Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kapitel 04: Zufallsvariablen

Prof. Dr. Adrian Ulges

B.Sc. *Informatik*
Fachbereich DCSM
Hochschule RheinMain

Outline

Von Zufallsexperimenten zu Zufallsvariablen Bild: [2]

Wie wir bisher Zufallsexperimente formalisiert haben

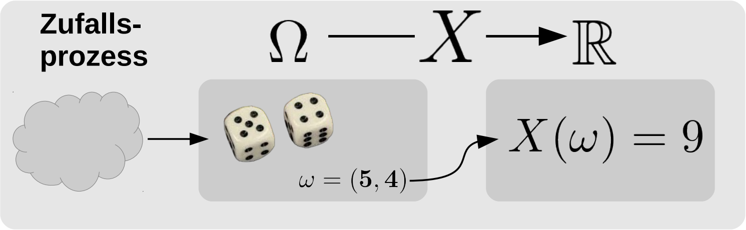
- Ergebnismenge Ω
- Wahrscheinlichkeiten sind auf Ereignissen $A \subseteq \Omega$ definiert.

Von Zufallsexperimenten zu Zufallsvariablen

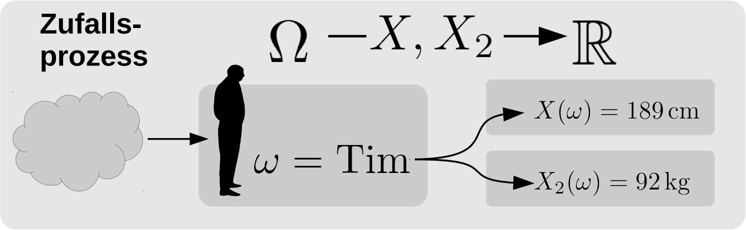
- Oft interessieren uns nur Zahlenwerte, die sich aus den Ergebnissen ergeben.
- Diese Zahlenwerte modellieren wir mittels sogenannter Zufallsvariablen.

Zufallsvariablen: Illustration

Beispiel: Zwei Würfel (Augensumme)

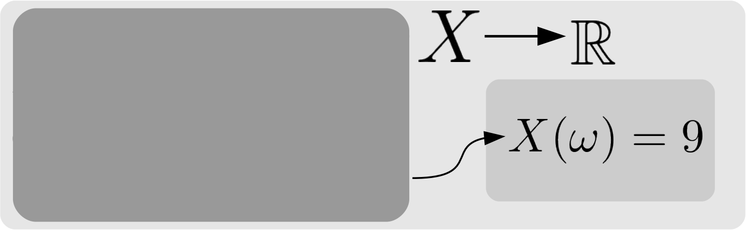


Beispiel: Körpergröße

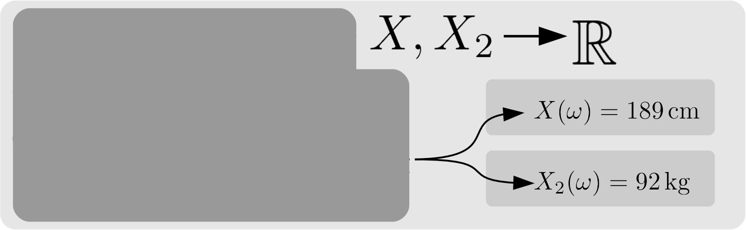


Zufallsvariablen: Illustration

Beispiel: Zwei Würfel (Augensumme)



Beispiel: Körpergröße



Zufallsvariablen: Formalisierung

Definition (Zufallsvariable)

Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann nennen wir eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

eine Zufallsvariable. Die Zufallsvariable ordnet jedem Ergebnis ω des Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zu.

Anmerkungen

- Wir bezeichnen Zufallsvariablen üblicher Weise mit Großbuchstaben $(X, Y, \ldots)$.
- Wir bezeichnen die Werte, die Zufallsvariablen annehmen, mit Kleinbuchstaben $(x, y, \ldots)$. Diese Werte nennen wir auch die Realisierungen der Zufallsvariable.

Diskrete Zufallsvariablen

Das Ereignis 'X=x'

- In der Regel wollen wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Zufallsvariable X einen bestimmten Wert x annimmt. Hierzu definieren wir das Ereignis

$$'X{=}x' := \left\{\omega \,|\, X(\omega) = x\right\}.$$

- Beispiel: Augensumme X von zwei 6-seitigen Würfeln

$$'X{=}4' = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \quad \rightarrow \quad P(X = 4) = 3/36.$$

Zunächst: Diskrete Zufallsvariablen

- Sogenannte Diskrete Zufallsvariablen können nur endlich oder *abzählbar* unendlich viele Realisierungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ annehmen.
- Wir schreiben kurz: $p_i := P(X = x_i)$.
- Realisierungen x_i und Wahrscheinlichkeiten p_i bilden die sog. Verteilung der Zufallsvariablen.

Diskrete Zufallsvariable: Beispiele

Würfeln mit zwei Würfeln, Augensumme

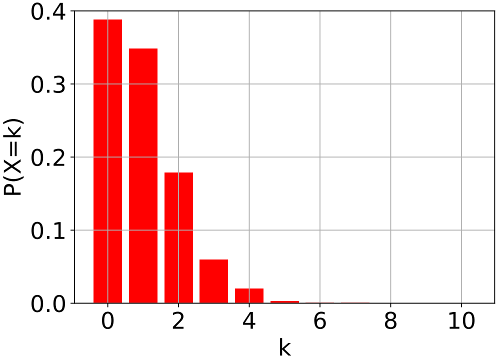
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispielereignisse

- $P(X = 9) = \frac{4}{36}$
- $P(X \in \{2, 4, 6\}) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{1}{4}$
- $P(4 \leq X < 7) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{12}{36}$
- $P(\overline{X = 7}) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

Diskrete Zufallsvariable: Grafische Darstellung

Wir können die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (genau wie relative Häufigkeiten) als Säulendiagramm darstellen:



Outline

Verteilungsfunktionen

Definition (Verteilungsfunktion)

Sei X eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable. Dann nennen wir die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit

$$F(x) = P(X \leq x)$$

die **Verteilungsfunktion** *von X.*

Anmerkungen

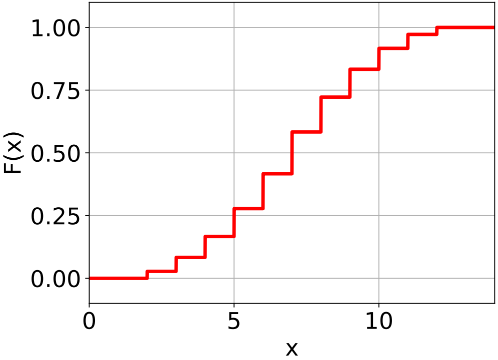
- Für diskrete Zufallsvariablen ermitteln wir $F(x)$, indem wir einfach die Wahrscheinlichkeit für alle Werte kleiner oder gleich x aufsummieren (oder *kumulieren*):

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} p_i$$

Verteilungsfunktion: Beispiel

Würfeln mit zwei Würfeln, Augensumme

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X \leq x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1



Verteilungsfunktion: Grafische Darstellung

Es ergibt sich also:

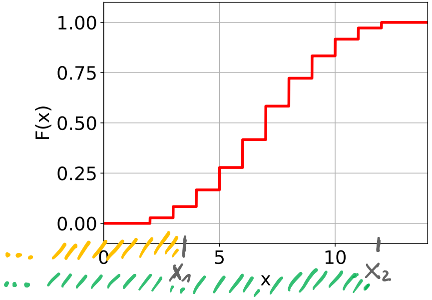
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 2 \\ 1/36 & \text{falls } 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & \text{falls } 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & \text{falls } 4 \leq x < 5 \\ 10/36 & \text{falls } 5 \leq x < 6 \\ \dots & \\ 35/36 & \text{falls } 11 \leq x < 12 \\ 1 & \text{falls } 12 \leq x \end{cases}$$

Verteilungsfunktion: Eigenschaften

Es sei $x_1 < x_2$.

Dann folgt:

$F(x_1) \le F(x_2)$



Die Verteilungsfunktion F einer *(diskreten oder stetigen)* Zufallsvariablen X ist immer monoton wachsend.

Beweis Es sei $x_1 < x_2$.

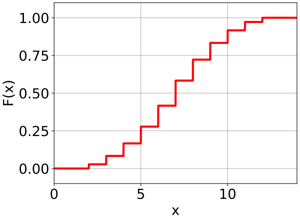
$\Rightarrow \quad X \le x_1 \subseteq X \le x_2 \quad \overset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow} \quad P(X \le x_1) \le P(X \le x_2)$

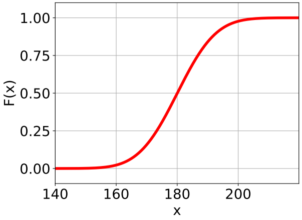
$\Rightarrow \quad F(x_1) \le F(x_2)$ ✓

Outline

Von diskreten zu stetigen Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen	**Stetige Zufallsvariablen**
haben wir schon kennengelernt	lernen wir jetzt kennen
können nur abzählbar viele Werte annehmen	können überabzählbar viele Werte annehmen
besitzen eine Verteilungsfunktion F	besitzen eine Verteilungsfunktion F
F weist Sprünge auf	F ist stetig





Definition: Dichtefunktion

Definition (Dichtefunktion)

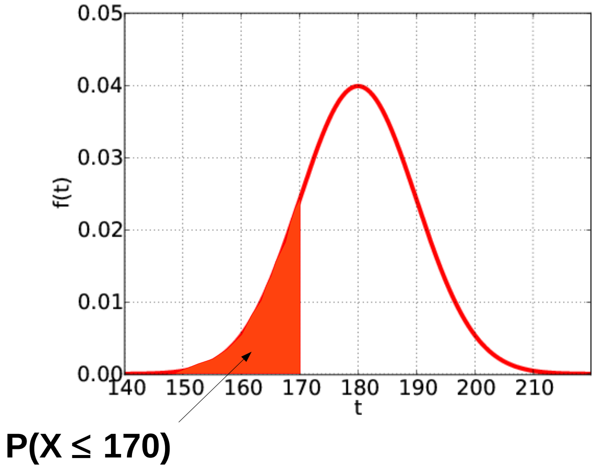
*Es sei X eine **stetige** Zufallsvariable mit (stückweise) differenzierbarer Verteilungsfunktion F. Die Ableitung*

$$f(x) = F'(x)$$

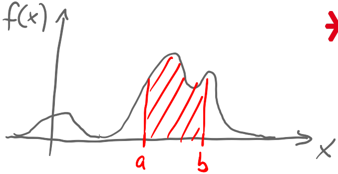
*nennen wir eine **Dichtefunktion**. Umgekehrt erhalten wir die Verteilungsfunktion durch Integration der Dichtefunktion:*

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Dichtefunktion: Illustration



Dichtefunktion: Eigenschaften



Es sei X eine stetige Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Dann gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

$$P(a < X < b) = \quad ''$$

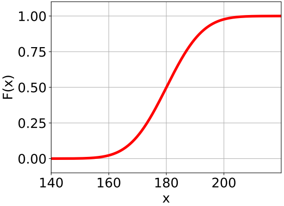
$$P(a \leq X < b) = \quad ''$$

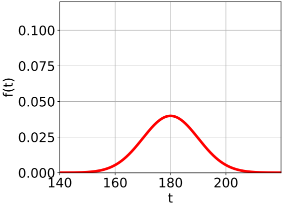
$$P(a < X \leq b) = \quad ''$$

(Gilt nur für stetige Zuf.variablen!)

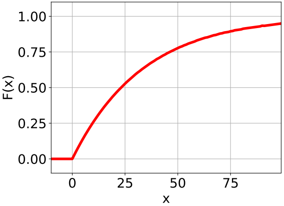
Dichtefunktion: Beispiele

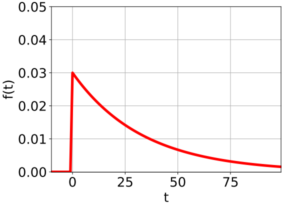
X = *Größe zufällig ausgewählter männlicher Personen zwischen* 20 *und* 25 *Jahren*





X = *Lebensdauer einer Festplatte (in Monaten)*





Beispiel: Festplatte

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Festplatte im 3. Betriebsjahr ausfällt?

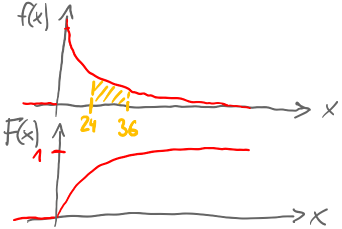
(in Monaten)

X sei die Lebensdauer der Festplatte, mit Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\lambda = \frac{1}{24}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sonst} \end{cases}$$



$$P(24 \leq X \leq 36) = \int_{24}^{36} f(t)\,dt$$

$$= \left[1 - e^{-\lambda x}\right]_{24}^{36} = \underbrace{\left(\cancel{1} - e^{-\cancel{\lambda \cdot 36}^{\,1,5}}\right)}_{x=36} + \underbrace{\left(\cancel{1} + e^{\cancel{\lambda \cdot 24}^{\,1}}\right)}_{x=24}$$

$$= e^{-1} - e^{-3/2} \approx 14{,}5\,\%$$

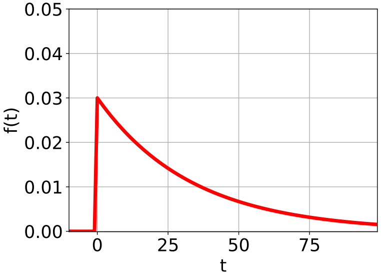
Beispiel: Festplatte

Dichtefunktion: Eigenschaften

Alle Dichtefunktionen besitzen zwei wichtige Eigenschaften:

1. Die Dichte ist niemals negativ, d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
2. Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion ist 1, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$



Stetige vs. diskrete Zufallsvariablen

Satz (Punktwahrscheinlichkeiten)

Eine Zufallsvariable X ist genau dann stetig, wenn

$$P(X = x) = 0 \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Anmerkungen

- Das bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert x_0 annimmt, ist immer gleich null *(auch wenn die Dichte $f(x_0) > 0$ ist)*.
- Aber: Die Wahrscheinlichkeit, dass X in einem bestimmten Bereich $[a, b]$ mit $a < b$ liegt, ist im Allgemeinen > 0.

Outline

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Wiederholung: *Wann haben wir Ereignisse A, B als unabhängig bezeichnet?*

- *"Wenn das Auftreten von A nicht die Wahrscheinlichkeit B beeinflusst"*
- *Formal:*
  - $P(B|A) = P(B)$
  - *bzw.* $P(A|B) = P(A)$
  - *bzw.* $P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$

Die Würfel sind unabhängig

Größe und Gewicht sind abhängig

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen?

Intuition: Zwei Zufallsvariablen X, Y sind unabhängig, wenn die **Werte, die X annimmt, nicht beeinflusst werden von den Werten die Y annimmt**.

Definition: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Wir bezeichnen zwei Zufallsvariablen X und Y als unabhängig, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

Anmerkungen

- Wir können die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen also genauso prüfen wie wir es für Ereignisse bereits kennen. Wir müssen nur alle möglichen “Fälle” abdecken!
- Für diskrete Zufallsvariablen können wir alternativ prüfen, ob für alle Realisationen x_i (bzw. y_j) von X (bzw. Y) gilt:

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$$

Beispiel 1 (Zweifaches Würfeln)

Wir werfen zwei faire sechsseitige Würfel:

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$
- Für $(\omega_1,\omega_2) \in \Omega$ definieren wir die Zufallsvariablen
  - $X := \omega_1$ (1. Wurf)
  - $Y := \omega_2$ (2. Wurf)

Beispiel 2 (Zweifaches Würfeln)

Wir werfen zwei faire sechsseitige Würfel:

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$ $(\#\Omega = 36)$
- Für $(\overset{3}{\omega_1}, \overset{5}{\omega_2}) \in \Omega$ definieren wir die Zufallsvariablen
  - $X := \omega_1 + \omega_2$ (Summe der Augen) $= 8$
  - $Y := \omega_1 \cdot \omega_2$ (Produkt der Augen) $= 15$

X, Y Unabhängig?

$\Rightarrow$ Vermutung: Nein!

$(\forall x, y: P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y))$

Idee: Gegenbeispiel $x = 10$, $y = 10$

- $P(X=10) = 3/36$ // $(5,5), (4,6), (6,4)$
- $P(Y=10) = 2/36$ // $(5,2), (2,5)$

disjunkt!

- $P(X=10, Y=10) = 0$

$\Rightarrow$ $P(X=10, Y=10) \overset{?}{=} P(X=10) \cdot P(Y=10)$

$0 \overset{?}{=} 3/36 \cdot 2/36$ ↯

$\Rightarrow$ Abhängig!

Outline

Wiederholung: Kennwerte

Wir kennen bereits Kennwerte für Stichproben (Kapitel 1):

- (Arithmetischer) Mittelwert
- Median und Quantile
- Varianz
- Kovarianz
- ...

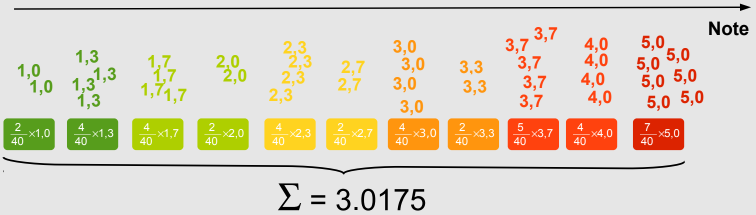
Wir können ähnliche Kennwerte auch zur Beschreibung der Verteilung von Zufallsvariablen einsetzen.

Wiederholung: Mittelwert

Wie kann man den **Mittelwert** einer Stichprobe berechnen?

- Alle Samples aufsummieren und durch *n* teilen ...
- ... oder: Jeden vorkommenden Wert mit seiner relativen Häufigkeit gewichten
  und die gewichtete Summe bilden

Beispiel



"Mittelwerte" für **Zufallsvariablen**?

- Bisher: Gewichtete Summe mit **relativen Häufigkeiten**
- Jetzt: Gewichtete Summe mit **Wahrscheinlichkeiten**

Definition: Erwartungswert

Definition (Erwartungswert)

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Realisierungen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_m$). Dann nennen wir

$$E(X) := \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot x_i$$

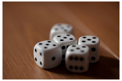
den Erwartungswert von X. Existieren unendlich viele Realisierungen $x_1, x_2, \ldots$, entspricht $E(X)$ einer Reihe:

$$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot x_i$$

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f, dann lautet der Erwartungswert:

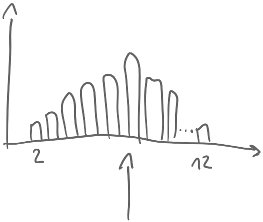
$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx$$

Erwartungswert: Beispiel 1 Bild: [2]



Würfeln mit zwei Würfeln, Augensumme X

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

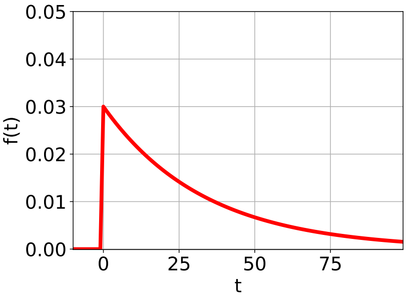


$E(X) = 7\ ?$

$$E(X) = \sum_i p_i \cdot x_i = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \ldots + \frac{1}{36} \cdot 12$$

$= 7$:)

Erwartungswert: Beispiel 2



Ausfall einer Festplatte

- X = *Lebensdauer einer Festplatte (in Monaten)*
- Die Dichtefunktion lautet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\lambda = \frac{1}{24}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{=0} \cdot x \, dx} + \int_{0}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x) \cdot x \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b (\lambda \cdot e^{-\lambda x}) \cdot x \, dx = \lim_{b \to \infty} \left[e^{-\lambda x} \cdot \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \right]_{x=0}^{x=b}$$

Stammfkt. per partieller Integr. bestimmen

Erwartungswert: Beispiel 2

$$\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\lambda x}\cdot\left(-x-\frac{1}{\lambda}\right)\right]_{x=0}^{x=b}$$

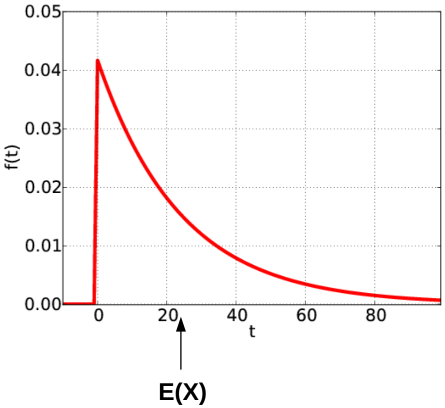
$$= \lim_{b\to\infty}\underbrace{\left(\underbrace{e^{-\lambda b}}_{\rightsquigarrow 0}\cdot\underbrace{\left(-b-\frac{1}{\lambda}\right)}_{\rightsquigarrow -\infty}\right)}_{\rightsquigarrow 0}-\left(\underbrace{e^{-0}}_{=1}\cdot\left(\cancel{-0}-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

$$= 1/\lambda \quad \checkmark$$

$$= 24$$

Erwartungswert: Eigenschaften

- Die erwartete Lebensdauer beträgt also **24 Monate**
- Wir sehen: $E(X)$ entspricht dem **Schwerpunkt** der Verteilung



Outline

Varianz von Zufallsvariablen

Der Erwartungswert beschreibt die erwartete Lage der Werte einer Zufallsvariablen. Wir wollen nun zusätzlichen Aussagen über die erwartete Streuung treffen.

Wiederholung: Varianz für Stichproben

Gegeben eine Stichprobe $x_1, .., x_n \in \mathbb{R}$ mit Mittelwert $\overline{x}$, nennen wir

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

die Varianz der Stichprobe.

Varianz für **Zufallsvariablen**?

- Varianz (Stichproben) $=$ mittlerer quadrierter Abstand vom Mittelwert.
- Varianz (Zufallsvariablen) $=$ erwarteter quadrierter Abstand vom Erwartungswert.

Definition: Varianz von Zufallsvariablen

Definition (Varianz (Zufallsvariable))

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Realisierungen $x_1, \ldots, x_m$ und Erwartungswert $E(X) = \mu$. Dann definieren wir die Varianz von X als:

$$Var(X) = \sum_i p_i \cdot (x_i - \mu)^2$$

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f und Erwartungswert μ, dann definieren wir:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 \, dx$$

Anmerkungen

- Idee wie beim Erwartungswert: Jede Realisierung wird gewichtet mit ihrer Wahrscheinlichkeit / Dichte !

Definition: Varianz von Zufallsvariablen

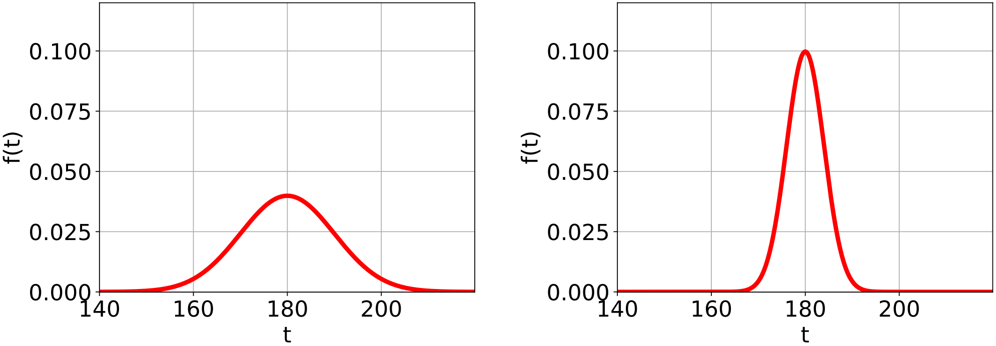
Anmerkungen (cont'd)

- Wir notieren die Varianz auch mit σ^2.
- Wir nennen die Wurzel σ die Standardabweichung.
- Es gilt immer: $Var(X) \geq 0$. $Var(X) = 0$ gilt genau dann, wenn X nur einen Wert annimmt (*"entartete" Zufallsvariable*).
- Der Verschiebungssatz – den wir bereits für Stichproben kennen – gilt analog für die Varianz von Zufallsvariablen. Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E(X) = \mu$ und Varianz σ^2. Dann gilt:

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Varianz von Zufallsvariablen: Grafische Interpretation

Die Varianz drückt die Streuung der Fläche unter der Dichtefunktion aus.



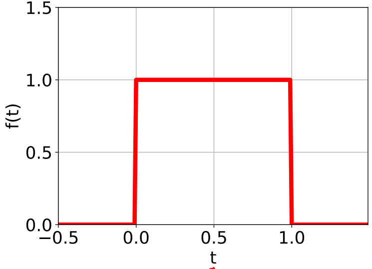
- **Links**: Dichte einer Variable X_1 mit Varianz $Var(X_1) = 100$
- **Rechts**: Dichte einer Variable X_2 mit Varianz $Var(X_2) = 16$

Varianz: Beispiel

- X besitze die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Der Erwartungswert beträgt $\mu = \frac{1}{2}$



E(X)

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x-\mu)^2 \, dx = \int_0^1 \underbrace{\cancel{1}}_{(=f(x))} \cdot \Big(x - \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{(=\mu)}\Big)^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - (0 - 0 + 0) = 1/12 \;\checkmark$$

Varianz: Beispiel

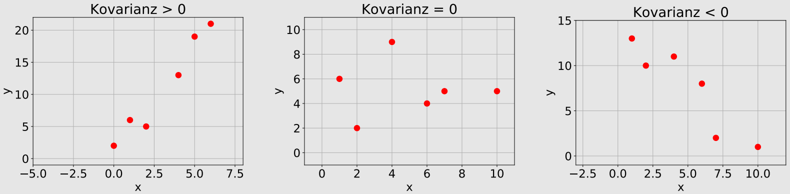
Outline

Kovarianz von Zufallsvariablen

Wiederholung: Kovarianz für Stichproben

Gegeben eine Stichprobe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, *lautet die* ***Kovarianz***

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$



Kovarianz für **Zufallsvariablen**?

- **Gleiche Idee**: Die Kovarianz zwischen X und Y ist positiv *(bzw. negativ)*, falls *(wenn wir sehr oft ziehen)* mit **wachsendem X-Wert** auch der Y-Wert steigt *(bzw. fällt)*.

Kovarianz von Zufallsvariablen

Definition (Kovarianz (diskrete Zufallsvariablen))

Es seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit Realisierungen $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$, sowie Erwartungswerten μ_X und μ_Y.
Dann nennen wir

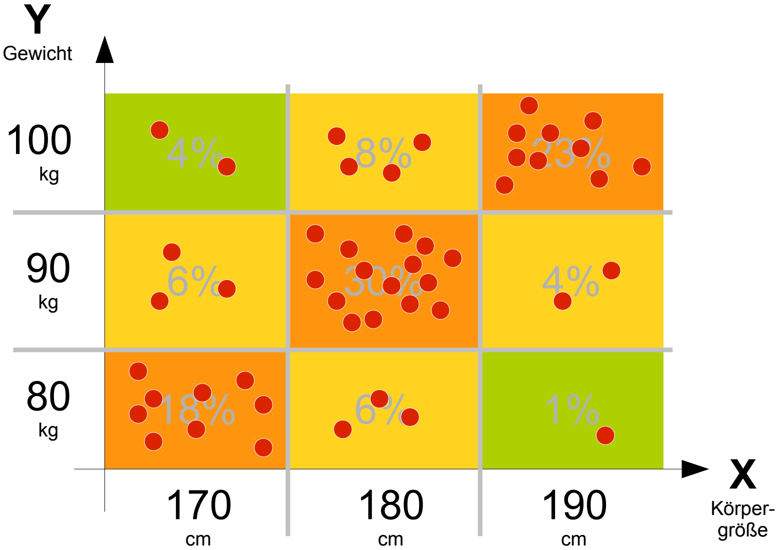
$$Cov(X, Y) = \sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \cdot (x_i - \mu_X) \cdot (y_j - \mu_Y)$$

die Kovarianz von X und Y.

Anmerkungen

- (Auch) diese Formel ist analog zu der für Stichproben.
- Die Kovarianz drückt *(analog zur Stichproben-Variante)* eine lineare Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen aus.
- Sind X und Y unabhängig, gilt $Cov(X, Y) = 0$.

Kovarianz: Beispiel



Kovarianz: Beispiel

Wir berechnen die Kovarianz $Cov(X, Y)$:

$$\mu_X = \sum_i P(X=x_i) \cdot x_i = 0{,}28 \cdot 170 + 0{,}44 \cdot 180 + 0{,}28 \cdot 190 = 180$$

$$\mu_Y = \sum_j P(Y=y_j) \cdot y_j = 0{,}35 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 90 + 0{,}25 \cdot 80 = 91$$

	Y Gewicht	170 cm	180 cm	190 cm
$P(Y=100)=35\%$	100 kg	4%	8%	23%
$P(Y=90)=40\%$	90 kg	6%	30%	4%
$P(Y=80)=25\%$	80 kg	18%	6%	1%
	X Körpergröße	$P(X=170)=28\%$	$P(X=180)=44\%$	$P(X=190)=28\%$

$$Cov(X,Y) = \sum_{i,j} P(X=x_i, Y=y_j) \cdot (x_i - \mu_X) \cdot (y_j - \mu_Y)$$

$$\begin{aligned} = \; & 0{,}04 \cdot (170-180) \cdot (100-91) \\ + \; & 0{,}08 \cdot (180-180) \cdot (100-91) \\ + \; & \ldots \\ + \; & 0{,}01 \cdot (190-180) \cdot (80-91) \end{aligned} = 36 > 0$$

X, Y sind positiv korreliert.

Kovarianz von Zufallsvariablen

Anmerkungen (cont'd)

- Wir können *(ähnlich wie wir es für Stichproben bereits kennen)* auch die Korrelation ρ von X und Y berechnen:

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

- Wir nennen X und Y positiv (bzw. negativ) korreliert, wenn $Cov(X,Y) > 0$ (bzw. $Cov(X,Y) < 0$)
- Für die Korrelation von Zufallsvariablen gilt *(wie bei Stichproben)*: $-1 \leq \rho \leq 1$
- Es gilt wie bei Stichproben $\rho = \pm 1$ genau dann, wenn $Y = \alpha \cdot X + \beta$ *("maximale Abhängigkeit")*

Outline

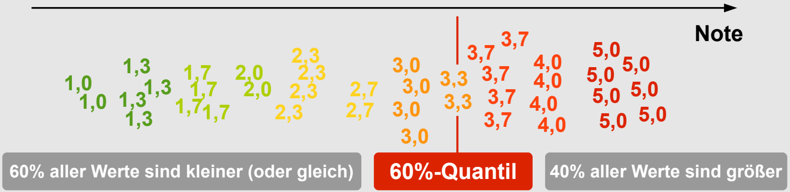
Quantile: Wiederholung

Wie hatten wir Quantile für Stichproben definiert?

Das α-Quantil ist der Wert, unterhalb dessen ein Anteil von α aller Samples liegt.

Beispiel

Unter welcher Grenze liegen 60% der Noten? → 60%-Quantil



Quantile für **Zufallsvariablen**?

- Bisher: Die **relative Häufigkeit** kleinerer Werte ist α
- Jetzt: Die **Wahrscheinlichkeit** kleinerer Werte ist α

Quantile von Zufallsvariablen

Definition (Quantil einer Zufallsvariable)

Es sei X eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable und $\alpha \in (0,1)$. Ein Wert $x_\alpha \in \mathbb{R}$ für den gilt:

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha \qquad (\text{bzw. } F(x_\alpha) = \alpha)$$

*heißt α-**Quantil** von X.*

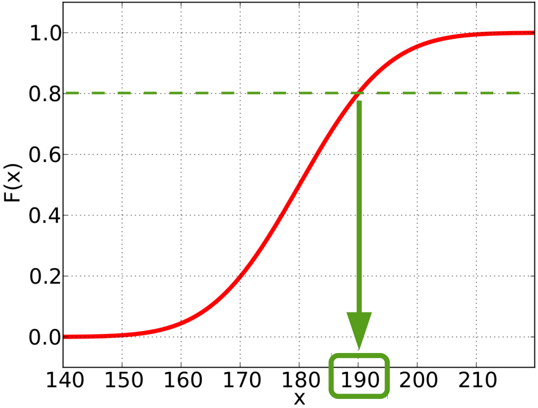
Anmerkungen

- Intuitive Vorstellung: "Wiederholen wir unser Zufallsexperiment beliebig oft, ist im Mittel ein Anteil von α der Realisierungen kleiner oder gleich x_α".
- Beispiel: Beim Werfen eines fairen 6-seitigen Würfels lautet das 50%-Quantil... $x_{50\%} = 3$.
- Falls $\alpha = 50\%$, nennen wir x_α einen Median.

Quantile: Grafische Darstellung

Wir können Quantile leicht aus der Verteilungsfunktion F ablesen:

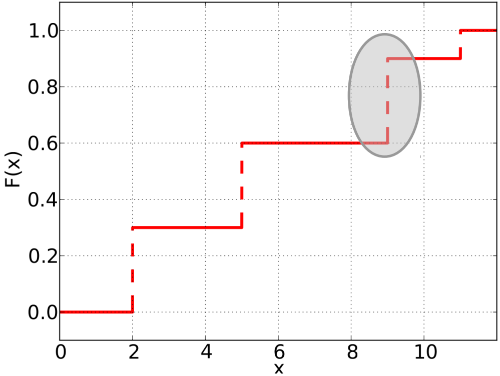
Wie ermittlen wir das **80%-Quantil**?
→ Wir fordern: $\mathbf{P(X \leq x) = 0{,}8 \longleftrightarrow F(x) = 0{,}8}$
→ Das 80%-Quantil lautet also: $\mathbf{x_{0,8} = 190}$



Quantile: Existenz und Eindeutigkeit

Für manche αs kann es keine (bzw. mehrere) Quantile geben!

Wie lautet hier das **80%-Quantil**?
→ F **springt** über den Wert 0,8 hinweg
→ Das 80%-Quantil **existiert nicht**!

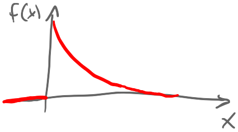


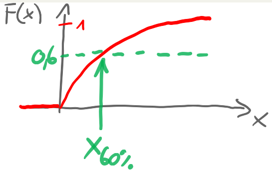
Quantile: Anwendungsbeispiel

Wie lang können wir eine Festplatte betreiben, bis Sie mit 60% Wahrscheinlichkeit ausgefallen sein wird?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sonst} \end{cases}}$$





Wir fordern: $F(\underbrace{x_{60\%}}_{\text{Gesucht!}}) = 0{,}6$

$$1 - e^{-\lambda x} = 0{,}6 \iff e^{-\lambda x} = 0{,}4 \quad \| \log$$

$$-\lambda x = \log(0{,}4)$$

$$x = -\frac{\log(0{,}4)}{\lambda} \rightsquigarrow \lambda = 1/24 \quad \approx 22$$

Outline

Erwartungswert und Varianz: Lineare Transformation

Definition (Lineare Transformation von Zufallsvariablen)

Es sei X eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Transformieren wir X in eine neue Zufallsvariable $X' := \alpha \cdot X + \beta$, so lautet der neue Erwartungswert

$$E(X') = \alpha \cdot E(X) + \beta$$

und die neue Varianz

$$Var(X') = \alpha^2 \cdot Var(X).$$

Anmerkungen

- Dieselben Formeln galten bereits für Stichproben (Kapitel 1).

Erwartungswert und Varianz: Lineare Transformation

Beweis (hier nur für den Erwartungswert und stetige Zufallsvariablen X)

Lineare Transformation: Beispiel

Einheiten umrechnen

- Die Körpergröße männlicher Personen X besitze $E(X)$=180cm und $Var(X)$=9cm.
- Geben wir die Körpergröße in Metern an, erhalten wir $X' = \frac{1}{100} \cdot X$ mit

$$E(X') = \frac{1}{100} \cdot E(X) = 1.8$$

$$Var(X') = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot Var(X) = 0.0009$$

Erwartungswert: Addition/Multiplikation

Wie verhalten sich Erwartungswert und Varianz, wenn wir mehrere Zufallsvariablen addieren/multiplizieren?

Definition (Addition und Multiplikation von Zufallsvariablen)

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Sind X und Y darüber hinaus **unabhängig**, *gilt außerdem:*

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Erwartungswert: Addition/Multiplikation

Beweis (für die Multiplikation diskreter Zufallsvariablen)

Realisierung

$$E(X\cdot Y) = \sum_i \sum_j P(X=x_i, Y=y_j)\cdot (x_i\cdot y_j)$$

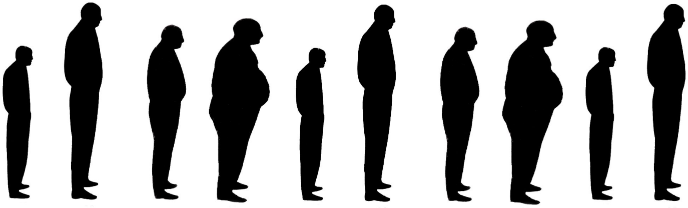
X,Y unabhängig!

$$= \sum_i \sum_j P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)\,(x_i\cdot y_j)$$

$$= \underbrace{\sum_i P(X=x_i)\cdot x_i}\cdot\underbrace{\sum_j P(Y=y_j)\cdot y_j}$$

$$= E(X)\cdot E(Y) \quad \checkmark$$

Addition und Multiplikation: Beispiele



Aufzug

- Das Gewicht von Personen sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 80kg.
- 10 Personen mit Gewicht $X_1, \ldots, X_{10}$ betreten einen Aufzug.
- Welches Gewicht ist insgesamt zu erwarten?

$$
\begin{aligned}
E(X_1 + \ldots + X_{10}) &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_{10}) \\
&= \quad 80 \quad + \quad 80 \quad + \ldots + \quad 80 \quad = \quad 800
\end{aligned}
$$

Addition und Multiplikation: Beispiele Bild: [1]

Aktien

- Der jährliche prozentuale Kursgewinn einer Aktie X_i besitze Erwartungswert 1.5%.
- Im Mittel wird das Guthaben also mit 1.015 multipliziert.
- Welcher prozentuale Gesamtgewinn ist über vier Jahre $X_1, \ldots, X_4$ zu erwarten?

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4) &= E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot E(X_3) \cdot E(X_4) \\ &= 1.015 \cdot 1.015 \cdot 1.015 \cdot 1.015 = 1.0614 \end{aligned}$$

- **Achtung:** Das gilt nur falls $X_1, \ldots, X_4$ unabhängig sind !?

Varianz: Addition von Zufallsvariablen

Definition (Addition von Zufallsvariablen)

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$Var(X + Y) = Var(X) + 2 \cdot Cov(X, Y) + Var(Y)$$

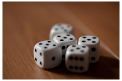
Sind X und Y **unabhängig**, *gilt (weil $Cov(X, Y) = 0$)*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Anmerkungen

- Das bedeutet: Addieren wir unabhängige Zufallsvariablen auf, nimmt die Streuung immer weiter zu.

Beispiel: Würfeln Bild: [2]



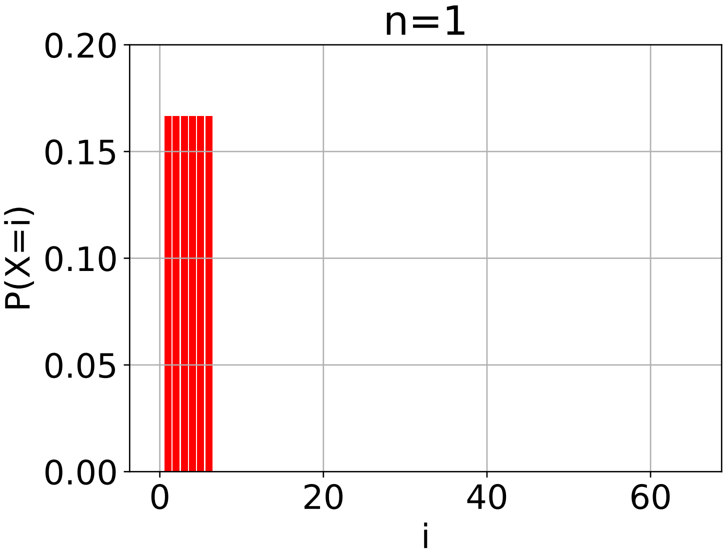
Wir würfeln **mehrfach** und addieren die Augen auf

- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ = Augen des 1./2./3./... Wurfs
- Wir berechnen $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Wie lautet die Varianz dieser Summe?
- Für jeden Wurf X_i gilt: $Var(X_i) \approx 2.92$
- Die Würfe sind unabhängig. Also folgt:

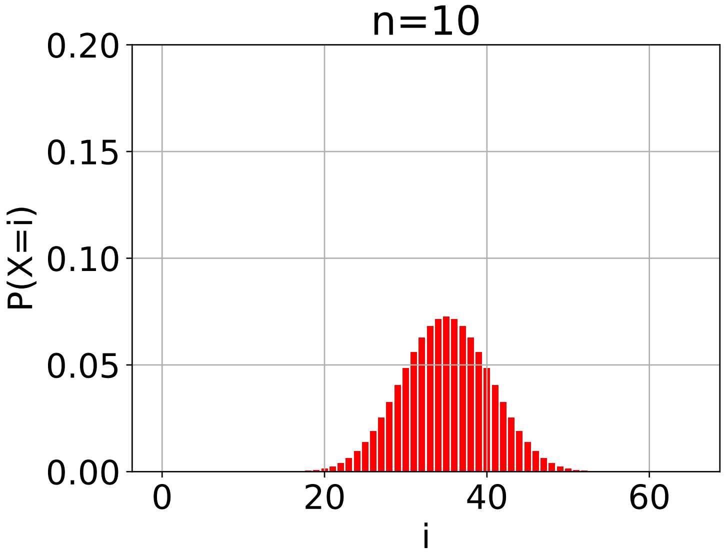
$$
\begin{aligned}
Var(X_1 + X_2) &= Var(X_1) + Var(X_2) && = 2 \cdot 2.92 = 5.84 \\
Var(X_1 + X_2 + X_3) &= Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) && = 3 \cdot 2.92 = 8.76 \\
&\ldots \\
Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) && = n \cdot 2.92
\end{aligned}
$$

- Die Varianz wächst linear mit der Anzahl der Würfe.

Beispiel: Wiederholtes Würfeln (n mal)



Beispiel: Wiederholtes Würfeln (n mal)



References I

[1] Ken Teegardin: Graph With Stacks Of Coins.
`https://flic.kr/p/ahtKQx` (retrieved: Nov 2016, no changes made).

[2] Ulrica Törning: Yatzy.
`https://flic.kr/p/84JVjL` (retrieved: Nov 2016).