Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 2

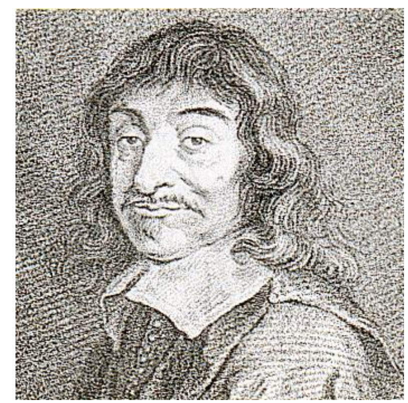
Analytische Geometrie

Analytische Geometrie

Ziel der Analytischen Geometrie: Geometrische Objekte (Punkte, Geraden, Ebenen, Kreise, ...) werden durch Zahlen („**Koordinaten**“) und **Gleichungen**, die diese Zahlen in Verbindung bringen, beschrieben.

Vorteil: Man kann geometrische Aussagen einfach ausrechnen.

Hilfsmittel: Lineare Gleichungssysteme



Die analytische Geometrie wurde von René Descartes (1596 -1650) eingeführt.

Inhalt

2.1 Punkte und Vektoren

Koordinatensystem, Spaltenvektoren, Rechengesetze, Betrag, Linearkombination, Lineare Unabhängigkeit

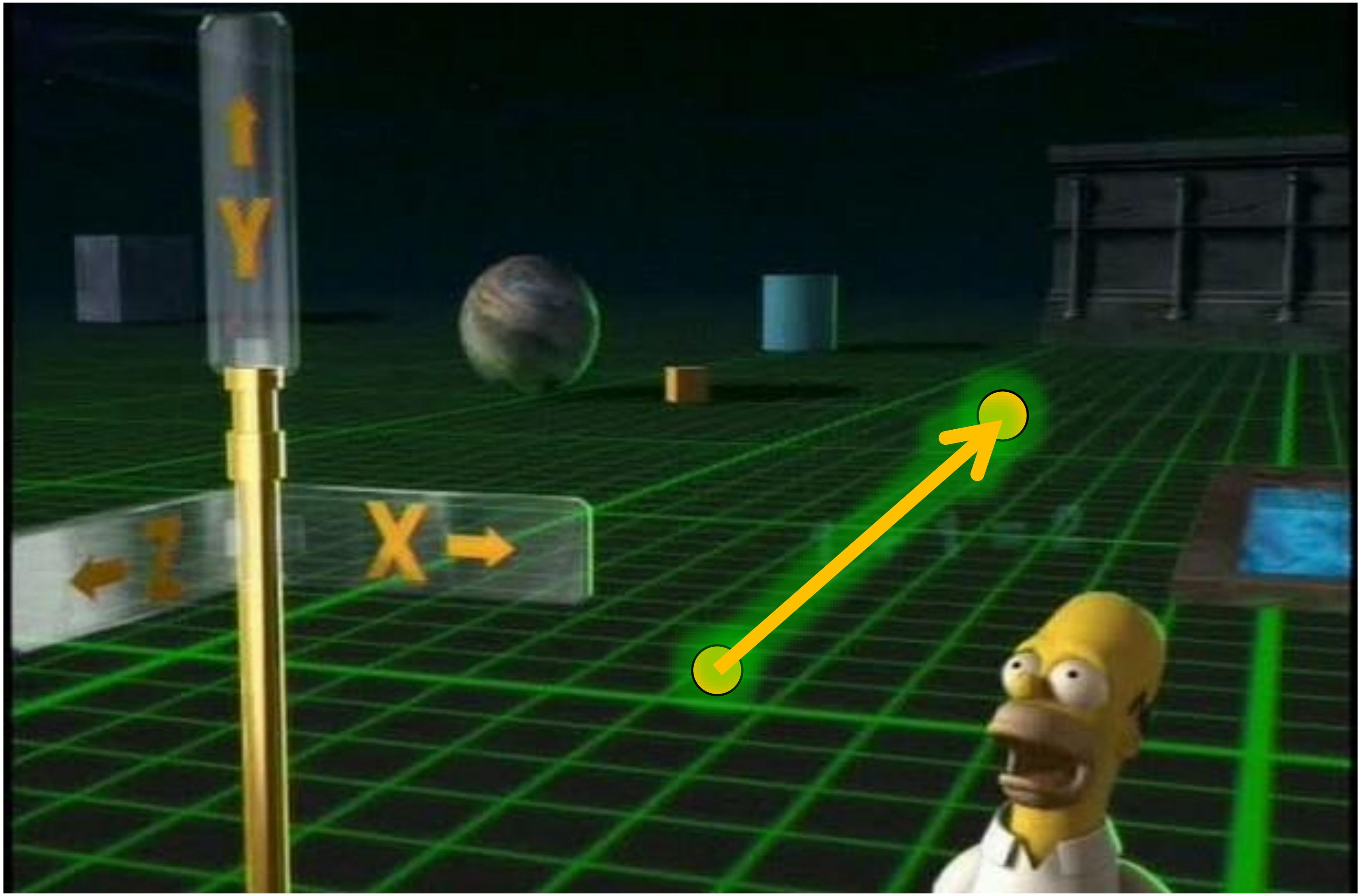
2.2 Geraden und Ebenen

Parameterform, Koordinatengleichung, Lageuntersuchungen

2.3 Skalarprodukt und Vektorprodukt

Eigenschaften, Winkel- und Abstandsberechnungen, Hesse-Normalform

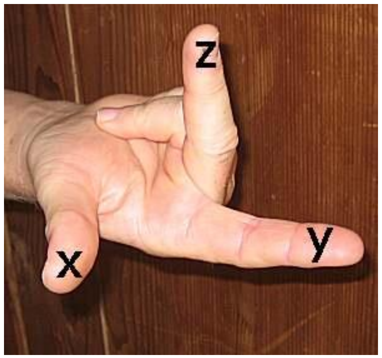
2.1 Punkte und Vektoren

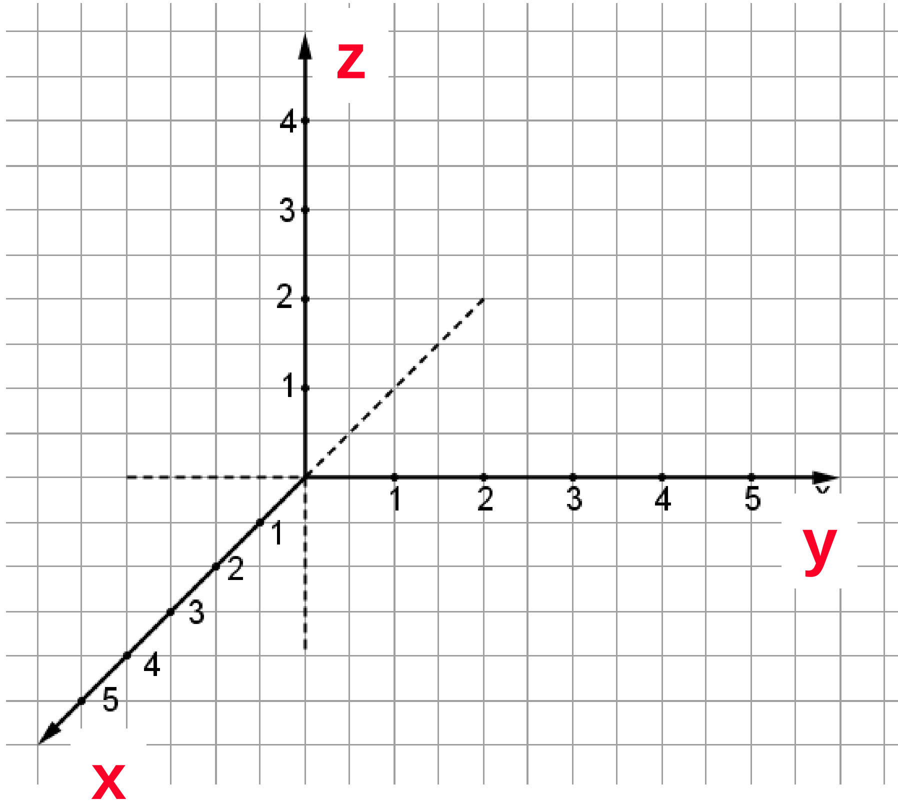


Das 3-dimensionale Koordinatensystem

3-dimensionale Objekte können im **kartesischen Koordinaten-system** dargestellt werden:

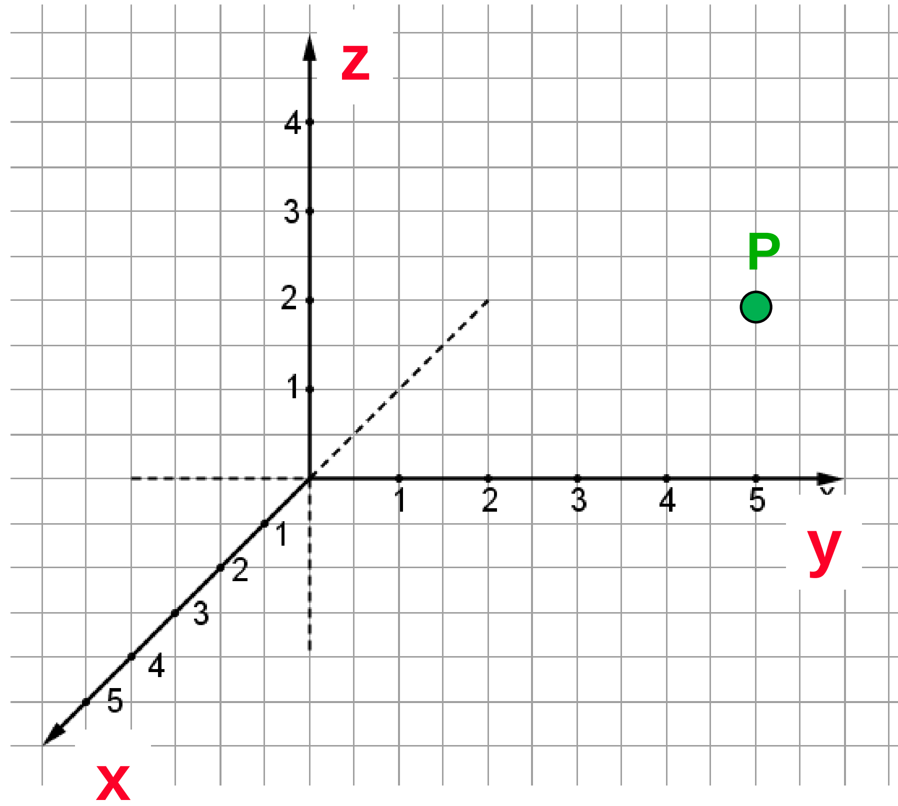
- 3 Achsen: x, y, z (oder x_1, x_2, x_3)
- senkrecht aufeinander
- Orientierung:





Punkte im 3D-Koordinatensystem

Welche Koordinaten hat P?



Punkte im 3D-Koordinatensystem

Welche Koordinaten hat P?

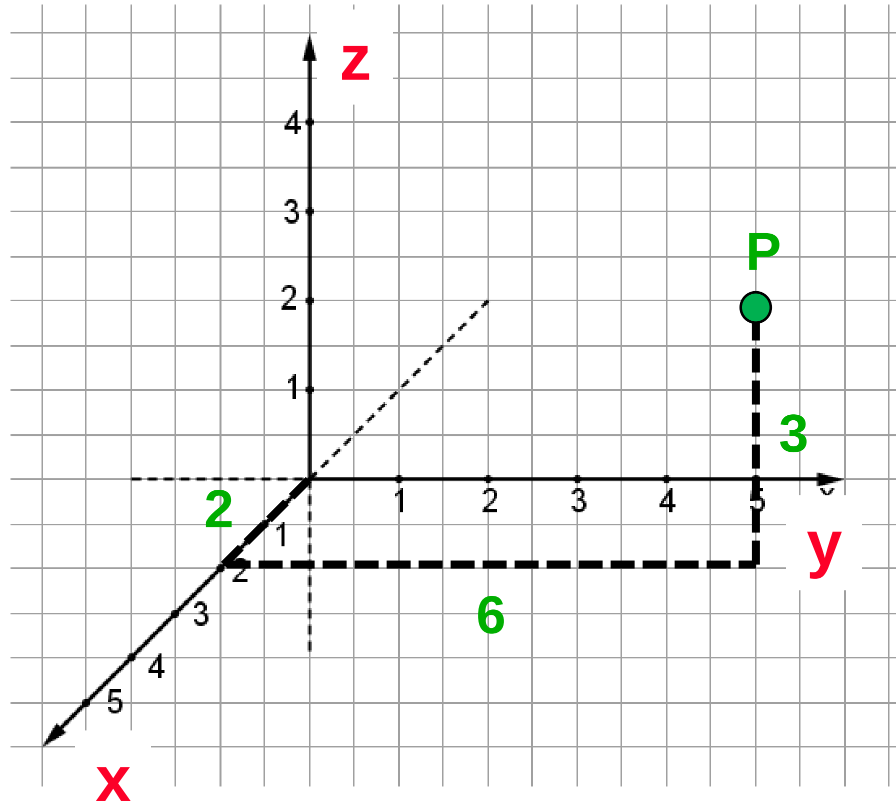
Dazu notwendig: **Hilfslinien!**

2 in x-Richtung,

6 in y-Richtung,

3 in z-Richtung.

P = (2, 6, 3)



Abstand von Punkten im Raum

Abstand d von $P = (p_1, p_2, p_3)$ und $Q = (q_1, q_2, q_3)$?

Nach Pythagoras gilt:

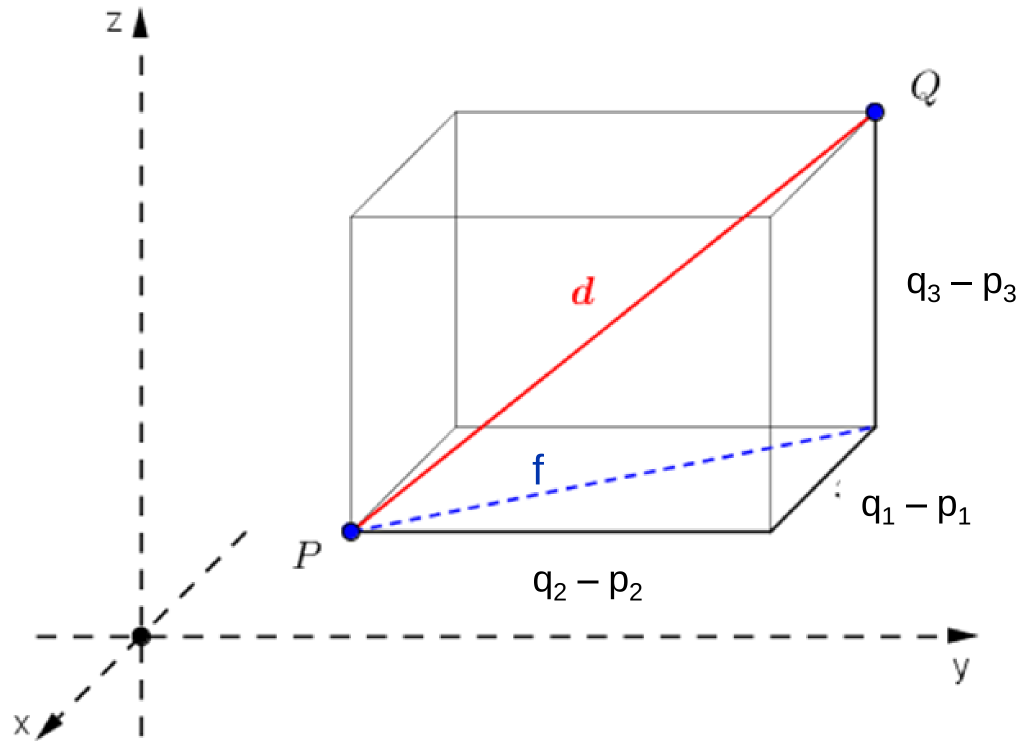
1.) Flächendiagonale f:

$$f^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2$$

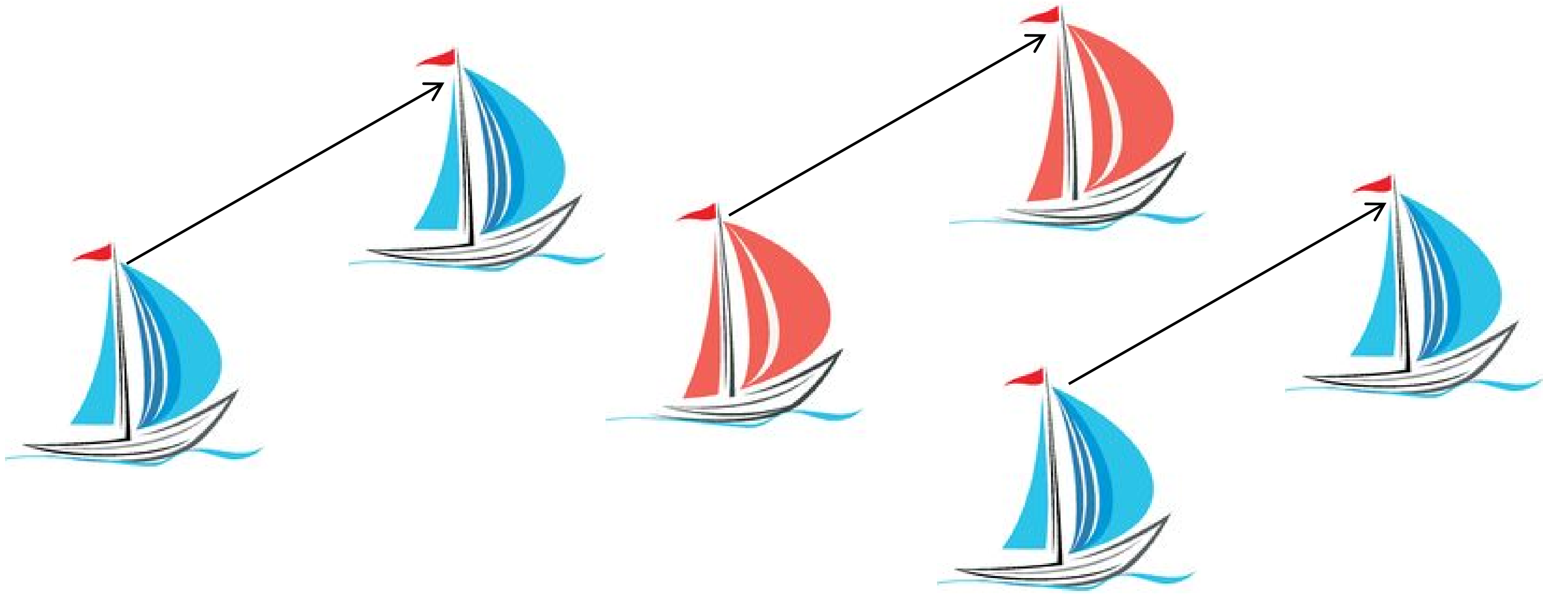
2.) Abstand d:

$$d^2 = f^2 + (q_3 - p_3)^2$$

$$d = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$



Vektoren



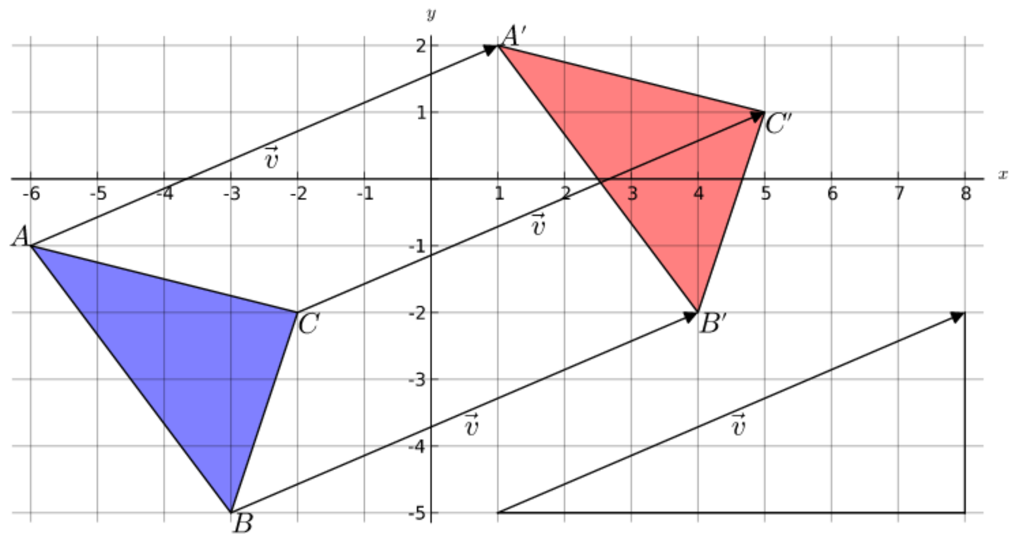
Beispiel: Die Segelschiffe werden in einer bestimmten Zeit durch den Wind in der gleichen Richtung und um die gleiche Strecke abgetrieben.

Pfeile

Eine **Parallelverschiebung** ist bereits durch *einen* **Pfeil** festgelegt:

- die Richtung des Pfeils gibt die Richtung der Verschiebung an,
- die Länge des Pfeils gibt die Länge der Strecke an, um die verschoben wird.

Beispiel: Der Pfeil $\overrightarrow{AA'}$ beschreibt die abgebildete Verschiebung.

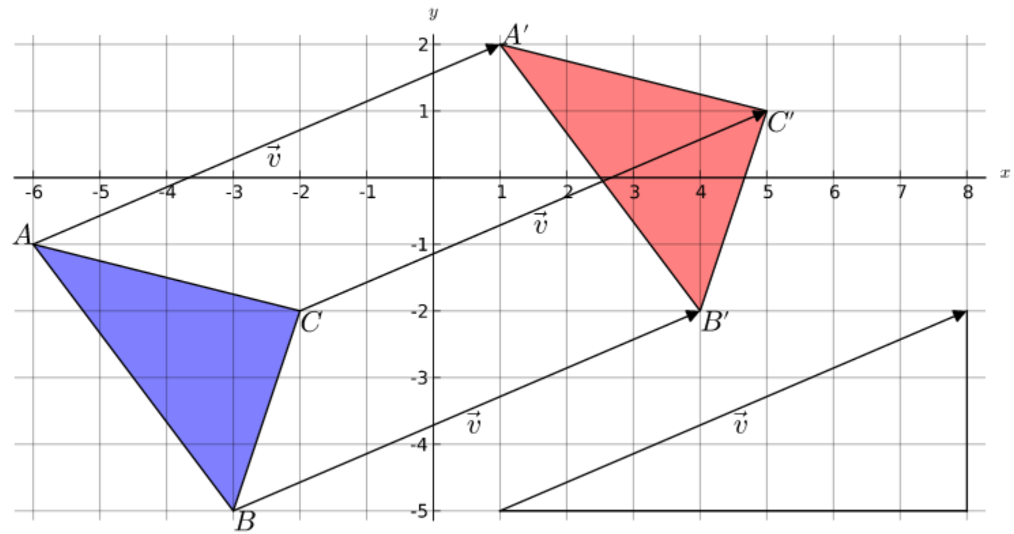


Vektoren als Pfeilklassen

Die Menge aller Pfeile, die die gleiche Länge und die gleiche Richtung haben, fasst man zu einem **Vektor** zusammen.

Umgekehrt ist jeder einzelne Pfeil ein **Repräsentant** des Vektors.

Beispiel: Die Pfeile $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ und $\overrightarrow{CC'}$ gehören alle zum gleichen Vektor $\vec{v}$.



Bemerkung: Der Name „Vektor" kommt von dem lateinischen Wort „vehere" = transportieren.

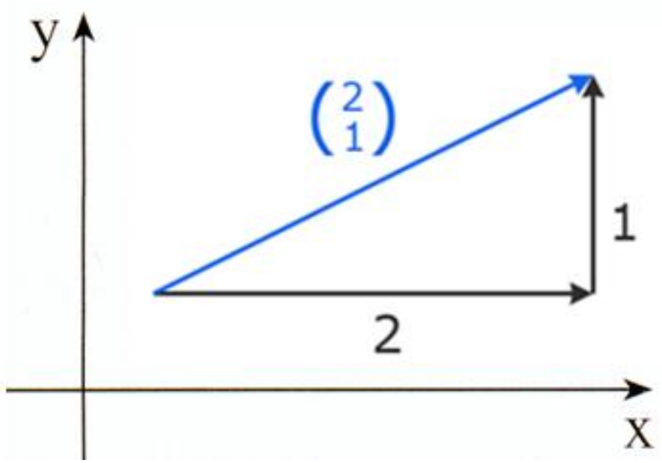
Spaltenvektoren

Für einen Vektor, der eine Verschiebung

- um 2 in x-Richtung und
- um 1 in y-Richtung

bewirkt, schreibt man

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



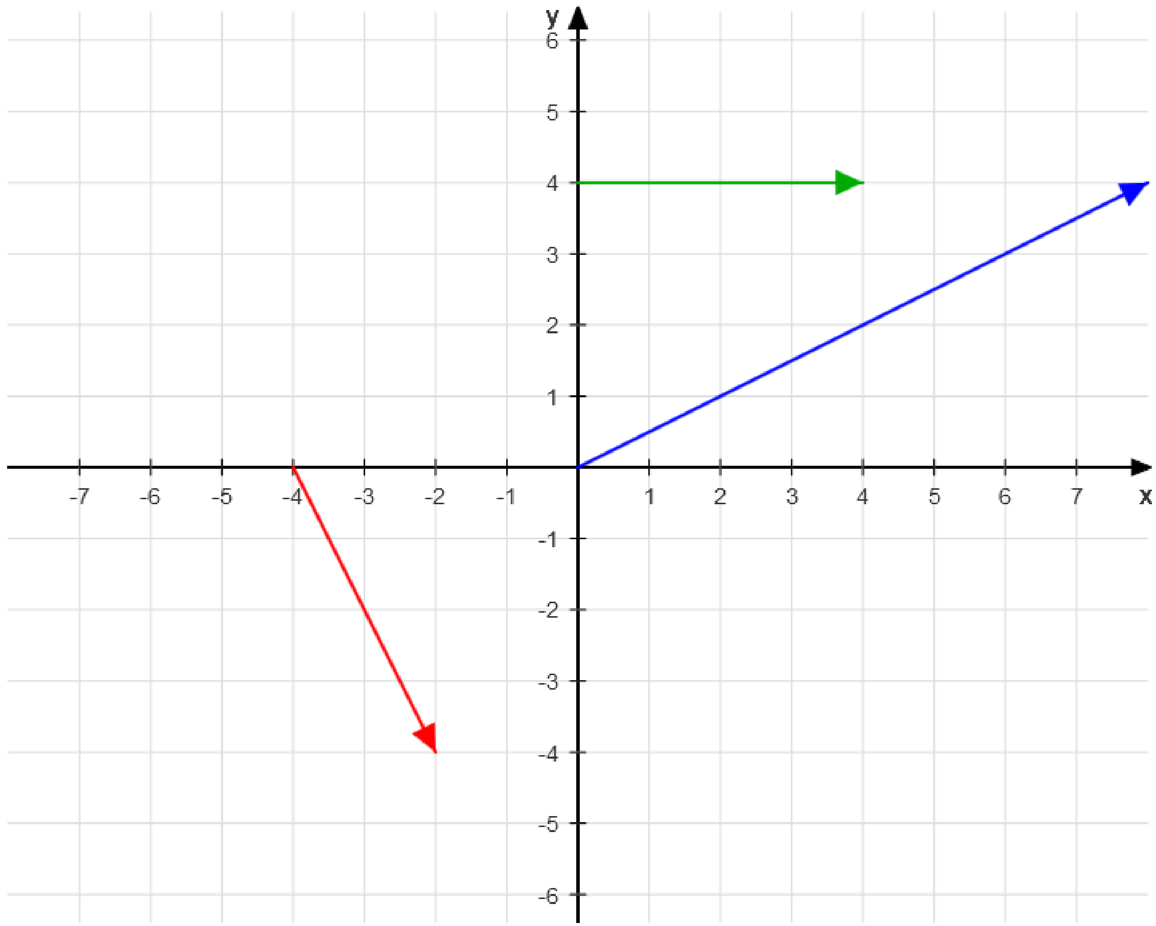
und bezeichnet ihn als **Spaltenvektor** mit den **Koordinaten** 2 und 1.

Spaltenvektoren:

in der Ebene: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

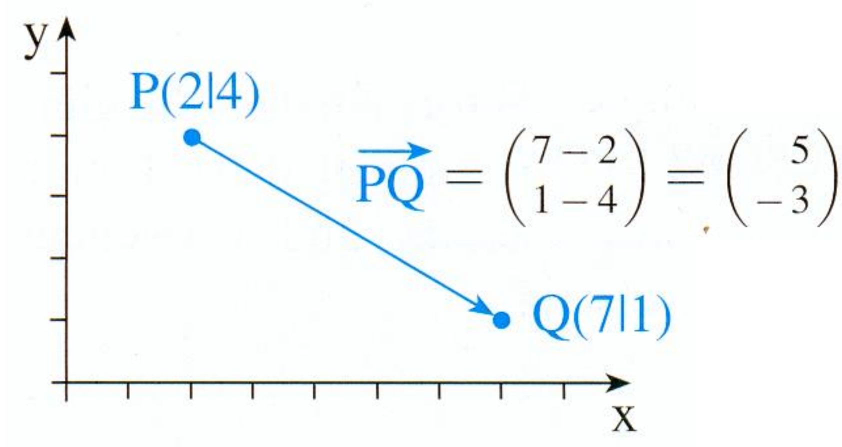
im Raum: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Übung



Vektor von P nach Q

Den Vektor von einem Punkt P zu einem Punkt Q erhält man, indem man die Koordinatendifferenz von End- und Anfangspunkt („Q minus P“) bildet.



In der Ebene:

$P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Im Raum:

$P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor

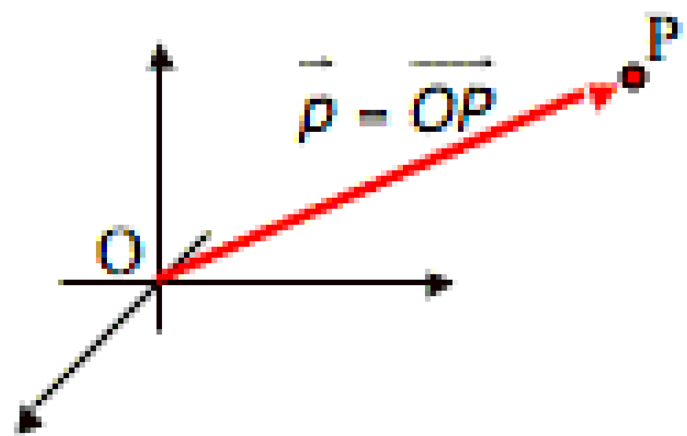
Um Punkte auch durch Vektoren beschreiben zu können, wird der Ortsvektor eingeführt.

Der **Ortsvektor** $\vec{p}$ eines Punktes P zeigt vom Ursprung O zum Punkt P.

Er hat die gleichen Koordinaten wie P.

Beispiel: Der Punkt P = (1, 5, 3) hat den Ortsvektor

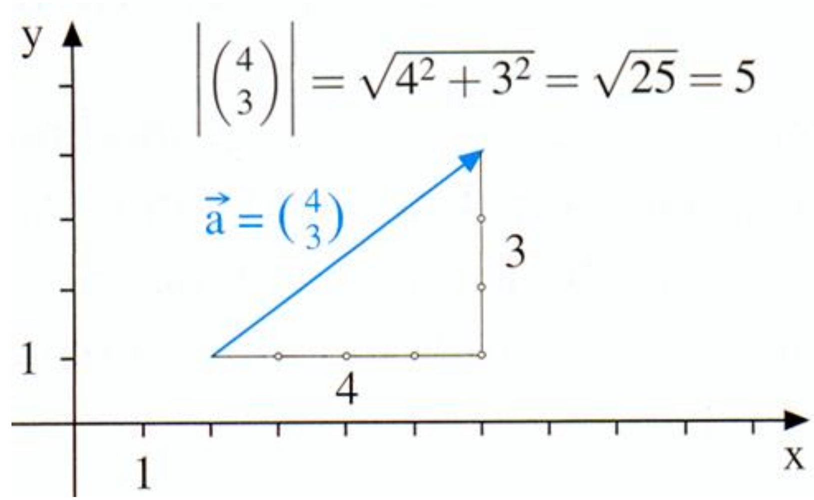
$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Betrag eines Vektors

Alle Pfeile eines Vektors sind gleich lang. Diese Länge heißt **Betrag** des Vektors.

Man kann ihn mit Pythagoras berechnen.



In der Ebene:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Im Raum:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Übung

$$\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| =$$

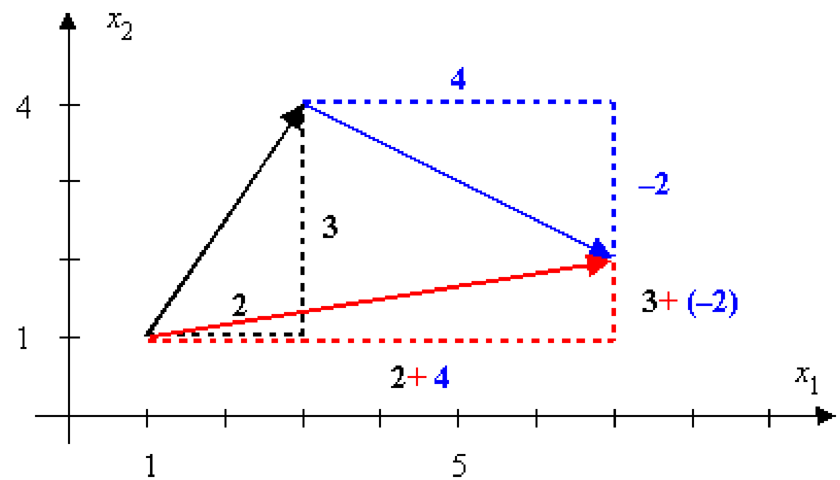
$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| =$$

Addition von Vektoren

Addition von Vektoren entspricht der Hintereinanderausführung der Verschiebungen.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 3+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Die Summe wird komponentenweise gebildet.

In der Ebene:

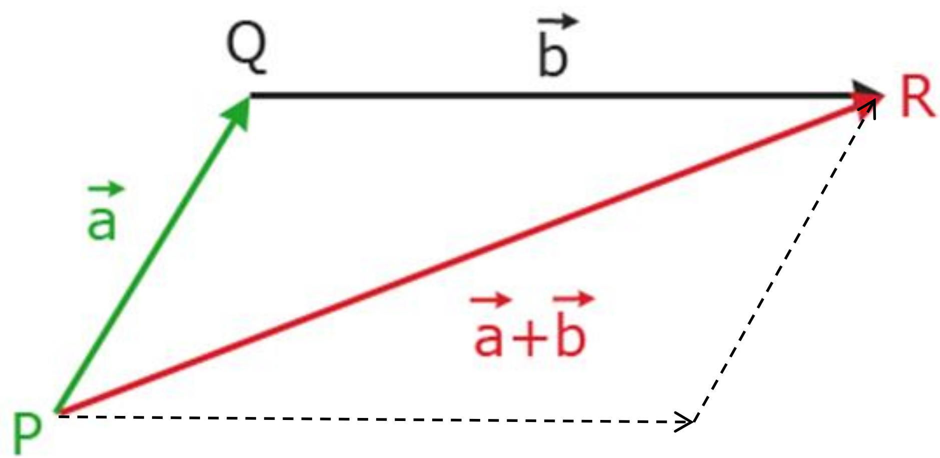
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Im Raum:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Addition zeichnerisch

Lege Repräsentanten der beiden Vektoren so aneinander, dass der Anfang des zweiten Pfeils mit der Spitze des ersten Pfeils übereinstimmt. Ein Repräsentant des Summenvektors reicht dann vom Anfang des ersten Pfeils bis zur Spitze des zweiten Pfeils.



Rechengesetze der Addition

Für die Addition von Vektoren gelten die üblichen Rechengesetze:

Kommutativgesetz: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Assoziativgesetz: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Es gibt einen **Nullvektor** $\vec{0}$, für den gilt: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

In der Ebene: $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ Im Raum: $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen **Gegenvektor** $-\vec{a}$ mit $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Beispiel: Gegenvektor von $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ist $-\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

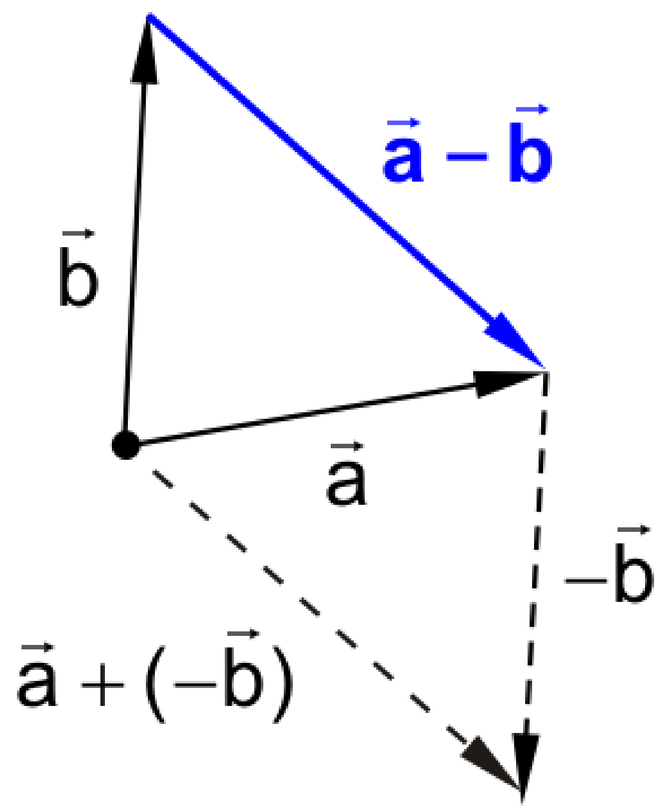
Subtraktion von Vektoren

Die **Subtraktion von Vektoren** ist definiert als Addition des Gegenvektors:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

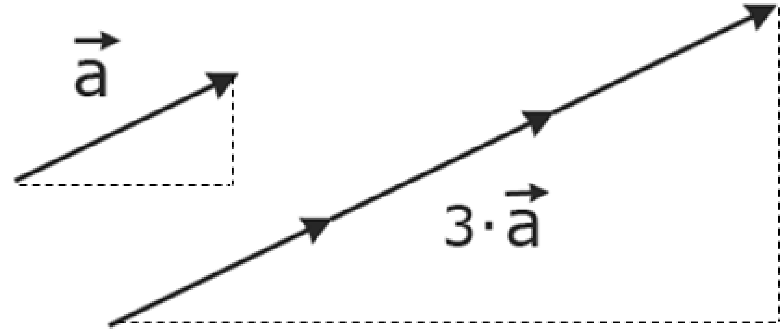


Vervielfachung von Vektoren

Beispiel: $3 \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$

Rechnerisch:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot a_1 \\ 3 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$



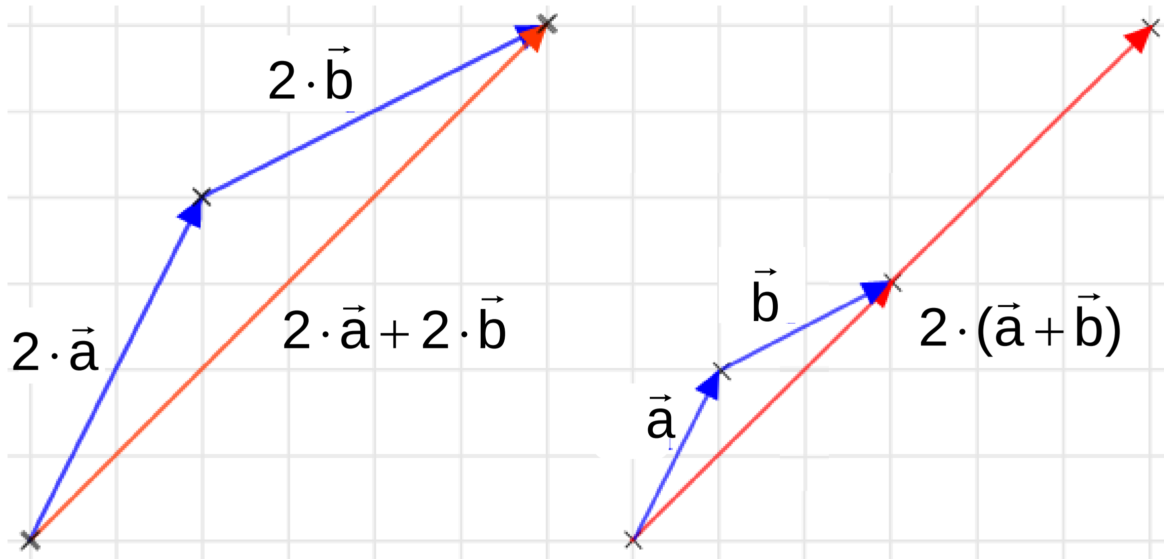
Definition: Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl r multipliziert, in dem jede seiner Koordinaten mit r multipliziert wird.

In der Ebene: $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$

Im Raum: $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$

Rechengesetze der Vervielfachung

Beispiel:



Distributivgesetze:

$$r\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = r\cdot\vec{a} + r\cdot\vec{b}$$

$$(r+s)\cdot\vec{a} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{a}$$

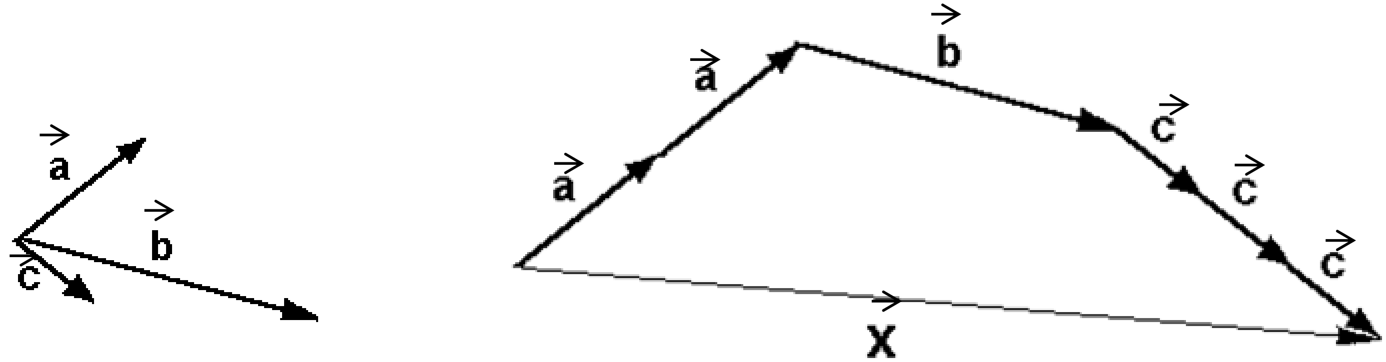
„Assoziativgesetz": $(r\cdot s)\cdot\vec{a} = r\cdot(s\cdot\vec{a})$ (unterschiedl. Malpunkte!)

Linearkombinationen

Kombiniert man Vervielfachung und Addition von Vektoren, so erhält man eine **Linearkombination**. Dies ist eine Summe der Form ($r_i \in \mathbf{R}$):

$$r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + r_n \cdot \vec{a}_n$$

Beispiel: $\vec{x} = 2 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c}$ ist eine Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

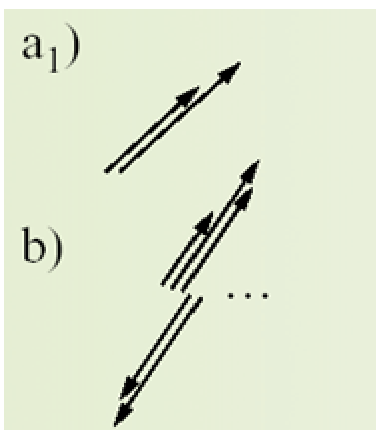


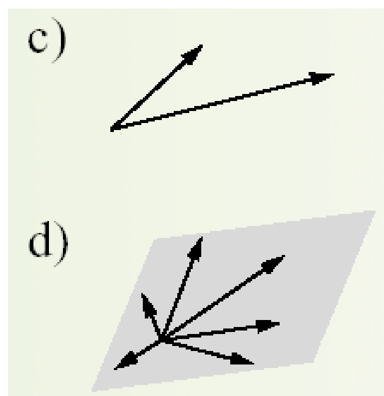
kollinear und komplanar

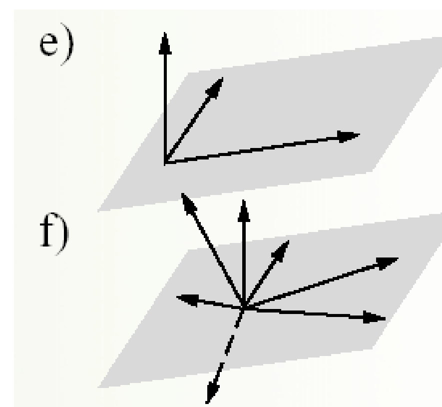
Vektoren, die parallel verlaufen, heißen **kollinear**. Bei zwei Vektoren ist dann ein Vektor ein Vielfaches des anderen.

Vektoren, die in einer Ebene liegen, heißen **komplanar**. Bei drei Vektoren ist (mind.) ein Vektor eine Linearkombination der anderen.

Beispiele: kollinear | komplanar | weder noch



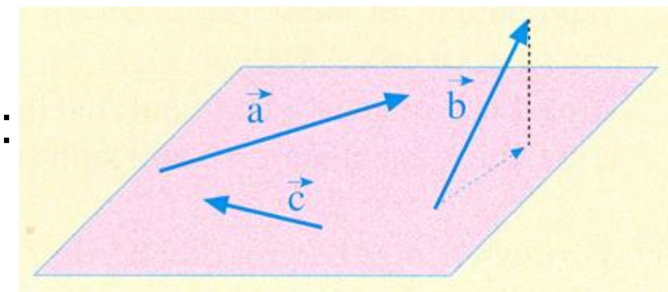




Verallgemeinerung: Lineare (Un-) Abhängigkeit

n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ heißen **linear abhängig**, wenn (mindestens) einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar ist. Andersfalls heißen sie **linear unabhängig**.

Beispiel: Drei linear unabhängige Vektoren:



Kriterium: Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das Gleichungssystem

$$r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + r_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

nur die „triviale“ Lösung $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ hat.

Übung

Sind folgende drei Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der n-dimensionale Vektorraum R^n

Die bisherigen Konzepte lassen sich problemlos auf den **n-dimensionalen Vektorraum R^n** verallgemeinern.

Definition eines **n-dimensionalen Spaltenvektors**: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Betrag: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Komponentenweise **Addition:**

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

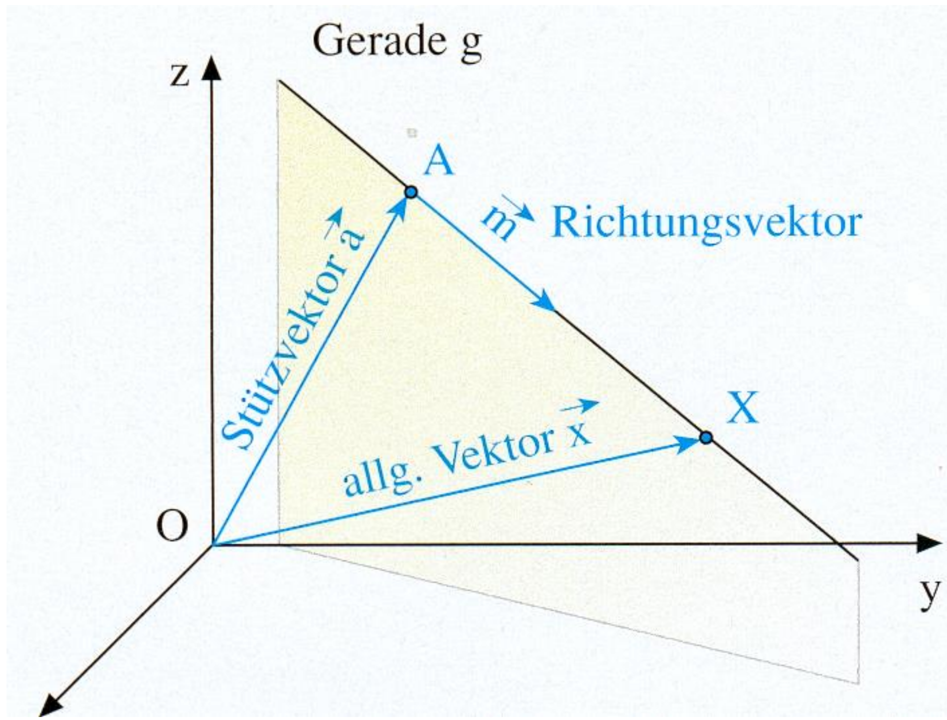
Komponentenweise **Vervielfachung:**

$$r \cdot \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot x_1 \\ r \cdot x_2 \\ \vdots \\ r \cdot x_n \end{pmatrix} \text{ mit } r \in R$$

2.2 Geraden und Ebenen

Geraden

Trägt man von einem Stützpunkt A (bzw. seinem **Stützvektor** $\vec{a}$) ein Vielfaches eines **Richtungsvektors** $\vec{m}$ ab, so liegen alle entstehenden Punkte auf einer **Geraden**.



Ein beliebiger Punkt X auf der Gerade hat den Ortsvektor

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$$

Dies ist die **Parameter-gleichung** der Geraden.

Der Geradenparameter

Die reelle Zahl r heißt **Geradenparameter**. Jedem Parameterwert von r entspricht genau ein Geradenpunkt .

Beispiel: Für die Gerade mit

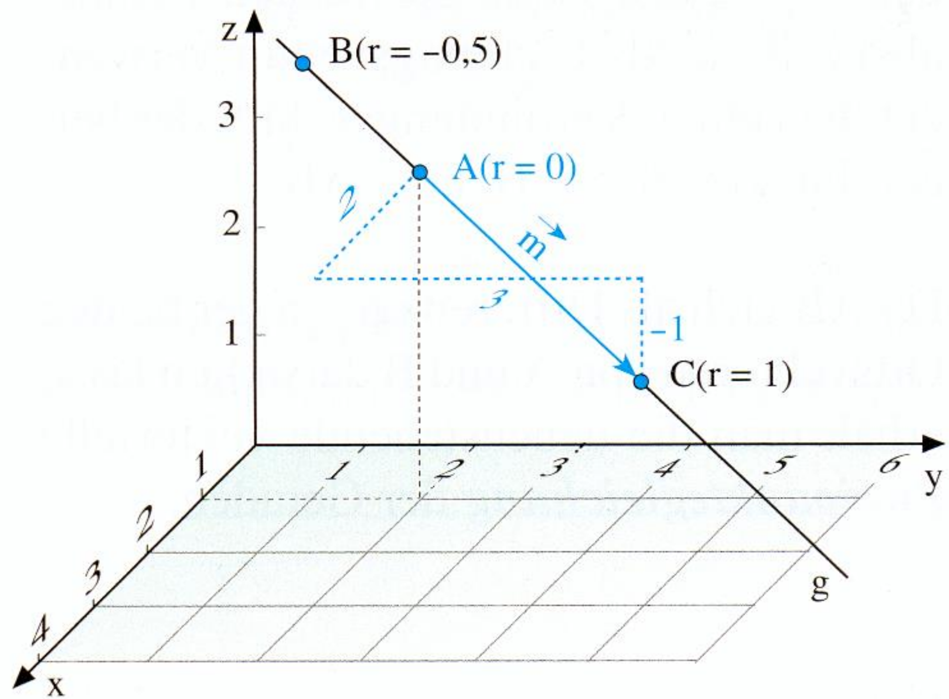
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ergeben sich z. B. die Punkte

r = 0: A = (1, 2, 3)

r = –0,5: B = (0; 0,5; 3,5)

r = 1: C = (3, 5, 2)

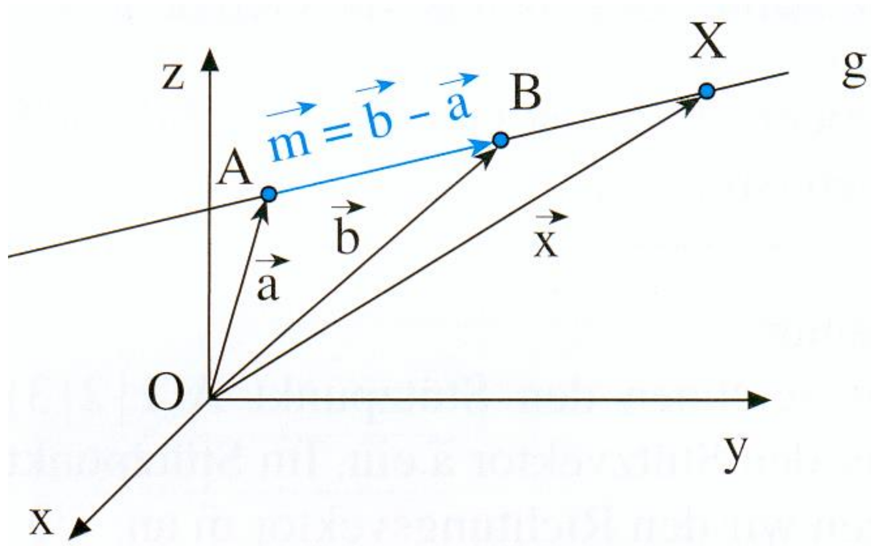


Gerade durch zwei Punkte

Die Gerade durch die Punkte A und B mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hat die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

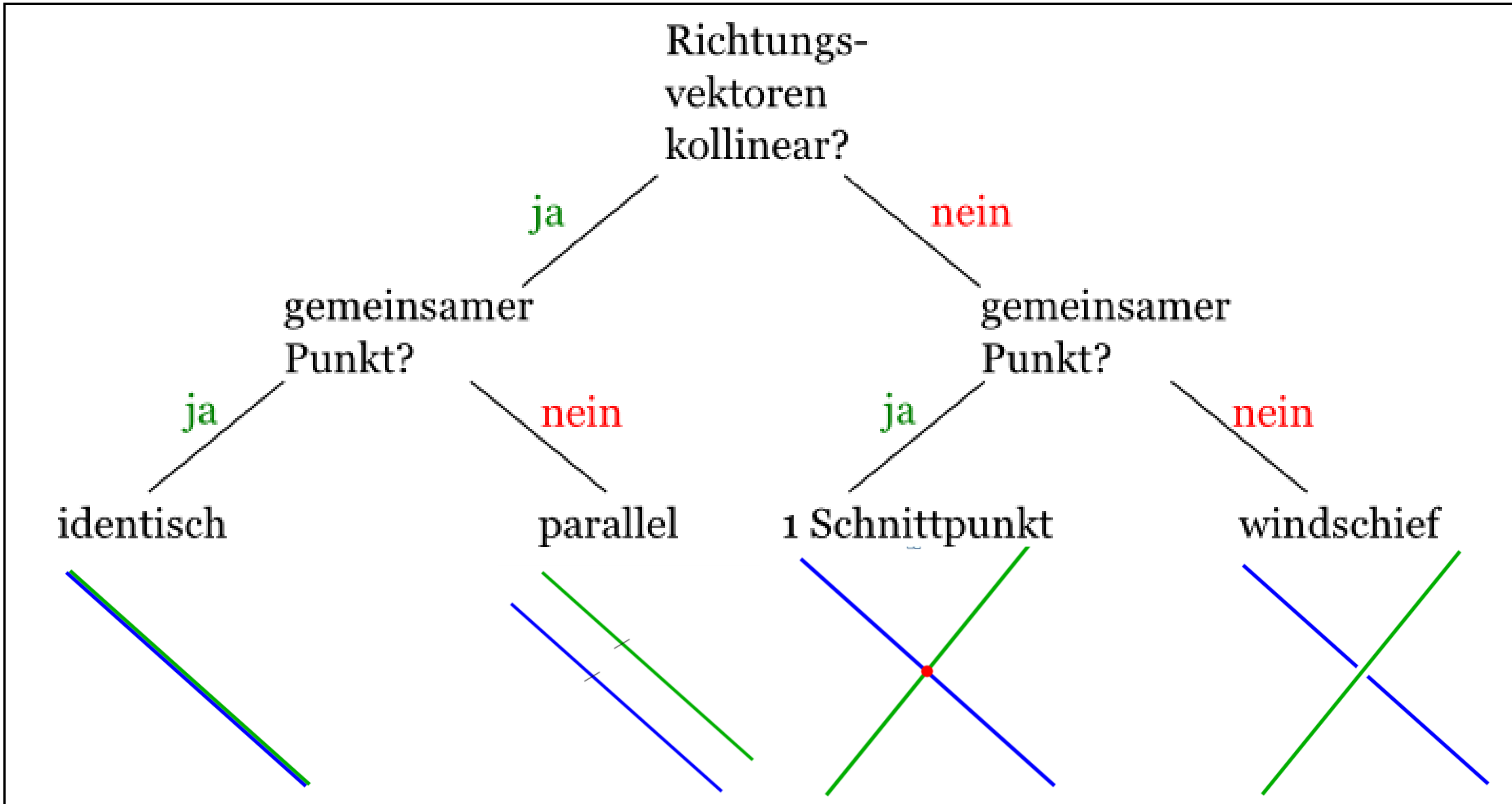
(einer der Punkte als Stützvektor, ihre Differenz als Richtungsvektor).



Beispiel: Durch A = (1, 2, 1) und B = (3, 4, 3) geht die Gerade:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lage von zwei Geraden



Ebenen

Eine **Ebene** wird durch *zwei* Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt.

Ein beliebiger Punkt X auf der Ebene hat den Ortsvektor

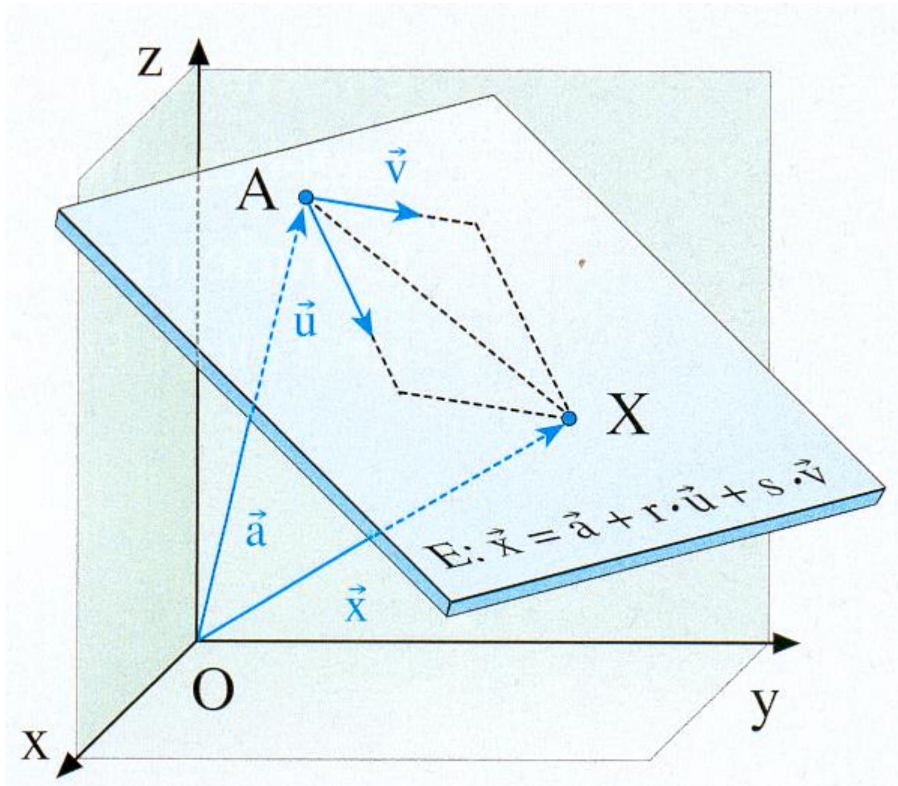
$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Dies ist die **Parameter-gleichung** der Ebene.

$\vec{a}$ ist der **Stützvektor**,

r und s die **Ebenenparameter**.

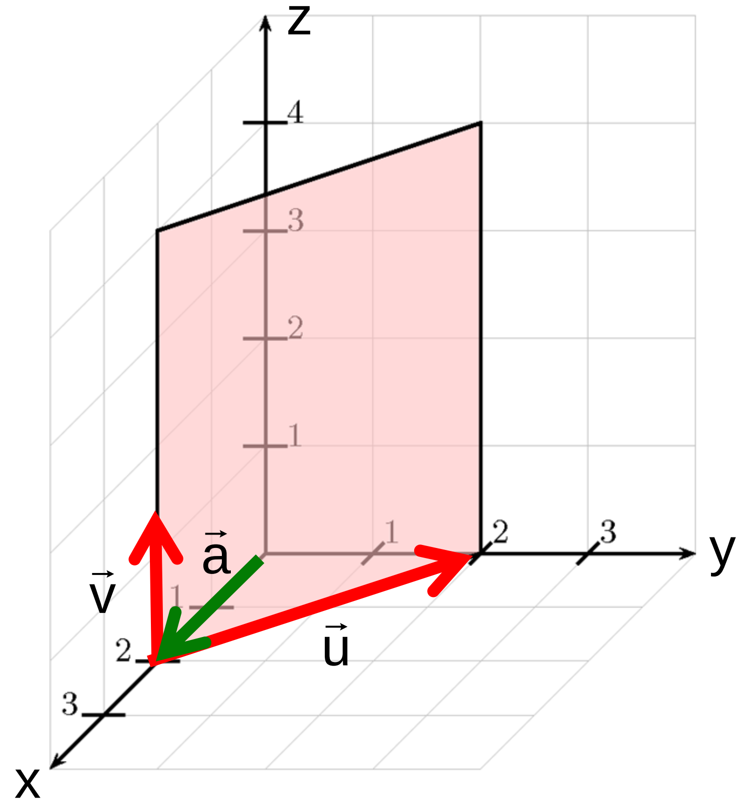


Beispiel

Beispiel: Für die abgebildete Ebene E kann man z. B. (2, 0, 0) als Stützpunkt und die beiden rot eingezeichneten Richtungsvektoren verwenden:

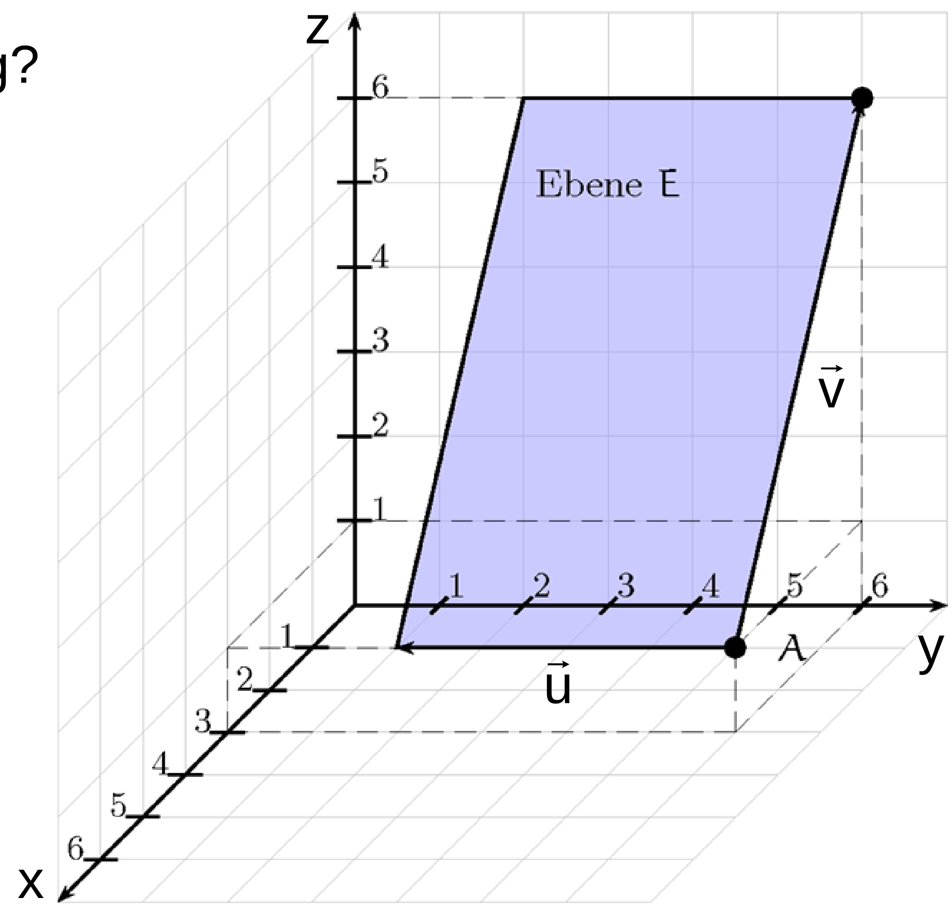
$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Übung

Wie lautet eine Ebenengleichung?

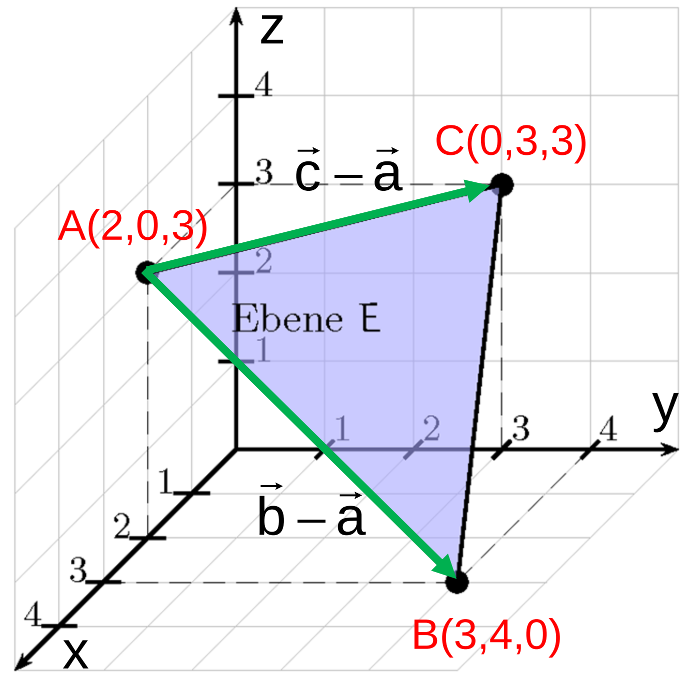


Ebene durch drei Punkte

Die Ebene durch die drei Punkte A, B und C mit Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ hat die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

(Punkt A als Stützpunkt, die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren).

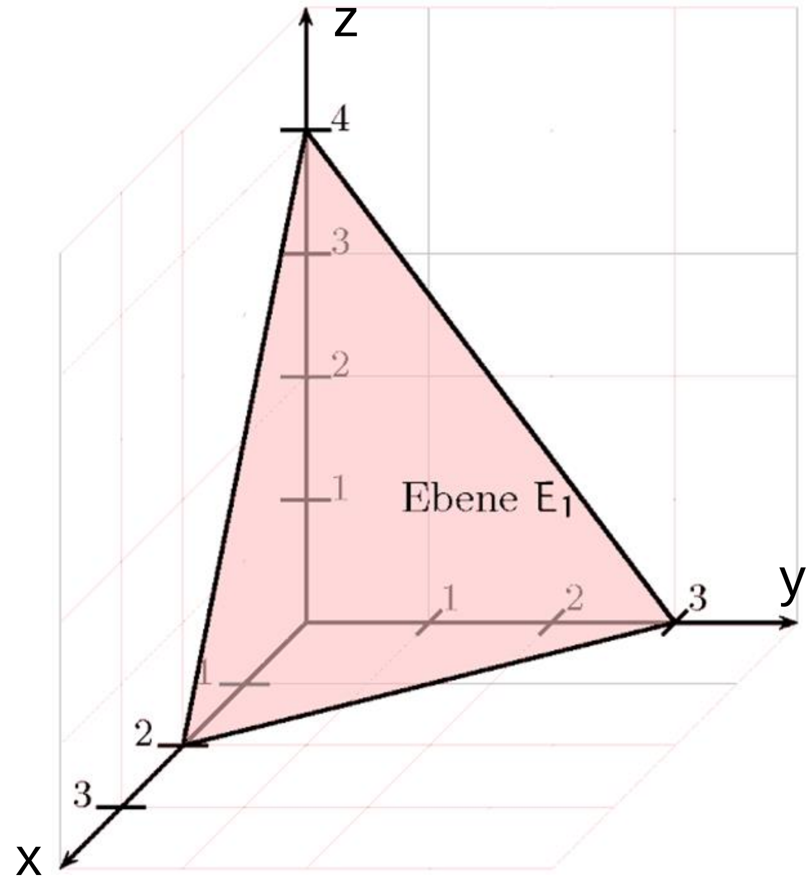


Beispiel: Gleichung d. abgebildeten Ebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übung

Wie lautet eine Ebenengleichung?



Koordinatengleichung einer Ebene

Jede Ebene lässt sich auch durch eine lineare Gleichung der Form

$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$

darstellen. Diese **Koordinatengleichung** hat zahlreiche Vorteile.

Beispiel: Die Ebene mit der Parametergleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

hat die Koordinatengleichung $x + 2y + 3z = 6$.

Bemerkung: Ebenen kann man auch als lineare Funktionen zweier Variablen auffassen: $z = f(x, y) = -a/c \cdot x - b/c \cdot y + d/c = A \cdot x + B \cdot y + D$.

Parametergleichung → Koordinatengleichung

Die Koordinatengleichung kann man erhalten, wenn man aus der Parametergleichung die Variablen r und s eliminiert. **Beispiel** (Forts.):

Parametergleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:
(3 Gleichungen, 5 Variablen)

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x = 2 + r + 5s \\ \mathrm{II} & y = 2 + r - s \\ \mathrm{III} & z = -r - s \end{array}$$

r eliminieren:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{IV} & = & \mathrm{I} - \mathrm{II}: & x - y = 6s \\ \mathrm{V} & = & \mathrm{I} + \mathrm{III}: & x + z = 2 + 4s \end{array}$$

s eliminieren:

$$\mathrm{VI} = 2 \cdot \mathrm{IV} - 3 \cdot \mathrm{V}: \ -x - 2y - 3z = -6$$

Koordinatengleichung:

$$E: x + 2y + 3z = 6$$

Achsenabschnitte und Schrägbild

Ein Vorteil der Koordinatenform ist die einfache Bestimmung der **Achsenabschnitte** einer Ebene. Diese Punkte ermöglichen das einfache Zeichnen der Ebene als **Schrägbild**.

Beispiel: Die Ebene mit der Gleichung

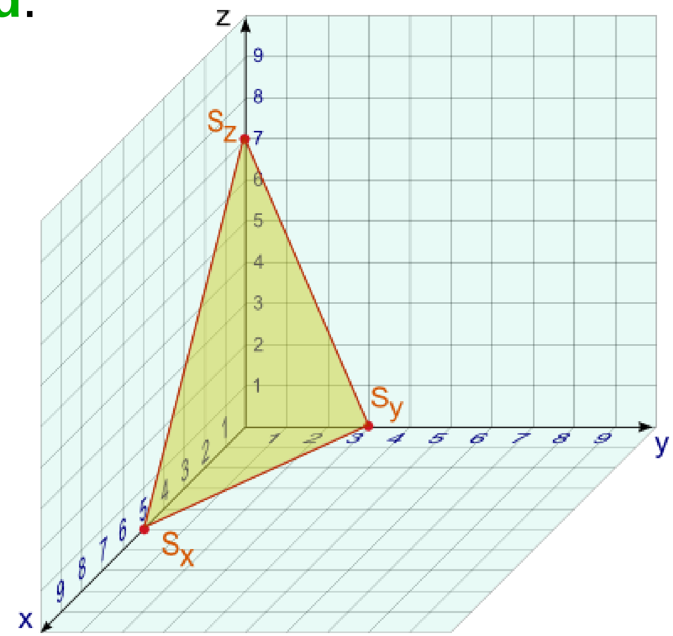
$$21x + 35y + 15z = 105$$

schneidet die Achsen in folgenden Punkten:

$y = z = 0 \Rightarrow 21x = 105 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S_X(5, 0, 0)$

$x = z = 0 \Rightarrow 35y = 105 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow S_Y(0, 3, 0)$

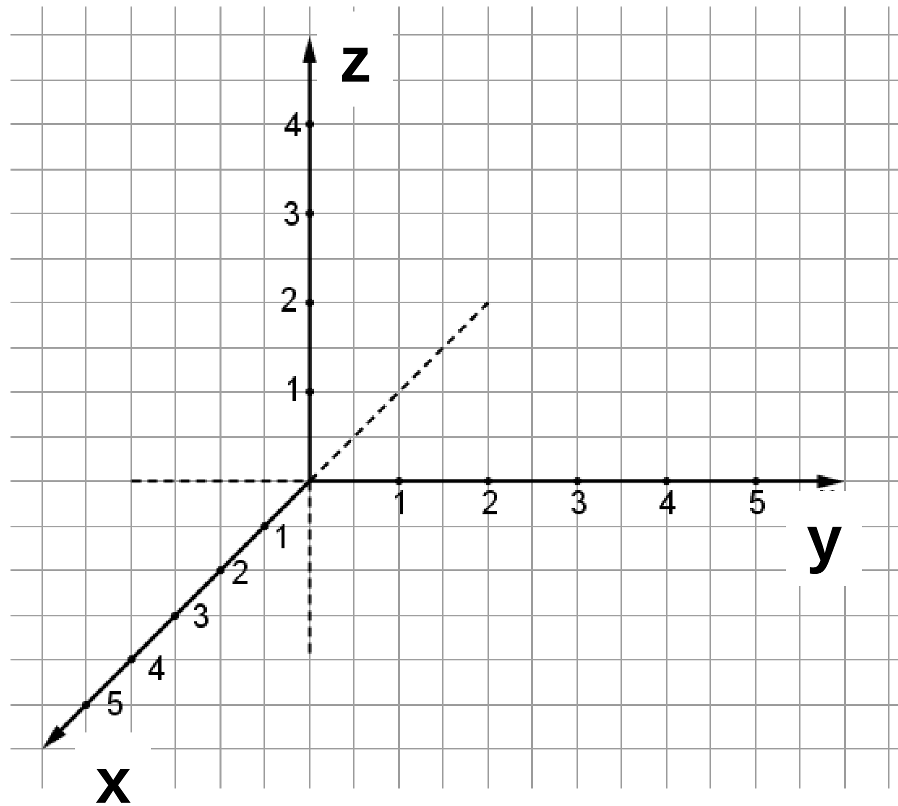
$x = y = 0 \Rightarrow 15z = 105 \Rightarrow z = 7 \Rightarrow S_Z(0, 0, 7)$



Übung

Bestimmen Sie die Achsenabschnitte der Ebene mit der Gleichung

$$3x + 6y + 4z = 12.$$



Koordinatengleichung → Parametergleichung

Aus der Koordinatengleichung lesen wir 3 Punkte ab (z. B. die Achsen-abschnitte), mit denen wir die Parametergleichung aufstellen können.

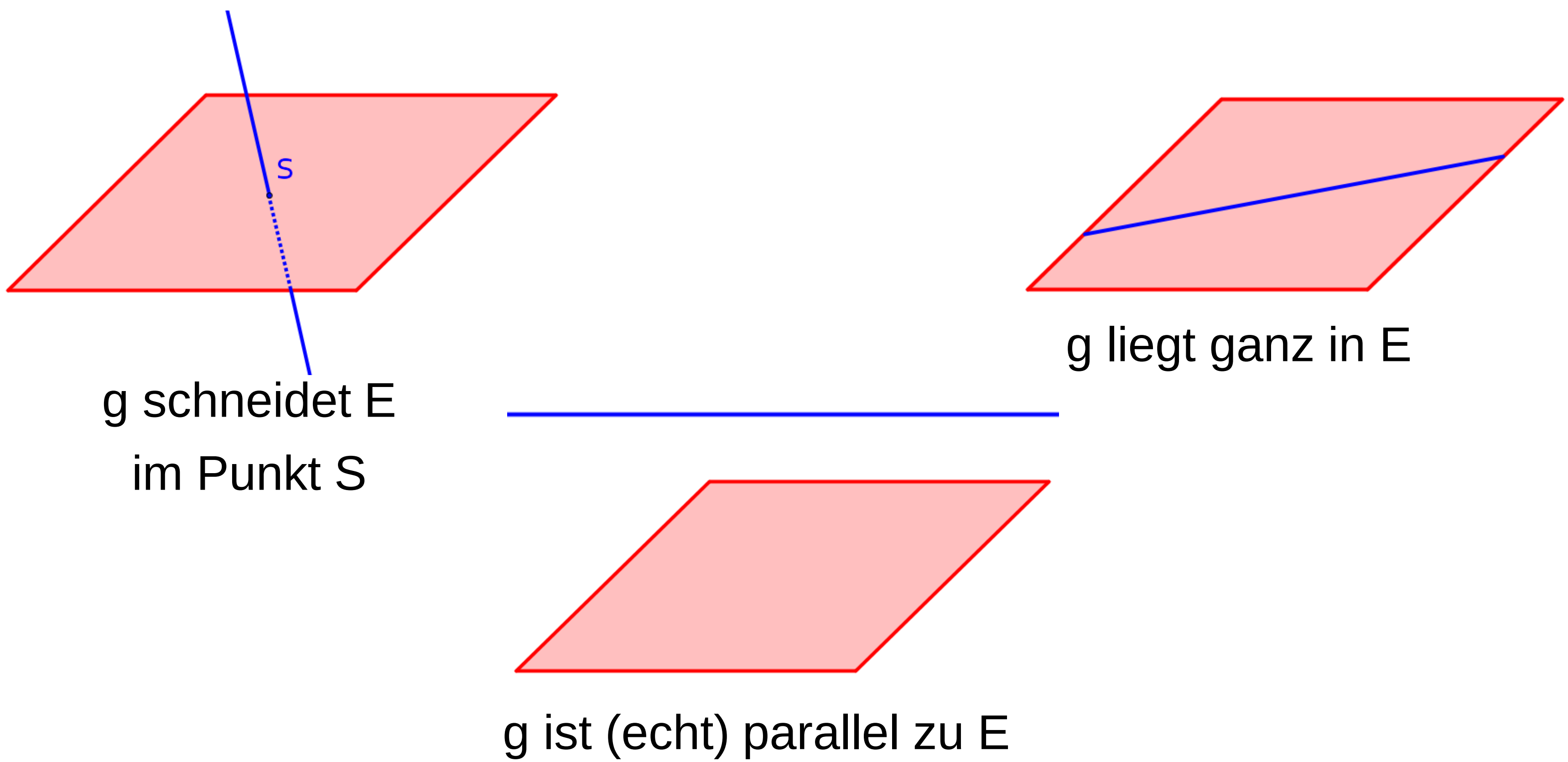
Beispiel: Ebene: $2x + y - z = 3$

3 Punkte ablesen: $S_X(1{,}5;\ 0,\ 0)$, $S_Y(0,\ 3,\ 0)$, $S_Z(0,\ 0,\ -3)$

Parametergleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lage von Gerade und Ebene



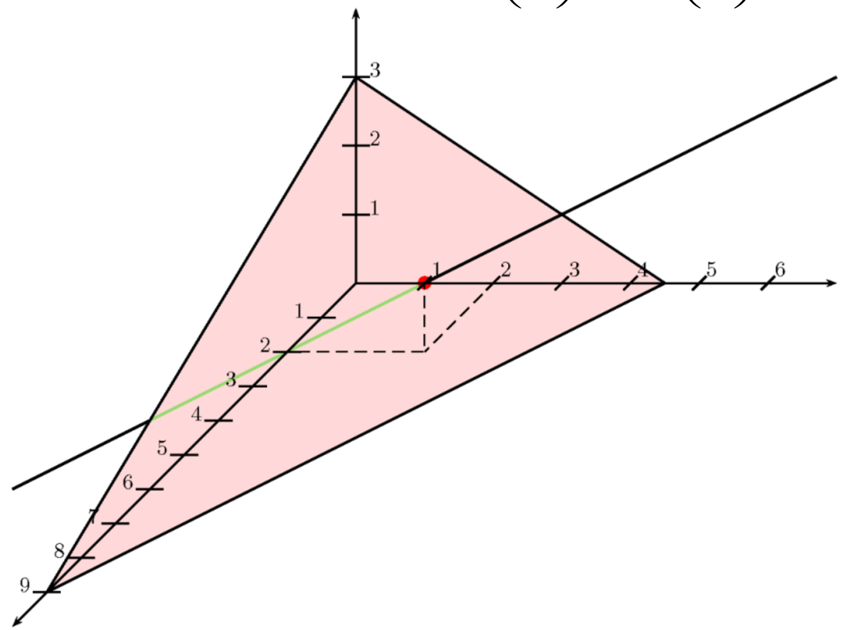
Schnittpunkt g-E

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, setzen wir g in E ein.

Beispiel: Schnittpunkt von E: x + 2y + 3z = 9 und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzen von g in E:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2 + 2(4+2r) + 3(2+r) &= 9 \\ 7r + 16 &= 9 \\ 7r &= -7 \\ r &= -1 \end{aligned}$$



r in g einsetzen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: S = (2, 2, 1)

g (echt) parallel zu E

Wenn sich beim Einsetzen von g in E ein Widerspruch ergibt, so sind g und E (echt) parallel.

Beispiel: E: x + 2y + 3z = 9 und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind (echt) parallel, denn:

Einsetzen von g in E:

$$\begin{aligned} x \quad + \quad 2y \quad + \quad 3z \quad &= 9 \\ (2+r) + 2(3+r) + 3(1-r) &= 9 \\ 11 &= 9 \end{aligned}$$

Widerspruch!

g liegt in E

Wenn sich beim Einsetzen von g in E eine allgemeingültige Aussage (z. B. „0 = 0“) ergibt, so liegt g ganz in E.

Beispiel: E: x + 2y + 3z = 9 enthält die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

denn:

Einsetzen von g in E:

$$\begin{aligned} x \quad + \quad 2y \quad + \quad 3z &= 9 \\ (2+r) + 2(2+r) + 3(1-r) &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

allgemeingültig!

Übung

Untersuchen Sie die Lage von g und E.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E: 2x + y + z = 4$

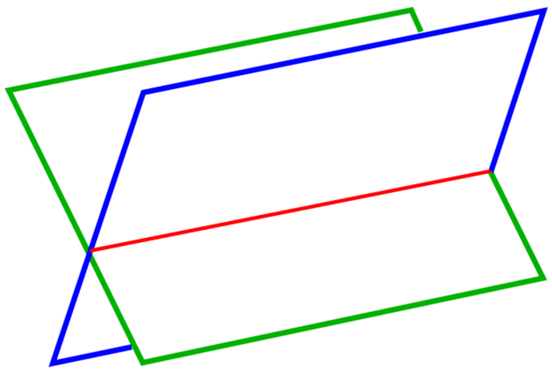
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E: 4x + 4y + 2z = 8$

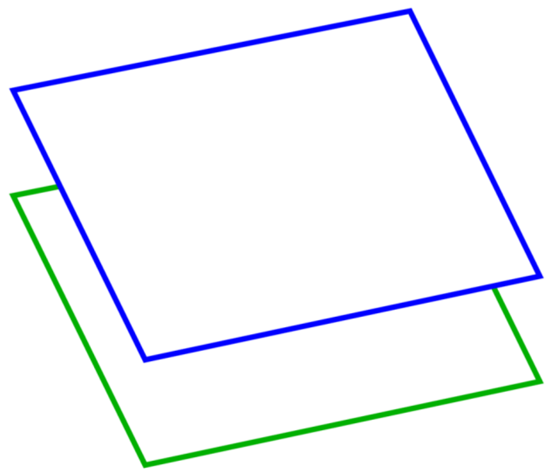
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E: 2x + 2y + 3z = 6$

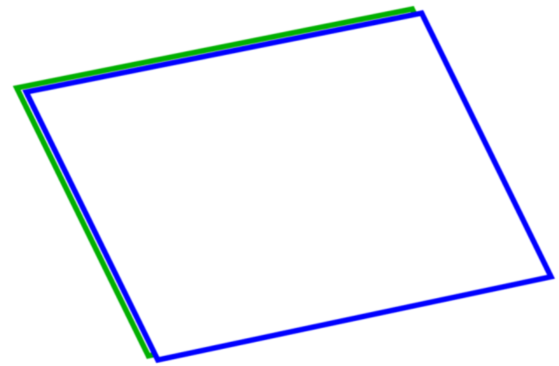
Lage zweier Ebenen



schneiden sich in einer Geraden



(echt) parallel



identisch

Schnittgerade

Am einfachsten: Eine Ebene E in Parameterform und die andere Ebene F in Koordinatenform (ggf. umwandeln). Um die Schnittgerade zu bestimmen, setzen wir E in F ein.

Beispiel: F: 4x + 3y + 6z = 36 und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Einsetzen von E in F:

$$\begin{aligned} 4\cdot(3r+3s)+3\cdot 2r+6\cdot(3-r-s) &= 36 \\ 12r+12s+6r+18-6r-6s &= 36 \\ 6s &= 18-12r \\ s &= 3-2r \end{aligned}$$

s in E einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (3-2r)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{Schnittgerade}}$

Übung

Bestimmen Sie die Schnittgerade.

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F\colon 2x + y + 2z = 8$$

Parallele Ebenen

Wenn sich beim Einsetzen von E in F ein Widerspruch ergibt, so sind E und F (echt) parallel.

Beispiel: F: $2x + 2y + z = 6$ und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ sind (echt) parallel, denn:

Einsetzen von E in F:

$$2(1-3r+s)+2(1+r+s)+(8+4r-4s)=6$$
$$2-6r+2s+2+2r+2s+8+4r-4s=6$$
$$12=6$$

Widerspruch!

Identische Ebenen

Wenn sich beim Einsetzen von E in F eine allgemeingültige Aussage ergibt, so sind E und F identisch.

Beispiel: F: 2x + 2y + z = 6 und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ sind identisch, denn:

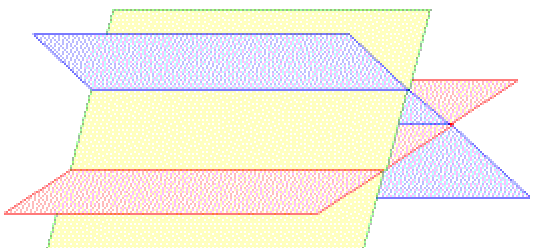
Einsetzen von E in F:

$$2(2-3r-s)+2(4+2r-2s)+(-6+2r+6s)=6$$
$$4-6r-2s+8+4r-4s-6+2r+6s=6$$
$$6=6$$

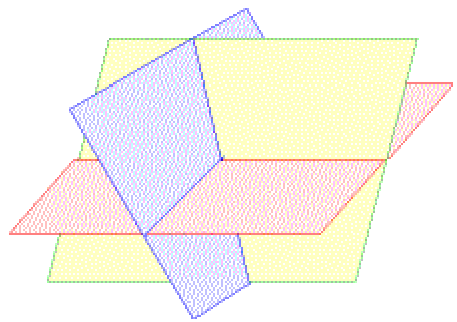
allgemeingültig!

Ebenen und LGS

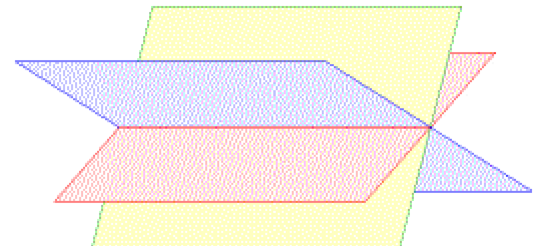
Ein **3x3-LGS** entspricht geometrisch dem **Schnitt dreier Ebenen**:



keine
Lösung



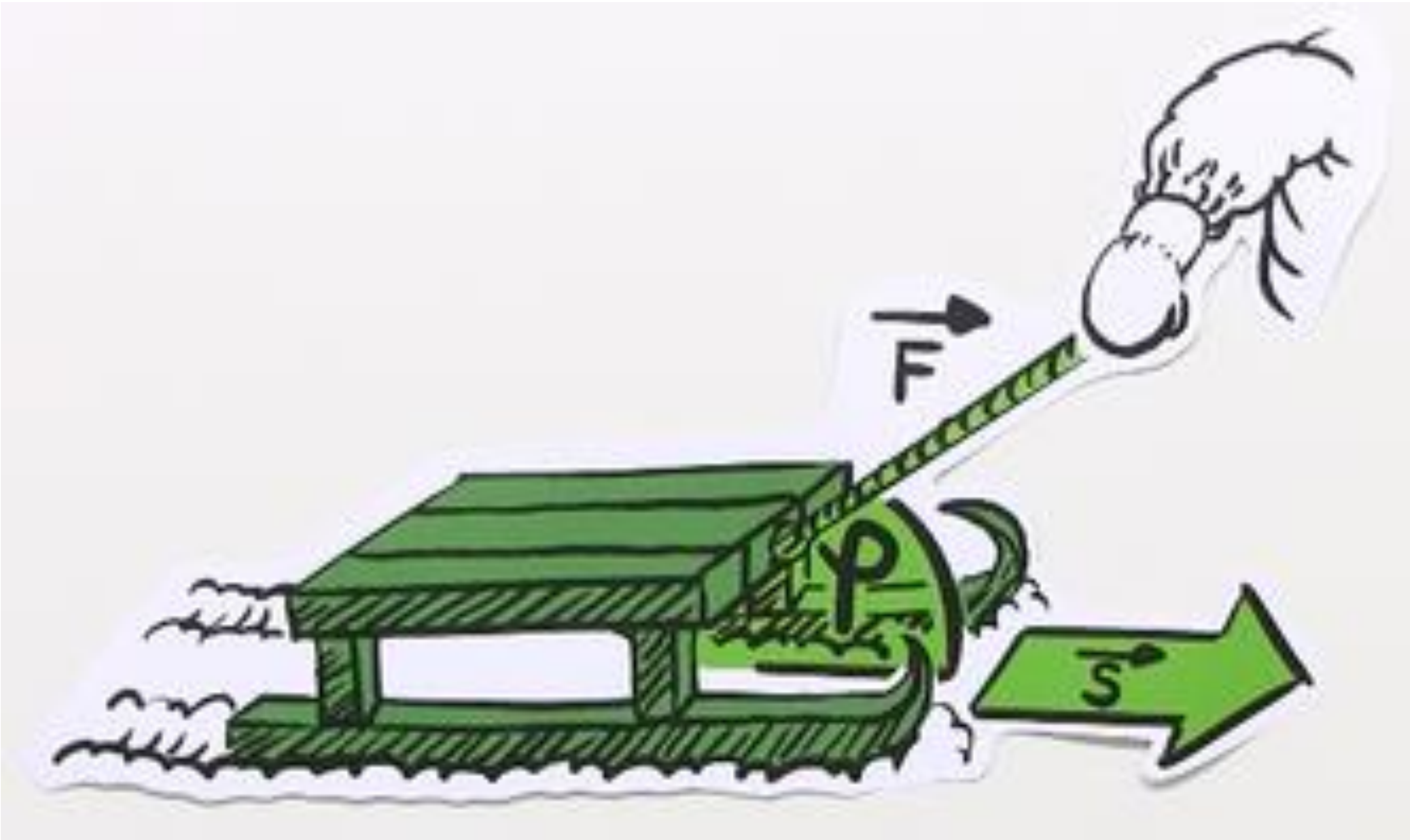
genau eine
Lösung



oder

unendlich viele
Lösungen

2.3 Skalarprodukt und Vektorprodukt



Skalarprodukt

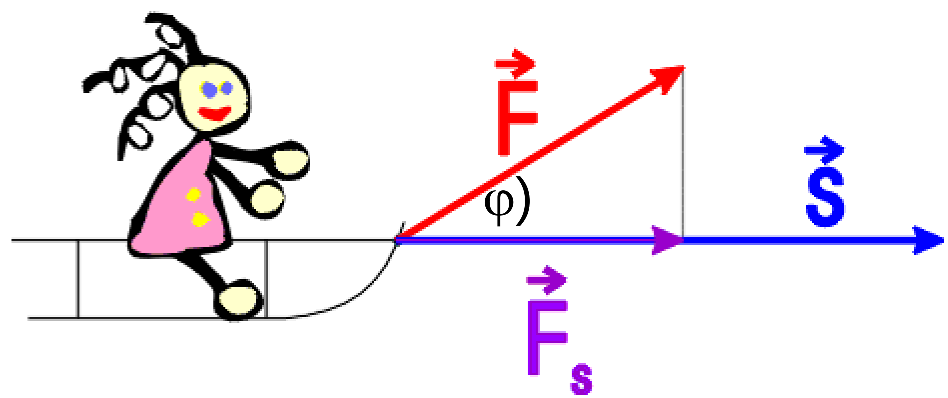
Beispiel: Beim Schlitten spielt für das Vorwärtskommen nur die Kraft *in Wegrichtung* eine Rolle. Die physikalische Arbeit (= „Kraft · Weg“) ist

Arbeit = Kraft in Wegrichtung · Weg

$$W = F_s \cdot s$$

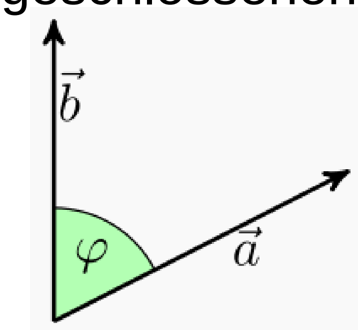
$$W = |\vec{F}| \cdot \cos(\varphi) \cdot |\vec{s}|$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi)$$



Skalarprodukt

Definition. Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem eingeschlossenen Winkel φ heißt



Zwei Schreib-weisen!

$$<\vec{a}, \vec{b}> = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

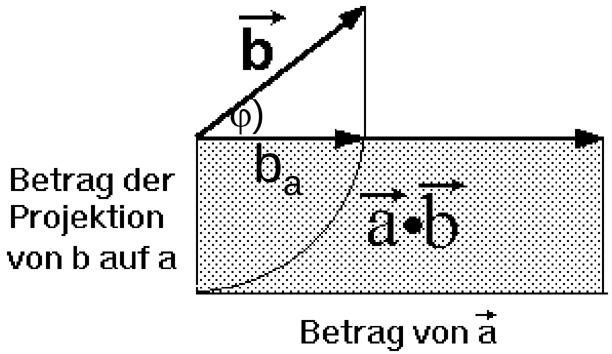
das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Skalarprodukt ist eine reelle Zahl (ein „Skalar“)!

Geometrische Interpretation:

Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$: $b_a = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot b_a$ = Fläche:



Skalarprodukt in Koordinatenform

Das Skalarprodukt kann man einfach aus den Koordinaten berechnen.

In der Ebene: $$<\vec{a},\vec{b}>=\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$$

Im Raum: $$<\vec{a},\vec{b}>=\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$$

Beispiele:

(a) $$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}=1\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot(-4)=4$$

(b) $$\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}=2\cdot 3+(-1)\cdot(-2)+4\cdot(-2)=0$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt

Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (bzw. $< \vec{a}, \vec{b} > = < \vec{b}, \vec{a} >$)

Distributivgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

„Assoziativgesetz“: $(r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (unterschiedl. Malpunkte!)

Achtung: Ein echtes Assoziativgesetz gilt *nicht*, i.A. ist $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

Zusammenhang mit dem **Betrag eines Vektors:** $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

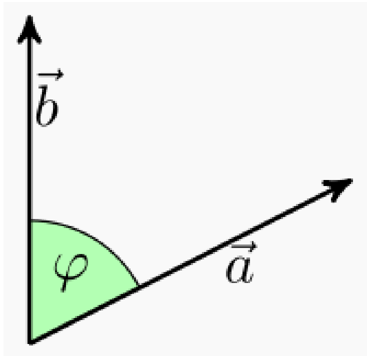
Beweis des Kommutativgesetzes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Aus der Definition des Skalarprodukts $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ folgt, dass wir den Winkel zwischen zwei Vektoren wie folgt ausrechnen können:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



Beispiel: Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} \cdot \sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{56}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{75}} \approx 0{,}9145$$

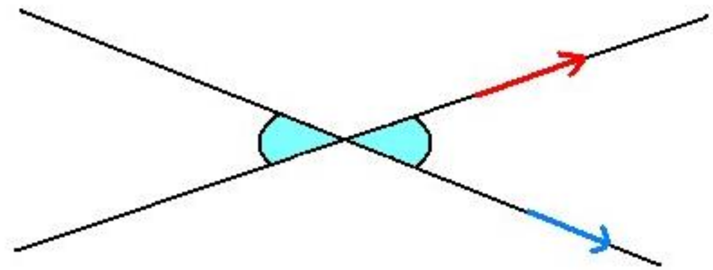
Es folgt (TR: $\cos^{-1}$-Taste): $\varphi \approx 23{,}87°$.

Übung

Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

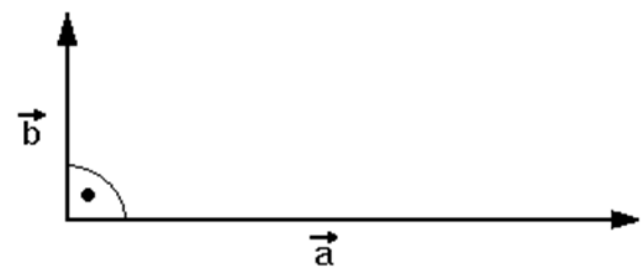


Orthogonalität

Für φ = 90° folgt cos(90°) = 0, also $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(90°) = 0$.

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren sind genau dann **orthogonal** (= senkrecht), wenn ihr **Skalarprodukt null** ist:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

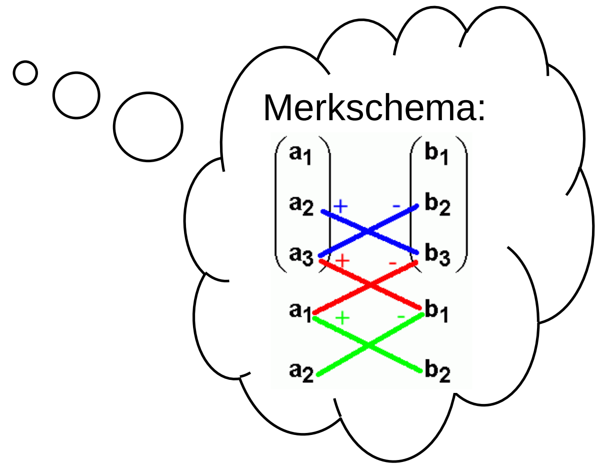


Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind orthogonal: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 0$

Vektorprodukt

Definition. Für zwei dreidimensionale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



das **Vektorprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Beachte:

1. Das Vektorprodukt ist ein Vektor!
2. Das Vektorprodukt ist nur für dreidimensionale Vektoren definiert.

Eigenschaften

Eigenschaften: Für das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ gilt:

1. Der Vektor $\vec{c}$ ist sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal.
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$ mit φ = eingeschlossener Winkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$
3. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein „Rechtssystem“ (Abb. unten).

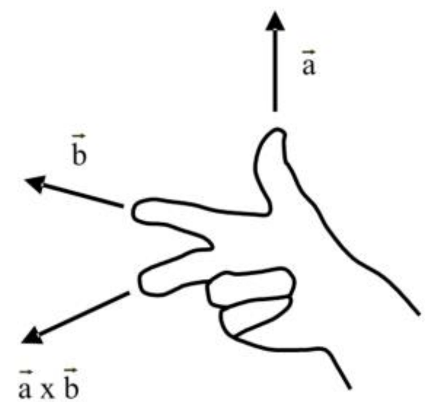
Rechengesetze:

Distributivgesetze:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

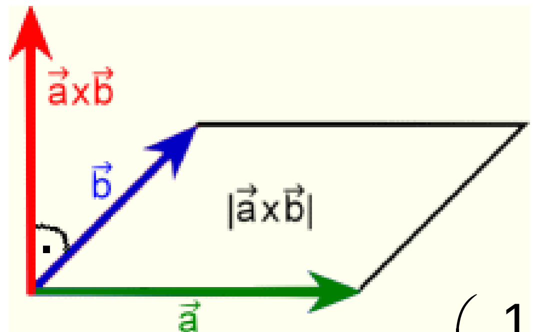
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

Anti-Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$



Geometrische Bedeutung

Der Betrag des Vektorprodukts entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.



Übung: Welchen Flächeninhalt hat das von $\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm?

Normalengleichung einer Ebene

Die Lage einer Ebene im Raum ist eindeutig festgelegt durch:

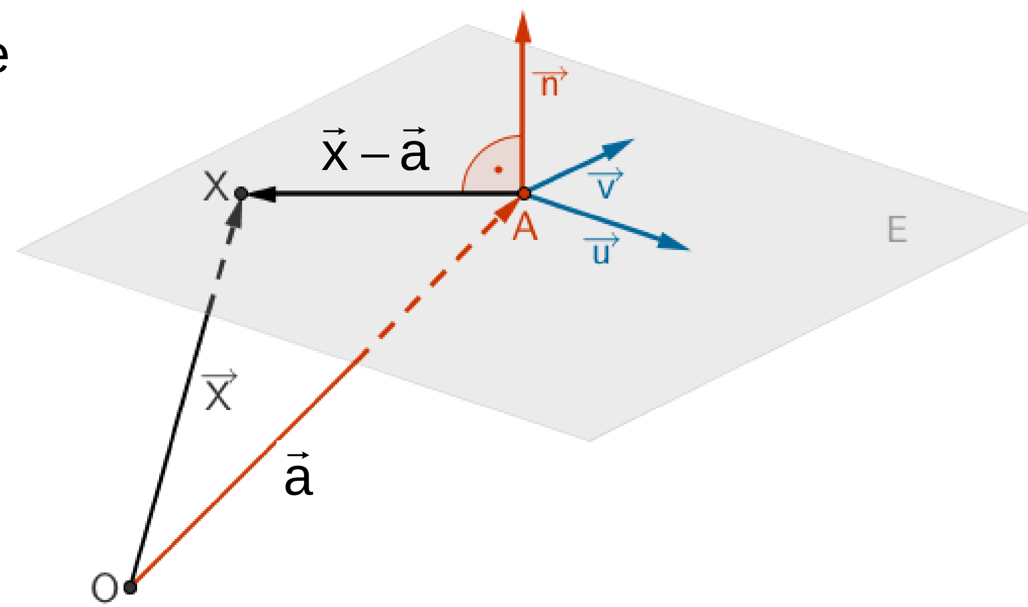
1. einen Stützvektor $\vec{a}$ (zum Stützpunkt A) auf der Ebene,
2. einen **Normalenvektor** $\vec{n}$, der senkrecht zur Ebene steht.

Daher kann man eine Ebene auch beschreiben mit der

Normalengleichung:

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

bzw. $< \vec{x} - \vec{a}, \vec{n} > = 0$



Parameter- → Normalengleichung

Der Normalenvektor steht senkrecht auf den Richtungsvektoren. Daher kann man ihn aus dem Vektorprodukt der Richtungsvektoren bestimmen.

Beispiel: Parameterform **Normalenform**

Stützvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Normalenvektor

Normalen- → Koordinatengleichung

Die **Koordinatengleichung** erhält man aus der Normalengleichung durch Ausmultiplizieren des Skalarprodukts.

Beispiel:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - 19 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 19 \Rightarrow 2x + 3y + 4z = 19$$

Koordinaten- → Normalengleichung

Folgerung: Die Koeffizienten in der Koordinatengleichung sind die Koordinaten eines Normalenvektors!

$$\text{E: } ax + by + cz = d \;\Rightarrow\; \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ ist ein Normalenvektor von E}$$

Einen Normalenvektor kann man also an der Koordinatenform *ablesen*!

Beispiel: Die Ebene 2x + 3y – z = 6 hat die Normalengleichung

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

(Stützpunkt ist irgendein Punkt der Ebene, z.B. (3, 0, 0))

Übungen

(a) Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene $2x - 3y + z = 4$.

(b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

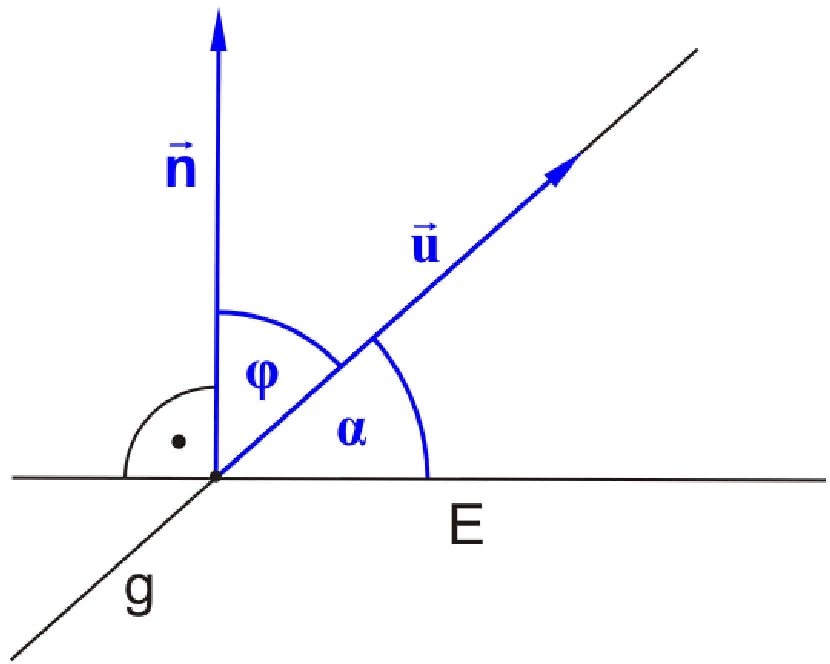
Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

Den **Schnittwinkel** zwischen einer Gerade und einer Ebene erhält man wie folgt:

1. Berechne den Winkel φ zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden (Kosinusformel).

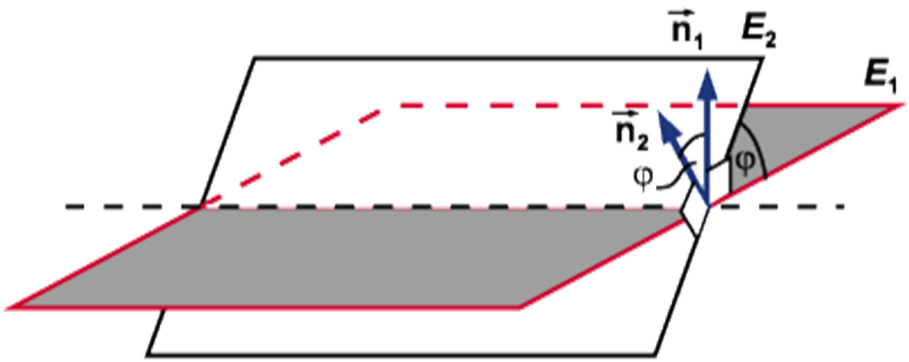
2. Der Schnittwinkel α ist dann:

$$\alpha = 90° - \varphi.$$



Schnittwinkel zweier Ebenen

Der **Schnittwinkel** zweier Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen ihren beiden Normalenvektoren.



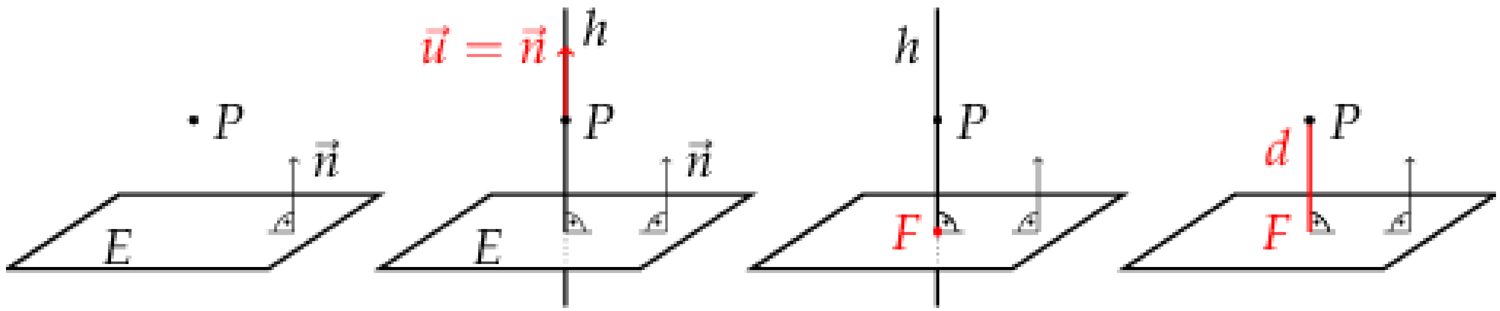
Beispiel:

Schnittwinkel von E_1: $4x + 3y + 2z = 12$ und E_2: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{13}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} \approx 0{,}6695 \Rightarrow \gamma \approx 47{,}97°$$

Abstand Punkt – Ebene: Lotfußpunktverfahren

Den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E kann man mit folgendem **Lotfußpunktverfahren** ermitteln:



1. Erstelle Hilfsgerade h durch P, die senkrecht auf der Ebene E steht (P als Stützpunkt, Richtungsvektor von g = Normalenvektor von E).

2. Berechne den Schnittpunkt F (Lotfußpunkt) von h mit E.

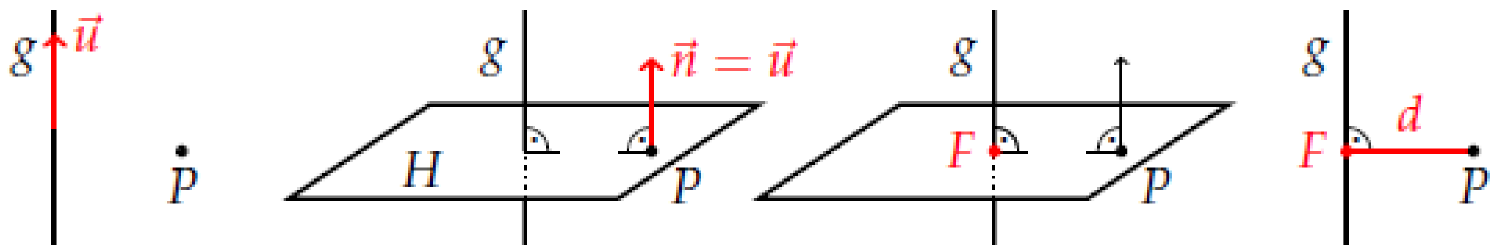
3. Berechne den Abstand d = |PF|.

Übung

Welchen Abstand hat $P = (4, 4, 5)$ von der Ebene E: $x + y + 2z = 6$?

Abstand Punkt – Gerade: Lotfußpunktverfahren

Den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g kann man mit folgendem **Lotfußpunktverfahren mit Hilfs*ebene*** ermitteln:



1.Erstelle Hilfsebene H durch P, die senkrecht auf der Gerade g steht (P als Stützpunkt, Normalenvektor von E = Richtungsvektor von g).

2.Berechne den Schnittpunkt F (Lotfußpunkt) von H mit g.

3.Berechne den Abstand d = |PF|.

Hesse‘sche Normalenform

Alternativ kann man viele Abstände auch mit Formeln berechnen.
Diese Formeln beruhen auf der

Hesse‘schen Normalenform einer Ebene:

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

Einziger Unterschied zur bisherigen Normalenform:
Der Normalenvektor ist auf den Betrag 1 normiert: $|\vec{n}_0| = 1$.

Beispiel: Normalenform → Hesse‘sche Normalenform

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0 \qquad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1/\sqrt{14}\\2/\sqrt{14}\\3/\sqrt{14}\end{pmatrix} = 0$$

Abstandsformeln

Abstand Punkt – Ebene: $d = |(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0|$

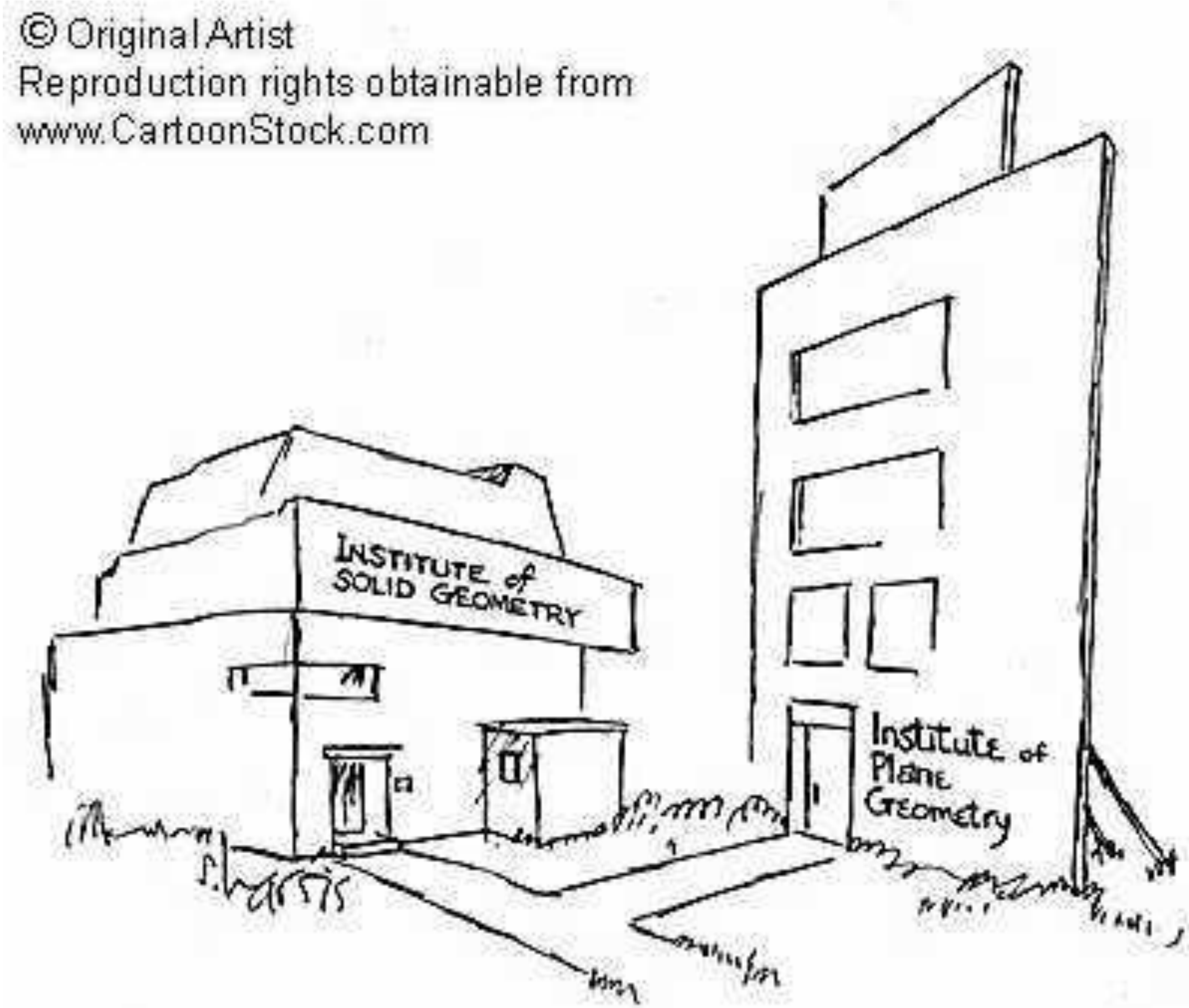
($\vec{p}$ = Ortsvektor von P, $\vec{a}$ = Stützvektor von E, $\vec{n}_0$ = normierter Normalenvektor von E)

Abstand Punkt – Gerade: $d = |(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{m}_0|$

($\vec{p}$ = Ortsvektor von P, $\vec{a}$ = Stützvektor von g, $\vec{m}_0$ = normierter Richtungsvektor von g)

Abstand windschiefer Geraden: $d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0|$

($\vec{p}$ = Stützvektor von g, $\vec{q}$ = Stützvektor von h, $\vec{n}_0$ = normierter Normalenvektor, der auf beiden Richtungsvektoren senkrecht steht)



© Original Artist
Reproduction rights obtainable from
www.CartoonStock.com
INSTITUTE of
SOLID GEOMETRY
Institute of
Plane
Geometry