} (1 - V_i) \qquad U_S^{1vn} = \prod_{1 \le i \le n} U_i$$

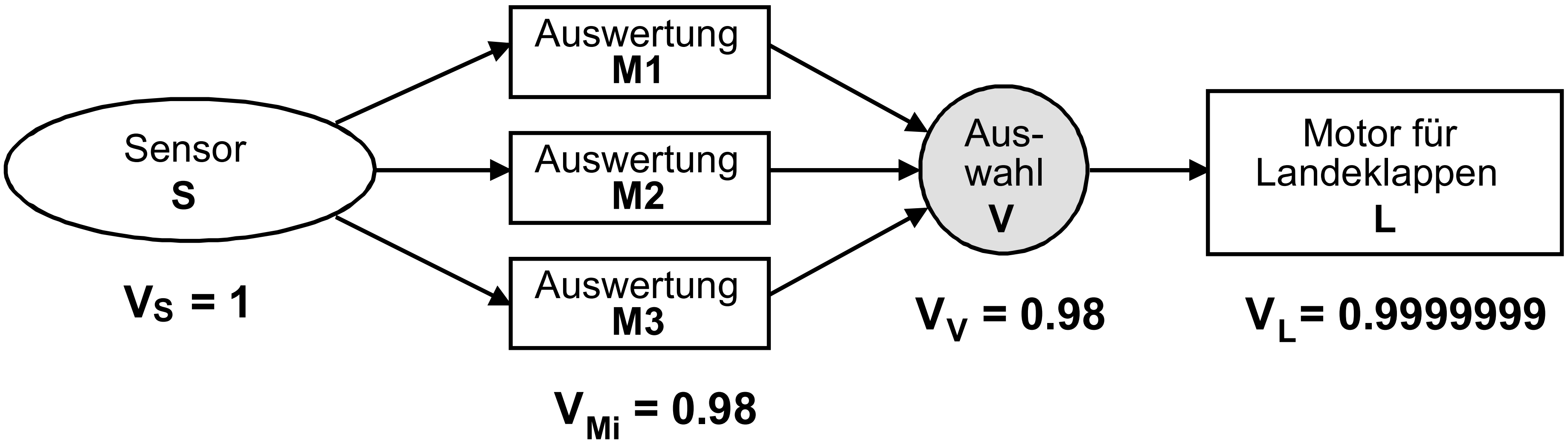
m-von-n-Systeme:



$$V_S^{mvn} = \sum_{x=0}^{n-m} \binom{n}{x} \cdot U^x \cdot (1-U)^{n-x}$$

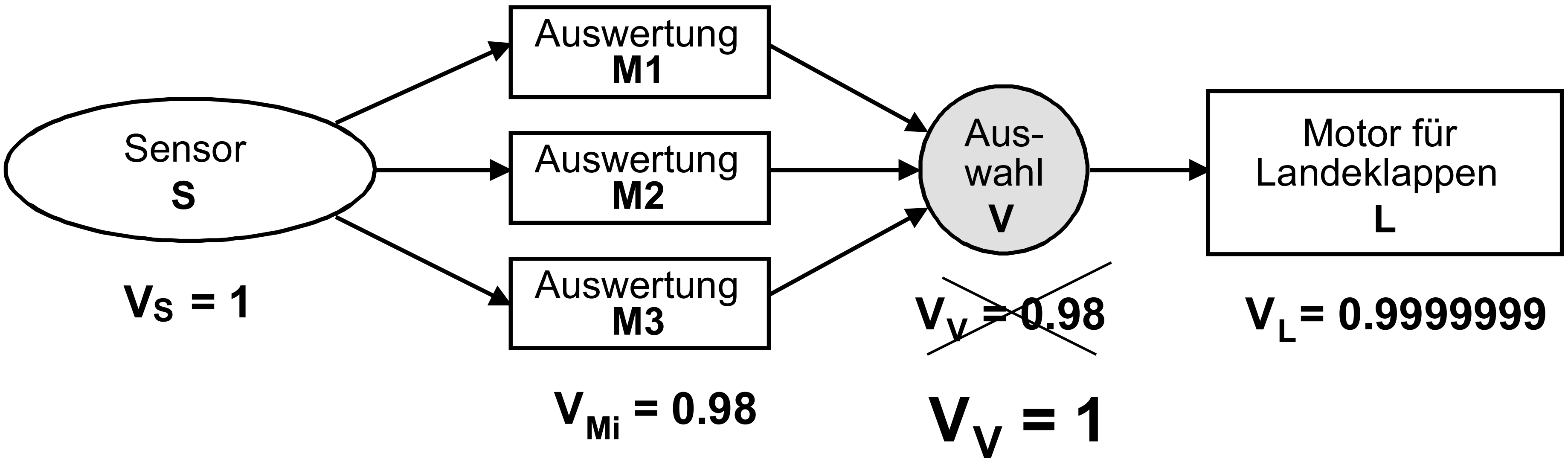


Eingabe
Modul 1
Modul 2
Modul 3
Aus-
wahl
Ausgabe
Mehrheitsbildner (Voter)
Messkanal 1
Messkanal 2
Messkanal 3
&
&
&
≥1
Alarm
Ausfallanzeige
= 1
= 1
= 1



Ohne Fehlertoleranz: $V_{SYS} = V_M * V_L = 0{,}9799999$

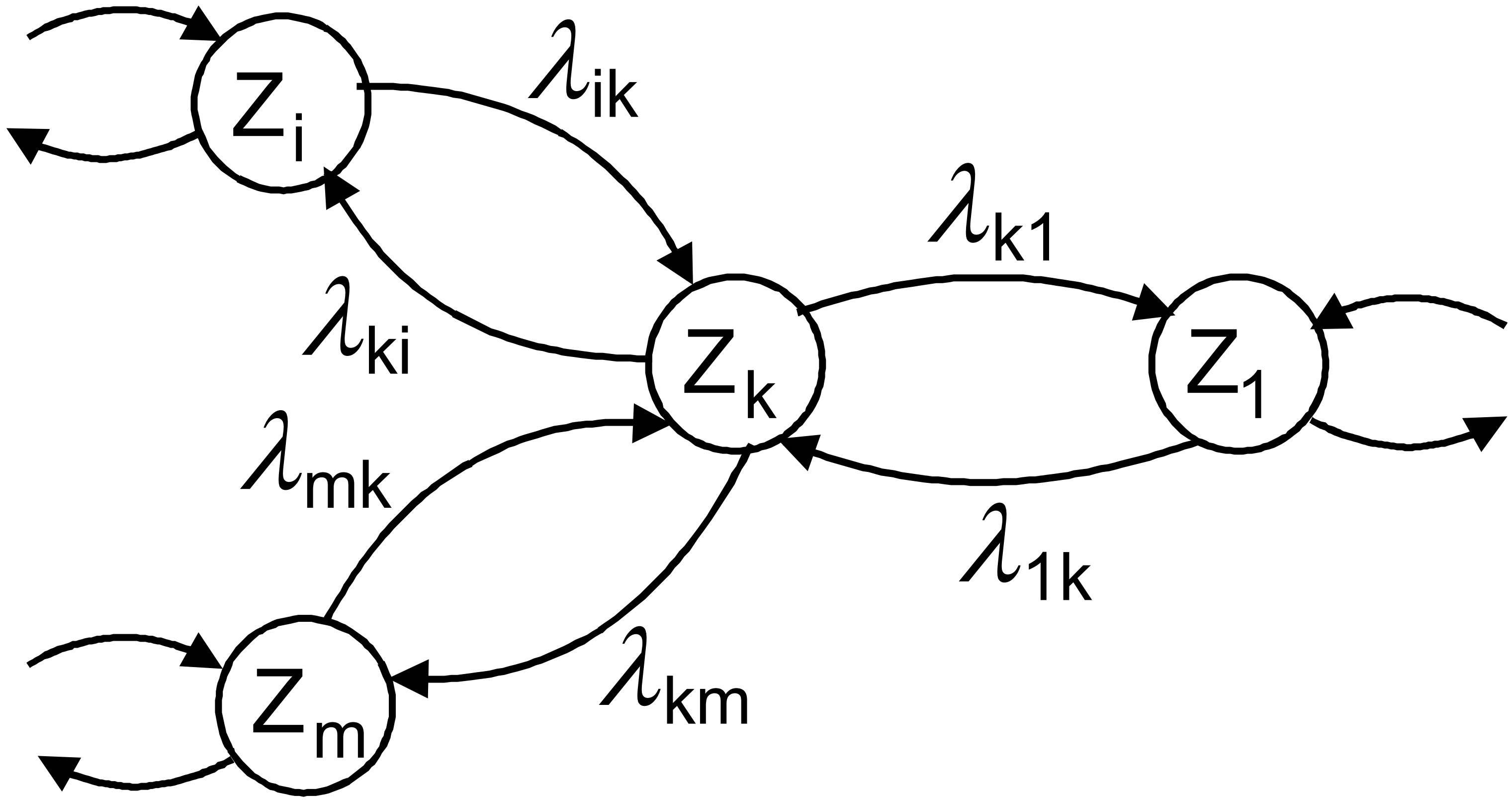
Mit Fehlertoleranz: $V_{SYS} = (V_{Mi}^3 + 3\,V_{Mi}^2\,(1 - V_{Mi})) * V_V * V_L = 0{,}978839582$



Ohne Fehlertoleranz: $V_{SYS} = V_M * V_L = 0,9799999$

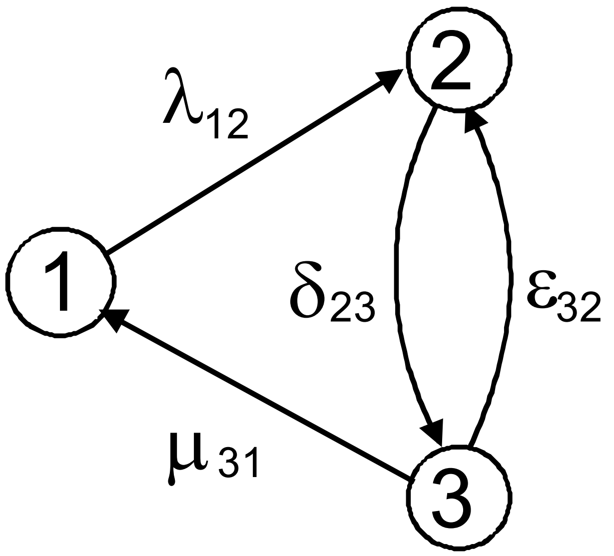
Mit Fehlertoleranz: $V_{SYS} = (V_{Mi}^3 + 3\, V_{Mi}^2\, (1 - V_{Mi})) * V_V * V_L = \cancel{0,978839582}$ **0,9988159**

Wahrscheinlichkeitsflüsse im Zustandsmodell:



Aufgabenstellung:

Wir betrachten folgende Systembeschreibung:



Zustandsbeschreibung:

1 = Betriebszustand

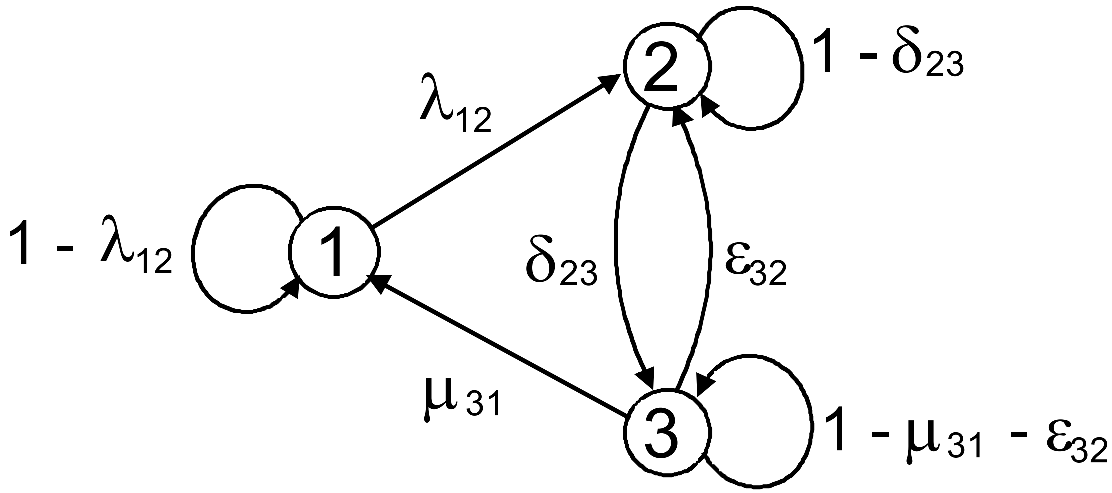
2 = Reparaturzustand

3 = Wiederanlauf

λ_{12}, μ_{31}, ε_{32} und δ_{23} sind allesamt **Übergangswahrscheinlichkeiten** $\in [0, 1]$

Markovmethode mit diskreter Zeitfunktion:

Modifizierung der Systembeschreibung durch:



Zwischenschritt:

Ergänze die **wegführenden Wahrscheinlichkeitsflüsse** auf 100 %.

Übergangswahrscheinlichkeiten:

Wir schreiben die Übergangswahrscheinlichkeiten als Matrix $[P] = (p_{ij})$:

nach Zustand Nr.

von Zustand Nr.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & [P] := \begin{bmatrix} 1-\lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 1-\delta_{23} & \delta_{23} \\ \mu_{31} & \varepsilon_{32} & 1-\mu_{31}-\varepsilon_{32} \end{bmatrix} = (p_{ij}) \end{array}$$

Hinweis: Zeilensumme von $[P]$ ist 1!

Mit dem **Zustandsvektor**

$$Z := \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

schreibt sich die **zeitdiskrete Lösung** für das zeitliche Verhalten:

$$Z_{n+1} := P^T \cdot Z_n \quad f\ddot{u}r \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Durch **sukzessives** Einsetzen ergibt sich die Lösungskette:

Lösungskette:

$$Z_1 := P^T \cdot Z_0$$

$$Z_2 := P^T \cdot Z_1$$

$$Z_3 := P^T \cdot Z_2$$

$\Rightarrow$

$$Z_3 := P^T \cdot Z_2 = P^T \cdot P^T \cdot Z_1 = P^T \cdot P^T \cdot P^T \cdot Z_0$$

$$:= \left[P^T\right]^3 \cdot Z_0 = \left[P^3\right]^T \cdot Z_0$$

Verallgemeinerung:

$$Z_n := \left[P^T\right]^n \cdot Z_0 = \left[P^n\right]^T \cdot Z_0$$

Stationäre Lösung:

- $n \to \infty$
- **unabhängig** vom Anfangszustand $\Rightarrow$

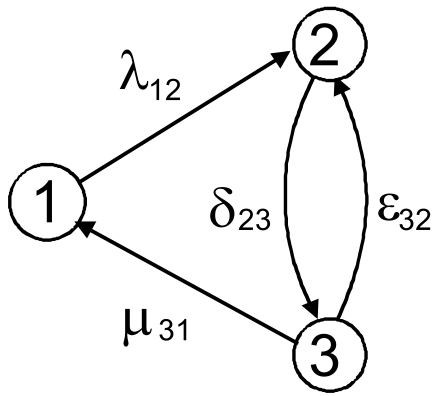
$$Z_0 := \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kann o.E.d.A. angenommen werden.

Konstruktion der Wahrscheinlichkeitsmatrix [P]:

Wir definieren die **Knoten-Inzidenzmatrix** $[K] = (k_{ij})$ mit den Übergangswahrscheinlichkeiten von Zustand Nr. i nach Zustand Nr. j:

$$[K] := \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{23} \\ \mu_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{bmatrix}$$



⇒ Wahrscheinlichkeits**hin**flüsse

Dann schreiben wir die Einheitsmatrix [*E*]:

$$[E] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sowie die Matrix [*M*] der Wahrscheinlichkeits**weg**flüsse:

$$[M] := \left(m_{ij}\right) \qquad mit$$

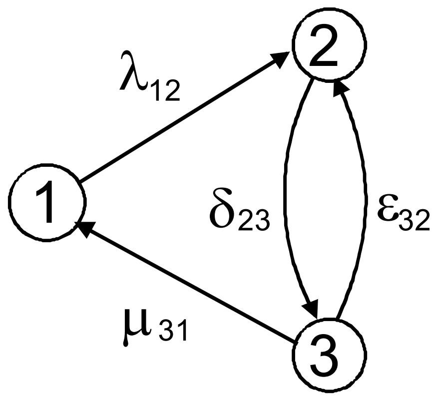
$$m_{ij} = \begin{cases} -\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} k_{ik} & falls \quad i = j \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Explizit aufgeschrieben:

$$m_{11} = -(0 + k_{12} + k_{13} + k_{14} + \ldots)$$
$$m_{22} = -(k_{21} + 0 + k_{23} + k_{24} + \ldots)$$
$$m_{33} = -(k_{31} + k_{32} + 0 + k_{34} + \ldots)$$
$$\cdots$$

$\Rightarrow$ hier im Beispiel:

$$[M] := \begin{bmatrix} -\lambda_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_{31} - \varepsilon_{32} \end{bmatrix}$$



Dann schreiben wir die Matrix der Wahrscheinlichkeiten [*P*] in der Form:

$$[P] := [K] + [E] + [M]$$

und erhalten auch in diesem Fall:

$$[P] := \begin{bmatrix} 1-\lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 1-\delta_{23} & \delta_{23} \\ \mu_{31} & \varepsilon_{32} & 1-\mu_{31}-\varepsilon_{32} \end{bmatrix} = \left(p_{ij}\right)$$

Hinweis: Zeilensumme von [*P*] ist 1!

Ergebnis:

Lösung für den **stationären** Zustand mittels Matrizenmultiplikation:

$$\lim_{n\to\infty}[P]^n := \begin{bmatrix} Z_{1,\infty} & Z_{2,\infty} & Z_{3,\infty} \\ Z_{1,\infty} & Z_{2,\infty} & Z_{3,\infty} \\ Z_{1,\infty} & Z_{2,\infty} & Z_{3,\infty} \end{bmatrix}$$

Hinweis:

Die stationäre Lösung $[\, Z_{1,\infty}, Z_{2,\infty}, Z_{3,\infty} \,]^T$ kann auch mit Hilfe eines **Gleichungssystems** berechnet werden.

Gleichungssystem:

Mit der Matrix [*P*] und dem Zustandsvektor *Z* schreibt sich:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}_{n+1} := \begin{bmatrix} 1-\lambda_{12} & 0 & \mu_{31} \\ \lambda_{12} & 1-\delta_{23} & \varepsilon_{32} \\ 0 & \delta_{23} & 1-\mu_{31}-\varepsilon_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}_{n}$$

mit

$$\mathrm{Z}_0 := \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für den **Zustand 1** ergibt sich die Gleichung:

$$Z_{1,n+1} = (1-\lambda_{12}) \cdot Z_{1,n} \qquad + \mu_{31} \cdot Z_{3,n}$$

Strebt das System für n $\rightarrow \infty$ einem (stationären) Grenzwert zu, so folgt wegen:

$$Z_{1,n+1} = Z_{1,n} = Z_{1,\infty} \quad \mathit{für} \quad n \rightarrow \infty$$

$$Z_{1,\infty} = (1-\lambda_{12}) \cdot Z_{1,\infty} \qquad + \mu_{31} \cdot Z_{3,\infty}$$

oder:

$$0 = -\lambda_{12} \cdot Z_{1,\infty} \qquad + \mu_{31} \cdot Z_{3,\infty}$$

Für den **Zustand 2** ergibt sich analog:

$$Z_{2,\infty} = \lambda_{12} \cdot Z_{1,\infty} + (1 - \delta_{23}) \cdot Z_{2,\infty} + \varepsilon_{32} \cdot Z_{3,\infty}$$

oder:

$$0 = \lambda_{12} \cdot Z_{1,\infty} - \delta_{23} \cdot Z_{2,\infty} + \varepsilon_{32} \cdot Z_{3,\infty}$$

Und schließlich erhält man für den **Zustand 3** eine 3. Gleichung:

$$Z_{3,\infty} = \delta_{23} \cdot Z_{2,\infty} + (1 - \mu_{31} - \varepsilon_{32}) \cdot Z_{3,\infty}$$

oder:

$$0 = \delta_{23} \cdot Z_{2,\infty} - (\mu_{31} + \varepsilon_{32}) \cdot Z_{3,\infty}$$

Das sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

- Leider sind nur zwei dieser Gleichungen linear unabhängig (eine der Gleichungen ergibt sich durch Addition der beiden anderen)
- Aber:
  Die Summe aller **Aufenthaltswahrscheinlichkeiten** $[Z_{1,\infty}, Z_{2,\infty}, Z_{3,\infty}]^T$ muss gleich 1 sein.

$$1 = Z_{1,\infty} + Z_{2,\infty} + Z_{3,\infty}$$

- Letztere ist die **dritte linear unabhängige** Gleichung.
- Damit ergibt sich insgesamt das lineare Gleichungssystem:

Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda_{12} \cdot Z_{1,\infty} &&&& + \quad \mu_{31} \cdot Z_{3,\infty} \\
0 &= \lambda_{12} \cdot Z_{1,\infty} && - \delta_{23} \cdot Z_{2,\infty} && + \quad \varepsilon_{32} \cdot Z_{3,\infty} \\
1 &= \phantom{-\lambda_{12} \cdot{}} Z_{1,\infty} && + \phantom{\delta_{23} \cdot{}} Z_{2,\infty} && + \quad \phantom{\varepsilon_{32} \cdot{}} Z_{3,\infty}
\end{aligned}
$$

Aus diesem Gleichungssystem lässt sich die **stationäre Lösung**:

$$
\mathrm{Z}_{\infty} := \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}_{\infty}
$$

leicht berechnen (z. B. Gaussche Eliminationsverfahren).

Resultat:

$$Z_{1,\infty} = \frac{\mu_{31} \cdot \delta_{23}}{\eta}$$

$$Z_{2,\infty} = \frac{\lambda_{12} \cdot (\varepsilon_{32} + \mu_{31})}{\eta}$$

$$Z_{3,\infty} = \frac{\lambda_{12} \cdot \delta_{23}}{\eta}$$

$$mit \quad \eta = \lambda_{12}(\varepsilon_{32} + \delta_{23}) + \mu_{31}(\lambda_{12} + \delta_{23})$$

Markovmethode mit kontinuierlicher Zeitfunktion:

$$\dot{P}_k(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{m} \left(\lambda_{ik} \cdot P_i(t) - \lambda_{ki} \cdot P_k(t) \right) \quad \mathit{für} \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{9}$$

$$\dot{\underline{P}}(t) = \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot \underline{P}(t) \quad mit \quad \underline{\underline{\Delta}} := f(\lambda_{ik})_{m,m} \,, \tag{10}$$

$$\underline{P}(t) = \underline{\underline{e}}^{\underline{\underline{\Delta}}^T t} \cdot \underline{P}(0) \quad \mathit{für} \quad \forall t > 0 \quad . \tag{11}$$

Numerische Integration:

Explizite Euler-Methode:

$$P_k(n+1) = P_k(n) + \Delta t_n \cdot \dot{P}_k(n) \qquad (12)$$

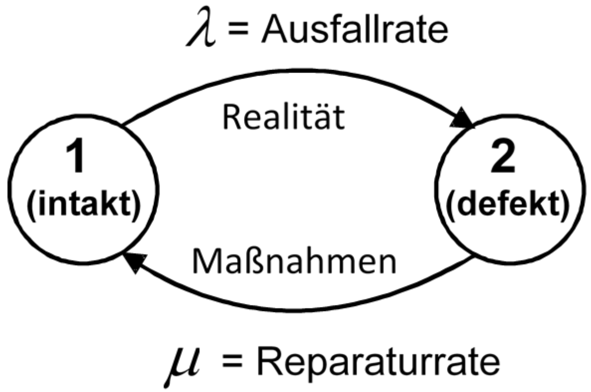
Implizite Euler-Methode:

$$P_k(n+1) = P_k(n) + \Delta t_n \cdot \dot{P}_k(n+1) \qquad (13)$$

Reparaturmodell:

Gemäß Kap. 3, Folie 11:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_1(t) + \mu \cdot P_2(t) \qquad P_1(t) + P_2(t) = 1$$



$$P_k(n+1) = P_k(n) + \Delta t_n \cdot P'_k(n)$$

Iterationsformel:

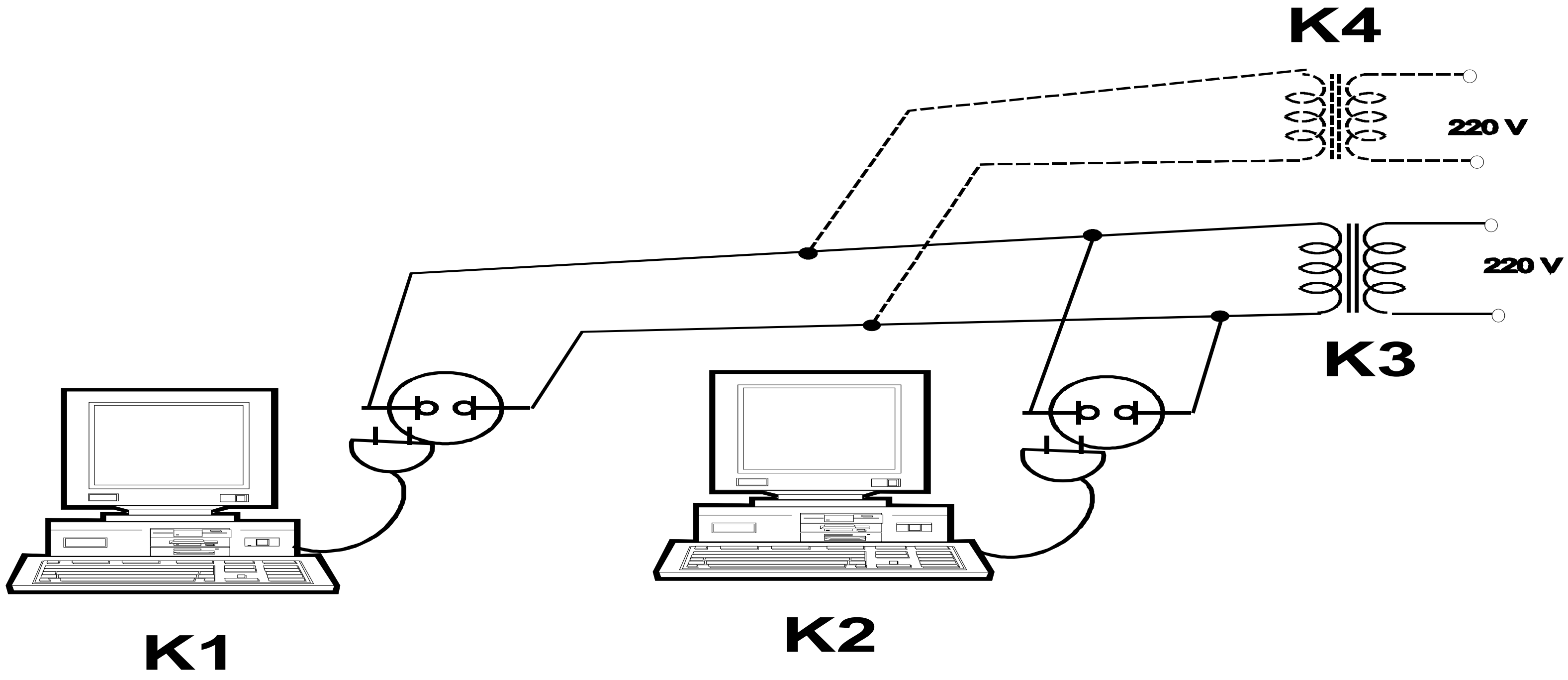
$$P_1(n+1) = [\, 1 - \Delta t_n \cdot (\lambda + \mu) \,] \cdot P_1(n) + \Delta t_n \cdot \mu$$

mit für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_1(0) = 1.$$

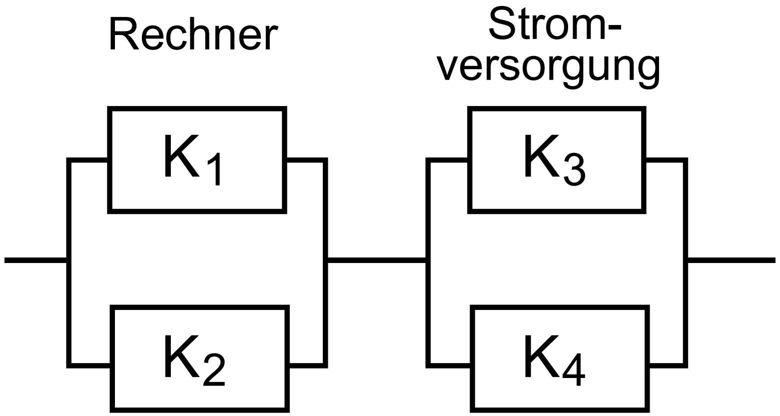
Systemverfügbarkeit:

$$V_S = \lim_{t \to \infty} P_1(t)$$

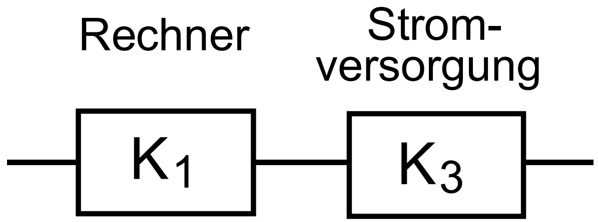


Fragestellung:

Ist die Systemverfügbarkeit höher als die Verfügbarkeit der Einzelrechner?



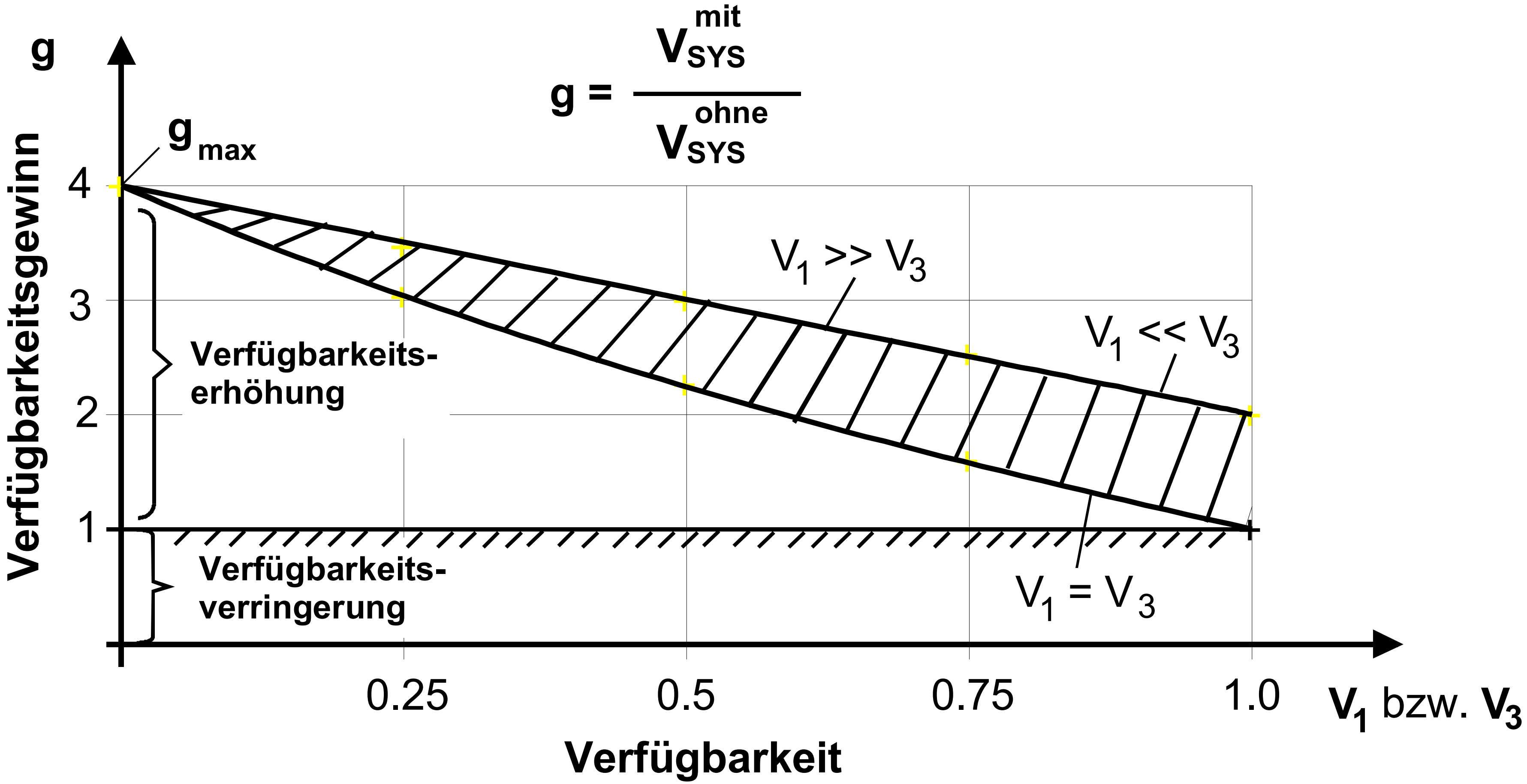
$$V_{12} = V_1 + V_2 - V_1 \cdot V_2 \qquad V_{34} = V_3 + V_4 - V_3 \cdot V_4$$



$$V_{SYS}^{ohne} = V_1 \cdot V_3$$

$$\begin{aligned} V_{SYS}^{mit} &= V_{12} \cdot V_{34} \\ &= 4 \cdot V_1 \cdot V_3 - 2 \cdot V_1^2 \cdot V_3 - 2 \cdot V_1 \cdot V_3^2 + V_1^2 \cdot V_3^2 \end{aligned}$$

$$\textit{für} \quad V_1 = V_2 \quad \textit{und} \quad V_3 = V_4$$


g
$g = \frac{V_{SYS}^{mit}}{V_{SYS}^{ohne}}$
g_{max}
4
3
2
1
Verfügbarkeitsgewinn
Verfügbarkeits-
erhöhung
Verfügbarkeits-
verringerung
$V_1 >> V_3$
$V_1 << V_3$
$V_1 = V_3$
0.25
0.5
0.75
1.0
V_1 bzw. V_3
Verfügbarkeit