Hinweis: Diese Vorlesung wird aufgezeichnet (nur Folien und Ton)!

Lineare Algebra

für die Studiengänge
Angewandte Informatik und
Informatik – Technische Systeme

Prof. Dr. Marc-Alexander Zschiegner

Hochschule **RheinMain**
University of Applied Sciences

Mikrophone und Kameras bitte aus lassen!

Team

Prof. Dr. Marc-A. Zschiegner

marc.zschiegner@hs-rm.de

Sprechstunde: n.V. oder Fr 10-11 Uhr, Skype (live:m.zschiegner)

Lehrbeauftragte:

Jens Möhrstedt, B.Sc.

jens.moehrstedt@hs-rm.de

Kim Hoitz, B.Sc.

kim.hoitz@hs-rm.de

Tutorinnen und Tutoren:

Eva Sarikaya

Michelle Seibert

Matthias Lang

Vorlesung

Termin: Mi 08:15 – 09:45 Uhr Zschiegner

Zugang: https://zapp.mi.hs-rm.de/

Login: HDS-Account

Auswahl von „Lineare Algebra V“

(ggf. mit „Auswahl“ selbst der eigenen Liste hinzufügen)

Folien, Übungsblätter, Abgaben, E-Mail: studip.hs-rm.de

Videos (Vorlesung, Musterlösungen): video.cs.hs-rm.de/

Übungen

Termine:	A	Mi	10:00 – 11:30 Uhr	Zschiegner
	B	Mi	11:45 – 13:15 Uhr	Möhrstedt
	C	Do	10:00 – 11:30 Uhr	Hoitz
	D	Do	11:45 – 13:15 Uhr	Möhrstedt

Beginn: 2. Vorlesungswoche!

Übungsblätter: Beispielaufgaben + Hausaufgaben

Durchführung: Siehe Präsentation „Anleitung für die Übungen.pdf“

Nur Übung macht den Meister!

Gestaffelte Übungsmöglichkeiten:

- Kurze Übungsaufgaben in der Vorlesung ★☆☆☆☆
- Beispielaufgaben in der Übung ★★☆☆☆
- Hausaufgaben in der Übung ★★★☆☆
- Probeklausuren ★★★★☆
- Klausur ★★★★★

Schwierigkeitsgrad

„Mathematics is not a spectator sport. To unterstand mathematics means to be able to do mathematics.“ (George Polya, „How to Solve it“, 1945)

Benotung

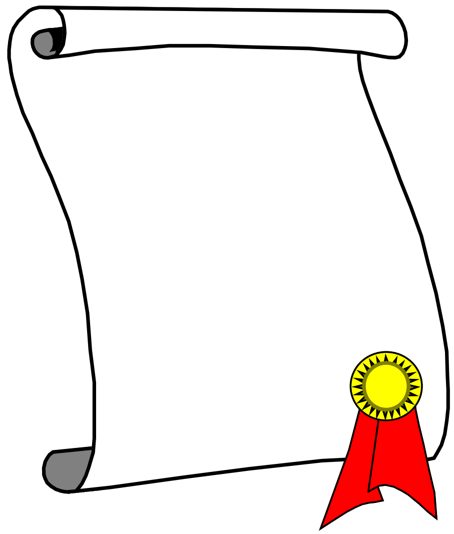
Die Bewertung setzt sich zusammen aus

Prüfungsleistung:

- Klausur (Juli, August, …?): 80 %

Studienleistung:

- Hausaufgaben: 20 %



Was machen wir in Linearer Algebra?

1. **Lineare (Un-) Gleichungssysteme**

   Gauß-Algorithmus, Lösbarkeit, lineare Optimierung

2. **Analytische Geometrie**

   Vektoren, Rechengesetze, lineare Unabhängigkeit, Basis, Geraden und Ebenen, Skalar- und Vektorprodukt, Winkel und Abstände

3. **Matrizen**

   Rechenregeln, LGS, Inverse, Modellierung von Prozessen, Determinanten

4. **Lineare Abbildungen**

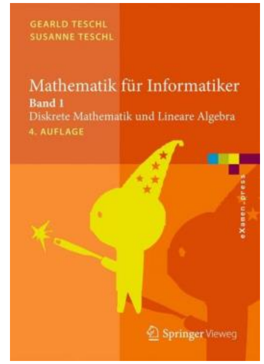
   Darstellung durch Matrizen, Kern, Bild, Eigenwerte, Koordinatentransformation

5. **Algebraische Strukturen**

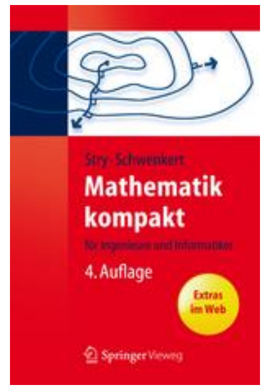
   Körper (z.B. komplexe Zahlen, endliche Körper),
   Vektorräume (Axiome, Beispiele, Basen, Unterräume)

Literaturtipps

Praxisnah für Informatiker:



- Teschl und Teschl:
  Mathematik für Informatiker - Band 1:
  Diskrete Mathematik und Lineare Algebra,
  Verlag Springer-Vieweg



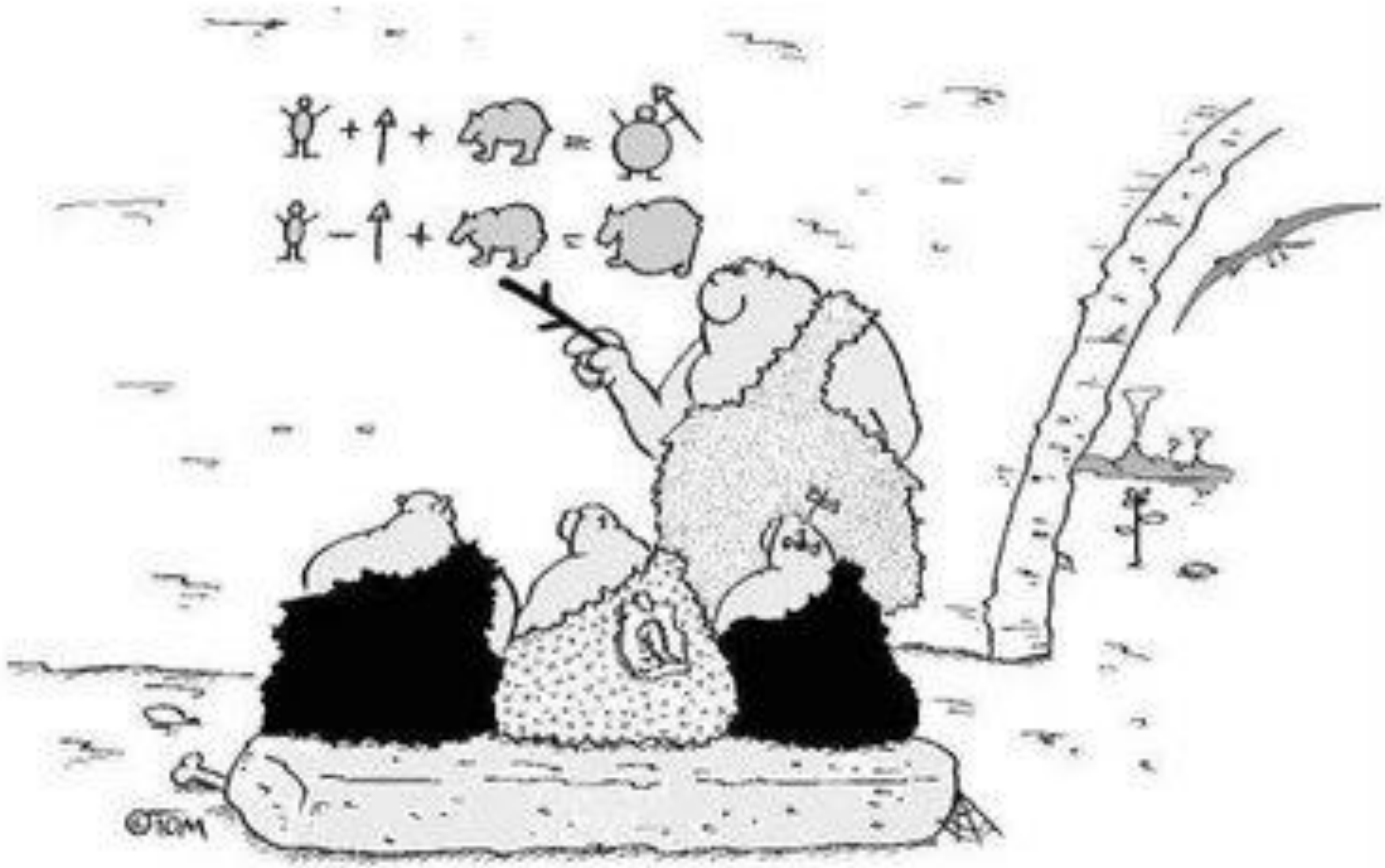
- Stry und Schwenkert:
  Mathematik kompakt – für Ingenieure und Informatiker,
  Verlag Springer-Vieweg

Kapitel 1

Lineare (Un-) Gleichungssysteme

Inhalt

1.1 Lineare Gleichungssysteme



Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition. (a) Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen, in denen in der Regel mehrere Variable vorkommen.
(b) Ein Gleichungssystem heißt **linear**, wenn alle Gleichungen lineare Gleichungen sind.

Beispiel:

Ein 4×3-LGS
in Normalform:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & - & 2z & = & 9 \\
2x & + & 3y & + & 2z & = & 6 \\
4x & - & 2y & + & 3z & = & -3 \\
5x & + & 4y & + & 4z & = & 9 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow
\end{array}$$

Koeffizienten des LGS   rechte Seite

Homogene und inhomogene LGS

Ein **$m \times n$-LGS** in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ besteht aus m Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Dabei sind die Elemente a_{ij} und b_i reelle Zahlen.

Ein solches Gleichungssystem heißt **homogen**, falls $b_1 = \ldots = b_m = 0$ ist und sonst **inhomogen**.

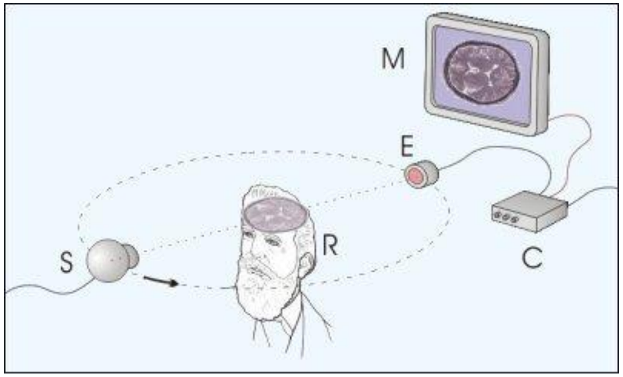
1. Anwendung: Computer-Tomographie (CT)

Die Messeinrichtung dreht sich um den Patienten.

Die Intensitäten der Strahlen werden nach dem Durchgang durch die Zellen gemessen.

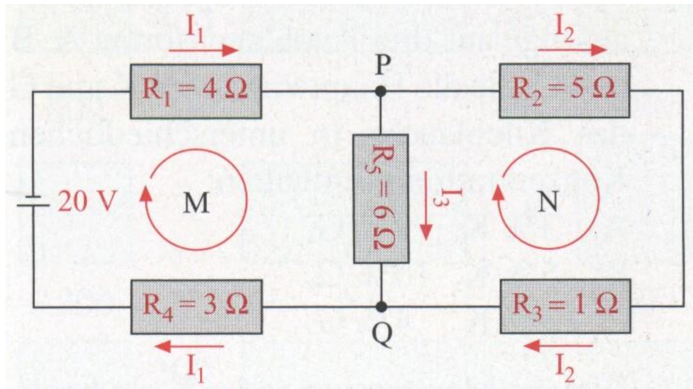
Für jede Richtung wird eine **lineare Gleichung** aufgestellt, die als **Unbekannte** die Absorptions-koeffizienten der getroffenen Zellen enthält.

Es entsteht ein **großes LGS**, das der **Computer** löst und die Absorptionskoeffizienten durch unterschiedliche Helligkeiten darstellt.



2. Anwendung: Elektrische Netzwerke

Es gelten die **Kirchhoffschen Gesetze:**



Knotenregel: Die Summer der in einen Knoten einfließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Knoten P: $\mathbf{I_1 = I_2 + I_3}$

Maschenregel: Die Summe der mit Vorzeichen versehenen Teilspannungen in einer Masche ist gleich Null.

Masche M: $U_1 + U_5 + U_4 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{4I_1 + 6I_3 + 3I_1 - 20 = 0}$

Masche N: $U_2 + U_3 - U_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{5I_2 + I_2 - 6I_3 = 0}$

$U = R \cdot I$

Es ergibt sich ein inhomogenes **3×3-LGS**.

Äquivalenzumformungen von LGS

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn

1. Zwei Gleichungen vertauscht werden,

2. Eine Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$ multipliziert wird,

3. Eine Gleichung zu einer anderen Gleichung addiert wird.

Die Idee aller Lösungsverfahren ist immer dieselbe:

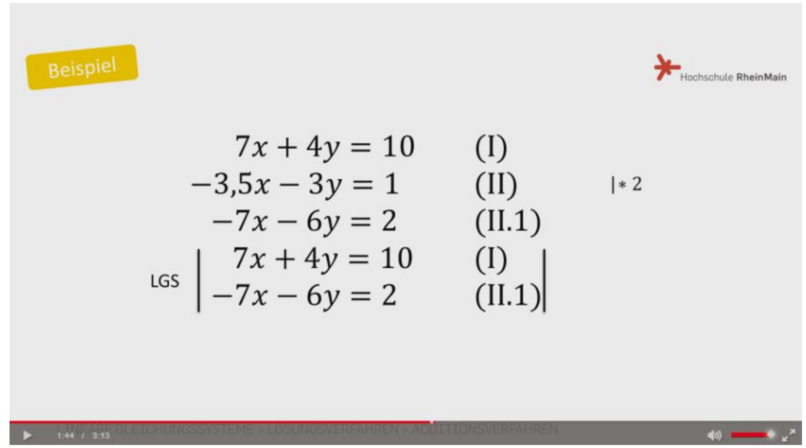
Forme das LGS so um, dass am Ende nur *eine* lineare Gleichung mit *einer* Unbekannten übrig bleibt.

Einfache Lösungsverfahren

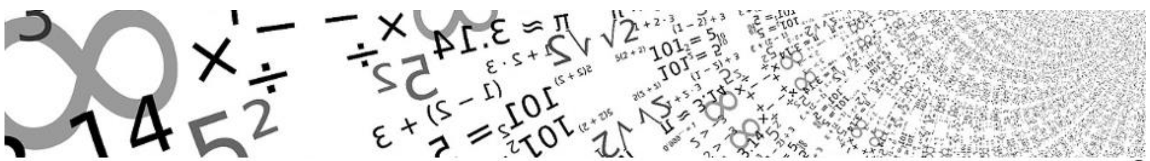
Wie man ein 2×2-LGS mit dem

- **Einsetzungsverfahren**
- **Gleichsetzungsverfahren**
- **Additionsverfahren**

löst, siehe **Mathe-Mediathek:**



http://www.hs-rm.de/mathe-mediathek



©

1.2 Gauß-Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus

Rezept: Multipliziere die erste Gleichung so, dass bei Addition zur zweiten Gleichung in dieser x wegfällt. Dann multipliziere die erste Gleichung so, dass bei Addition zur dritten Gleichung in dieser x wegfällt. Usw.

Nun betrachten wir die (neue) zweite Zeile. Multipliziere diese so, dass bei Addition mit der dritten Gleichung in dieser y wegfällt. Multipliziere nun die zweite Gleichung so, dass bei Addition zur vierten Gleichung in dieser y wegfällt. Usw.

Usw.

Am Ende hat man ganz unten eine Gleichung mit einer Unbekannten.
Man löst diese Gleichung und setzt die Lösung in die zweitunterste Gleichung ein. Dann löst man diese. Usw

1. Beispiel

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x+3y+2z & = & 5 \\
\text{II} & 2x+4y+3z & = & 4 \quad \rightarrow \quad 3\cdot\text{II}-2\cdot\text{I} \\
\text{III} & -5x+2y+4z & = & -9 \quad \rightarrow \quad 3\cdot\text{III}+5\cdot\text{I}
\end{array}$$

1. Elimination von x

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x+3y+\ 2z & = & 5 \\
\text{II} & 6y+\ 5z & = & 2 \\
\text{III} & 21y+22z & = & -2 \quad \rightarrow \quad 2\cdot\text{III}-7\cdot\text{II}
\end{array}$$

2. Elimination von y

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x+3y+2z & = & 5 \\
\text{II} & 6y+5z & = & 2 \\
\text{III} & 9z & = & -18
\end{array}$$

Dreiecks-system

Ziel: Dreiecksform!

3. Lösen durch Rück-einsetzung

Auflösen von III nach z:

$$\begin{aligned} 9z &= -18 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Einsetzen in II, Auflösen nach y:

$$\begin{aligned} 6y+5z &= 2 \\ 6y-10 &= 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Einsetzen in I, Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} 3x+3y+2z &= 5 \\ 3x+\ 6-\ 4 &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: x = 1, y = 2, z = –2

2. Beispiel

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= -2 \\ 3x - 8y - 2z &= 4 \\ x \qquad + 4z &= -2 \end{aligned}$$

1. Schritt:

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= -2 \\ -2y + z &= -2 \\ 2y + 5z &= -4 \end{aligned}$$

2. Schritt:

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= -2 \\ -2y + z &= -2 \\ 6z &= -6. \end{aligned}$$

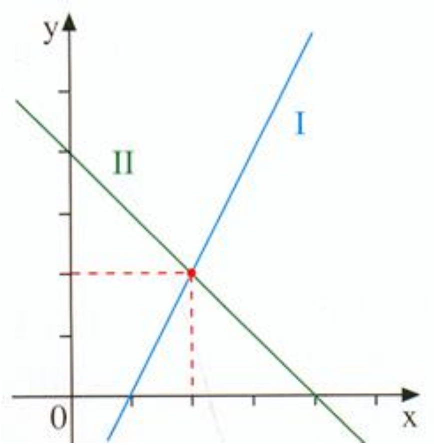
Daraus folgt die Lösung: $z = -1$, $y = ½$, $x = 2$.

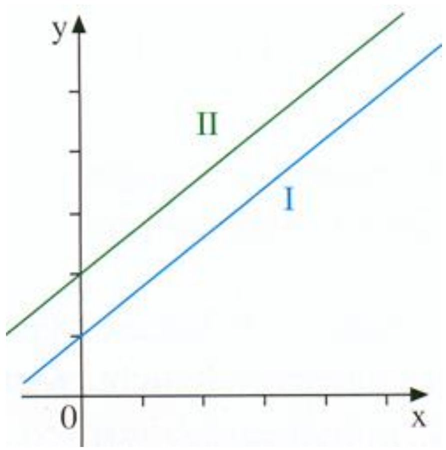
Anzahl von Lösungen eines LGS

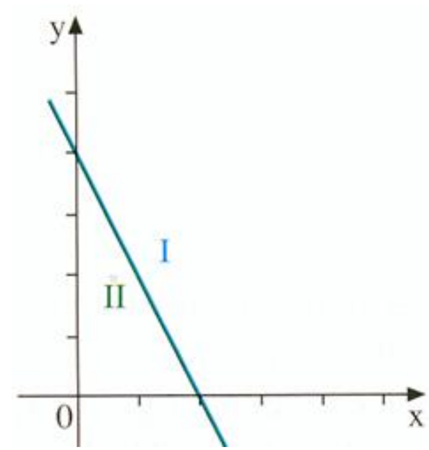
Ein LGS kann genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben.

Beispiele:

$2x - y = 2$	$x - y = -1$	$2x + y = 4$
$x + y = 4$	$x - y = -2$	$-4x - 2y = -8$







Unlösbares LGS

Beispiel:

$$
\begin{array}{lrcl}
\mathrm{I} & x + 2y - z &=& 3 \\
\mathrm{II} & 2x - y + 2z &=& 8 \quad \rightarrow \quad \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
\mathrm{III} & 3x + 11y - 7z &=& 6 \quad \rightarrow \quad \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \\
\hline
\mathrm{I} & x + 2y - z &=& 3 \\
\mathrm{II} & -5y + 4z &=& 2 \\
\mathrm{III} & 5y - 4z &=& -3 \quad \rightarrow \quad \mathrm{III} + \mathrm{II} \\
\hline
\mathrm{I} & x + 2y - z &=& 3 \\
\mathrm{II} & 5y - 4z &=& -2 \\
\mathrm{III} & 0 &=& -1
\end{array}
$$

Widerspruch!

Wenn mindestens eine Gleichung einen Widerspruch darstellt, ist das LGS unlösbar.

Unendlich viele Lösungen

Beispiel:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 2x + y - 4z &=& 1 \\
\text{II} & 3x + 2y - 7z &=& 1 \qquad \rightarrow \ 2\cdot\text{II} - 3\cdot\text{I} \\
\text{III} & 4x - 3y + 2z &=& 7 \qquad \rightarrow \ \text{III} - 2\cdot\text{I} \\
\hline
\text{I} & 2x + y - 4z &=& 1 \\
\text{II} & y - 2z &=& -1 \\
\text{III} & -5y + 10z &=& 5 \qquad \rightarrow \ \text{III} + 5\cdot\text{II} \\
\hline
\text{I} & 2x + y - 4z &=& 1 \\
\text{II} & y - 2z &=& -1 \\
\text{III} & 0 &=& 0
\end{array}
$$

Triviale Zeile!

Wenn es mehr Variablen als nichttriviale Zeilen gilt, hat das LGS unendlich viele Lösungen.

Unendlich viele Lösungen

Beispiel (Forts.): Die triviale Zeile kann weggelassen werden.

Es ergibt sich ein LGS mit 3 Variablen, aber nur 2 Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 2x & + & y & - & 4z & = & 1 \\ \text{II} & & & y & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

Eine Variable ist daher frei wählbar. Wir wählen z. B. für z eine beliebige reelle Zahl t: $z = t$

Aus II folgt dann: $y = 2t - 1$

Aus I folgt schließlich: $x = t + 1$

Es ergibt sich eine einparametrige unendliche Lösungsmenge:

$$\mathbf{L} = \{(x, y, z) \mid x = t + 1,\ y = 2t - 1,\ z = t \text{ und } t \in \mathbf{R}\}.$$

Lösbarkeitsuntersuchung

1.	LGS in die **Normalform** überführen, **ganzzahlige** Koeffizienten erzeugen, sofern möglich.		
2.	**Gauß'schen Algorithmus** auf das LGS anwenden. Es entsteht eine **Dreiecks-** bzw. **Stufenform**.		
3.	Prüfen, welche der folgenden Eigenschaften das aus 2. resultierende LGS besitzt.		
	Widerspruch	Es existiert **kein Widerspruch.**	
	Wenigstens eine Gleichung stellt einen offensichtlichen **Widerspruch** dar.	Die **Anzahl der Variablen ist gleich der Anzahl der nichttrivialen Zeilen.**	Es gibt **mehr Variable als nichttriviale Zeilen.**
4.	Das LGS ist **unlösbar.**	Das LGS ist **eindeutig lösbar.**	Das LGS hat **unendlich viele Lösungen.**

Übung

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ 5x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Aufwandsabschätzung

Wie viele Multiplikationsschritte benötigt der Gauß-Algorithmus?

- Herstellen der Dreiecksform:

  - Die Erzeugung der Nullen in der ersten Spalte unterhalb von $a_{1,1}$ erfordert (n-1)-mal jeweils die Multiplikation der (n+1) Elemente der ersten Zeile mit dem richtigen Faktor (und anschließende Addition).

  - Die Erzeugung aller Nullen in der zweiten Spalte unterhalb von $a_{1,2}$ erfordert weitere (n-2)·n Multiplikationen.

  - Usw. Insgesamt ergibt sich

Beweis mit Induktion

$$(n-1)\cdot(n+1)+(n-2)\cdot n+\ldots+1\cdot 3=\sum_{k=1}^{n-1} k\cdot(k+2)=\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

Aufwandsabschätzung

- Rückwärtseinsetzen:

  - In der letzten Zeile bestimmt man die Unbekannte durch eine einzige Multiplikation.

  - In der vorletzten Zeile fallen durch Einsetzen und Umformen zwei Multiplikationen an.

  - In jeder Zeile steigt die Anzahl der Multiplikationen um 1, insgesamt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Satz. Der Gauß-Algorithmus erfordert $\frac{n^3 + 3n^2 - n}{3}$ Multiplikationen.

Nachteil des Gauß-Verfahrens

Beispiel Computer-Tomographie:

Praktisch übliche Bildauflösung: 512 x 512 Zellen

$n = 512^2 = 262\,144$ unbekannte Absorptionskoeffizienten

(mindestens so viele Gleichungen!)

Anzahl Multiplikationen beim Gauß-Algorithmus:

$1/3(n^3 + 3n^2 - n) = 6 \cdot 10^{15}$

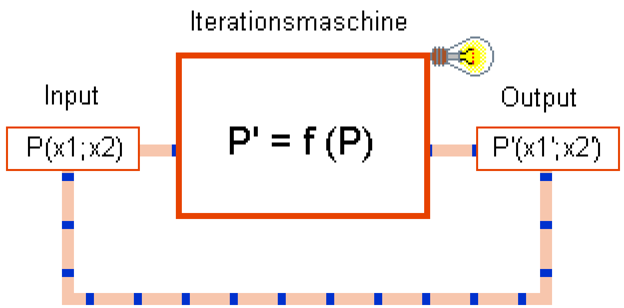
Dauer für ein einziges Schichtbild (bei einem Computer mit Taktfrequenz 5 GHz und einer Multiplikation pro Takt):

$1\,200\,000$ s $\approx$ 14 Tage!

Iterationsverfahren

In der Praxis verwendet man für sehr große LGS **Iterationsverfahren**.

Prinzip:



Beispiel für ein Iterationsverfahren: Siehe Übungsblatt 1.

Dieses Iterationsverfahren ist bei der Tomographie ca. 45000 mal schneller als das Gaußverfahren. Von 14 Tagen pro Schichtbild sinkt die Zeit auf knapp 27 Sekunden.

1.3 Lineare Optimierung

Typisches Beispiel

Die Firma „RheinMain-Design“ stellt zwei Sorten von Steingefäßen her:

- Die größeren sind 50 kg,
- die kleineren 35 kg schwer.

Der Lieferwagen kann höchstens 3 t laden.

Der Fahrer erhält folgenden Auftrag:

- So viele Gefäße wie möglich transportieren.

- Mindestens halb so viele große wie kleine Gefäße.

- Höchstens doppelt so viele große wie kleine Gefäße.

Modellierung: Bedingung 1

- x kleine Kisten
- y große Kisten

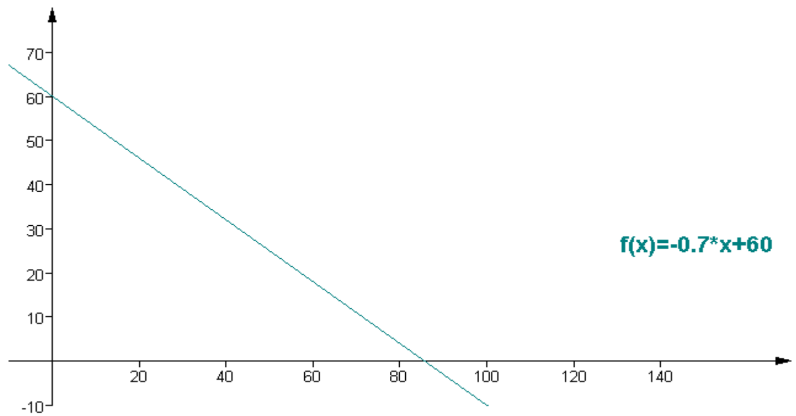
Die größeren sind 50 kg, die kleineren 35 kg schwer.

Der Lieferwagen kann höchstens 3 t laden:

$$35x + 50y \leq 3000$$

$$\Rightarrow \quad 50y \leq -35x + 3000$$

$$\Rightarrow \quad y \leq -0{,}7x + 60$$

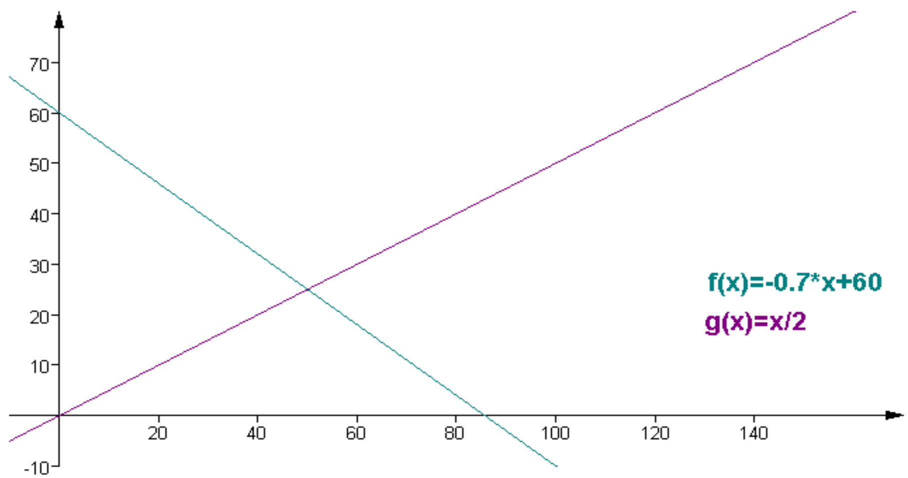


Modellierung: Bedingung 2

- x kleine Kisten
- y große Kisten

Mindestens halb so viele große wie kleine Gefäße:

$y \geq \frac{1}{2} x$

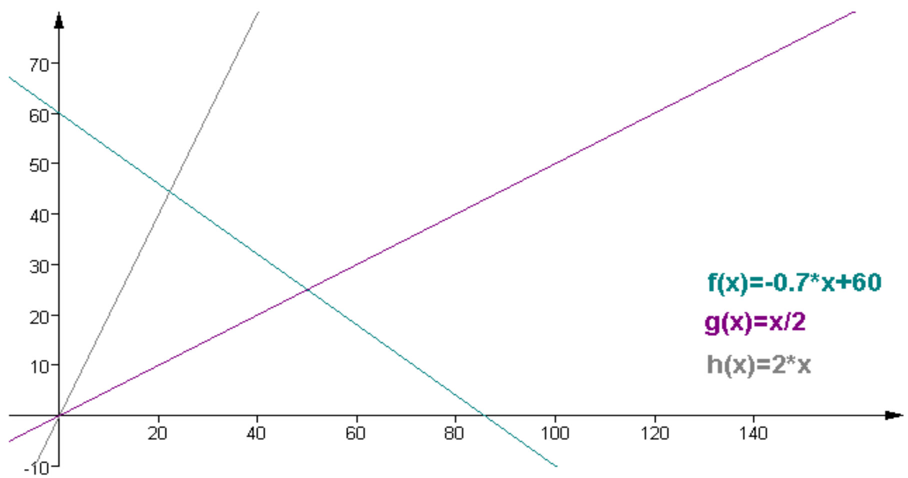


Modellierung: Bedingung 3

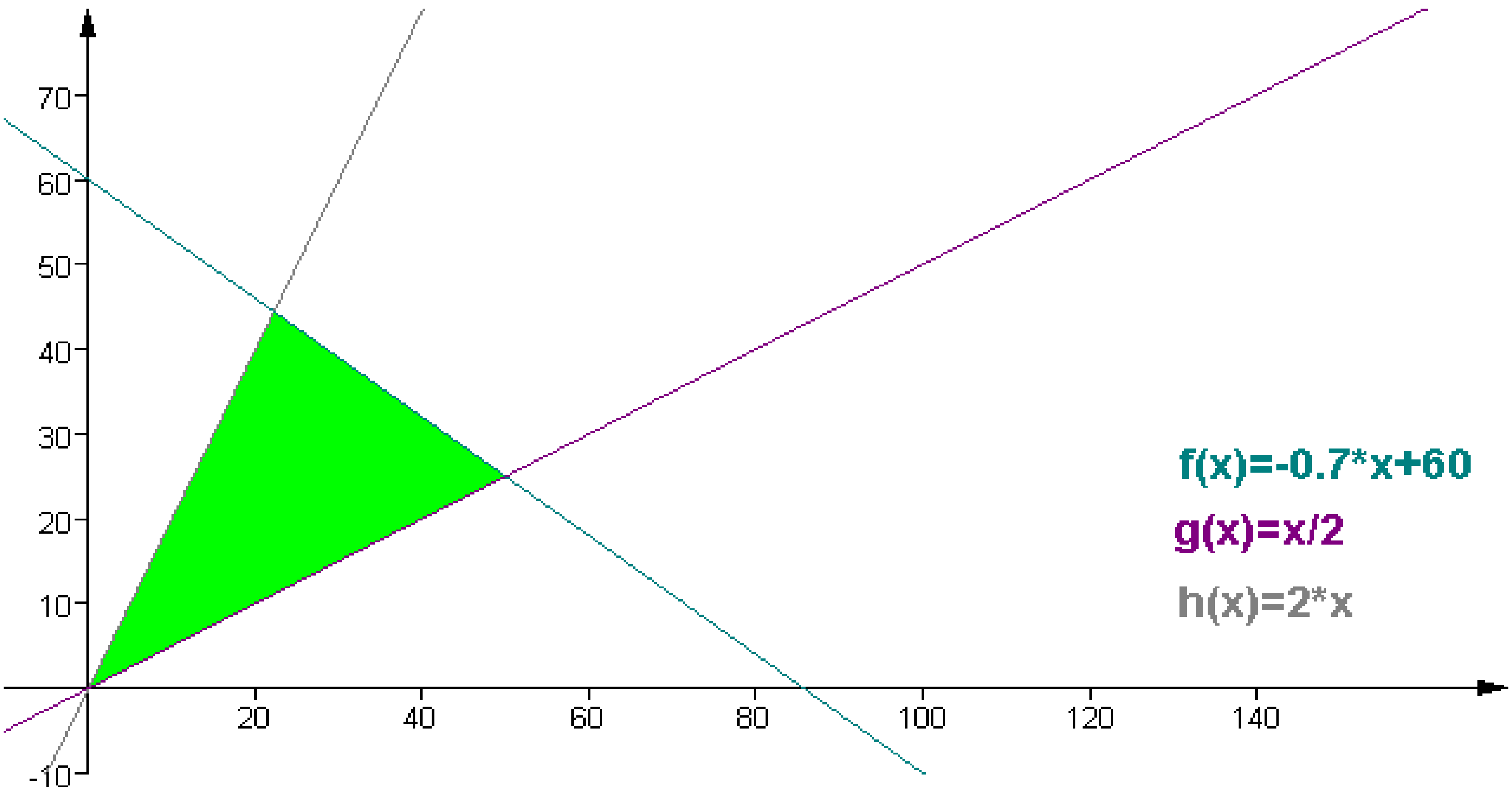
- x kleine Kisten
- y große Kisten

Höchstens doppelt so viele große wie kleine Gefäße:

$y \leq 2x$



Zulässigkeitsbereich aller 3 Bedingungen



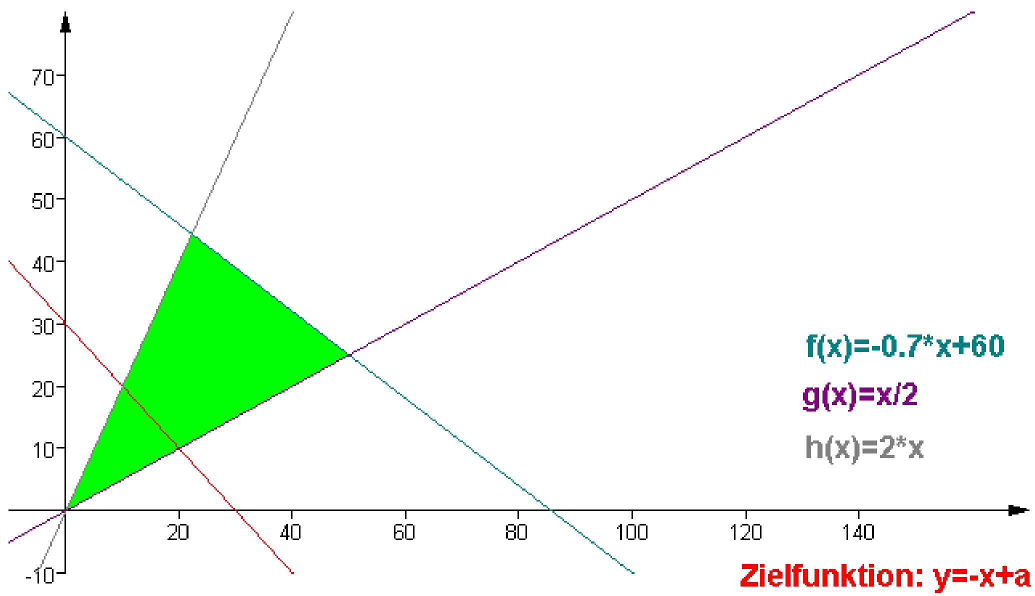
Zielfunktion

Ziel: So viele Gefäße wie möglich laden.

Anzahl der Gefäße: a

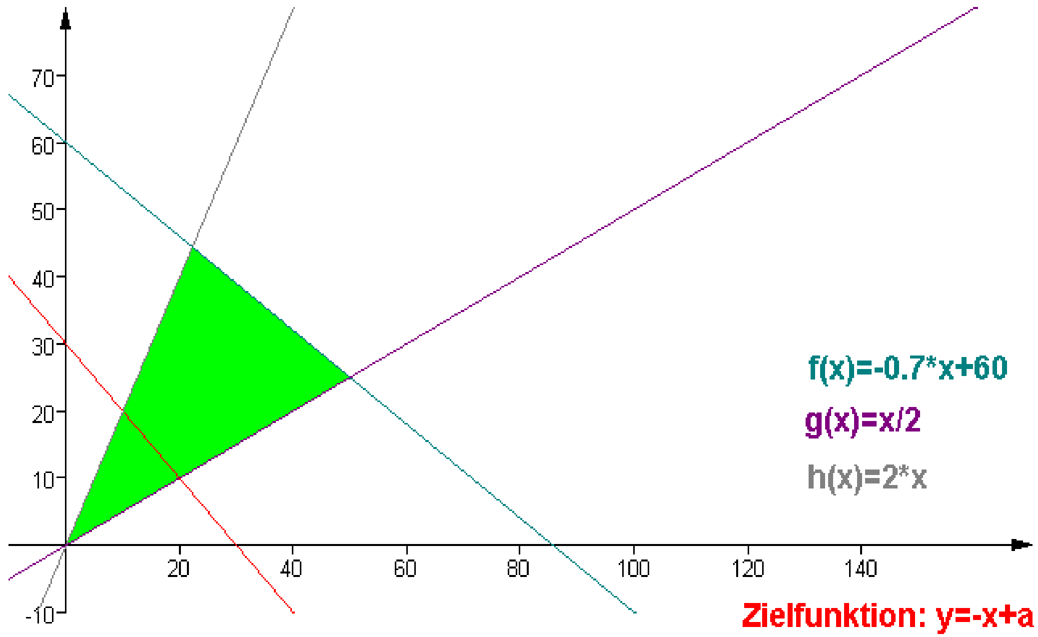
$$a = x + y$$

$$\Rightarrow \quad y = -x + a$$

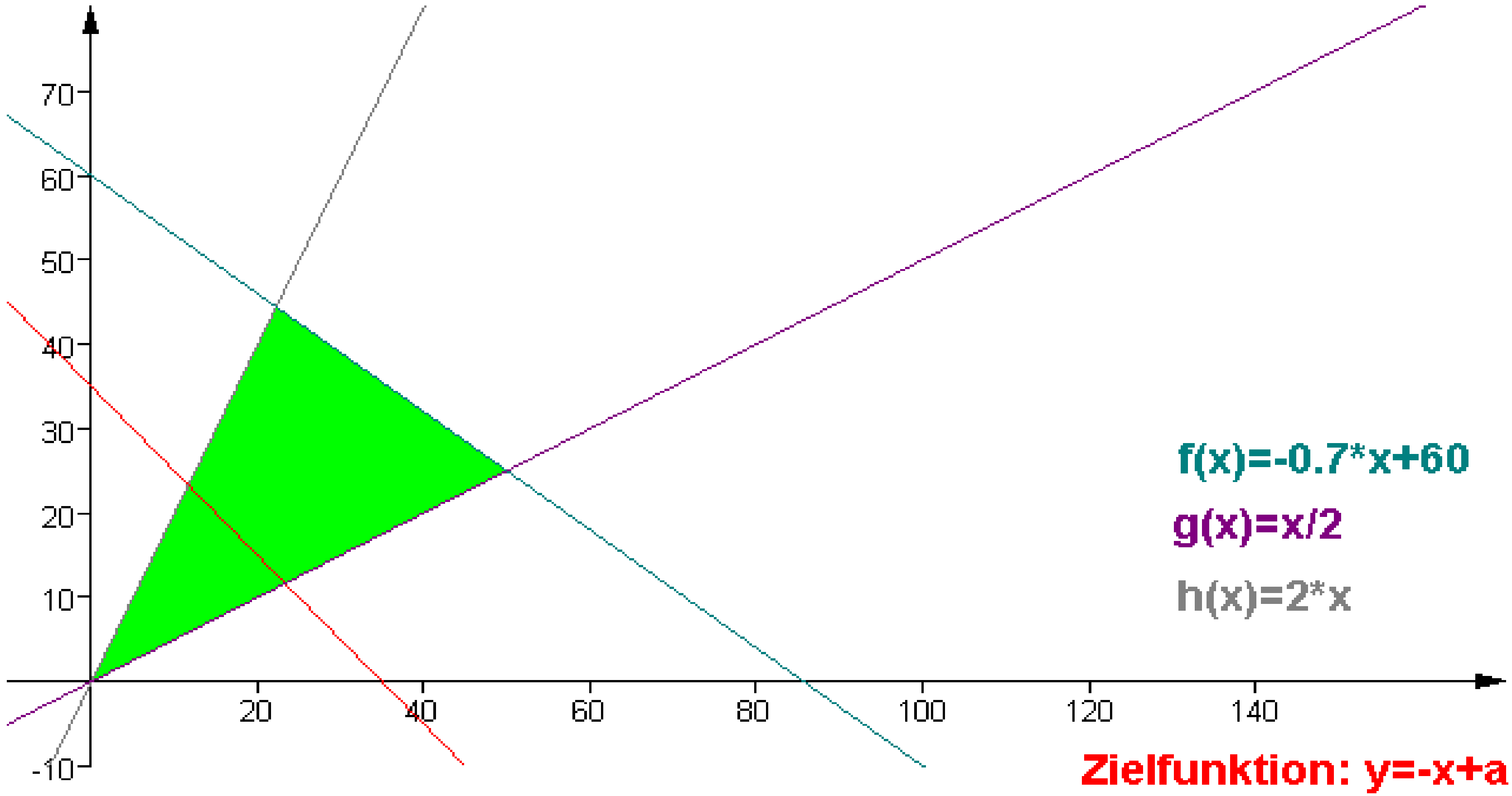


Alle Bedingungen und die Zielfunktion

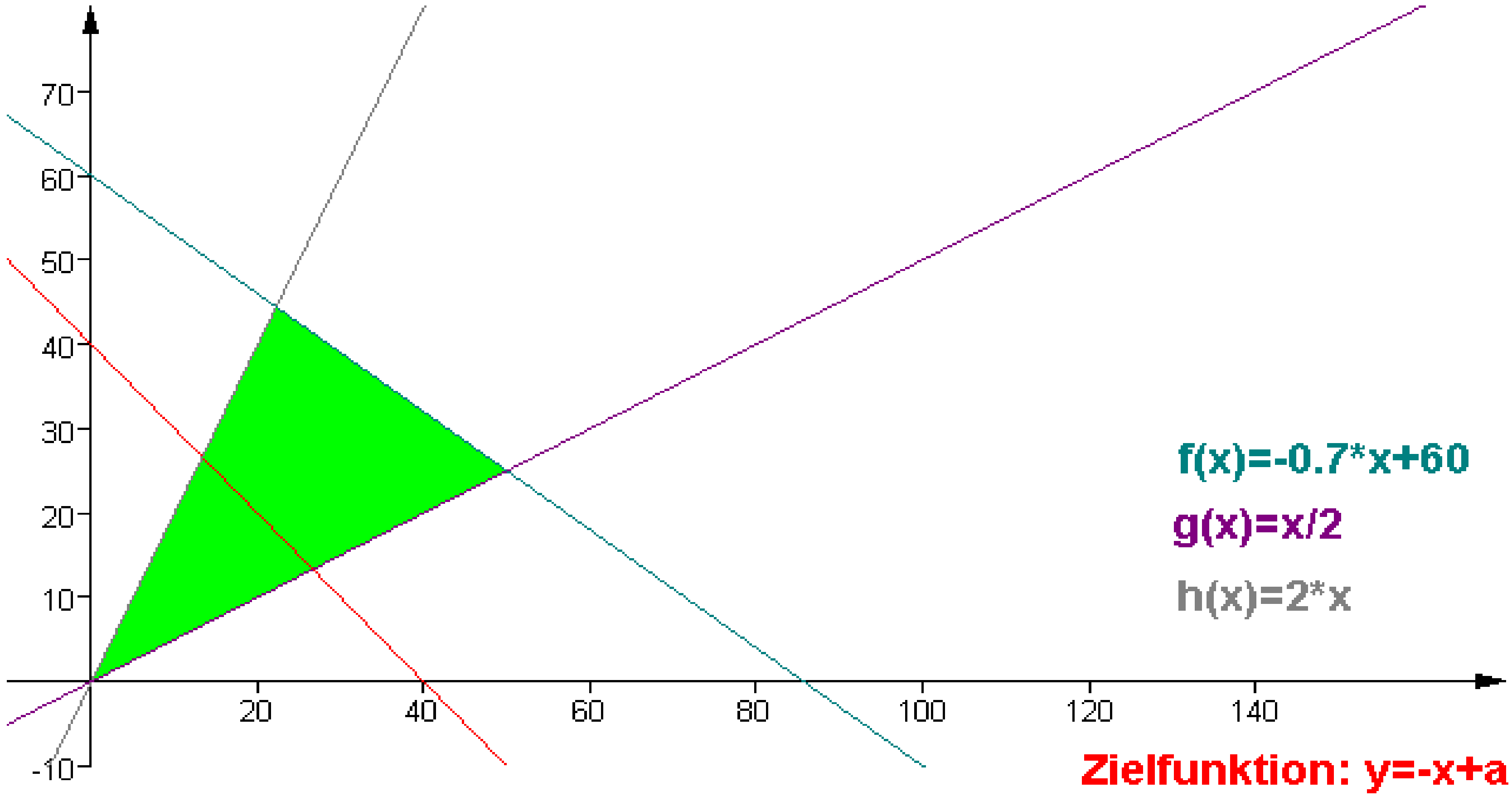
- x kleine Kisten
- y große Kisten
- x ≥ 0
- y ≥ 0
- y ≤ -0,7x + 60
- y ≥ x/2
- y ≤ 2x
- Zielfunktion: y = -x + a → a soll maximal werden!



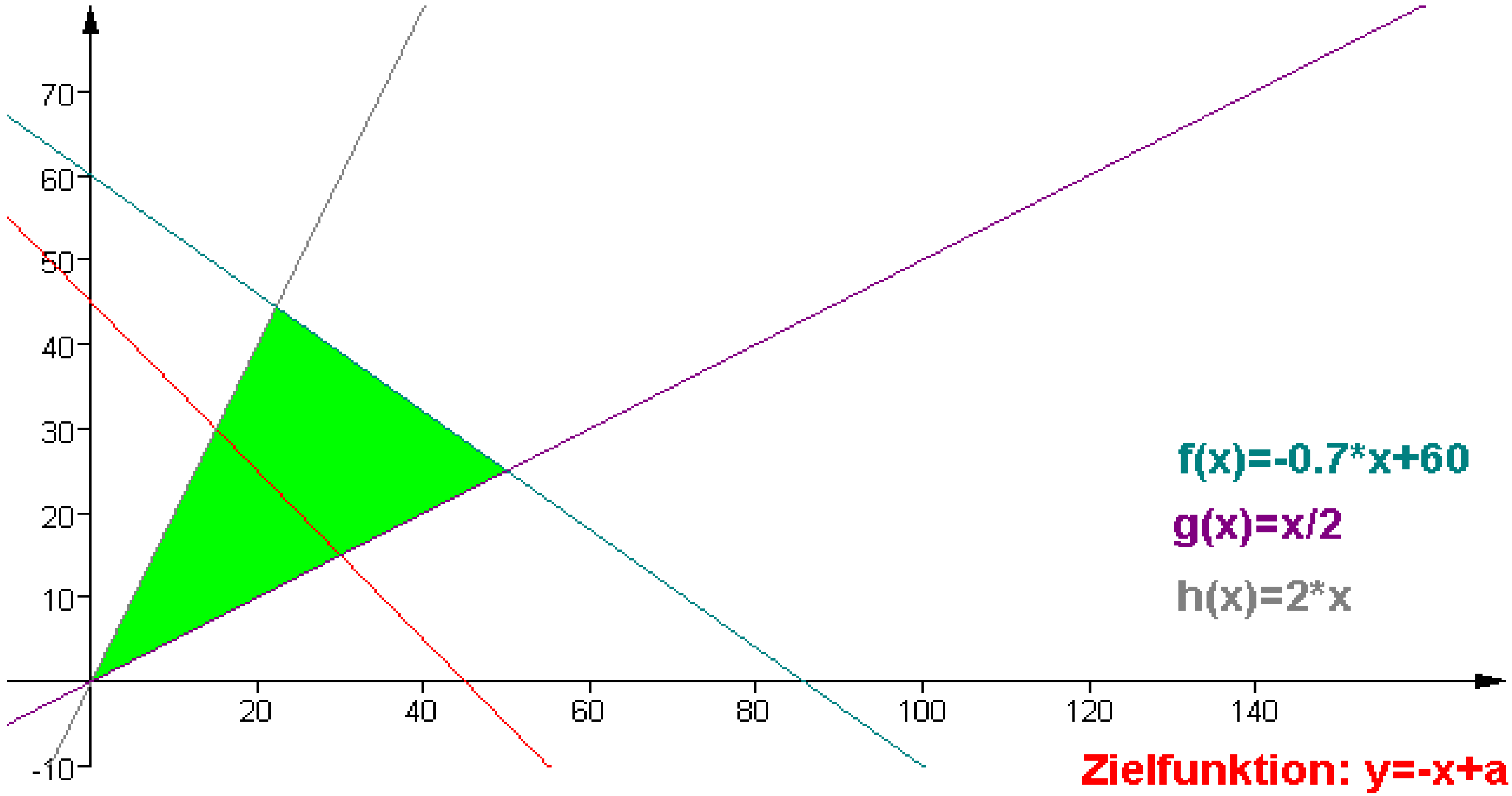
Verschiebung der Zielfunktion



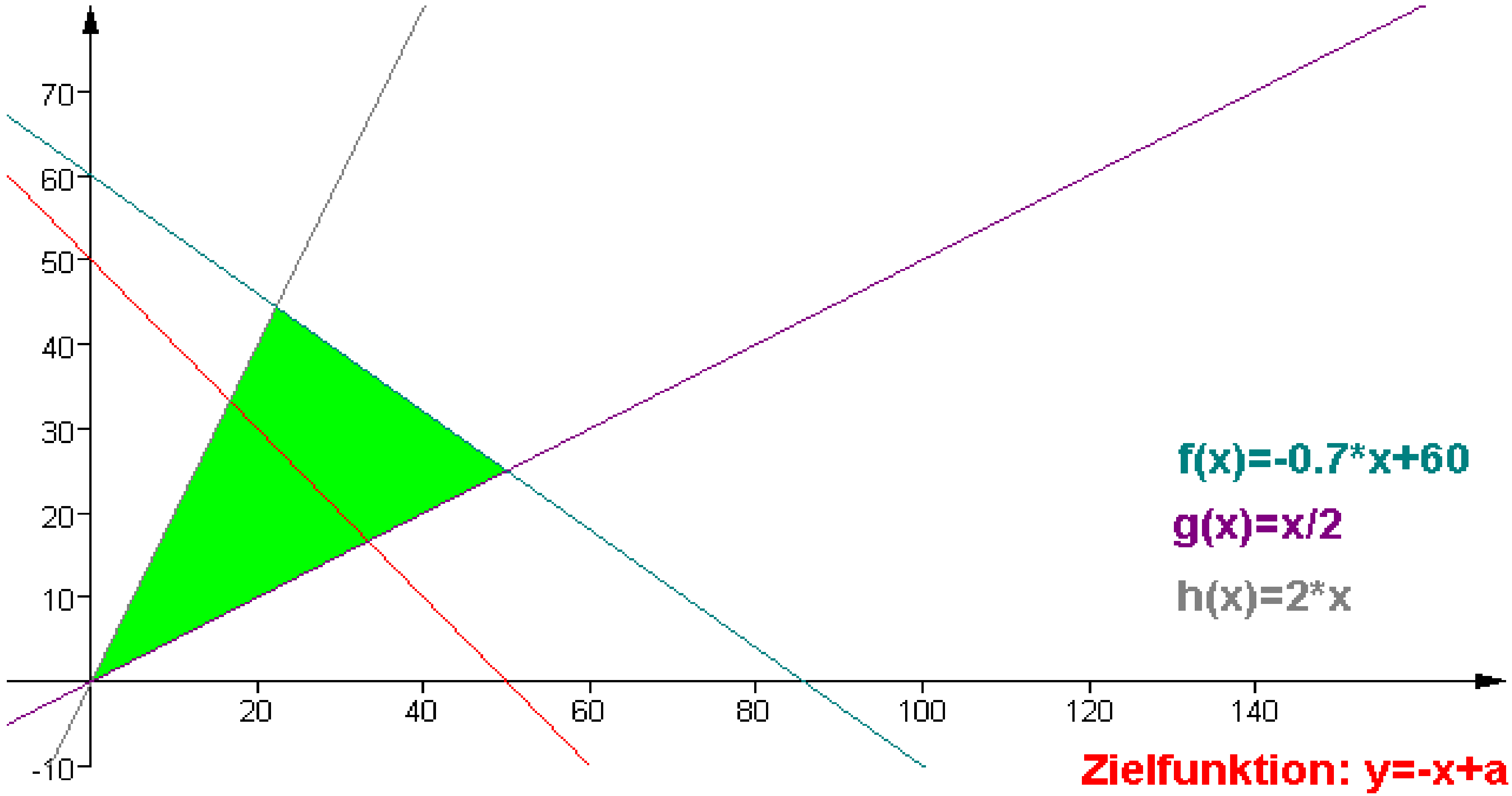
Verschiebung der Zielfunktion



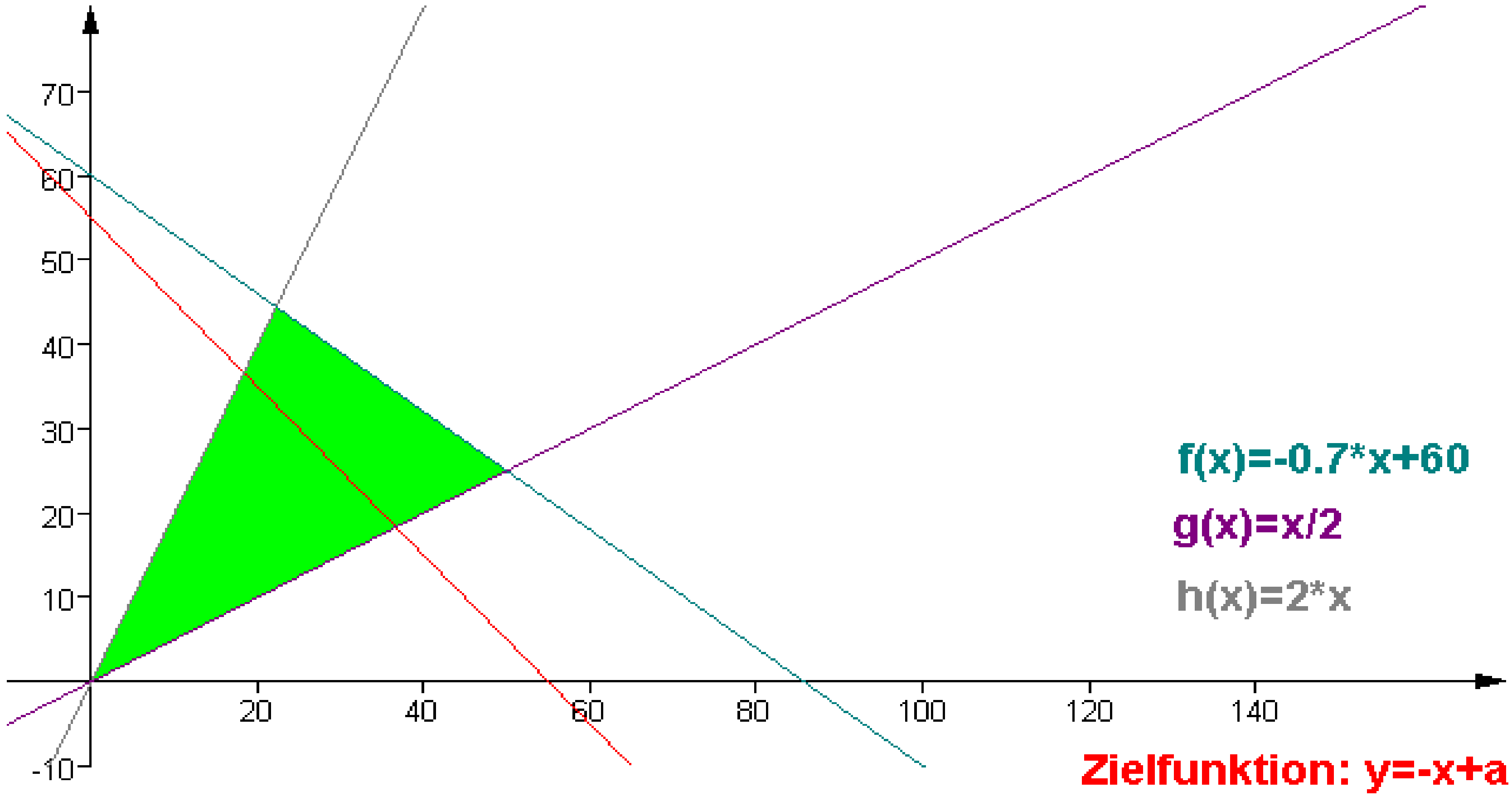
Verschiebung der Zielfunktion



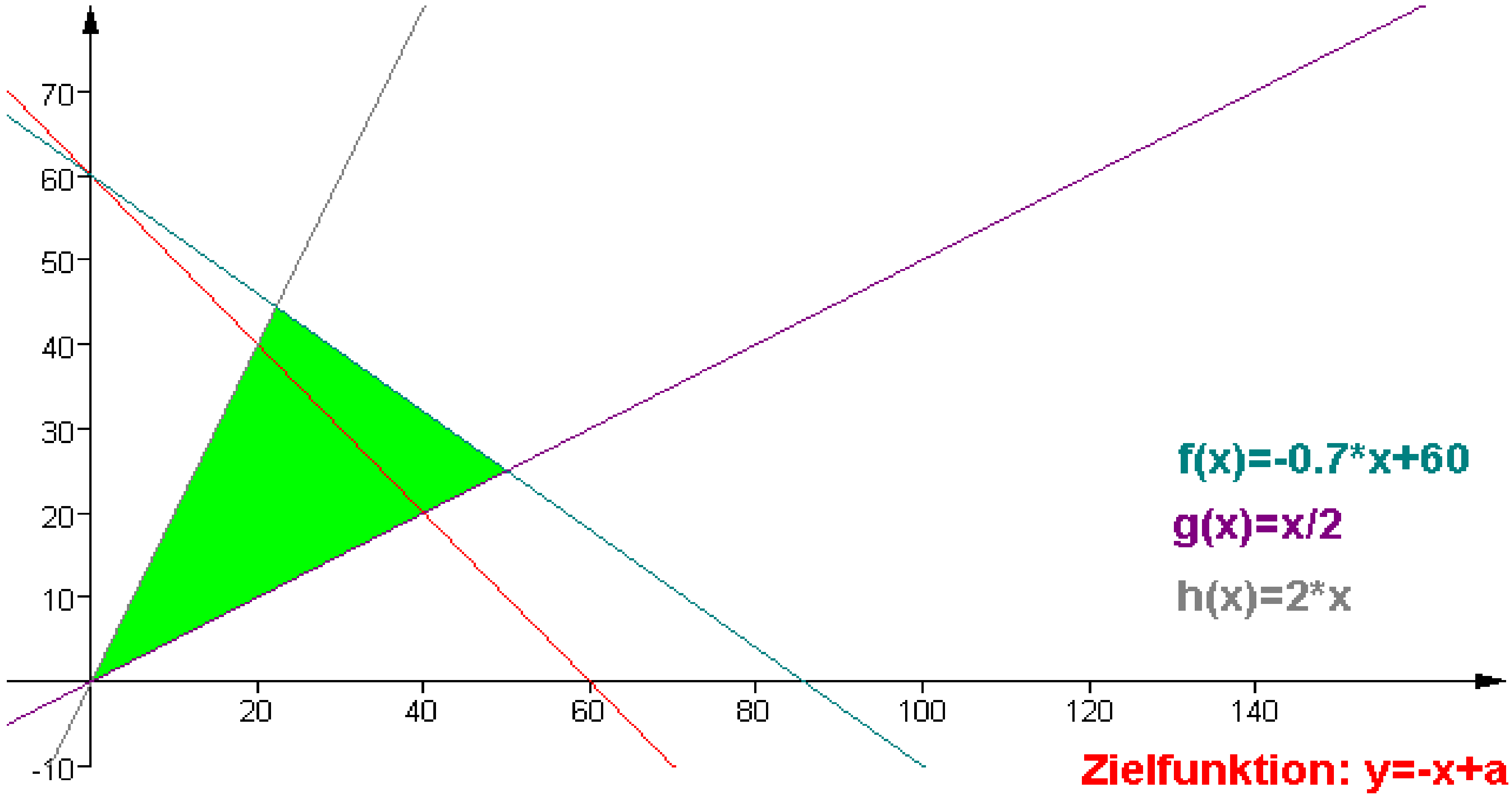
Verschiebung der Zielfunktion



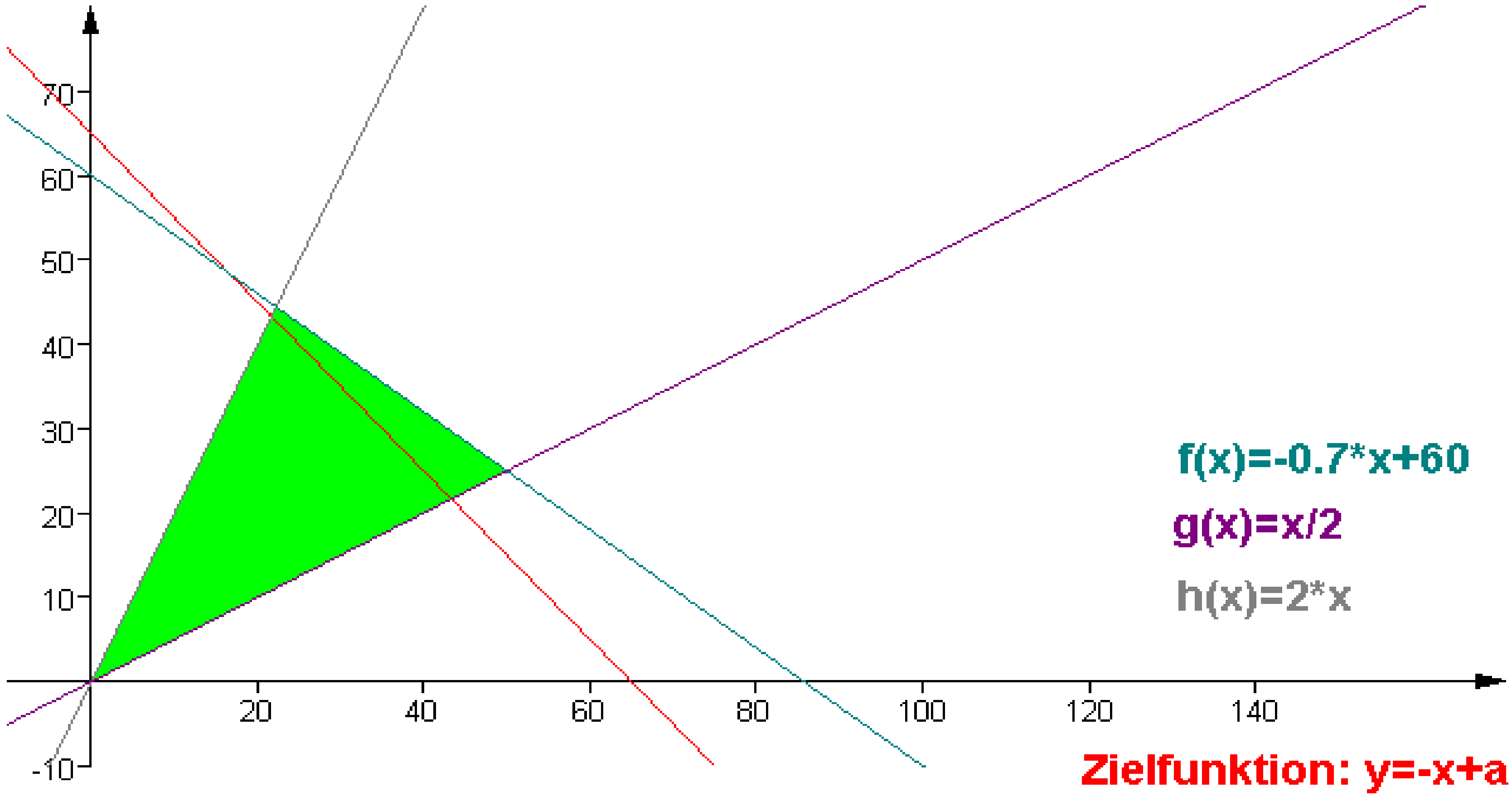
Verschiebung der Zielfunktion



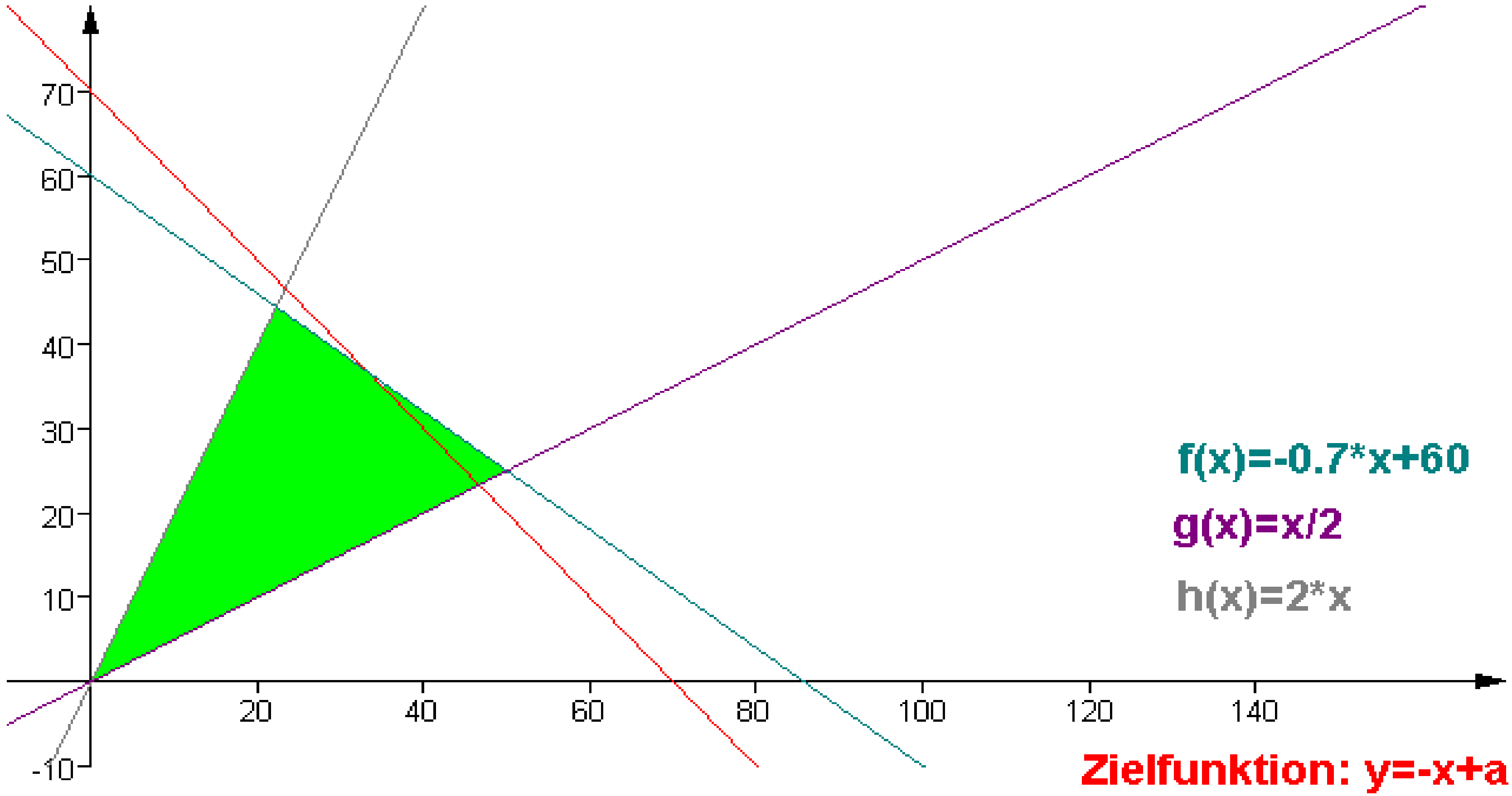
Verschiebung der Zielfunktion



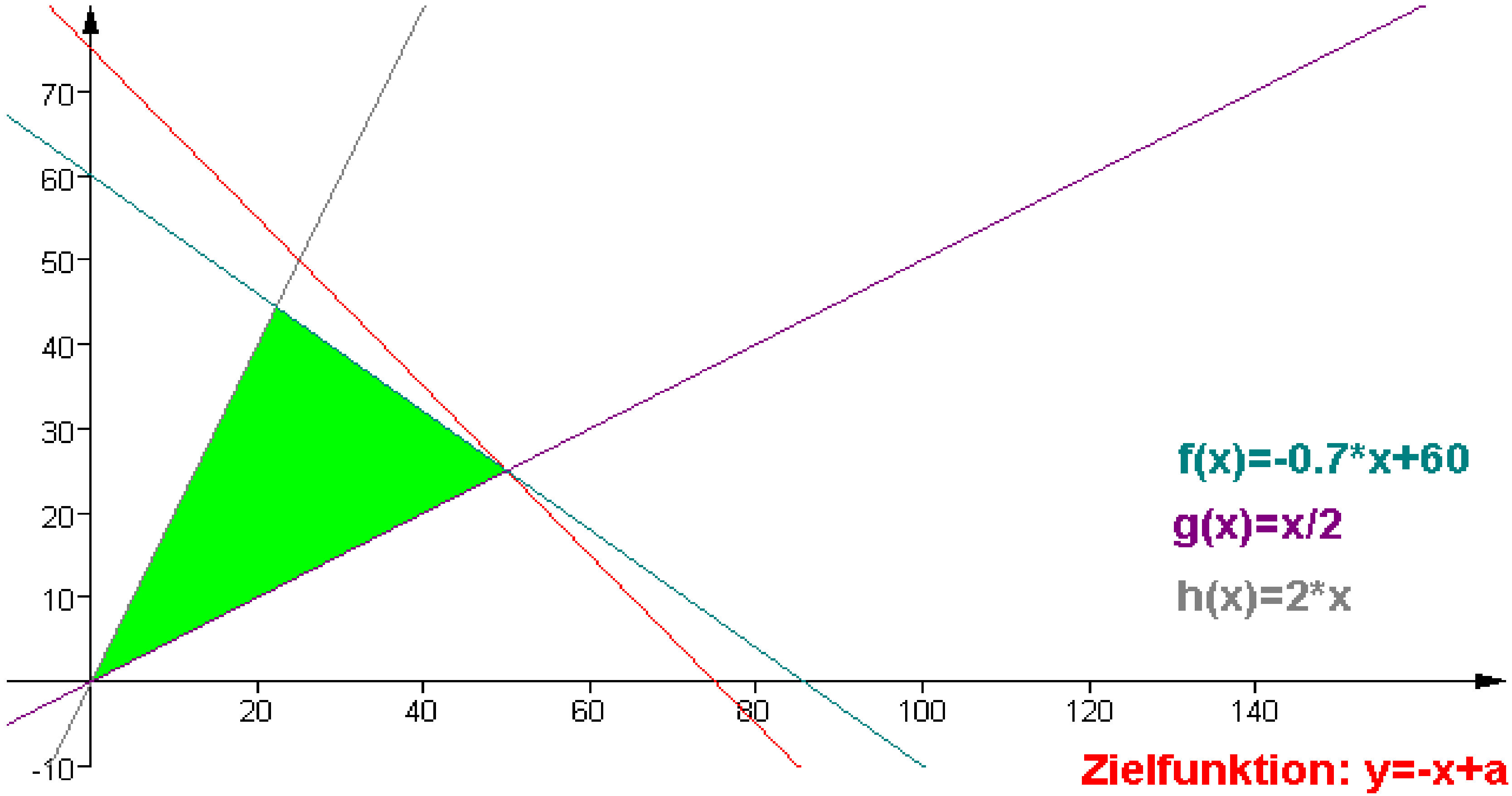
Verschiebung der Zielfunktion



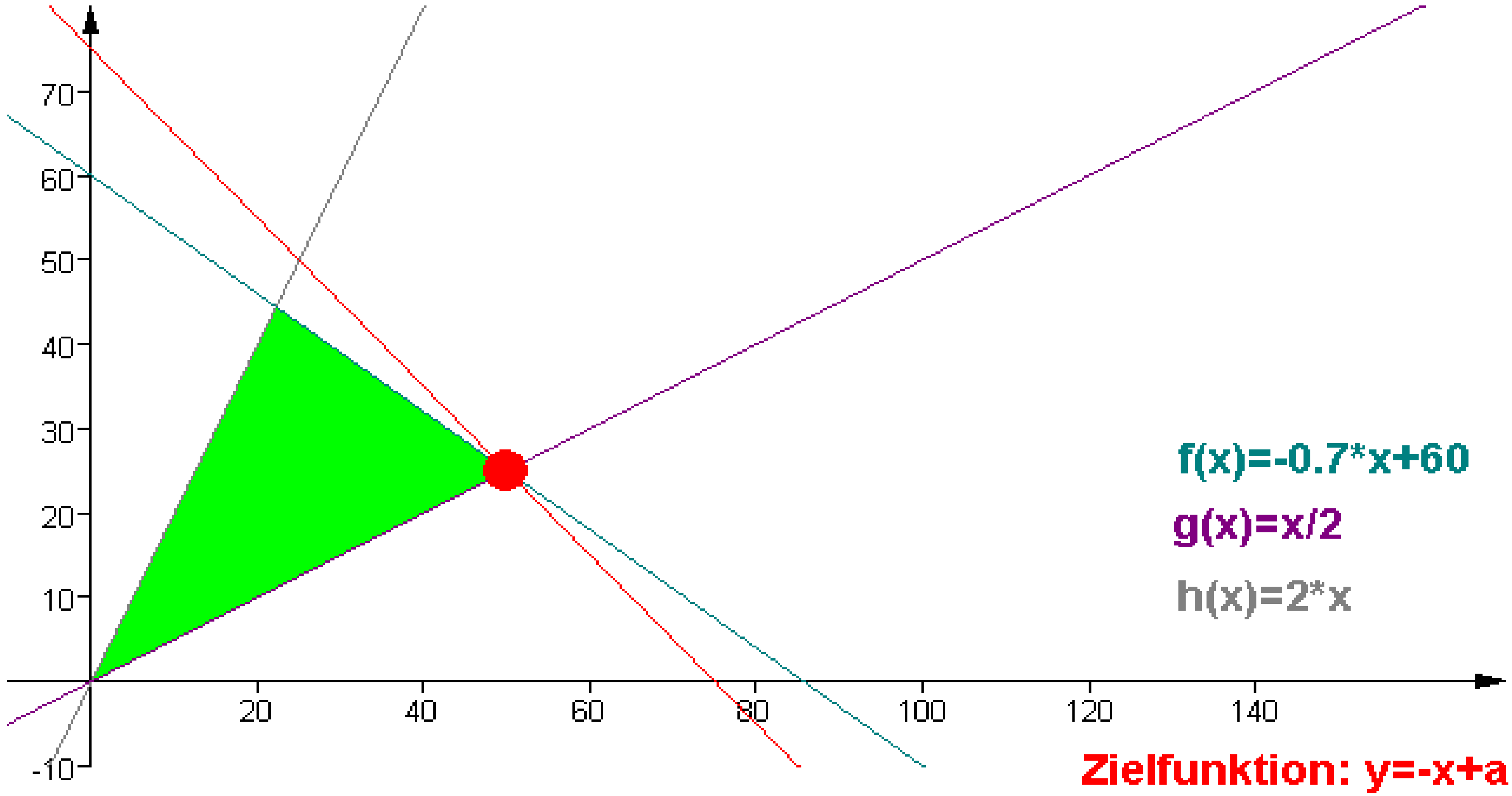
Verschiebung der Zielfunktion



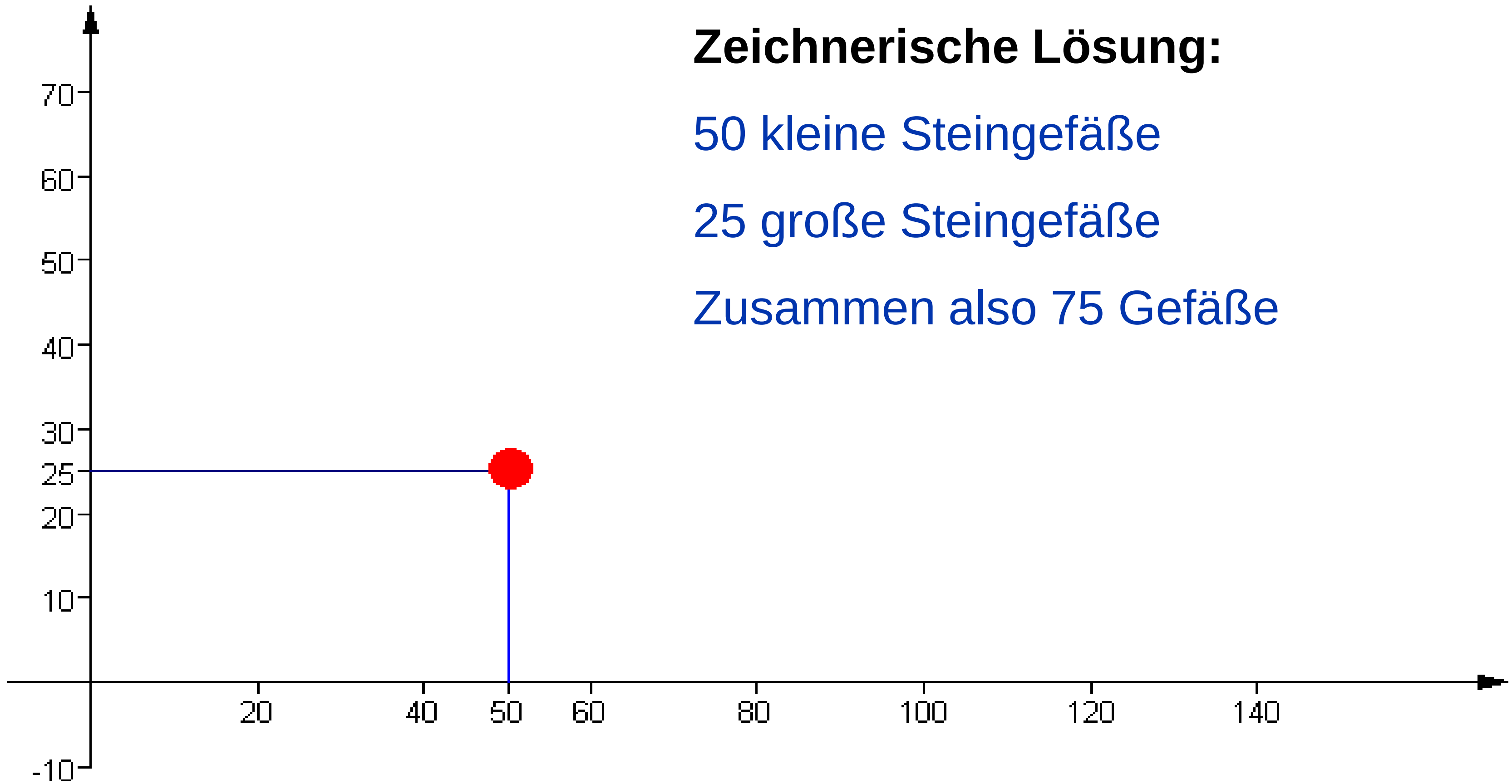
Verschiebung der Zielfunktion



Maximales zulässiges a gefunden!



Optimale Werte für x und y



Zeichnerische Lösung:

50 kleine Steingefäße

25 große Steingefäße

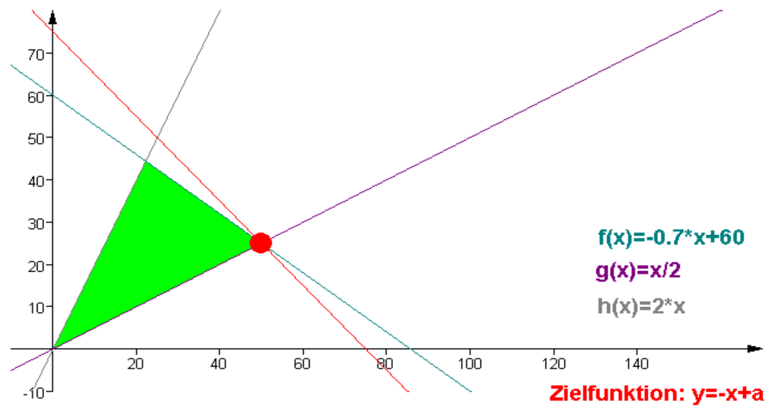
Zusammen also 75 Gefäße

Rechnerische Lösung

Schnittpunkt aus den beiden (passenden!) Geradengleichungen berechnen:

$$y = -0{,}7x + 60$$

$$y = x/2$$



Zum Beispiel durch Gleichsetzen:

$$-0{,}7x + 60 = x/2$$

Dies liefert ebenfalls

$$x = 50 \text{ und } y = 25.$$

Übung

Ein LKW soll zwei Güter G_1 und G_2 transportieren:

x Einheiten G_1 und y Einheiten G_2.

G_1 wiegt 2 t, G_2 wiegt 3 t. Der LKW kann max. 24 t transportieren:

G_1 benötigt 2 m³, G_2 benötigt 1 m³. Der LKW hat max. 12 m³ Laderaum:

Es sind nur 7 Einheiten von G_2 vorrätig:

Wert G_1: 3000 €, G_2: 2000 €. Der Gesamtwert soll maximiert werden:

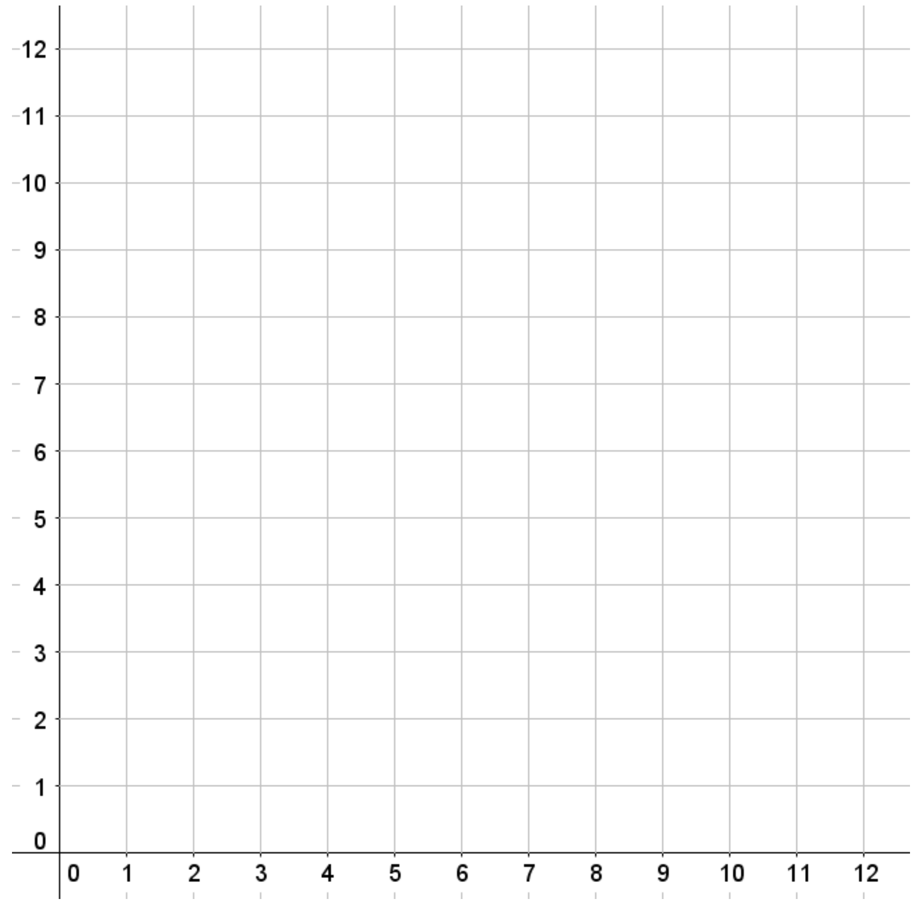
Übung

$2x + 3y \leq 24$

$2x + y \leq 12$

$y \leq 7$

$3000x + 2000y = g \rightarrow \max!$



Übung

Lösung:

Einheiten G_1:

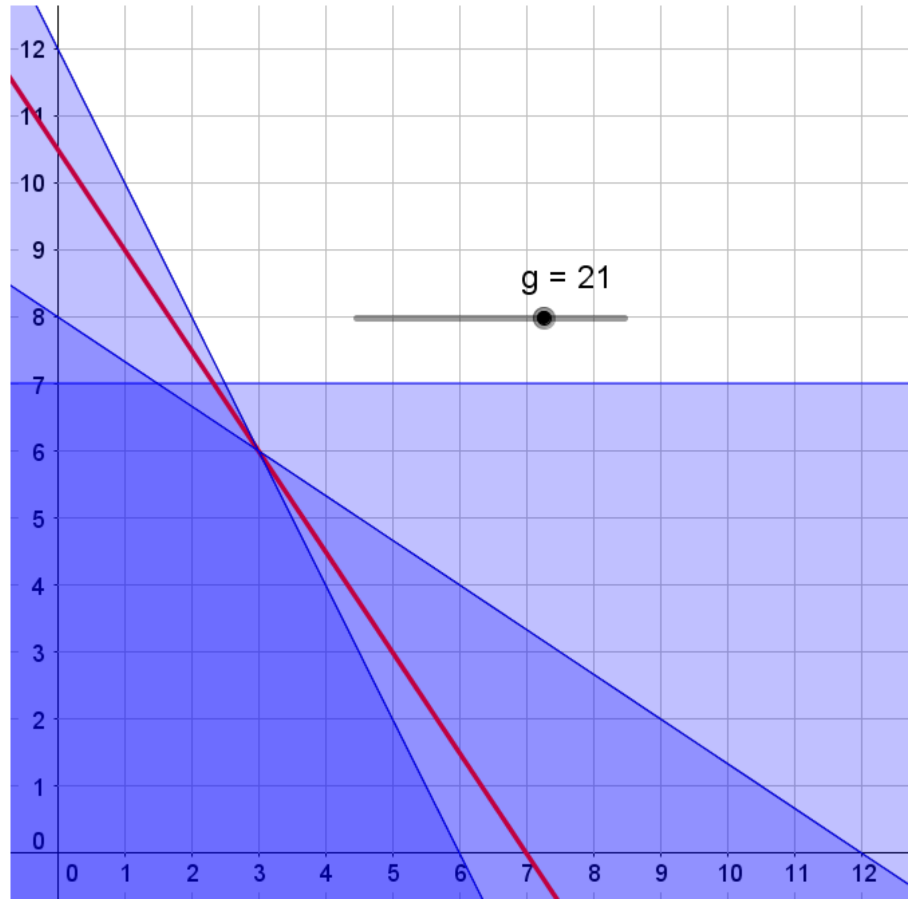
$x =$

Einheiten G_2:

$y =$

Gesamtwert:

$g =$



Ausblick

Lineare Optimierung mit mehr Variablen: „Simplex-Algorithmus“

(→ Master-Vorlesung: „Operations Research“)