

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (WS 2021/22)

Aufgabenblatt 10

zu bearbeiten bis: 16.01.2022, 23:59 Uhr

Test-Training

Diese Woche gibt es kein Übungsblatt mit neuem Stoff. Die folgenden Aufgaben können Sie aber zum Training für unseren zweiten Test nutzen. Die Aufgaben können wie üblich in den Übungen nach der Abgabe für Punkte vorgestellt werden.

Aufgabe 10.1 (Diskrete ZVs: Praxis)

Wir investieren in eine Aktie. An jedem Tag kann die Aktie um 1 EUR steigen (mit Wahrscheinlichkeit 60%), um 1 EUR fallen (mit Wahrscheinlichkeit 10%), oder auf dem gleichen Wert bleiben (mit Wahrscheinlichkeit 30%). Die Wertentwicklungen an verschiedenen Tagen sind unabhängig voneinander.

- Es sei X die Wertentwicklung der Aktie über einen Verlauf von 2 Handelstagen, d.h. der Preis der Aktie nach den zwei Tagen minus der Preis vor den zwei Tagen. Bestimmen Sie die Realisierungen und Wahrscheinlichkeiten.
- Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X .
- Bestimmen Sie – soweit möglich – die 40%-Quantile.

Aufgabe 10.2 (Diskrete W'keitsverteilungen)

Eine zerbeulte Münze zeige mit Wahrscheinlichkeit 60% Kopf und zu 40% Zahl. Die Münze wird viermal geworfen. Es sei X die Anzahl der erzielten "Kopf"-Würfe.

- Geben Sie den **Verteilungstyp** von X an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zweimal oder dreimal Kopf zu werfen.
- Wir wiederholen das Experiment, verwenden nun aber eine andere Münze mit unbestimmter "Kopf"-Wahrscheinlichkeit. Berechnen Sie die beiden fehlenden Werte, $P(X = 3)$ und $P(X = 4)$.

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|-----------------|-----------------|-----------------|---|---|
| $P(X = k)$ | $\frac{16}{81}$ | $\frac{32}{81}$ | $\frac{24}{81}$ | | |

Aufgabe 10.3 (Diskrete W'keitsverteilungen II)

(knifflige Bonusaufgabe) Wie oft müssen wir die obige Münze ($p=0.6$) mindestens werfen, um mit 95% Wahrscheinlichkeit 10 oder mehr Treffer zu erzielen? *Tipp: Nähern Sie hierzu die Binomialverteilung mit einer möglichst ähnlichen Normalverteilung an, und berechnen Sie für diese die gesuchte W'keit.*

Aufgabe 10.4 (Diäten)

Detlev S. macht eine Diät mit Sportprogramm. Seine tägliche Kalorienbilanz (basierend auf Nahrungszufuhr, Sport, etc.) ist normalverteilt mit $\mu = 200$ Kalorien und $\sigma = 500$ Kalorien. Herr S. führt sein Programm für 10 Tage durch. Wir nehmen an, die Kalorienbilanzen der einzelnen Tage seien unabhängig.

- Die Kalorien-Gesamtbilanz nach den 10 Tagen ist eine (ebenfalls normalverteilte) Zufallsvariable X . Bestimmen Sie die Parameter der Verteilung. Nutzen Sie die Rechenregeln für Zufallsvariablen.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr S. nach 10 Tagen mehr Kalorien zugeführt als abgebaut hat?

Aufgabe 10.5 (ML-Schätzung)

Gegeben ist die folgende Dichtefunktion mit Parameter $c > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{c^2}x & \text{falls } x \in [0, c] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Geben Sie eine Stichprobe an, so dass die Likelihood für $c = 10$ null beträgt.
- Berechnen Sie die Likelihood der Stichprobe $x_1, \dots, x_4 = 3, 4, 8, 5$ in Abhängigkeit von c .
- Äußern Sie eine Vermutung für den Wert des ML-Schätzer. Begründen Sie informell.