Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kapitel 03: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Adrian Ulges

B.Sc. *Informatik*
Fachbereich DCSM
Hochschule RheinMain

Outline

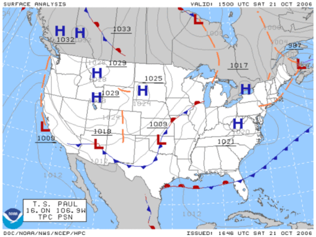
Definition: Zufallsexperiment Bilder: [6] [1] [5]

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang ...

... der sich unter den gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholen lässt

... und dessen Ergebnis sich nicht sicher vorhersagen lässt.

Die uns aus der deskriptiven Statistik bekannten Stichproben $x_1, \dots, x_n$ entstehen durch die wiederholte Durchführung von Zufallsexperimenten.

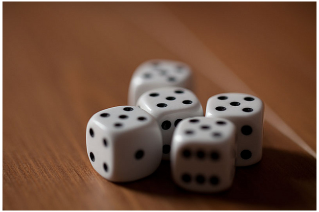


Definition: Ergebnismenge Bilder: [7] [3] [8]

Wir nennen die Menge aller möglichen Resultate eines Zufallsexperiments die Ergebnismenge Ω. Ein konkretes Ergebnis nennen wir $\omega \in \Omega$.

Beispiele

- Würfeln eines Würfels: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *(endlich)*
- Anzahl der Tage bis zum Defekt einer Festplatte: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ *(unendlich)*
- Körpergröße einer zufälligen Person (in cm): $\Omega = [0, 400]$ *(überabzählbar)*



Definition: Ereignis Bild: [2]

Definition (Ereignis)

Ein Ereignis ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$. Gilt für das Ergebnis eines Zufallsexperiments ω dass $\omega \in A$, sagen wir: "Das Ereignis A ist eingetreten."

Beispiel: Würfeln eines Würfels

- A = "Augenzahl ist ≥ 5" $= \{5, 6\}$
- B = "Augenzahl ist gerade" $= \{2, 4, 6\}$
- Wir würfeln eine 5 $\rightarrow$ A ist eingetreten, B nicht.

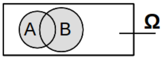
Besondere Ereignisse

- Einelementige Ereignisse (z.B. $\{1\}, \{2\}, ..., \{6\}$) nennen wir Elementarereignisse.
- Ω nennen wir das sichere Ereignis, $\emptyset$ das unmögliche Ereignis.

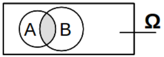
Verknüpfung von Ereignissen [13]

Da wir Ereignisse als Mengen definiert haben, können wir sie mittels Mengenoperationen verknüpfen. Seien A, B Ereignisse. Dann stellen die folgenden Verknüpfungen ebenfalls Ereignisse dar:

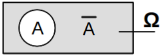
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$: *A oder B tritt ein (oder beide).*



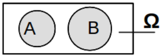
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ (oder kurz: $\mathbf{A}, \mathbf{B}$):
A und B treten beide ein.



$\bar{\mathbf{A}} = \Omega \setminus A$:
A tritt nicht ein.



Falls $A \cap B = \varnothing$, können A und B nicht gleichzeitig auftreten. Die Ereignisse "schließen sich aus".



Do-Ereignisse-Yourself Bild: [2]

Wir werfen zwei vierseitige Würfel.

1. Wie lautet die Ergebnismenge Ω?
2. Bestimmen Sie $A :=$ "Der 2. Würfel zeigt ein höheres Ergebnis als der erste Würfel"
3. Bestimmen Sie $B :=$ "Die Augensumme ist durch 3 teilbar"

1.) Ergebnis $\omega = (3,1)$, also $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots (4,4)\}$

2.) $A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

3.) $B = \{(1,2), (2,1), (2,4), (3,3), (4,2)\}$

Do-Ereignisse-Yourself Bild: [2]

4. Schließen A und B einander aus?
5. Bestimmen Sie $C :=$ “A tritt ein, aber B nicht”

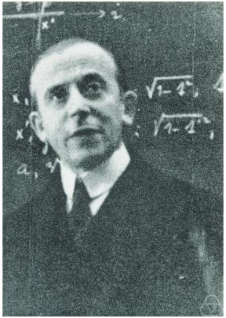
4.) Nein, denn $A \cap B = \{(1,2), (2,4)\} \neq \emptyset$

5.) $A \cap \overline{B} = \{(1,3), (1,4), (2,3), (3,4)\}$

Outline

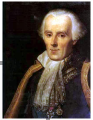
Der Begriff “Wahrscheinlichkeit” Bilder: [9] [10] [11]


Pierre-Simon Laplace


Richard von Mises


Andrei Kolmogorov

“Wahrscheinlichkeit”: Laplace’scher Begriff



Definition (Laplace-Experiment)

Ein Zufallsexperiment ist ein Laplace-Experiment, falls folgende Bedingungen gelten:

1. *Die Ergebnismenge Ω ist endlich.*
2. *Alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich.*

In diesem Fall berechnen wir die Wahrscheinlichkeit von A, notiert als $P(A)$, als:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Beispiel: Werfen eines fairen Würfels

- Es gilt: $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$
- Beispiele komplizierterer Ereignisse:

$$P(\{2,4,6\}) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(\{5,6\}) = \frac{\#\{5,6\}}{\#\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Sind dies Laplace-Experimente?

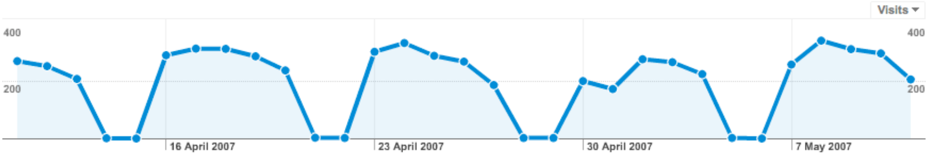
- **Festplatten-Defekt**
  - $\Omega = \mathbb{N}$ (Anzahl der Tage bis zum Defekt)
- **Black Jack**
  - Ziehen von 2 Karten aus einem Stapel von 52
  - $\Omega = \{\ A \subset \{1, .., 52\} \mid \#A = 2\ \}$
- **Werfen von Reißzwecken**
  - Elementarereignisse O ("Spitze zeigt nach oben") und U ("Spitze zeigt nach unten")
  - $\Omega = \{U, O\}$

"Wahrscheinlichkeit": Laplace'scher Begriff

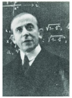
In der Praxis sind die Elementarereignisse oft *nicht* gleich wahrscheinlich.
Wie verfahren wir in komplizierteren Fällen?

Beispiele

- Werfen eines gezinkten Würfels:
  $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ mit $P(\{6\}) > P(\{1\})$
- Werfen von zwei Würfeln und Addieren der Augen:
  $\Omega = \{2, 3, \dots, 7, \dots, 11, 12\}$ mit $P(\{7\}) > P(\{2\})$
- Zugriffshäufigkeiten eines Webservers pro Wochentag:
  $\Omega = \{MO, DI, MI, DO, FR, SA, SO\}$ mit $P(\{MI\}) > P(\{SO\})$



Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten



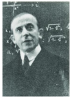
- In vielen Fällen *(z.B. gezinkter Würfel)* sind Elementarereignisse also nicht gleich wahrscheinlich.
- Wie definieren wir nun Wahrscheinlichkeiten?

Ansatz: Relative Häufigkeiten → Wahrscheinlichkeiten

- Wir wiederholen das Zufallsexperiment n-mal.

- Ein beliebiges Ereignis A besitze die relative Häufigkeit $h_n(A)$.
- Diese Häufigkeit konvergiert – falls wir das Zufallsexperiment beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholen – gegen die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.
- Dies ist von Mises' sogenannte Limes-Definition.

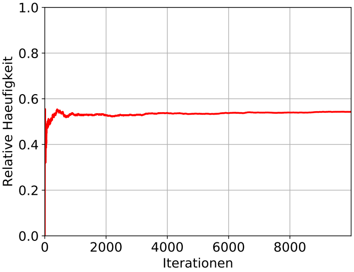
Beispiel: Ist ein Würfel gezinkt?



- Wir würfeln $3, 5, 6, 5, 2, 1, 4, 4, 2, \ldots$
- Wir betrachten das Ereignis $A =$ "*Augenzahl gerade*".
- Wir messen A's relative Häufigkeit nach $n{=}1, 2, \ldots$ Versuchen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
ω_n	3	5	6	5	2	1	4	4	2	...
$h_n(A)$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{9}$	...

- Beobachtung: $h_n(A)$ konvergiert gegen 54% *(Würfel ist gezinkt)*.



"Wahrscheinlichkeit": Definition nach Kolmogorov

Kolmogorov verallgemeinert Laplace' Definition. Er definiert Wahrscheinlichkeiten als Funktionen, die gewisse Bedingungen (oder *Axiome*) erfüllen:

- Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit Ergebnismenge Ω.
- Wir definieren ein sog. Wahrscheinlichkeitsmaß P, das jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 zuordnet.

Beispiel

- Münzwurf: $\Omega = \{Zahl, Kopf\}$
- Ereignisse: $\varnothing$, $\{Zahl\}$, $\{Kopf\}$, $\{Zahl, Kopf\}$
- Wahrscheinlichkeitsmaß P, zum Beispiel
  - $P(\varnothing) = 0$
  - $P(\{Zahl\}) = 0.4$
  - $P(\{Kopf\}) = 0.6$
  - $P(\{Zahl, Kopf\}) = 1$

“Wahrscheinlichkeit”: Definition nach Kolmogorov

- Wir fassen alle möglichen Ereignisse $A \subseteq \Omega$ (denen wir Wahrscheinlichkeiten zuordnen wollen) in einer sogenannten Sigma-Algebra Σ zusammen.
- Wir nennen Σ auch Ereignismenge des Zufallsexperiments.

Beispiel: Sechsseitiger Würfel

$$\begin{aligned}\Sigma = \Big\{ & \{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}, && \texttt{// ein-elementig}\\ & \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \ldots, \{5,6\}, && \texttt{// zwei-elementig}\\ & \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \ldots, \{4,5,6\}, && \texttt{// drei-elementig}\\ & \ldots \\ & \{1,2,3,4,5,6\} \Big\} && \texttt{// sechs-elementig}\end{aligned}$$

Anmerkungen

- Wir stellen uns unter Σ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ vor.

  (In Wirklichkeit ist es etwas komplizierter, falls Ω überabzählbar ist)

“Wahrscheinlichkeit”: Definition nach Kolmogorov

Definition (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit Ereignismenge Σ. Dann nennen wir $P : \Sigma \to [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, falls P folgende Eigenschaften erfüllt:

1.) $0 \leq P(A) \leq 1$ für alle $A \in \Sigma$

2.) $P(\Omega) = 1$

3.) (Additionssatz) Schließen Ereignisse $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ sich paarweise aus, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ mit $i \neq j$, dann gilt: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

"Wahrscheinlichkeit": Definition nach Kolmogorov

Anmerkungen

- Wir nennen (Ω, Σ, P) einen Wahrscheinlichkeitsraum. = „Zufallsexperiment"
- Die Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Laplace erfüllt ebenfalls die Kolmogorov-Axiome. Hier liegt kein Widerspruch vor – Kolmogorovs Definition ist nur allgemeiner.
- Die Axiome werden uns im Folgenden erlauben, Regeln für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten einzuführen.

Do-it-yourself: Gezinkter Würfel

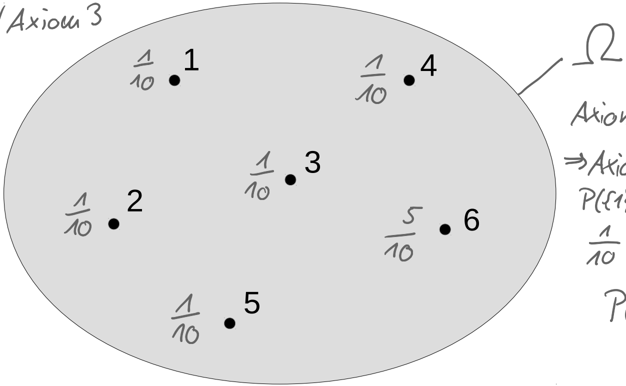
Wir wissen: $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{10}$ und $P(\{1,3,6\}) = \frac{7}{10}$. *

$* \; P(\{1,3,6\}) = 7/10$ // Axiom 3

$P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{6\}) = \frac{7}{10}$

$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + P(\{6\}) = \frac{7}{10}$

$P(\{6\}) = \frac{5}{10}$



Axiom 2: $P(\Omega) = 1$

$\Rightarrow$ Axiom 3:

$P(\{1\}) + \ldots + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$

$\frac{1}{10} + \ldots + P(\{5\}) + \frac{5}{10} = 1$

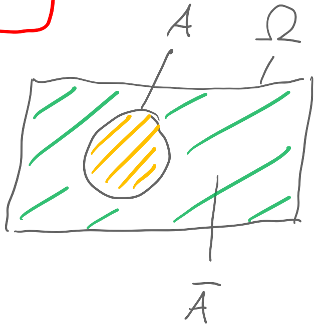
$P(\{5\}) = \frac{1}{10}$

Berechnen Sie $P(\{6\})$ und $P(\{5\})$. Ist P nun für alle $A \in \Sigma$ definiert? Ja!

Do-it-yourself: Gezinkter Würfel

Einfache Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

$$\boxed{\text{Es gilt: } P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ für alle } A \in \Sigma}$$



Beweis:

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

Axiom 3 ↓

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

Axiom ↓

$$1 = P(A) + P(\bar{A}) \quad \| - P(A)$$

$$1 - P(A) = P(\bar{A}) \quad \checkmark$$

Einfache Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

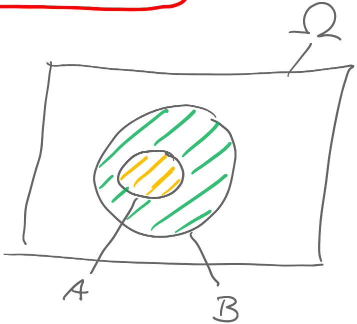
$\boxed{\text{Monotonie: Wenn } A \subseteq B, \text{ dann folgt } P(A) \leq P(B)}$

Beweis: $B = A \cup B \setminus A$

Axiom 3

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0 \text{ (Axiom 1)}}$$

$$P(B) \geq P(A) \quad \checkmark$$



Einfache Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Einfache Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Outline

Allgemeiner Additionssatz

Bisher wissen wir, dass für disjunkte Ereignisse A, B gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Für nicht-disjunkte Ereignisse A, B verallgemeinern wir:

Satz (Allgemeiner Additionssatz)

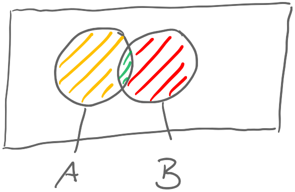
Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \Sigma$ zwei Ereignisse. Dann gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Anmerkungen

Dies schließt den speziellen Additionssatz mit ein:
Sind A und B disjunkt, gilt $P(A \cap B)=0$
und somit $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$.

Allgemeiner Additionssatz: Beweis



$$A \cup B = A \cup B \setminus A$$

$$P(A \cup B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A) + P(A,B)} - P(A,B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A,B) \quad \checkmark$$

Outline

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wir wissen jetzt wie wir $P(A \cup B)$ berechnen.
- Aber wie berechnen wir $P(A \cap B)$ (kurz: $P(A, B)$), die Wahrscheinlichkeit für ein Auftreten von A und B.

Beispiel (Karten)

- Aus einem Stapel von Spielkarten ziehen wir zwei Karten ohne Zurücklegen.
- Wir betrachten die Ereignisse
  - A = "Die erste Karte ist eine Kreuz-Karte"
  - B = "Die zweite Karte ist eine Kreuz-Karte".

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- $P(A) = \frac{\#\text{ Kreuz-Karten}}{\#\text{ alle Karten}} = \frac{8}{32} = 0.25$

$P(B)$ =?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignissen $A, B \in \Sigma$, sowie $P(A) > 0$. Wir definieren die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Annahme dass A eintritt als:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Wir nennen $P(B|A)$ eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

Anmerkungen

- Auf der rechten Seite des Trennstrichs steht unser "Wissen" A : Ereignisse, die wir als gegeben annehmen können.
- Der Unterschied zwischen $P(B)$ und $P(B|A)$ besteht in dieser Zusatzinformation A.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Anmerkungen (cont'd)

Für bedingte Wahrscheinlichkeiten gelten dieselben Rechenregeln wie für "normale" Wahrscheinlichkeiten, zum Beispiel:

- Gegenereignis: $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$
- Additionssatz: $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 \cap B_2|A)$
- Sicheres Ereignis: $P(\Omega|A) = 1$
- ...
- **Achtung: Es gilt nicht $\mathbf{P(B|A) + P(B|\overline{A}) = 1}$!**

Bedingte Wahrscheinlichkeiten: Do-it-yourself

- Würfeln mit zwei Würfeln, Ergebnis = Summe der Augen ($\Omega = \{2, \ldots, 12\}$).
- Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeiten

ω	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\omega)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A

B

- Ereignisse
  - A = "Das Ergebnis ist ≥ 7"
  - B = "Das Ergebnis ist eine gerade Zahl"

Berechnen Sie $P(B|A)$.

$$P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)} = \frac{\cancel{\frac{1}{36}} \cdot (5+3+1)}{\cancel{\frac{1}{36}} \cdot (6+5+4+3+2+1)} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten: Do-it-yourself

Wahrscheinlichkeiten notieren

Als die Titanic sank, waren 35 % aller Passagiere Frauen. Drei von vier weiblichen Passagieren überlebten das Unglück. 10% der männlichen Passagiere waren Jungen unter 18. Von diesen überlebten 34%. Bei den restlichen Männern betrug die Überlebensquote 19%.

W : Person ist weiblich
Ü : Person überlebte
K : Person ist Kind

- $P(W) = 35\%$
- $P(Ü \mid W) = 75\%$
- $P(K \mid \overline{W}) = 10\%$
- $P(Ü \mid \overline{W}, K) = 34\%$
- $P(Ü \mid \overline{W}, \overline{K}) = 19\%$

Outline

Der Multiplikationssatz

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt der sog. Multiplikationssatz:

$$\frac{P(A,B)}{P(A)} = P(B|A) \qquad // \times P(A)$$

$$\Rightarrow P(A,B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Satz (Multiplikationsssatz)

Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \Sigma$ zwei Ereignisse mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$. Dann gilt:

$$P(A,B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Anmerkungen

Wir können nun Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten mehrerer Ereignisse (d.h. $A \cap B$ oder A, B) berechnen.

Multiplikationssatz: Allgemeine Form

Der Multiplikationssatz gilt nicht nur für zwei Ereignisse A, B, sondern für ganze *Ereignisketten* von mehr als zwei Ereignissen:

Satz (Multiplikationsssatz für > 2 Ereignisse)

Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es seien $A_1, A_2, ..., A_n \in \Sigma$ Ereignisse mit $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_{n-1}) > 0$. Dann gilt:

$$P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1, A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1, ..., A_{n-1})$$

Anmerkungen

Ähnlich wie beim vorherigen Satz können wir auf der rechten Seite die Reihenfolge der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ vertauschen.

Outline

Unabhängigkeit von Ereignissen

Oft nehmen wir an, dass Ereignisse einander nicht beeinflussen:

Beispiel 1: Zweifacher Würfelwurf

- A = “Wir würfeln eine 6 im ersten Wurf.”
- B = “Wir würfeln eine 6 im zweiten Wurf.”

Beispiel 2: Befragung von Wählern

- A = “Die erste Person wählt die SPD.”
- B = “Die zweite Person wählt die SPD.”

Beispiel 3: Ziehe eine Karte

- A = “Die Karte ist eine Kreuzkarte.”
- B = “Die Karte ist eine Bildkarte.”

- In diesen Fällen können wir annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit von B durch das Eintreten von A **nicht beeinflusst** wird.
- Es gilt also: $P(B|A) = P(B)$.

Unabhängigkeit von Ereignissen

Satz (Unabhängigkeit von Ereignissen)

Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \Sigma$. Dann nennen wir A und B genau dann ***unabhängig****, wenn eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:*

1. $P(B|A) = P(B)$ *(falls $P(A) > 0$)*
2. $P(A|B) = P(A)$ *(falls $P(B) > 0$)*
3. $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$

Anmerkungen

- Falls $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, gilt: (1.) $\Leftrightarrow$ (2.) $\Leftrightarrow$ (3.)
  (gilt also eine der drei Eigenschaften, gelten automatisch alle).
- Wir nennen (3.) den **Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse**.

Unabhängigkeit von Ereignissen: Beweis

Zu zeigen: $(1) \iff (2) \iff (3)$

$P(B|A) = P(B)$ $\quad$ $P(A|B) = P(A)$ $\quad$ $P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$

Wir zeigen: $(1) \iff (3)$ $\quad$ ($(2) \iff (3)$ geht analog)

$$(1) \quad P(B|A) = P(B)$$

Def. „Bedingte W'keit"

$$\iff \quad \frac{P(A,B)}{P(A)} = P(B)$$

$\cdot P(A)$

$$\iff \quad P(A,B) = P(A) \cdot P(B) \quad \checkmark$$

Beispiel 1: Ziehen von zwei Karten

Wir ziehen zwei Karten aus einem 32-Blatt-Kartenspiel *(geordnet, ohne Zurücklegen)*.
Es ergibt sich ein Laplace-Experiment mit $\#\Omega = 32 \times 31$:

$$\Omega = \{(K7, K8), \ldots, (K7, HA), (K8, K7), \ldots, (K8, HA) \ldots, (HA, HK)\}$$

Wir untersuchen auf Unabhängigkeit:

- A = "Erste Karte ist Kreuz"
- B = "Zweite Karte ist Kreuz"

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{8 \cdot \cancel{31}}{32 \cdot \cancel{31}} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\cancel{31} \cdot 8}{32 \cdot \cancel{31}} = \frac{1}{4}$$

$$P(A,B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{8 \cdot 7}{32 \cdot 31} = 0{,}0565$$

$$P(A) \cdot P(B) \overset{?}{=} P(A,B)$$

$$1/4 \cdot 1/4 \overset{?}{=} 0{,}0565$$

$$0{,}0625 \neq 0{,}0565$$

$\longrightarrow$ Ereignisse sind abhängig!

Beispiel 2: Ziehen von zwei Karten

Wir untersuchen auf Unabhängigkeit:

- A = "Erste Karte ist Kreuz"
- B = "Zweite Karte ist Bild"

$$P(A) \cdot P(B) \overset{?}{=} P(A,B)$$

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad (\text{s.o.})$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\cancel{31} \cdot 12}{32 \cdot \cancel{31}} = \frac{6}{16}$$

$$P(A,B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{}{32 \cdot 31}$$

Rechenregeln: Zusammenfassung

Additionssätze

$$P(A \cup B) = \begin{cases} P(A) + P(B) & \text{falls } A, B \text{ disjunkt} \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) & \text{sonst} \end{cases}$$

Multiplikationssätze

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A) \cdot P(B) & \text{falls } A, B \text{ unabhängig} \\ P(A) \cdot P(B|A) & \text{sonst} \end{cases}$$

Outline

Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

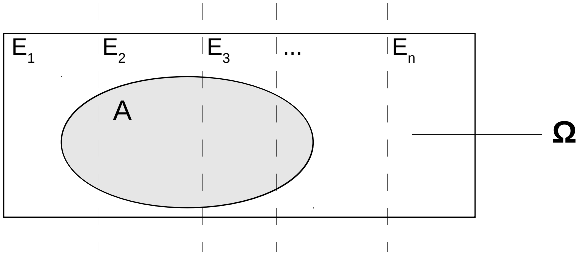
In der Praxis treten Ereignisse A oft unter "Teilbedingungen" $E_1, \ldots, E_n$ auf.

Beispiel

- A = "Studi besteht Klausur"
- $E_1, \ldots, E_n$ = "Studi studiert AI, ITS, WI, ..."

Ziel

Berechne $P(A)$, wenn sich A aus Teilmengen $A \cap E_1$, $A \cap E_2$, ..., $A \cap E_n$ zusammensetzt.



Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

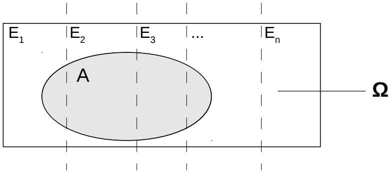
Satz (Totale Wahrscheinlichkeit)

Es sei (Ω, Σ, P) ein Ereignisraum, und die Ereignisse $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ bilden eine Partitionierung von Ω, d.h.:

$$E_1 \cup \ldots \cup E_n = \Omega \quad \text{und} \quad E_j \cap E_k = \varnothing \quad \text{für } 1 \leq j < k \leq n$$

Dann gilt für jedes Ereignis $A \in \Sigma$:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A, E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k) \cdot P(A|E_k)$$



Totale Wahrscheinlichkeit: Beispiel

Ein Computerhersteller bezieht Festplatten mit unterschiedlichen Ausschussraten von drei verschiedenen Lieferanten:

	Lieferant 1	Lieferant 2	Lieferant 3
Anteil	40%	25%	35%
Ausschuss	2%	1%	3%

$35\% \rightarrow P(E_3)$

$3\% \rightarrow P(A|E_3)$

Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige gelieferte Festplatte einen Defekt aufweist:

- A = "Festplatte weist einen Defekt auf."
- E_1, E_2, E_3 = "Festplatte stammt von Lieferant 1,2,3."

$$P(A) = P(A,E_1) + P(A,E_2) + P(A,E_3) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2) + P(E_3) \cdot P(A|E_3)$$

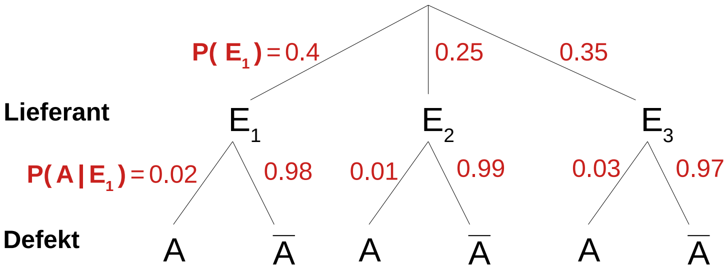
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}01 + 0{,}35 \cdot 0{,}03$$

$$= 0{,}021.$$

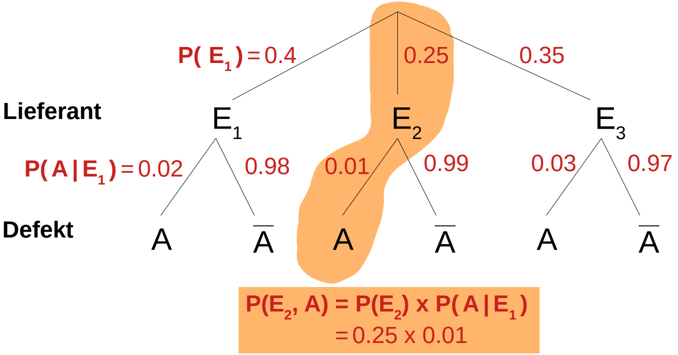
Totale Wahrscheinlichkeit: Ereignisbäume

Wir können uns das Beispiel auch als ein grafisches Modell – einen sogenannten Ereignisbaum – vorstellen:

	Lieferant 1	Lieferant 2	Lieferant 3
Anteil	40%	25%	35%
Ausschuss	2%	1%	3%



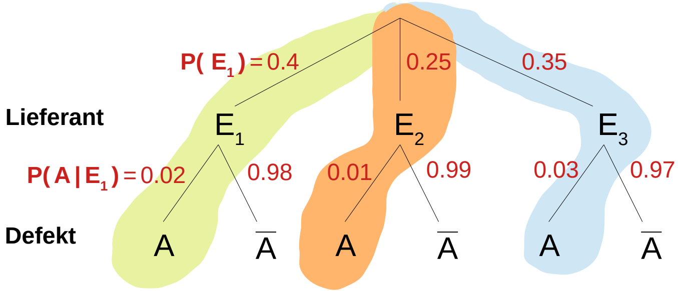
Totale Wahrscheinlichkeit: Ereignisbäume



Gemäß dem Multiplikationssatz können wir $P(E_k, A)$ berechnen, indem wir die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade aufmultiplizieren:

- $P(E_1, A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) = 0.4 \cdot 0.02 = 0.008$
- $P(E_2, \overline{A}) = P(E_2) \cdot P(\overline{A}|E_2) = 0.25 \cdot 0.99 = 0.2475$
- ...

Totale Wahrscheinlichkeit: Ereignisbäume



P(A) = P(A, E_1) + P(A, E_2) + P(A, E_3)

Gemäß dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir $P(A)$, indem wir die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade zu A aufsummieren!

$$P(A) = \underbrace{0.40 \cdot 0.02}_{\text{Pfad 1}} + \underbrace{0.25 \cdot 0.01}_{\text{Pfad 2}} + \underbrace{0.35 \cdot 0.03}_{\text{Pfad 3}} = 0.0201$$

Totale Wahrscheinlichkeit: Erweiterung

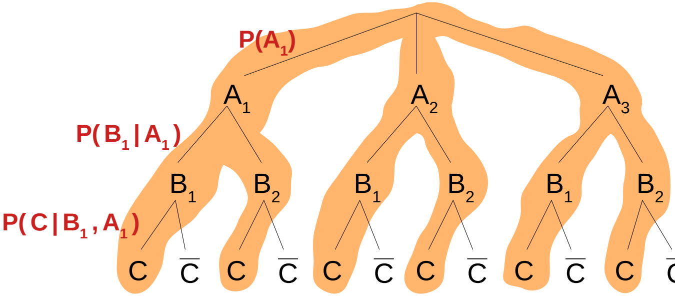
Wir können das Prinzip des grafischen Modells auf weitere Ebenen erweitern.
Zum Beispiel mit 3 Ebenen:

Satz (Totale Wahrscheinlichkeit (3 Ebenen))

Sei (Ω, Σ, P) ein Ereignisraum, $C \in \Sigma$, und $A_1, ..., A_n \in \Sigma$ und $B_1, ...B_m \in \Sigma$ Partitionierungen von Ω. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
P(C) &= \sum_{i,j} P(A_i, B_j, C) \\
&= \sum_{i,j} P(A_i, B_j) \cdot P(C|A_i, B_j) \\
&= \sum_{i,j} P(A_i) \cdot P(B_j|A_i) \cdot P(C|A_i, B_j).
\end{aligned}
$$

Totale Wahrscheinlichkeit: Erweiterung



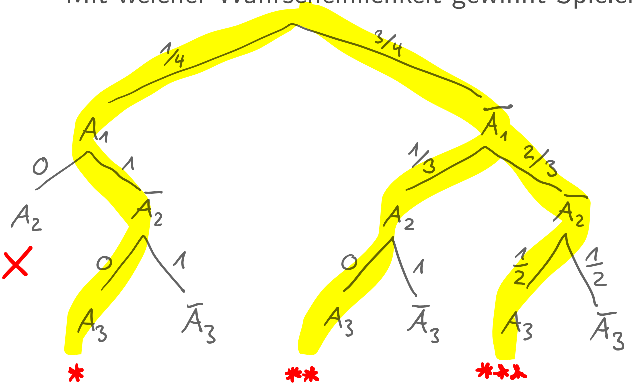
Um $P(C)$ zu berechnen...

- Berechne für die Pfade zu C die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i, B_j, C)$ mittels Aufmultiplizieren von der Wurzel bis zum jeweiligen Blatt.
- Summiere Wahrscheinlichkeiten dieser Pfade auf.

Totale Wahrscheinlichkeiten: Beispiel Bild: [4]

In einer Show ziehen drei Spieler nacheinander je einen von vier Umschlägen.
Drei Umschläge enthalten Nieten, einer den Hauptpreis (ein Auto).
Wir definieren $A_1/A_2/A_3 :=$ "Spieler 1/2/3 zieht das Auto".

- Skizzieren Sie den Ereignisbaum.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler 3 das Auto?



$$\begin{aligned}
P(A_3) &= P(A_1, \bar{A}_2, A_3) \; * \\
&\quad + P(\bar{A}_1, A_2, A_3) \; ** \\
&\quad + P(\bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3) \; *** \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 0 \; * \\
&\quad + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 \; ** \\
&\quad + \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{2} \; *** \; = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Totale Wahrscheinlichkeiten: Beispiel (cont'd)

Outline

Die Formel von Bayes Bild: [17]

Satz (Die Formel von Bayes)

Sei (Ω, Σ, P) ein Ereignisraum, $A \in \Sigma$ mit $P(A) \neq 0$, und $B_1, \ldots, B_n \in \Sigma$ eine Partitionierung von Ω. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$ (falls $P(B_i) \neq 0$):

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}$$

Warum ist die Formel von Bayes nützlich?

Oft kennen wir die Verteilung "in eine Richtung" $P(A|B_i)$ und wollen die Verteilung in die andere Richtung $P(B_i|A)$ ermitteln. Dies ist mit der Formel von Bayes direkt möglich.

Die Formel von Bayes: Beweis

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

Definition bedingte W'keit

Multipl. Satz

$$= \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{P(A)} \quad \checkmark$$

Die Formel von Bayes

Anmerkungen

- Laut der obigen Form der Bayes'schen Formel benötigen wir noch $P(A)$. Dies können wir mittels der totalen Wahrscheinlichkeit ermitteln: $\left(P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P(A|B_j)\right)$ und erhalten:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A|B_j)}$$

- Ein Spezialfall entsteht, falls statt der Partitionen $B_1, \ldots, B_n$ nur zwei Partitionen B, $\overline{B}$ existieren:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B}) + P(B) \cdot P(A|B)} \end{aligned}$$

Beispiel: Medizinischer Test [15]

Ein medizinischer Test soll entscheiden, ob eine Person mit Tuberkulose infiziert ist. Wir wissen, dass der Test in 99% der Fälle die korrekte Antwort liefert, sowohl für gesunde als auch für kranke Patienten. Man weiß außerdem, dass 0.1% der Bevölkerung infiziert sind. Eine Person lässt sich testen, der Test fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person in der Tat mit Tuberkulose infiziert ist?

- Ereignis K := "Person ist krank" *(=mit Tuberkulose infiziert)*
- Ereignis T := "Der Test schlägt an"

- $P(K) = 0{,}001$
- $P(T \mid K) = 0{,}99 = P(\bar{T} \mid \bar{K})$

Gesucht: $P(K \mid T)$

Bayes!

Beispiel: Medizinischer Test

$$P(K|T) = \frac{P(K)\cdot P(T|K)}{P(T)} \overset{?}{=} P(T,K) + P(T,\bar{K})$$

$$= \frac{P(K)\cdot P(T|K)}{P(K)\cdot P(T|K) + P(\bar{K})\cdot P(T|\bar{K})}$$

$$= \frac{0{,}001 \cdot 0{,}99}{0{,}001 \cdot 0{,}99 + (1-0{,}001)\cdot(1-0{,}99)}$$

$$= 9\,‰$$

Beispiel 2: Spam-Filter

Ist eine E-Mail Spam oder "echt" ("ham")?

- Wir definieren das Ereignis

$$S := \text{"Die Mail ist Spam"}$$

- Idee: Das Auftreten bestimmter Schlüsselworter (wie z.B. `viagra`) dient als Indikator für Spam-Mails. Wir definieren also das Ereignis

$$V := \text{"Die Mail enthält das Wort } \texttt{viagra} \text{"}$$

- 19% aller Spam-Mails (aber nur 1% der Ham-Mails) enthalten das Wort "viagra":

$$P(V|S) = 0.19 \text{ und } P(V|\bar{S}) = 0.01$$

- Wir wissen außerdem, dass 25% aller Mails SPAM sind:

$$P(S) = 0.25$$

Beispiel 2: Spam-Filter

Bauen Sie mit Hilfe der Bayes'schen Formel einen (einfachen) Spam-Filter:

- Berechnen Sie $P(S|V)$!
- Berechnen Sie $P(S|\bar{V})$!

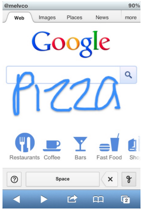
Beispiel 2: Spam-Filter

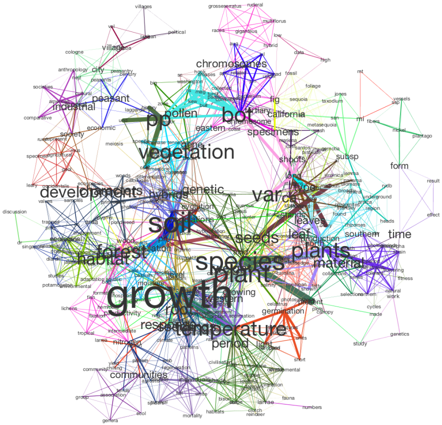
Spam-Filter: Ausblick

- Kommt "viagra" in der Mail vor, würde sich unser (sehr simpler) Filter also für "Spam" entscheiden, ansonsten nicht.
- In der Praxis stützen wir unsere Entscheidung nicht auf einen Begriff (`viagra`), sondern auf viele!
- Hierzu definieren wir einen Vokabular von Worten (oder *Termen*) $w_1, \ldots, w_m$ (z.B. `viagra`, `nigeria`, `dollar`, `Papa`, `Geburtstag`, ...). Dieser Vokabular kann in der Praxis tausende Worte umfassen und sich dynamisch ändern.

Bayes im *Machine Learning* Bilder: [18] [12] [14] [16]

- Die Bayes'sche Regel bildet im maschinellen Lernen die Grundlage vieler Modelle.
- Spam-Filter sind nur ein Beispiel: Es gibt zahlreiche andere Anwendungen.





References I

[1] A surface weather analysis for the United States on October 21, 2006.
https://en.wikipedia.org/wiki/Weather_map (retrieved: Oct 2016).

[2] Andreas Hopf: Fair Dice, View 2 (Cast galvanised iron fair dice, numbers engraved inlaid black).
https://flic.kr/p/5SunDf (retrieved: Nov 2016).

[3] DieWespe: HDR-HIT-ACTUAL.
https://flic.kr/p/qBV7S (retrieved: Nov 2016).

[4] kfant: Zonk (Ich wollte früher auch immer so einen haben :D).
https://flic.kr/p/yn1se (retrieved: Nov 2016).

[5] Lany Lane's Photo Stream: Envie de plein de chose.
https://flic.kr/p/bx7psH (retrieved: Nov 2016).

[6] Olli Henze: 4 Asse.
http://www.ohenze.de/ (retrieved: Nov 2016).

[7] Ulrica Törning: Yatzy.
https://flic.kr/p/84JVjL (retrieved: Nov 2016).

[8] Maurice de Bévère (Morris).
Die Dalton-Brüder.
In Lucky Luke, 1949.

[9] Sophie Feytaud.
Pierre Simon Laplace.
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20879 (retrieved: Nov 2016). This image appears identical t the cover image used by Gillispie et al. They cite the portrait as an 1842 posthumous portrait by Madame Feytaud, courtesy of the Académie des Sciences, Paris.

References II

[10] Erlangen Konrad Jacobs.
Richard von Mises.
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6995231 (retrieved: Nov 2016), http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=2896. CC BY-SA 2.0 de.

[11] Erlangen Konrad Jacobs.
Richard von Mises.
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11829175 (retrieved: Nov 2016), http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=7493. CC BY-SA 2.0 de.

[12] Microsoft.
Kinect Joy Ride Xbox 360 Game for Kinect.
https://www.microsoftstore.com/store/msusa/en_US/pdp/Kinect-Joy-Ride-Xbox-360-Game-for-Kinect/productID.253660600 (retrieved: Nov 2016).

[13] L. Papula.
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, volume 3.
Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 4 edition, 2001.

[14] J. Shotton, A. Fitzgibbon, M. Cook, T. Sharp, M. Finocchio, R. Moore, A. Kipman, and A. Blake.
Real-time Human Pose Recognition in Parts from Single Depth Images.
In Proc. CVPR, pages 1297–1304, 2011.

[15] G. Teschl and S. Teschl.
Mathematik Für Informatiker, volume 2 of eXamen.press.
Springer-Verlag, 2 edition, 2007.

[16] Tethne Tutorials.
Generating and Visualizing Topic Models with Tethne and MALLET.
http://diging.github.io/tethne/api/tutorial.mallet.html (retrieved: Nov 2016).

References III

[17] Unbekannt.
Thomas Bayes (vermutlich nicht authentisch).
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14532025 (retrieved: Nov 2016). Gemeinfrei.

[18] VeryPDF.
What is OCR (Optical Character Recognition)?
http://www.verypdf.com/pdf2txt/what-is-ocr2.htm (retrieved: Nov 2016).