Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kapitel 02: Kombinatorik

Prof. Dr. Adrian Ulges

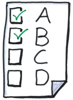
B.Sc. *Informatik*
Fachbereich DCSM
Hochschule RheinMain

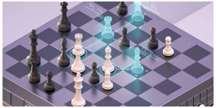
Kombinatorik[1]: Definition Bilder: [6] [5] [3] [4]

> *"Kombinatorik = Die Untersuchung des Abzählens, der Existenz und Konstruktion von Konfigurationen"*
>
> (Pólya, Tarjan, Woods : *Notes on Introductory Combinatorics*, 1983)

Motivation

- Bei der Durchführung/Wiederholung von Zufallsexperimenten entstehen zahlreiche Konfigurationen, d.h. mögliche Ergebnisse.
- Unser Ziel ist es, die Zahl dieser möglichen Ergebnisse zu bestimmen.
- Hieraus werden wir später Wahrscheinlichkeiten ableiten.

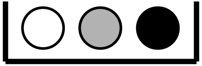


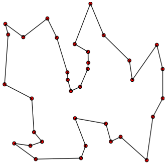


[1] siehe auch: Papula, *"Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler"*, Band 3, Kapitel II.1

Kombinatorik: Das Urnenmodell Bilder: [8] [4]

Wir führen die Kombinatorik mit Hilfe des sogenannten **Urnenmodells** ein.
In einer Urne befinden sich **n Kugeln**:





- **Frage 1 (Permutationen)**:
  Auf wieviele Arten lassen sich die n Kugeln nacheinander anordnen?

- **Frage 2+3 (Variationen+Kombinationen)**:
  Wir ziehen k Kugeln. Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es?

Outline

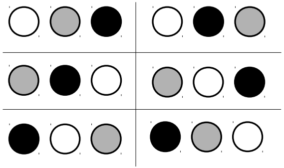
1. Permutationen
2. Variationen
3. Kombinationen

Permutationen

In einer Urne befinden sich n verschiedene Kugeln.

Wir definieren $P(n)$ *als die Anzahl der möglichen Ergebnisse, die entstehen wenn wir die Kugeln nacheinander anordnen.*

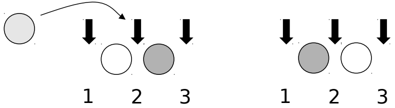
Beispiel: $P(3) = 6$



Bei 3 Kugeln ergeben sich 6 Permutationen:

- Jede der 3 Kugeln kann zuerst gezogen werden *(3 Zeilen)*.
- In jeder Zeile haben wir zwei Möglichkeiten, die Kugeln 2 und 3 anzuordnen *(2 Spalten)*.

Permutationen: Induktive Herleitung

$P(1) = 1$ (trivial)	
$P(2) = 2$	
$P(3) = 2 \cdot 3$ *(Wir können die 3. Kugel an Platz 1, 2 oder 3 anordnen)*	
… $P(n+1) = P(n) \cdot (n+1)$ (Wir können die $(n{+}1)$-te Kugel an jeder Position $1, \dots, n+1$ einsortieren)	Für jede Permutation existieren n+1 Stellen, An denen wir die neue Kugel einfügen können. 

Permutationen: Induktive Herleitung

Es ergibt sich die rekursive Folge:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 \\ P(n+1) &= P(n) \cdot (n+1) \qquad \text{für alle } n \geq 1 \end{aligned}$$

Dies entspricht der Fakultät:

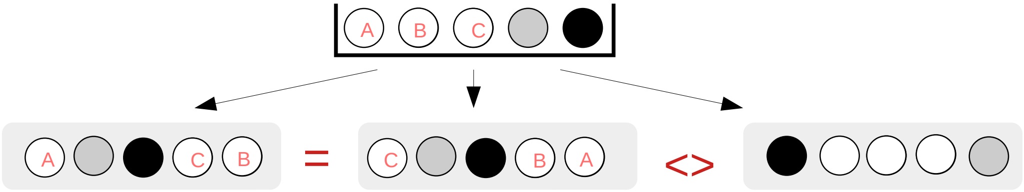
$$P(n) = n!$$

Permutationen mit Duplikaten

Neue Fragestellung: In der Urne dürfen Kugeln der gleichen Farbe vorkommen. Für diese Kugeln ist es egal in welcher Reihenfolge sie gezogen werden.

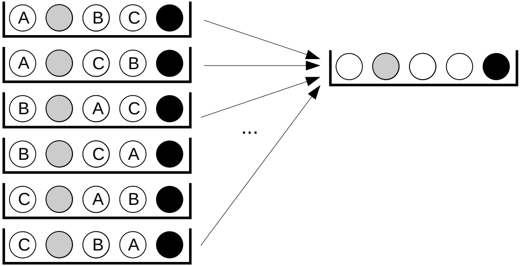
Beispiel ($n = 5$ Kugeln, $n_1 = 3$ davon weiß)

- Manche Anordnungen sind jetzt identisch und zählen als eine einzige.
- Die neue Anzahl an Permutationen, $P(n; n_1)$, muss also kleiner sein als $P(n)$.



Permutationen mit Duplikaten

Wir beobachten: Aus $P(n_1)$ Anordnungen in $P(n)$ wird eine einzige in $P(n; n_1)$!



Wir rechnen:

$$P(n; n_1) = P(n) \;/\; P(n_1) = n! \;/\; n_1! = 5! \;/\; 3! = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 = 20$$

Permutationen mit Duplikaten: Verallgemeinerung

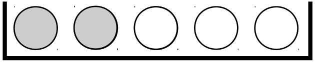
Im Allgemeinen könnten von mehreren Farben jeweils mehrere Kugeln vorliegen.
Dies ist durch unsere Definition mit abgedeckt:

Definition (Permutation mit Duplikaten)

In einer Urne befinden sich n Kugeln von K verschiedenen Sorten (z.B. weiß, grau, schwarz). Von jeder Sorte $k \in \{1, \ldots, K\}$ seien n_k Stück in der Urne, so dass $n_1 + n_2 + \ldots + n_K = n$.
Dann lautet die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen:

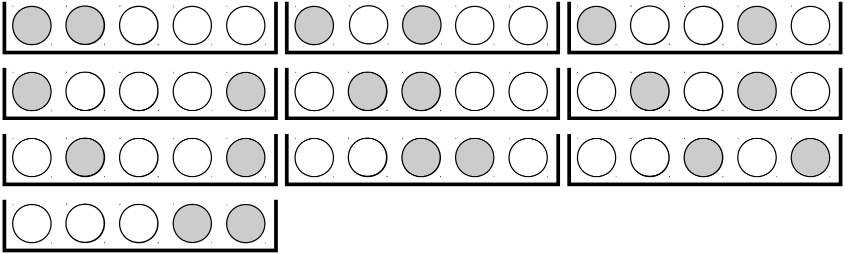
$$P(n; n_1, \ldots, n_K) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_K!}$$

Permutationen mit Duplikaten: Beispiel

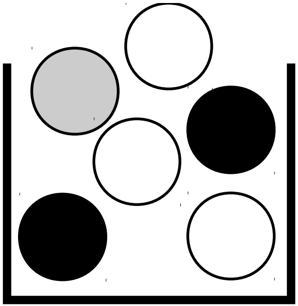


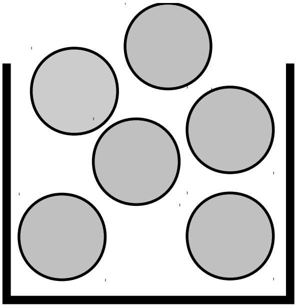
Es gilt $n = 5,\ n_1 = 2,\ n_2 = 3$.

$$P(5;2,3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3})} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$



Permutationen mit Duplikaten: Do-it-yourself

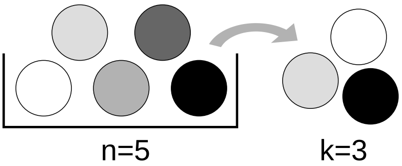




Outline

1. Permutationen
2. Variationen
3. Kombinationen

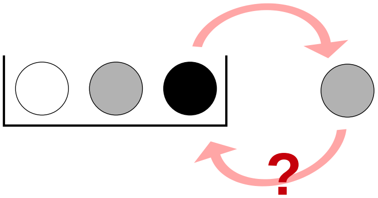
Von Permutationen zu Variationen/Kombinationen



Neue Fragestellung

- Die n Kugeln seien ab jetzt wieder alle unterscheidbar.
- Wir ziehen nicht mehr alle n Kugeln aus der Urne, sondern k Stück.
- Gesucht ist jeweils die Anzahl
  der möglichen Resultate, $C(n; k)$.
- Wir unterscheiden:
  (1) Ziehen mit/ohne Wiederholung,
  (2) Ziehen mit/ohne Reihenfolge.

Mit Wiederholung / ohne Wiederholung



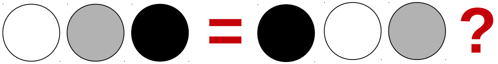
Zwei Alternativen

1. Wir legen eine Kugel, nachdem wir sie gezogen haben, wieder in die Urne zurück.
2. Wir legen die Kugel nicht zurück. Sie kann maximal einmal gezogen werden.

Anmerkungen

- Wir bezeichnen die Alternativen als Ziehen *"mit Wiederholung"* / *"ohne Wiederholung"*.
- Mit Wiederholung ergeben sich deutlich mehr Möglichkeiten.

Geordnet vs. Ungeordnet



Zwei Alternativen

1. Werden dieselben Kugeln in unterschiedlicher Reihenfolge gezogen, wird das Ergebnis als identisch betrachtet: Es kommt nicht auf die Reihenfolge an.
2. Werden dieselben Kugeln in unterschiedlicher Reihenfolge gezogen, zählen wir dies als unterschiedliche Ergebnisse.

Anmerkungen

- Wir bezeichnen die Alternativen als *“ungeordnetes”* / *“geordnetes”* Ziehen.
- Bei geordneten Stichproben ergeben sich mehr Möglichkeiten.
- Bei ungeordnetem Ziehen nennen wir die Ergebnisse Kombinationen, bei geordnetem Ziehen Variationen.

Do-Urne-Yourself Bilder: [6] [7] [2] [1]

- Bilden Sie die folgenden Probleme auf das Urnenmodell ab.
- Entscheiden Sie jeweils: Mit Zurücklegen? Geordnet? n? k?

Wieviele Kombinationen?

0 1 2 … 9

4 3 4 7

$n=10$; $k=4$

Geordnet? ✓

Wiederholung? ✓

10 Athleten. Wieviele Verschiedene Medaillen-Verteilungen?

1 2 … 10

G S B

$n=10$, $k=3$

Geordnet? ✓

Wiederholung? ✗

22 Kinder. Wieviele Möglichkeiten, 2 Fußballteams zu bilden?

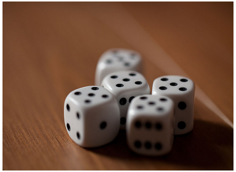
1 … 22

$n=22$; $k=11$

Geordnet? ✗

Wiederholung? ✗

Wieviele Kniffel-Ergebnisse?



1 … 6

$n=6$

$k=5$

Geordnet? ✗

Wiederholung? ✓

Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	**???**	???
Ungeordnete Stichprobe	???	???

Geordnete Stichprobe, mit Wiederholung

Wir legen die Kugeln zurück *und* berücksichtigen die Reihenfolge:

- 1. Kugel: n Möglichkeiten
- 2. Kugel: n Möglichkeiten $\rightarrow$ insgesamt $n \times n$ Variationen
- 3. Kugel: n Möglichkeiten $\rightarrow$ insgesamt $n \times n \times n$ Variationen
- ...
- k. Kugel: n Möglichkeiten $\rightarrow$ insesamt $n \times n \times \ldots \times n$ Variationen

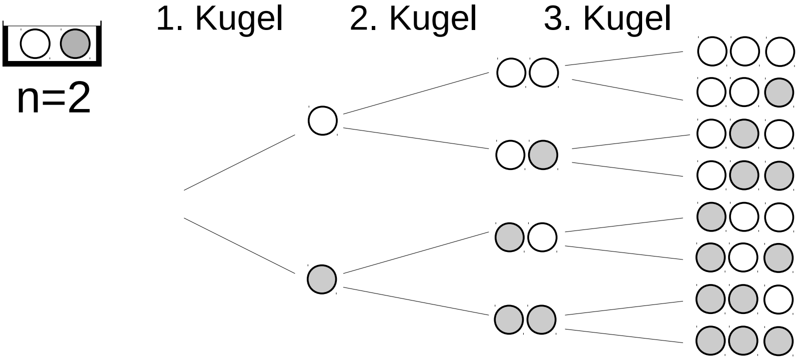
Definition (Geordnete Stichproben mit Wiederholung)

Wir entnehmen k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln. Dann lautet die Anzahl möglicher Variationen bei geordnetem Ziehen mit Wiederholung:

$$C(n; k) = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k$$

Geordnete Stichprobe, mit Wiederholung: Illustration

Beispiel ($n = 2, k = 3$)



Do-Kombinatorik-Yourself Bild: [6]

Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	n^k	???
Ungeordnete Stichprobe	???	???

Geordnete Stichprobe, ohne Wiederholung

Wir berücksichtigen immer noch die Reihenfolge, legen die Kugeln aber nicht zurück.
Es muss deshalb gelten: $k \leq n$.

- 1. Kugel: n Möglichkeiten
- 2. Kugel: $n - 1$ Möglichkeiten $\rightarrow n \times (n - 1)$ Variationen
- 3. Kugel: $n - 2$ Möglichkeiten $\rightarrow n \times (n - 1) \times (n - 2)$ Variationen
- ...
- k-te Kugel: $n{-}k{+}1$ Möglichkeiten $\rightarrow n \times (n{-}1) \times (n{-}2) \times \ldots \times (n{-}k{+}1)$ Variationen

Geordnete Stichprobe, ohne Wiederholung

Definition (Geordnete Stichproben ohne Wiederholung)

Wir entnehmen k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln. Dann lautet die Anzahl möglicher Variationen bei geordnetem Ziehen ohne Wiederholung:

$$
\begin{aligned}
C(n;k) &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Do-Kombinatorik-Yourself Bild: [2]

Outline

1. Permutationen
2. Variationen
3. Kombinationen

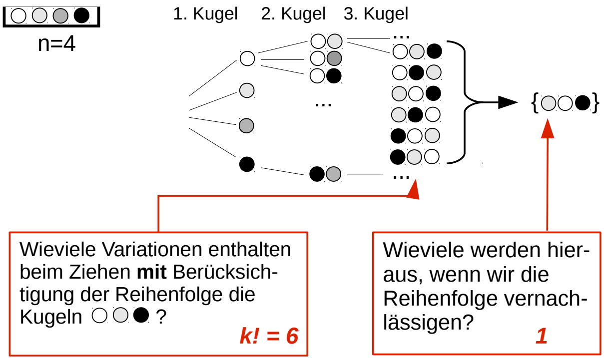
Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	n^k	$n!/(n-k)!$
Ungeordnete Stichprobe	???	???

Ungeordnete Stichprobe, ohne Wiederholung

- Wir legen nicht zurück und berücksichtigen die Reihenfolge nicht.
- Wir leiten $C(n; k)$ aus der Formel für die zugehörige geordnete Stichprobe ab.

Beispiel $(n = 4, k = 3)$



Ungeordnete Stichprobe, ohne Wiederholung (cont'd)

- Mit Reihenfolge hatten wir $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.
- Aus jeweils $k!$ dieser Möglichkeiten wird (bei Vernachlässigung der Reihenfolge) eine einzige.

$$\Rightarrow C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} =: \binom{n}{k}$$

- Wir nennen $\binom{n}{k}$ einen Binomialkoeffizienten.

Binomialkoeffizienten: Rechenregeln

A) $$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)\cdot\ldots\cdot 1}}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k)\cdot\cancel{((n-k)\cdot\ldots\cdot 1)}} = \binom{n}{k}$$

z.B.: $$\binom{100}{3} = \frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}$$

B) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

z.B.: $$\binom{100}{97} = \frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot \ldots \cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 97}$$

$$\binom{100}{3}$$ (s.o.)

Do-Kombinatorik-Yourself Bild: [1]

Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	n^k	$n!/(n-k)!$
Ungeordnete Stichprobe	???	$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$

Ungeordnete Stichprobe, mit Wiederholung

- Wir berücksichtigen die Reihenfolge nicht, legen gezogene Kugeln aber zurück.
- Beispiel Eisbecher: Wieviele verschiedene Eisbecher kann man aus n Eissorten mit k Kugeln Eis zusammenstellen?

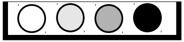
Herleitung

- Wir sortieren die n Kugeln in einer festen Reihenfolge, z.B.
- Wir merken uns, wie oft jede Kugel gezogen wurde,
  z.B. $2\times$, $1\times$, $0\times$, $2\times$
- Wir codieren das Ergebnis mittels "–" (Zählen) und "|" (Trennern),
  z.B. – – | – | | – –

Ungeordnete Stichprobe, mit Wiederholung

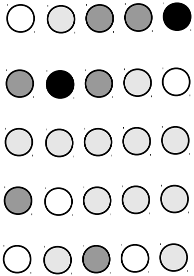
Herleitung (cont'd)

Ungeordnete Stichprobe, mit Wiederholung



n=4

k=5

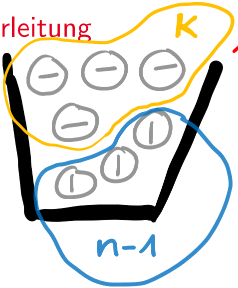


Anzahl der Vorkommen

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th><th>Code</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>-|-|--|-</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>-|-|--|-</td></tr>
<tr><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>|-----||</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>-|---|-|</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>--|--|-|</td></tr>
</table>

Ungeordnete Stichprobe, mit Wiederholung

Herleitung



$\#$Codes = $\#$Permutationen aus $K \times$ "–" und $n-1 \times$ "|"

- $C(n,k)$ = Anzahl der möglichen Codes

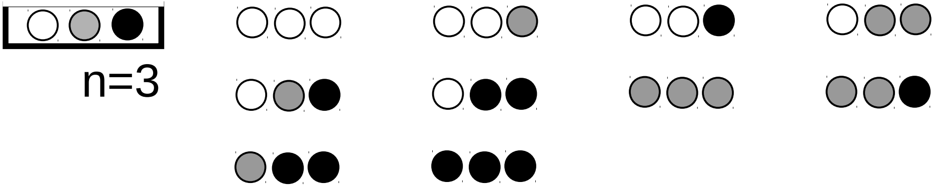
  = $\#$ Permutationen aus k ⊖-Kugeln und $n-1$ ①-Kugeln

$$\boxed{C(n,k)} = P(n+k-1\;;\,k,\,n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \boxed{\binom{n+k-1}{k}}$$

Video 2.1

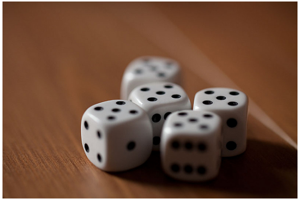
Ungeordnete Stichprobe, mit Wiederholung

Beispiel: $n = 3$, $k = 3$ (Eisbecher aus 3 Sorten mit 3 Kugeln)



$$C(3;3) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Do-Kombinatorik-Yourself Bild: [7]



Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	n^k	$n!/(n-k)!$
Ungeordnete Stichprobe	$\binom{\mathbf{n+k-1}}{\mathbf{k}}$	$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$

References I

[1] Bruce Tuten: getting it done.
https://flic.kr/p/3HoFg4 (retrieved: Nov 2016).

[2] geckoam: Go World!!
https://flic.kr/p/59DwiU (retrieved: Nov 2016).

[3] Kyle wiggers: Deepmind's muzero teaches itself how to win at atari, chess, shogi, and go.

[4] Lany Lane's Photo Stream: Envie de plein de chose.
https://flic.kr/p/bx7psH (retrieved: Nov 2016).

[5] Oliver Tacke: Multiple Choice Test.
(retrieved: Nov 2016).

[6] Swisspromt: Zahlenschloss / Spiralschloss / Veloschloss.
http://www.swisspromt.ch/shop/products/zahlenschloss-spiralkabelschloss-veloschloss/ (retrieved: Nov 2016).

[7] Ulrica Törning: Yatzy.
https://flic.kr/p/84JVjL (retrieved: Nov 2016).

[8] Xypron (author): Solution of a travelling salesman problem: the black line shows the shortest possible loop that connects every red dot.
https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem (retrieved: Nov 2016).