Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 3

Matrizen

Inhalt

3.1 Matrizenrechnung

Matrizen

Ein rechteckiges Schema reeller Zahlen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt **Matrix** mit m Zeilen und n Spalten (**$m \times n$-Matrix**).

Kurzschreibweise: **$A = (a_{ij})$** mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.

Dabei bezeichnet a_{ij} das **Element** in der i-ten Zeile und j-ten Spalte (Merkspruch für die Reihenfolge: „**Z**eile **z**uerst – **Sp**alte **sp**äter“).

Spezielle Matrizen

Quadratische Matrix: m = n

(gleichviele Zeilen wie Spalten)

z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor: n = 1

z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix: alle $a_{ij} = 0$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix: auf der Diagonale 1, sonst überall 0

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Transponieren von Matrizen

Die **transponierte Matrix A^T** ergibt sich aus A, indem man die Zeilen mit den Spalten vertauscht.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^T$ gilt.

Beispiel: Die folgende Matrix ist symmetrisch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A^T$$

1. Beispiel: Entfernungsmatrix

Die folgende Entfernungstabelle kann man durch eine symmetrische Matrix darstellen:

	CAPTIVA ISLAND	CEDAR KEY	COCOA BEACH	EVERGLADES NP	KEY WEST
CAPTIVA ISLAND	-	297	238	94	320
CEDAR KEY	297	-	193	332	517
COCOA BEACH	238	193	-	263	355
EVERGLADES NP	94	332	263	-	209
KEY WEST	320	517	355	209	-

Symmetrische Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 297 & 238 & 94 & 320 \\ 297 & 0 & 193 & 332 & 517 \\ 238 & 193 & 0 & 263 & 355 \\ 94 & 332 & 263 & 0 & 209 \\ 320 & 517 & 355 & 209 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Beispiel: Absatzmatrix

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte U und V her. Die folgende Tabelle gibt an, wie viele dieser Produkte an welche Orte geliefert werden:

Produkt \ Ort	Wiesbaden	Frankfurt	Mainz
U	2	5	9
V	8	4	0

Die zugehörige 2×3-Absatzmatrix lautet: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Das Element $a_{12} = 5$ bedeutet: 5 der Produkte U werden nach Frankfurt geliefert.

Addition von Matrizen

Man kann Matrizen addieren, wenn sie die **gleiche Ordnung** haben (d. h. sowohl ihre Zeilenzahl als auch ihre Spaltenzahl übereinstimmt).

Matrizen werden **elementweise addiert**, d. h. die an gleicher Position stehenden Elemente werden addiert. (Analog: Subtraktion)

Beispiel: Die beiden Matrizen A und B beschreiben die monatlichen Lieferungen zweier Produkte in drei Orte; die Matrix A im Januar, B im Februar:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Gesamtabsatz ist dann: $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 16 \\ 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Vervielfachung von Matrizen

Eine beliebige Matrix wird **mit einer reellen Zahl multipliziert**, indem man **jedes Element** der Matrix mit dieser Zahl multipliziert.

Beispiel: Das Unternehmen verdoppelt im März seine Lieferungen vom Januar in die drei Orte. Die Absatzmatrix C für März lautet dann

$$C = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 18 \\ 16 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Übung

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie, sofern möglich:

(a) $A + C$

(b) $3 \cdot B$

(c) $2 \cdot A + B$

(d) $3 \cdot A - 2 \cdot C$

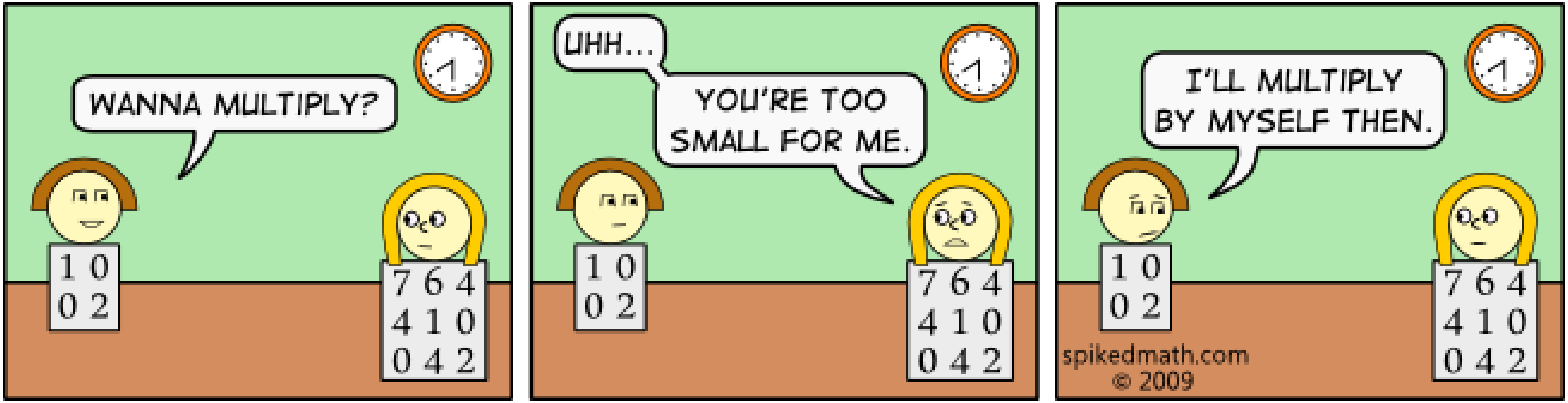
Matrixmultiplikation

Voraussetzung für die Multiplikation zweier Matrizen:

Anzahl der Spalten der 1. Matrix = Anzahl der Zeilen der 2. Matrix

Die **Produktmatrix** hat so viele Zeilen wie die 1. Matrix und so viele Spalten wie die 2. Matrix.

$$\underbrace{(m \times \overbrace{n) \cdot (n}^{=} \times r)}_{\text{Ergebnis}} = m \times r$$

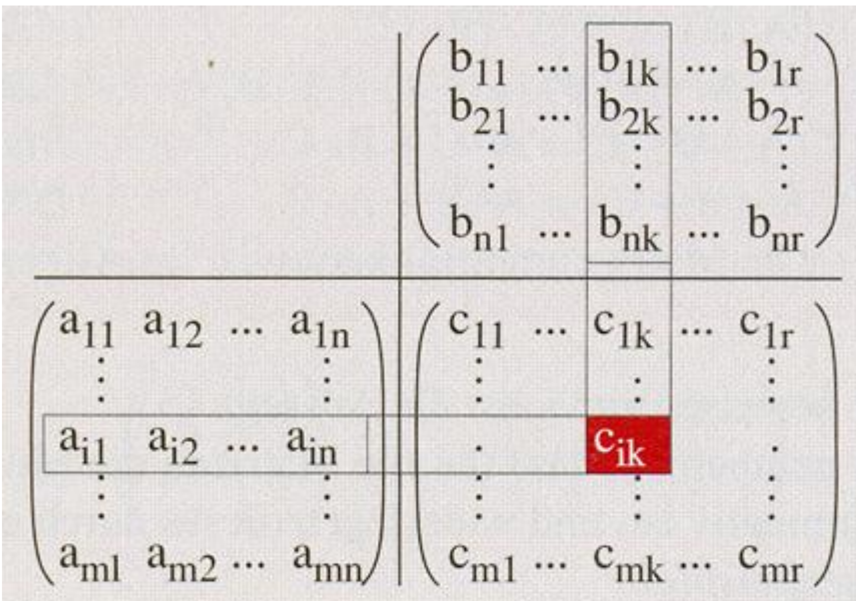

WANNA MULTIPLY?
1 0
0 2
7 6 4
4 1 0
0 4 2
UHH...
YOU'RE TOO SMALL FOR ME.
1 0
0 2
7 6 4
4 1 0
0 4 2
I'LL MULTIPLY BY MYSELF THEN.
1 0
0 2
7 6 4
4 1 0
0 4 2
spikedmath.com
© 2009

Matrixmultiplikation

Man multipliziert eine Matrix A mit einer Matrix B, indem man das Skalarprodukt jeder Zeile von A mit jeder Spalte von B berechnet.

Matrixmultiplikation

Definition. Das **Produkt** einer m×n-Matrix A mit einer n×r-Matrix B ist eine m×r-Matrix C. Das Element c_{ik} der Matrix C erhält man als Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B.



$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Gemeinsames Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Weitere Beispiele

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+4\cdot 5 & 2\cdot 1+4\cdot 0 & 2\cdot 4+4\cdot 2 \\ 1\cdot 3+(-2)\cdot 5 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 4+(-2)\cdot 2 \\ 0\cdot 3+6\cdot 5 & 0\cdot 1+6\cdot 0 & 0\cdot 4+6\cdot 2 \\ 5\cdot 3+3\cdot 5 & 5\cdot 1+3\cdot 0 & 5\cdot 4+3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 2 & 16 \\ -7 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 12 \\ 30 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

$$4 \times \cancel{2} \qquad \cancel{2} \times 3$$

$$=$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+4\cdot 1+0\cdot 2+(-3)\cdot(-1) \\ 1\cdot 3+6\cdot 1+(-1)\cdot 2+5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Übung

Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte, sofern möglich:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rechengesetze der Matrixmultiplikation

Sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times t$-Matrix. Seien r und s reelle Zahlen. Dann gelten die folgenden Rechengesetze:

Assoziativgesetz: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$(r \cdot A) \cdot (s \cdot B) = (r \cdot s) \cdot (A \cdot B)$

Distributivgesetz: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ!

Achtung: Das Kommutativgesetz gilt für die Matrixmultiplikation *nicht!*

Beispiel:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Ausnahme: Die Multiplikation einer quadratischen $n \times n$-Matrix A mit der Einheitsmatrix E_n ist kommutativ:

$$A \cdot E_n = E_n \cdot A = A.$$

Matrizenmultiplikation ist nicht nullteilerfrei!

Im Unterschied zur Multiplikation reeller Zahlen gilt für Matrizen:

Das Produkt zweier von der Nullmatrix verschiedener Matrizen kann die Nullmatrix sein.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 & 7000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 & 500 \\ -100 & -500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix

Definition. Der **Rang** einer Matrix ist die Anzahl ihrer linear unabhängigen Zeilen.

Beispiele: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt Rang(A) = 3 (denn alle 3 Zeilen sind linear unabhängig),
Rang(B) = 2 (denn 3. Zeile = 2 mal 2. Zeile),
Rang(C) = 1 (denn 2. Zeile = 2 mal 1. Zeile, 3. Zeile = 0).

Bemerkung: Man kann zeigen, dass der Rang auch gleich der Anzahl linear unabhängiger *Spalten* ist („Zeilenrang = Spaltenrang“).

Bestimmung des Rangs

Durch Zeilen- (und Spalten-) umformungen (vgl. Gauß-Algorithmus), kann man jede Matrix auf folgende Form bringen, wobei $a_{11}, \ldots, a_{rr}$ alle ungleich Null sind. Eine solche Matrix hat den Rang r.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & & & & \\
 & a_{22} & * & & \\
 & & \ddots & & * \\
 & 0 & & a_{rr} & \\
\hline
 & 0 & & & 0
\end{array}\right)$$

Beispiel

Wir führen wie folgt Zeilenumformungen durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & -4 & 0 & 2 \\ 7 & 10 & 21 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & -9 & -10 & -8 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also hat diese Matrix den Rang 3.

LGS als Matrizen

Man kann lineare Gleichungssysteme als Matrizenprodukte in der Form

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

darstellen.

Beispiel: Das folgende LGS kann als $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 10 \\ 3x + y - z &= 5 \\ 5y + z &= -8 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Übung

Stellen Sie folgendes LGS in der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dar.

$$\begin{aligned}
x - 3y + 4z + t &= 4 \\
5x + 2y + 3z - 2t &= 6 \\
2x - y + 2z - t &= 1 \\
-x + 4y - z + 3t &= 8
\end{aligned}$$

Eindeutige Lösbarkeit und Rang

Man kann am Rang der Koeffizientenmatrix ablesen, ob ein LGS eindeutig lösbar ist.

Wenn A eine n×n-Matrix vom Rang n ist („A hat vollen Rang“), dann hat das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.

Beispiel: Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eindeutig lösbar (unabhängig von $\vec{b}$), weil Rang(A) = 3.

Dimension des Lösungsraums

Auch wenn es unendlich viele Lösungen gibt, so kann man immer noch „verschieden große" Lösungsräume unterscheiden.

Wenn A eine n×n-Matrix mit Rang(A) < n ist und das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist, dann haben die Lösungen die Dimension n – Rang(A).

Beispiel: Die Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind alle Punkte der Ebene 1x + 2y + 3z = 10, diese hat die Dimension

n – Rang(A) = 3 – 1 = 2.

Inverse Matrix

Ein LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ könnte man lösen, wenn man die Matrixgleichung nach $\vec{x}$ auflösen könnte. Dazu müsste man die Matrix A auf der linken Seite „entfernen". Dies gelingt bei manchen Matrizen mit Hilfe ihrer „inversen" Matrix.

Definition. Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix. Die $n \times n$-Matrix $\mathbf{A^{-1}}$ heißt **inverse Matrix** zu A, wenn gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$$

(wobei E_n die $n \times n$- Einheitsmatrix ist).

Übung

Zeigen Sie, dass die Matrizen A und A^{-1} invers zueinander sind.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Inversen

Beispiel: Berechnung der Inversen von $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Bedingung: $$\begin{matrix} A & \cdot & A^{-1} & = & E_2 \\ \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

LGS:
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2a_{11} + 9a_{21} = 1 \\ \text{II} & a_{11} + 4a_{21} = 0 \\ \text{III} & 2a_{12} + 9a_{22} = 0 \\ \text{IV} & a_{12} + 4a_{22} = 1 \end{array}$$

2 unabh. LGS mit gleicher Matrix A:

$$\begin{array}{ll|ll} \text{I} & 2a_{11} + 9a_{21} = 1 & \text{III} & 2a_{12} + 9a_{22} = 0 \\ \text{II} & a_{11} + 4a_{21} = 0 & \text{IV} & a_{12} + 4a_{22} = 1 \end{array}$$

Simultane Lösung beider LGS:

$$(A \mid E_2) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{I} - 2 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \text{I} - 9 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -8 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \text{I}:2$$

$$(E_2 \mid A^{-1}) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösen von LGS mit der inversen Matrix

Sei $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ein LGS mit einer quadratischen Koeffizientenmatrix. Wenn die Inverse A^{-1} existiert, dann ist das LGS eindeutig lösbar und für die Lösung gilt:

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beweis: Wir multiplizieren beide Seiten des LGS von links mit A^{-1}:

$$\begin{aligned} & A \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ \Leftrightarrow\ & A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow\ & E_n \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Übung

Schreiben Sie folgendes LGS als Matrizengleichung und lösen Sie es mit Hilfe der Inversen der Koeffizientenmatrix.

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 4z &= 9 \\ 3x - 6y + 4z &= 18 \\ -x + 2y - z &= -9 \end{aligned}$$

Orthogonale Matrizen

Eine reelle quadratische Matrix M heißt **orthogonal**, wenn ihre Inverse M^{-1} gleich ihrer Transponierten M^T ist, d. h.

$$\mathbf{M^{-1} = M^T}.$$

Das ist gleichbedeutend mit $M \cdot M^T = E_n$. Daraus folgt:

Satz. Die Zeilen- und Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix sind orthonormal bezüglich des Skalarprodukts von Vektoren.

Beispiele:

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal, denn $M \cdot M^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Übung

Zeigen Sie, dass M = $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix ist.

3.2 Anwendungen von Matrizen

Produktionsprozesse

Die Abbildung zeigt den Teilebedarf für einen **zweistufigen Produktionsprozess:**

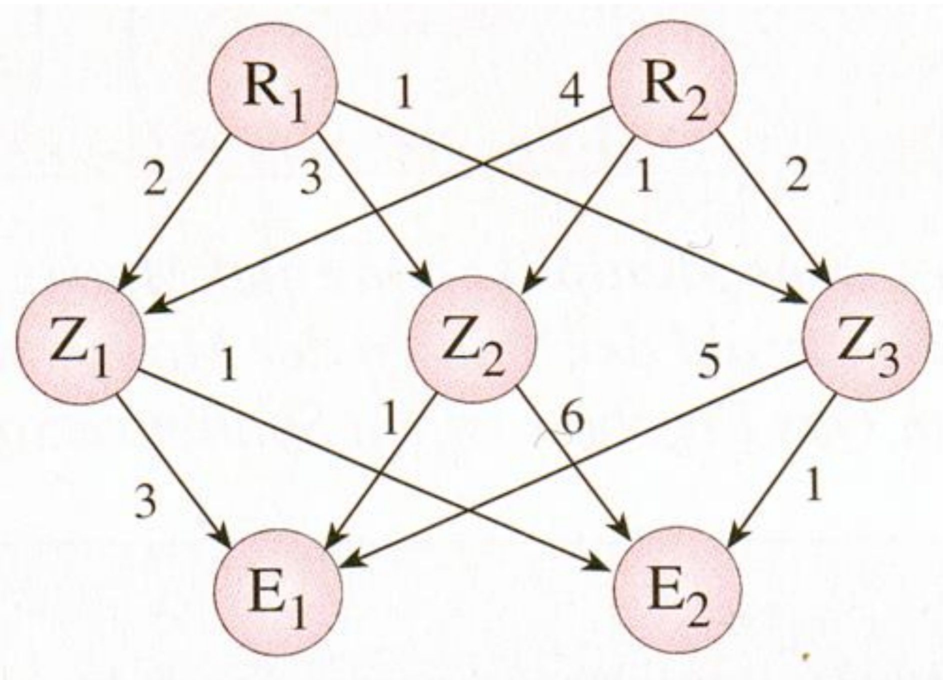
Rohstoffe

⇩

Zwischenprodukte

⇩

Endprodukte



Produktionsprozesse

Der Materialbedarf der einzelnen Stufen kann durch Matrizen beschrieben werden:

1. Stufe:

$$\begin{array}{c|c} & Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \\ \hline \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A

2. Stufe:

$$\begin{array}{c|c} & E_1 \quad E_2 \\ \hline \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

B

Rohstoffbedarf der Zwischenprodukte

Bedarf an Zwischenprodukten für die Endprodukte

Produktionsprozesse

Wie kann man den Rohstoffbedarf für die Endprodukte berechnen?

Gesucht:

	E_1	E_2
R_1	c_{11}	c_{12}
R_2	c_{21}	c_{22}

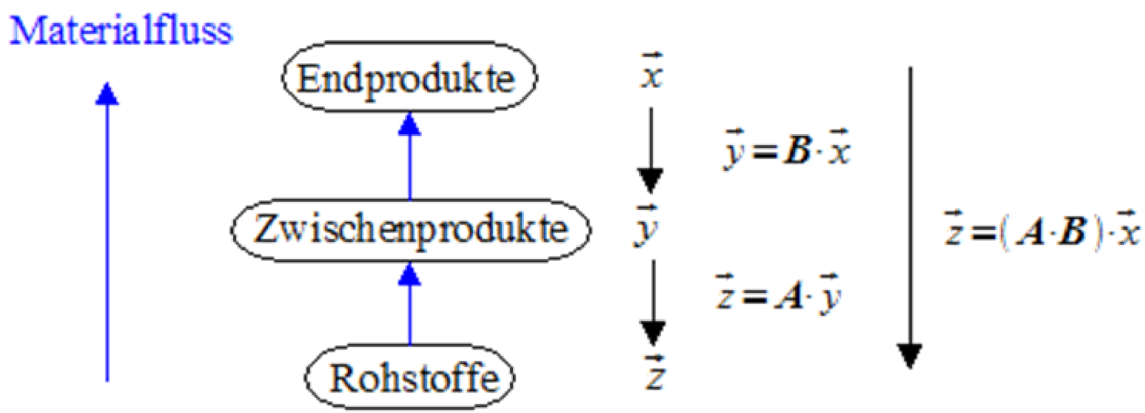
Die gesuchte Matrix C ist das Produkt der Matrizen A und B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 23 & 12 \end{pmatrix} = C$$

Produktionsprozesse

Bedarfsrechnung:



Beispiel: Den Rohstoffbedarf für 10 E_1 und 20 E_2 liefert der folgende **Rohstoffvektor**:

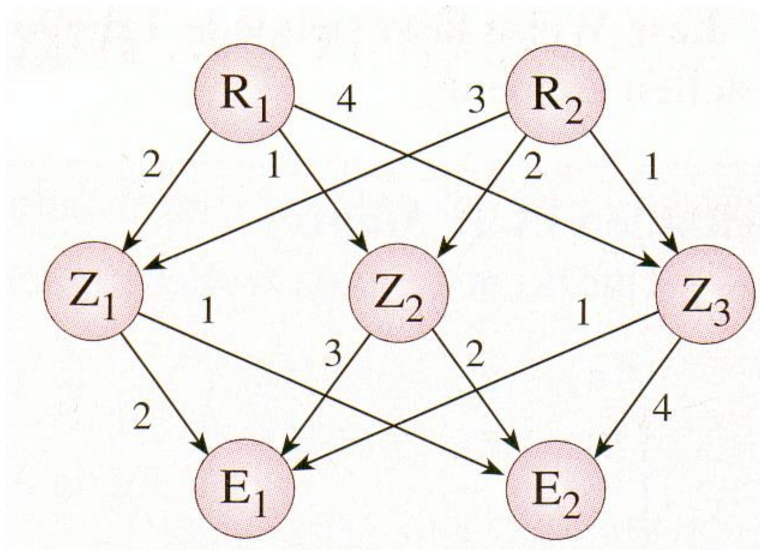
$$\begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 23 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 560 \\ 470 \end{pmatrix}$$

Man benötigt also 560 R_1 und 470 R_2.

Übung

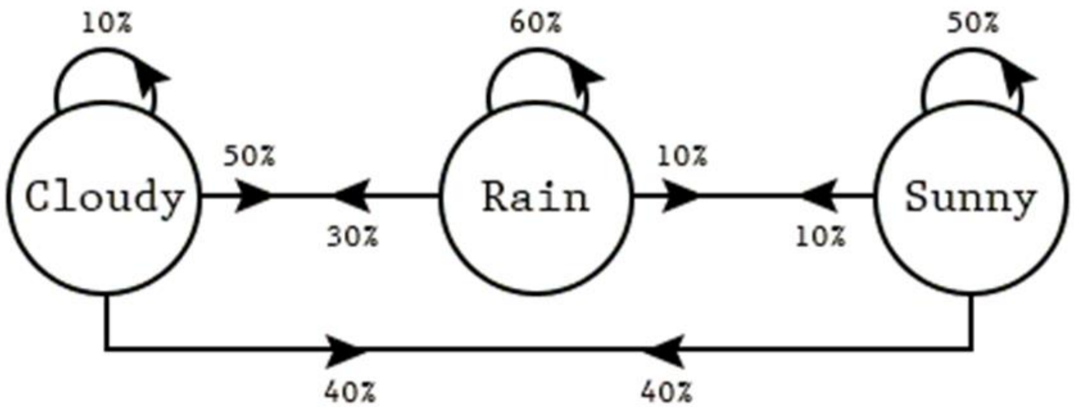
Stellen Sie die Stufen des Produktionsprozesses durch Matrizen dar.

Berechnen Sie die Matrix für den Rohstoffbedarf der Endprodukte.



Übergangsmatrizen

Beispiel: Folgendes Diagramm beschreibe die Änderung des Wetters von einem Tag zum nächsten.



$$M = \begin{array}{cc} \text{nach} \backslash \text{von} & \begin{array}{ccc} C & \quad R & \quad S \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ R \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten können auch mit der **Übergangsmatrix** M beschrieben werden.

Übergangsmatrizen

Beispiel (Forts.): Heute ist folgendes Wetter:

30% Cloudy, 50% Rainy, 20% Sunny.

Berechnung des Wetters morgen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 47 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Übermorgen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 47 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27{,}5 \\ 43{,}9 \\ 28{,}6 \end{pmatrix}$$

Anfangszustand

$$\boxed{M \cdot \vec{a} = \vec{b}}$$

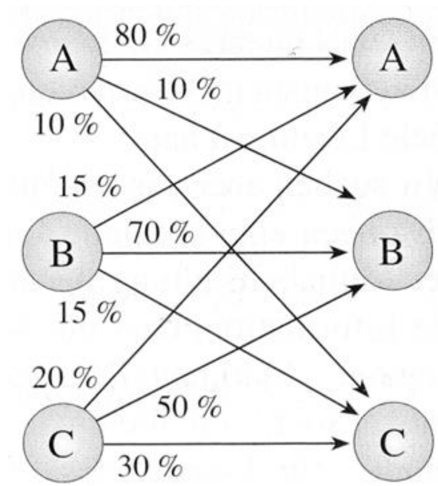
Übergangsmatrix

Folgezustand

Übung

Das Diagramm zeigt den Wechsel des Leseverhaltens dreier Zeitschriften A, B und C von einem Monat zum nächsten.

Stellen Sie die Übergangsmatrix M auf.



Im Mai sind die Marktanteile: 35% A, 20% B, 45% C.
Wie berechnet man die Marktanteile im Juni?

Stabile Marktanteile

Bei gleichbleibendem Übergangsverhalten pendeln sich die Marktanteile langfristig auf feste Werte ein.

Für $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 45 \end{pmatrix}$ (vgl. vorige Übung) ergibt sich

$$M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix},\ M^2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 42 \\ 42 \\ 16 \end{pmatrix},\ M^3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 43{,}1 \\ 41{,}6 \\ 15{,}3 \end{pmatrix},\ M^4 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 43{,}78 \\ 41{,}08 \\ 15{,}14 \end{pmatrix},\ \ldots,$$

$$M^{10} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 44{,}91 \\ 40{,}08 \\ 15{,}01 \end{pmatrix},\ \ldots,\ M^{17} \cdot \vec{a} = \underline{\begin{pmatrix} 45 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix}},\ M^{18} \cdot \vec{a} = \underline{\begin{pmatrix} 45 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix}},\ldots$$

Fixvektoren

Die stabilen Marktanteile kann man auch direkt berechnen. Die stabilen Marktanteile sind **Fixvektoren** der Übergangsmatrix M, d.h. sie ändern sich durch Multiplikation mit M nicht. Für einen Fixvektor $\vec{x}$ gilt also

$$M \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Beispiel: Für das Zeitschriften-Beispiel erhalten wir das LGS:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -0{,}2x + 0{,}15y + 0{,}2z = 0 \\ 0{,}1x - 0{,}3y + 0{,}5z = 0 \\ 0{,}1x + 0{,}15y - 0{,}7z = 0 \end{array}$$

Die dritte Zeile ist linear abhängig von den ersten beiden (III = – II – I), das LGS hat daher unendlich viele Lösungen.

Fordern wir zusätzlich, dass x + y + z = 100 (%) gelten soll, so erhalten wir die eindeutige Lösung: x = 45, y = 40, z = 15 (%).

Satz über stochastische Matrizen

Definition: Eine Matrix heißt **stochastische Matrix**, wenn alle Elemente Zahlen zwischen 0 und 1 sind und die Summe der Zahlen in einer Spalte jeweils 1 ist (weil sie Wahrscheinlichkeiten darstellen).

Beispiel: Die betrachteten Übergangsmatrizen sind stochastisch.

Satz: Sei M eine stochastische Matrix (ungleich der Einheitsmatrix).
Dann gilt:

1. Es gibt genau einen Fixvektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ von M.
2. Die Folgezustände $M \cdot \vec{a}, M^2 \cdot \vec{a}, M^3 \cdot \vec{a}, \ldots$ streben für jeden Startzustand $\vec{a} \neq \vec{0}$ gegen den Fixvektor: $\lim\limits_{n \to \infty} M^n \cdot \vec{a} = \vec{x}.$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Determinanten

Eine **Determinante** ist eine Funktion, die einer quadratischen Matrix nach gewissen Regeln eine reelle Zahl zuordnet.

Für eine **1x1-Matrix** A = (a) gilt: det (A) = det(a) = a.

Für eine **2x2-Matrix**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

kann man die Determinante wie folgt berechnen:

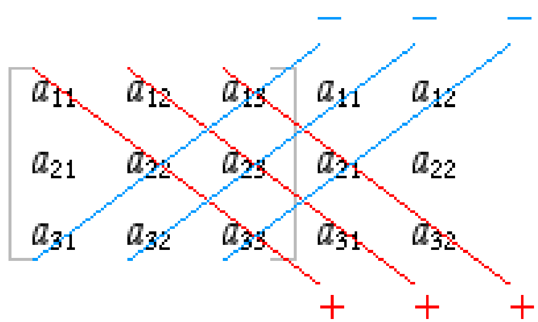
$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Regel von Sarrus

Für die Determinante einer **3x3-Matrix** gilt:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Das kann man sich mit folgendem Schema merken:



Beispiel

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 4 * (-2) * 1 + 5 * 1 * 0 + 3 * 3 * 3 \\ &\quad -0 * (-2) * 3 - 3 * 1 * 4 - 1 * 3 * 5 \\ &= -8 + 0 + 27 - 0 - 12 - 15 = -8 \end{aligned}$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Determinanten höherer Ordnung kann man wie folgt auf Determinanten niedrigerer Ordnung zurückführen. Es gilt („**Entwicklung nach der i-ten Zeile**“)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Analog ist auch eine „**Entwicklung nach der j-ten Spalte**“ möglich:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Dabei ist $\mathbf{A_{ij}}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Beispiel

Die **Unterdeterminante** det (A_{21}) erhält man durch Streichen der 2. Zeile und der 1. Spalte aus det (A):

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$|A_{21}| = \det A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Beispiel

Die folgende Determinante wird nach der zweiten Spalte entwickelt:

$$\det\begin{pmatrix} -3 & \boxed{1} & -1 \\ -7 & \boxed{5} & -1 \\ -6 & \boxed{6} & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 1(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$+5(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$+6(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiele

(a) Eine 3x3-Determinante wird nach der 1. Zeile entwickelt:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2 = 3$$

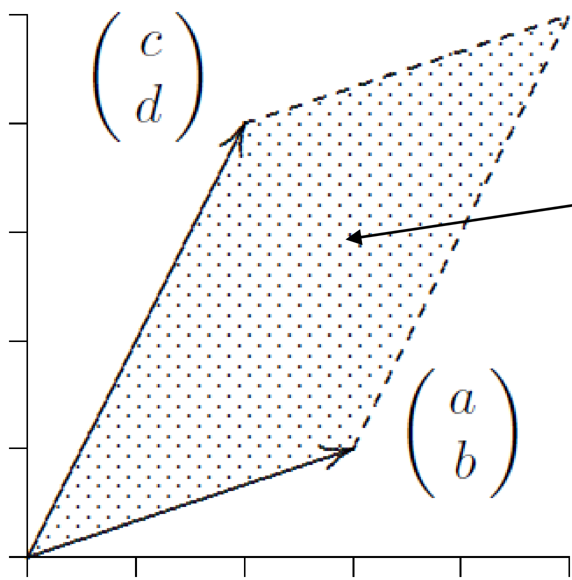
(b) Eine 4 × 4 - Determinante wird nach der ersten Spalte entwickelt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = -8.$$

Bemerkung: Es ist günstig, eine Determinante nach einer Zeile bzw. Spalte zu entwickeln, die viele Nullen enthält.

Flächenberechnung mit 2x2-Determinanten

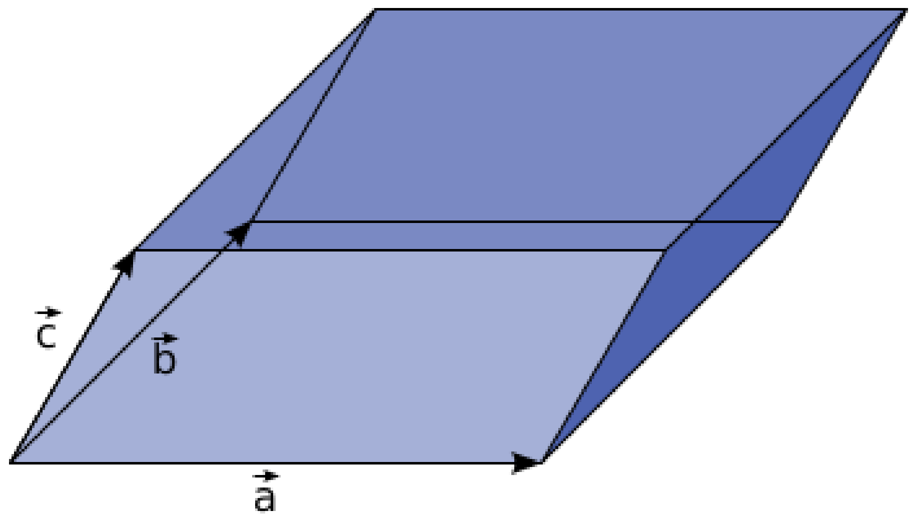
Fasst man zwei zweidimensionale Vektoren zu einer 2x2-Matrix zusammen, so ist der Betrag der Determinante dieser Matrix gleich der Fläche des **Parallelogramms**, das durch diese Vektoren aufgespannt wird.



$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Volumenberechnung mit 3x3-Determinanten

Fasst man drei dreidimensionale Vektoren zu einer 3x3-Matrix zusammen, so ist der Betrag der Determinante dieser Matrix gleich dem Volumen des **Spats** (Parallelepiped), das durch diese Vektoren aufgespannt wird.



Eigenschaften der Determinante

- $\det(r \cdot A) = r^n \cdot \det(A)$ für jede reelle Zahl r und jede nxn-Matrix A
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(E_n) = 1$
- Bei Vertauschung zweier Zeilen (oder Spalten) ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
- Eine **Determinante** ist gleich **Null**, wenn
  - eine Zeile (oder Spalte) aus lauter Nullen besteht,
  - zwei Zeilen (oder Spalten) gleich sind,
  - eine Zeile (oder Spalte) eine Linearkombination einer anderen Zeile (bzw. Spalte) ist. → **Test auf lineare Abhängigkeit von Vektoren!**

Determinanten und inverse Matrizen

- Eine **quadratische Matrix** ist genau dann **invertierbar,** wenn ihre **Determinante ungleich Null** ist.
- Inverse einer 2x2-Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$\boxed{\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \end{aligned}}$$

Inverse einer 3x3-Matrix

neun 2x2-

Determinanten!

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\ A} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

- Mit Hilfe von Determinanten kann man feststellen, ob ein lineares Gleichungssystem mit *quadratischer* Koeffizientenmatrix **eindeutig lösbar** ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die **Determinante** der Koeffizientenmatrix **ungleich Null** ist.
- Herkunft des Begriffs: Die Determinante „determiniert", ob das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt.

Cramersche Regel zur Lösung von LGS

Ein quadratisches lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & = & u_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & = & u_2 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & = & u_3 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad A\,\vec{x} = \vec{u}$$

$$\text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

mit det (A) ≠ 0 hat die Lösungen $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}$ und analog $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & u_1 & a_{13} \\ a_{21} & u_2 & a_{23} \\ a_{31} & u_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}$, $x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 \end{vmatrix}}{\det A}$

Also $\quad x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

wobei die Matrix A_i aus der Koeffizientenmatrix A entsteht, indem man die i-te Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt.

Beispiel 1

$$1\,x_1 + 2\,x_2 = 3$$
$$4\,x_1 + 5\,x_2 = 6$$

Nach der Cramerschen Regel berechnet sich die Lösung wie folgt:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Beispiel 2

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \end{array}$$

Zu berechnen sind die Determinanten:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Aus $D = -7$, $D_1 = -7$, $D_2 = -14$ und $D_3 = 21$ erhält man die Lösungen

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$