Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Adrian Ulges

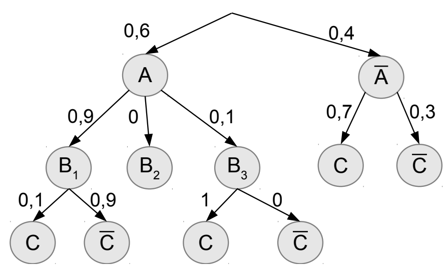
15.11.2021

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (WS 2021/22)

Aufgabenblatt 4

zu bearbeiten bis: 21.11.2021, 23:59 Uhr

Aufgabe 4.1 (Ereignisbäume)



Gegeben diesen Ereignisbaum, berechnen Sie:

- $P(A, \bar{C}, B_1)$

$$\begin{aligned} P(A, \bar{C}, B_1) &= P(A) \cdot P(B_1|A) \cdot P(\bar{C}|A, B_1) \quad \textit{//Multiplikationssatz} \\ &= 0.6 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.486 \end{aligned}$$

- $P(C)$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A, C) + P(\bar{A}, C) \quad \textit{//Totale WS.} \\ &= \Big(P(A, B_1, C) + P(A, B_3, C)\Big) + P(\bar{A}, C) \quad \textit{//Nochmal Totale WS.} \\ &= 0.6 \cdot 0.9 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.7. = 0.394. \end{aligned}$$

- $P(A|C)$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} P(C|A) &= P(C, B_1|A) + P(C, B_2|A) + P(C, B_3|A) \quad \textit{// Totale W'keit (bedingt mit A)} \\ &= \frac{P(A, B_1, C)}{P(A)} + \frac{P(A, B_2, C)}{P(A)} + \frac{P(A, B_3, C)}{P(A)} \quad \textit{// Definition Bedingte W'keit} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.9 \cdot 0.1}{0.6} + \frac{0}{0.6} + \frac{0.6 \cdot 0.1 \cdot 1}{0.6} \\ &= 0.19 \end{aligned}$$

... und setzen das Ergebnis in die Bayes'sche Regel ein:

$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} \quad \textit{// Bayes} \\ &= \frac{0.19 \cdot 0.6}{0.394} \\ &= 0.289 \end{aligned}$$

- $P(C, \bar{B_3}|A)$

  Wir wenden die Definition der bedingten W'keit an:

$$\begin{aligned} P(C, \bar{B_3}|A) &= \frac{P(A, \bar{B_3}, C)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A, (B_1 \cup B_2), C)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A, B_1, C) + P(A, B_2, C)}{P(A)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.9 \cdot 0.1 + 0}{0.6} \\ &= 0.09. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2 (Haute Cuisine)
Die folgende Tabelle zeigt die gemeinsame Verteilung von Alter und Lieblingsessen. Die Wahrscheinlichkeiten sind jeweils in Prozent angegeben.

	Burger	**Würstchen**	**Fondue**
Kinder	11	16	3
Erwachsene	39	19	12

Wir definieren die Ereignisse K/E (Person ist Kind/Erwachsen) sowie B/W/F (Lieblings-Essen der Person ist Burger/Würstchen/Fondue). Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und geben Sie jeweils den formalen Rechenweg (nicht nur mit Zahlen) an.

a) $P(K)$ und $P(K, \overline{W})$

$P(K) = P(K, B) + P(K, W) + P(K, F) = 11\% + 16\% + 3\% = 30\%$
$P(K, \overline{W}) = P(K, B) + P(K, F) = 11\% + 3\% = 14\%$

b) $P(W, E|W \cup E)$

$$\begin{aligned} P(W, E|W \cup E) &= P(W, E, (W \cup E))/P(W \cup E) \\ &= P(W, E)/P(W \cup E) \\ &= P(W, E)/\Big(P(W, E) + P(W, K) + P(F, E) + P(B, E)\Big) \\ &= 19\%/\Big(19\% + 16\% + 12\% + 39\%\Big) \\ &= 19\%/86\% \\ &= 22.1\% \end{aligned}$$

c) $P(F \cap \overline{E}|W)$

$$P(F \cap \overline{E}|W) = P(F, K, W)/P(W)$$
$$= 0 \qquad\qquad F, W \textit{ schließen einander aus}$$

Aufgabe 4.3 (Textaufgaben)

a) Bob fährt jeden dritten Tag mit dem Auto zur Arbeit, an allen anderen Tagen mit der Bahn. Jeden fünften Tag ist er verspätet. Ist er verspätet, so ist er in $3/4$ aller Fälle mit dem Auto gefahren.

- Wir definieren die Ereignisse A ("Bob fährt mit dem **A**uto") und S ("Bob ist ver**S**pätet"). Notieren Sie alle relevanten Aussagen des Textes in Form von Wahrscheinlichkeiten.

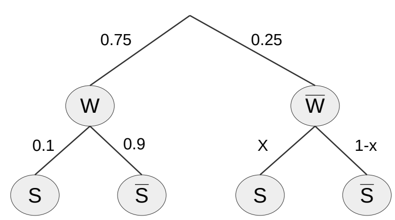
  $$P(A) = \tfrac{1}{3}, \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \tfrac{2}{3}, \quad P(S) = \tfrac{1}{5}, \quad P(A|S) = \tfrac{3}{4}.$$

- An wieviel Prozent aller Tage nimmt Bob die Bahn <u>und</u> ist verspätet?

  $$P(\overline{A}, S) = P(S) \cdot P(\overline{A}|S) = P(S) \cdot (1 - P(A|S)) = \tfrac{1}{5} \cdot (1 - \tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{4} = 0.05.$$

b) 75% aller Netflix-Kunden sind weiblich, und 90% der Kundinnen mögen die Serie "Squid Game" <u>nicht</u>. 60% aller Fans von "Squid Game" sind männlich. Wir definieren die Ereignisse W ("Person ist weiblich") und S ("Person ist Fan von Squid Game").

- Geben Sie sämtliche im Text enthaltenen Wahrscheinlichkeiten formal an und skizzieren Sie soweit möglich einen Ereignisbaum.
  $P(W) = 0.75, P(\bar{S}|W) = 0.9, P(\bar{W}|S) = 0.6$



- Wieviele Prozent der Netflix-Kunden insgesamt mögen "Squid Game"?

Wir bestimmen zunächst $x := P(S|\bar{W})$ mit Hilfe der Bayes'schen Regel:

$$\begin{aligned}
P(\bar{W}|S) = 0.6 &= \frac{P(\bar{W}, S)}{P(S)} \\
0.6 &= \frac{P(\bar{W}) \cdot P(S|\bar{W})}{P(\bar{W}) \cdot P(S|\bar{W}) + P(W) \cdot P(S|W)} \\
0.6 &= \frac{0.25 \cdot x}{0.25 \cdot x + 0.75 \cdot (1 - 0.9)} \\
0.6 \cdot (0.25 \cdot x + 0.75 \cdot 0.1) &= 0.25 \cdot x \\
0.6 \cdot 0.75 \cdot 0.1 &= x(0.25 - 0.6 \cdot 0.25) \\
0.045 &= x \cdot 0.1 \\
x &= 0.45
\end{aligned}$$

Jetzt können wir $P(S)$ per totaler W'keit berechnen:

$$\begin{aligned}
P(S) &= P(S, W) + P(S, \bar{W}) \\
&= 0.75 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.45 \\
&= 0.1875.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.4 (Unabhängigkeit von Ereignissen)

Wir befragen 850 Sportler (darunter 120 Fußballer). 59 der Fußballer verletzten sich in der letzten Saison, 642 der Nicht-Fußballer blieben von Verletzungen verschont. Wir definieren die Ereignisse A = "Spieler hat sich verletzt" und B = "Sportler ist Fußballer". Prüfen Sie formal die Unabhängigkeit von A und B.

Wieviele Nicht-Fußballer verletzten sich? Es gibt $850 - 120 = 730$ Nicht-Fußballer, von diesen verletzten sich $730 - 642 = 88$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{59 + 88}{850} = \frac{147}{850} = 0.173 \\
P(A|B) &= \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{59}{120} = 0.492.
\end{aligned}$$

Die Ereignisse sind massiv abhängig, die Verletzungsgefahr ist für Fußballer deutlich erhöht.