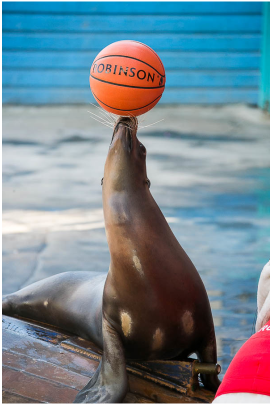
Echtzeitverarbeitung

R. Kaiser, K. Beckmann, R. Kröger

(HTTP: http://www.cs.hs-rm.de/~kaiser
EMail: robert.kaiser@hs-rm.de)

Sommersemester 2021

Hochschule RheinMain



https://www.stadtreporter.de/hannover/news/wirtschaft/robben-am-ball-ein-tierisch-sportlicher-geburtstag

Inhalt

Regelungstechnik-Grundlagen

Hochschule RheinMain

Grundlegende Einführung in die Regelungstechnik

- Grundbegriffe
  - Signal
  - System
  - Steuerung und Regelung
- Grundlagen der Systemtheorie
  - Differentialgleichung und Übergangsfunktion
  - Laplace-Transformation und Übertragungsfunktion
- Entwurf zeitkontinuierlicher Regler
  - Regelkreis
  - Klassische Regelalgorithmen
  - Stabilität
- Unstetige Regelung
- Fuzzy-Regler

Grundbegriffe: Signal

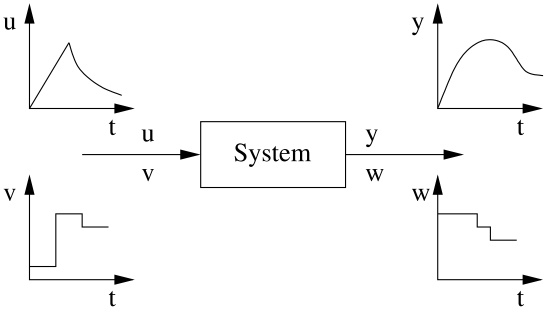
Hochschule RheinMain

Definition: Signal

Ein *Signal* ist eine sich zeitlich ändernde Größe, durch die eine Information ausgedrückt wird.

- Darstellung als Funktion der Zeit: $s(t)$
- Formen:
  - Zeit- und wertkontinuierlich: $t, s(t) \in \mathbb{R}$
    Beispiel: $s(t) = sin(2\pi ft)$
  - Wertkontinuierlich, zeitdiskret: $s(n) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
  - Zeit- und wertdiskret: $n, s(n) \in \mathbb{N}$
    Beispiel: $s = (1, 3, 4, 4, ...) \Rightarrow s(0) = 1,\ s(1) = 3,\ s(2) = 4,\ \ldots$
    $\rightarrow$ „Folge von Abtastwerten"
    $\rightarrow$ Verwendung in digitalen Regelungen

Grundbegriffe: System



- Zuordnung von Eingangs- zu Ausgangssignal
  z.B. $u(t) \rightarrow y(t)$
- **Rückwirkungsfrei** → Kein Einfluss von Ausgang auf Eingang

Statisches System

Hochschule RheinMain

- Der Wert der Ausgangsgröße zur Zeit t wird nur durch den Wert der Eingangsgröße zur selben Zeit t bestimmt:

$$y(t) = S(u(t))\ \forall t \in \mathbb{R}$$

→ System „ohne Gedächtnis"

- Beispiele:
  - Ohmscher Widerstand ($U = R \cdot I$)
  - Tabelle (`y = Tabelle[n];`)
- Math. Beschreibung durch Funktion: $y = S(u)$

Dynamisches System (2)

Hochschule RheinMain

- Der Wert der Ausgangsgröße zur Zeit t wird nur durch den bisherigen Verlauf der Eingangsgröße bis zur Zeit t bestimmt:

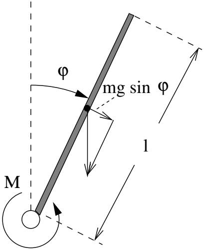
$$y(t) = S(u([-\infty, t]))$$

→ „Vorgeschichte" geht ein
(Aber *kausal*: Zukunft geht nicht ein)

- Mathematische Beschreibung durch Differentialgleichung
- Beispiel: Inverses Pendel
- Momentengleichgewicht

$$\Rightarrow M = \frac{l}{2} \cdot m \cdot g \cdot sin\phi - J \cdot \ddot{\phi}$$

- hier: $M(t) \mathrel{\widehat{=}} u(t)$, $\phi(t) \mathrel{\widehat{=}} y(t)$



Dynamisches System (2)

Hochschule RheinMain

Weitere Eigenschaften

- **Linear** → „Verzerrungsfrei"

$$\begin{aligned} \text{wenn: } y_1(t) &= S(u_1([-\infty, t])) \\ \text{und: } y_2(t) &= S(u_2([-\infty, t])) \\ \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) &= S(u_1([-\infty, t]) + u_2([-\infty, t])) \end{aligned}$$

(N.B.: daraus folgt auch: $k \cdot y(t) = S(k \cdot u([-\infty, t])) \; \forall \; k \in \mathbb{R}$)

- **Zeitinvariant**→ „unabhängig von absoluter Zeit"

$$\begin{aligned} \text{wenn: } y(t) &= S(u([-\infty, t])) \\ \text{dann: } y(t + t_0) &= S(u([-\infty, t + t_0])) \end{aligned}$$

- **Kausal** (s.o.) → „Keine Kenntnis über die Zukunft"

„LTI-System"(*linear time invariant*)

Der Weg zur Differentialgleichung

Hochschule RheinMain

	Vorgehen Allgemein	Am Beispiel inv. Pendel
1.	System in Komponenten zerlegen	Gewicht, Trägheit, Drehmoment
2.	Physikalische Gesetze für die Komponenten zusammenstellen	$F_g = m \cdot g \cdot \sin\phi$ $\Rightarrow M_g = F_g \cdot r = \frac{m \cdot g \cdot l}{2} \cdot \sin\phi$ $M_t = J \cdot \dot{\omega} = J \cdot \ddot{\phi}$
3.	Beziehungen zwischen den Komponenten aufstellen	Summe aller Momente ist Null: $M - M_g + M_t = 0 \Rightarrow M = M_g - M_t$
4.	Gleichungen zu einer DGL zusammenfassen	$M = \frac{m \cdot g \cdot l}{2} \cdot \sin\phi - J \cdot \ddot{\phi}$
5.	ggf. DGL linearisieren	für kleine ϕ gilt: $\phi \approx \sin\phi$ $\Rightarrow M \approx \frac{m \cdot g \cdot l}{2} \cdot \phi - J \cdot \ddot{\phi}$

Differentialgleichung: allgemeine Form

Hochschule RheinMain

Allgemeine Form der Differentialgleichung:

$$\ldots + a_3 \cdot \dddot{y} + a_2 \cdot \ddot{y} + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = \ldots + b_3 \cdot \dddot{u} + b_2 \cdot \ddot{u} + b_1 \cdot \dot{u} + b_0 \cdot u$$

- Grad der höchsten Ableitung: *Ordnung* des Systems
- Division durch a_0 und $T_i^n := \frac{a_i}{a_0}$, und $K_i^n := \frac{b_i}{a_0}$ ergibt:

$$\Rightarrow \ldots + T_3^3 \cdot \dddot{y} + T_2^2 \cdot \ddot{y} + T_1 \cdot \dot{y} + y = \ldots + K_3^3 \cdot \dddot{u} + K_2^2 \cdot \ddot{u} + K_1 \cdot \dot{u} + K_0 \cdot u$$

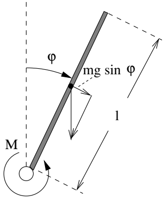
$\rightarrow$ **Die T_i und K_i haben die Dimension „Zeit" $\rightarrow$ *Zeitkonstanten***

Steuerung (1)

Hochschule RheinMain

Steuerung: offene Wirkungskette, keine Rückkopplung

- Ziel: Eingangssignal $u(t)$ so, dass das gewünschte Ausgangssignal $y(t)$ erzeugt wird
- Beispiel: invertiertes Pendel aufrichten
  - d.h.: $\phi \stackrel{!}{=} 0, \ \dot{\phi} \stackrel{!}{=} 0$
- Dabei Vorgaben:
  - Möglichst schnell
  - $M(t) \leq M_{max}$
- Gesucht: $M(t)$



$$M = \frac{l}{2} \cdot m \cdot g \cdot sin\phi - J \cdot \ddot{\phi}$$

Prinzipielles Vorgehen:

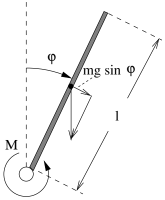
- $M(t)$ vorgeben
- Lösung der Differentialgleichung (s.o.) suchen
- ... nichtlineare DGL 2. Ordnung → heute nicht!

Steuerung (1)

Hochschule RheinMain

Steuerung: offene Wirkungskette, keine Rückkopplung

- Ziel: Eingangssignal $u(t)$ so, dass das gewünschte Ausgangssignal $y(t)$ erzeugt wird
- Beispiel: invertiertes Pendel aufrichten
  - d.h.: $\phi \overset{!}{=} 0,\ \dot{\phi} \overset{!}{=} 0$
- Dabei Vorgaben:
  - Möglichst schnell
  - $M(t) \leq M_{max}$
- Gesucht: $M(t)$



$$M = \frac{l}{2} \cdot m \cdot g \cdot sin\phi - J \cdot \ddot{\phi}$$

Prinzipielles Vorgehen:

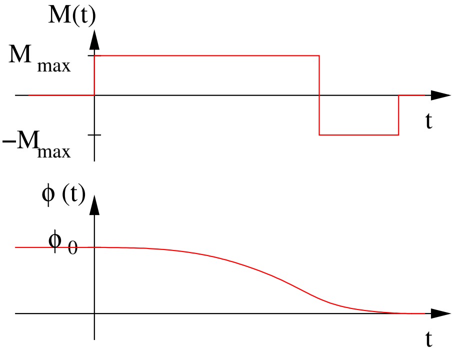
- $M(t)$ vorgeben
- Lösung der Differentialgleichung (s.o.) suchen
- ... nichtlineare DGL 2. Ordnung → heute nicht!

Steuerung (2)

Hochschule RheinMain

Intuitive Lösung:

1. Beschleunigen mit $M = M_{max}$
2. Rechtzeitig abbremsen mit $M = -M_{max}$



- Wann ist „rechtzeitig"?

Energieerhaltungssatz:

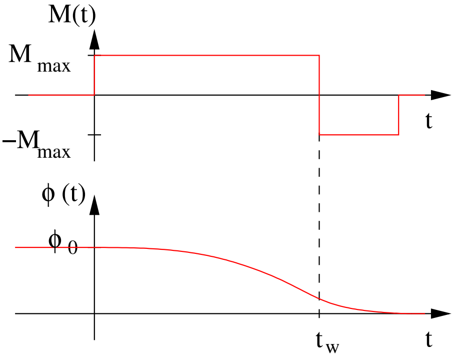
$$\phi_w = \frac{\phi_0}{2} - \frac{mgl}{4M_{max}} \cdot (1 - cos\phi_0)$$

Steuerung (2)

Hochschule RheinMain

Intuitive Lösung:

1. Beschleunigen mit $M = M_{max}$
2. Rechtzeitig abbremsen mit $M = -M_{max}$



- Wann ist „rechtzeitig"?

Energieerhaltungssatz:

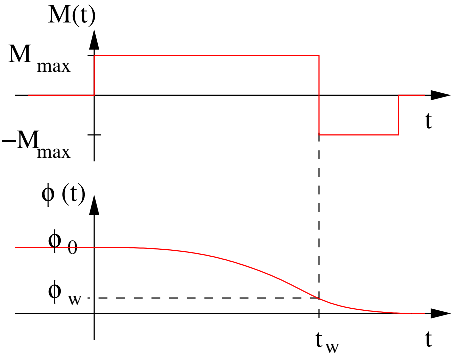
$\phi_w = \frac{\phi_0}{2} - \frac{mgl}{4M_{max}} \cdot (1 - cos\phi_0)$

Steuerung (2)

Hochschule RheinMain

Intuitive Lösung:

1. Beschleunigen mit $M = M_{max}$
2. Rechtzeitig abbremsen mit $M = -M_{max}$



- Wann ist „rechtzeitig"?

  Energieerhaltungssatz:

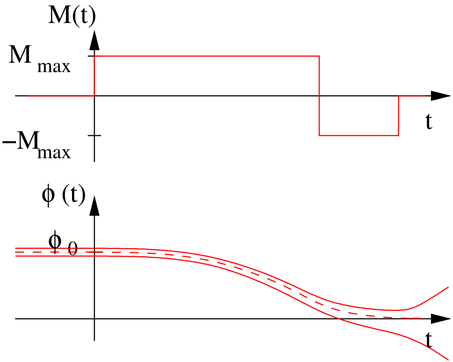
  $\phi_w = \frac{\phi_0}{2} - \frac{mgl}{4M_{max}} \cdot (1 - cos\phi_0)$

Steuerung (3)

Hochschule RheinMain

Bei Steuerung: Keine Rückkopplung

- Reagiert äußerst empfindlich auf kleinste Störungen bzw. Fehler:



- Beispiel
- Minimaler Fehler bei ϕ_0

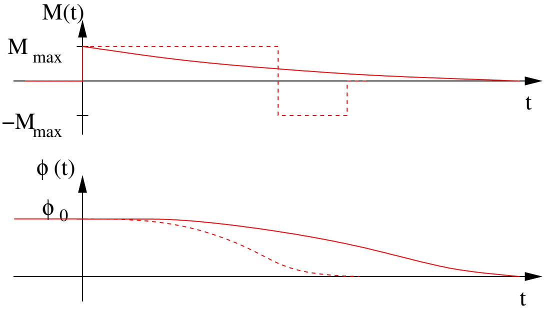
→ Aufrichten misslingt (Instabiles System)

Regelung

Stellgröße $M(t)$ aus $\phi(t)$ berechnen:

$$M(t) \quad = \quad a \cdot \phi(t) + b \cdot \dot{\phi}(t), \text{ wobei: } a \cdot \phi(0) + b \cdot \dot{\phi}(0) = M_{max}$$

- Je nach Wahl von a und b unterschiedliches Verhalten
- Gleichgewichtszustand wird erreicht, da $M(t) = 0$, nur wenn $\phi(t)$ und $\dot{\phi}(t) = 0$



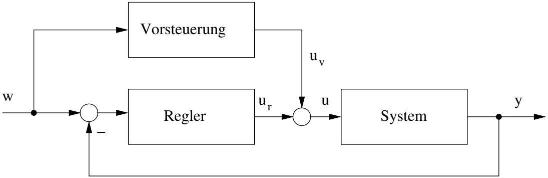
- Nachteil: Vorgang dauert länger

Kombination: Steuern + Regeln

Hochschule RheinMain

„Vorsteuerung":

- $u(t) = u_v(t) + u_r(t)$
- Vorsteuerung kann schnell das gewünschte Signal $y(t)$ einstellen
- (kleine) Fehler dabei werden durch die Regelung kompensiert



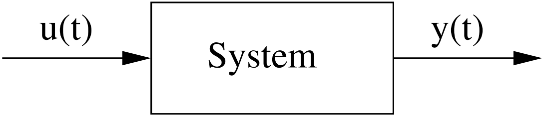
Kombiniert Vorteile von Steuerung und Regelung:

- schnell
- eigenstabil

Grundlagen der Systemtheorie

Hochschule RheinMain

Allgemein: System



- Eingangssignal $u(t)$
- Ausgangssignal $y(t)$
- Linear, zeitinvariant, kausal, rückwirkungsfrei (s.o)
- Kann durch eine Diffentialgleichung beschrieben werden (s.o)

Lösen der Differentialgleichung (1)

Hochschule RheinMain

Prinzipielles Vorgehen

- gegeben Differentialgleichung (s.o):

$$\ldots + T_3^3 \cdot \dddot{y} + T_2^2 \cdot \ddot{y} + T_1 \cdot \dot{y} + y = \ldots + K_3^3 \cdot \dddot{u} + K_2^2 \cdot \ddot{u} + K_1 \cdot \dot{u} + K_0 \cdot u$$

- Rechte Seite $= 0$ setzen $\rightarrow$ *homogene DGL*

$$\ldots + T_3^3 \cdot \dddot{y} + T_2^2 \cdot \ddot{y} + T_1 \cdot \dot{y} + y = 0$$

- Ansatz: $y = A \cdot e^{s \cdot t}$ $(\Rightarrow \dot{y} = A \cdot s \cdot e^{s \cdot t},\ \ddot{y} = A \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t},\ \ldots)$

$\rightarrow$ *Charakteristische Gleichung*:

$$\ldots + T_3^3 \cdot s^3 + T_2^2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1 = 0$$

- Hieraus kann s ermittelt werden $\rightarrow$ Lösung der homogenen DGL:

$$\Rightarrow y_{hom}(t) = A \cdot e^{s \cdot t}$$

Lösen der Differentialgleichung (2)

Hochschule RheinMain

- Spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$\ldots + T_3^3 \cdot \dddot{y} + T_2^2 \cdot \ddot{y} + T_1 \cdot \dot{y} + y = \ldots + K_3^3 \cdot \dddot{u} + K_2^2 \cdot \ddot{u} + K_1 \cdot \dot{u} + K_0 \cdot u$$

- Eingangsfunktion $u(t)$ muss bekannt sein
- Anfangsbedingungen (Werte für bestimmte Zeitpunkte) müssen bekannt sein
- Wähle Ansatz für $y_{inh}(t)$ entsprechend der rechten Seite der DGL.
- Gesamtlösung ist dann:

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_{inh}(t)$$

- Konstanten können aus Anfangsbedingungen bestimmt werden
- *Keine Panik! Beispiel folgt....*

Lösen der Differentialgleichung (2)

Hochschule RheinMain

- Spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$\ldots + T_3^3 \cdot \dddot{y} + T_2^2 \cdot \ddot{y} + T_1 \cdot \dot{y} + y = \ldots + K_3^3 \cdot \dddot{u} + K_2^2 \cdot \ddot{u} + K_1 \cdot \dot{u} + K_0 \cdot u$$

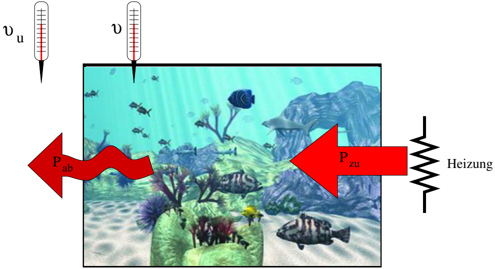
- Eingangsfunktion $u(t)$ muss bekannt sein
- Anfangsbedingungen (Werte für bestimmte Zeitpunkte) müssen bekannt sein
- Wähle Ansatz für $y_{inh}(t)$ entsprechend der rechten Seite der DGL.
- Gesamtlösung ist dann:

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_{inh}(t)$$

- Konstanten können aus Anfangsbedingungen bestimmt werden
- *Keine Panik! Beispiel folgt....*

Beispiel (1)

Hochschule RheinMain



$$
\begin{aligned}
P_{Heiz} &= P_{zu} - P_{ab} \\
\dot{\theta} &= \frac{P_{Heiz}}{C} = \frac{P_{Heiz}}{c_{H_2O} \cdot m} \\
P_{ab} &= R_{th} \cdot (\theta - \theta_u) \\
&= A \cdot K_{Glas} \cdot (\theta - \theta_u)
\end{aligned}
$$

Gegeben ein Aquarium mit:

- Volumen: $250l \rightarrow$ Masse $m = 250kg$
- Oberfläche: $A = 1.5m^2$
- Temperatur für $t = 0$: $\theta(0) =$ Umgebungstemperatur $\theta_U = 20^\circ C$
- Zugeführte Heizleistung für $t \geq 0$: $P_{zu} = 100W$

Gesucht: Temperaturverlauf $\theta(t)$ für $t \geq 0$

Beispiel (2)

Hochschule RheinMain

Materialparameter (aus Wikipedia):

- Spezifische Wärmekapazität von Wasser: $c_{H_2O} = 4,187 \cdot 10^3 \frac{J}{kg\ K}$
- K-Wert (Wärmedurchgangskoeffizient) von Glas: $K_{Glas} = 5,9 \frac{W}{m^2\ K}$

Aufstellen der DGL:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{P_{zu} - P_{ab}}{c_{H_2O} \cdot m} \\
&= \frac{1}{c_{H_2O} \cdot m} \cdot (P_{zu} - A \cdot K_{Glas} \cdot (\theta - \theta_u)) \\
\Rightarrow \frac{c_{H_2O} \cdot m}{A \cdot K_{Glas}} \cdot \dot{\theta} + \theta &= \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} + \theta_u \\
\Rightarrow \text{DGL 1. Ordnung, } T_1 &= \frac{c_{H_2O} \cdot m}{A \cdot K_{Glas}} = 118022,6s
\end{aligned}$$

Beispiel (3)

- Rechte Seite = 0 setzen → homogene DGL

$$T_1 \cdot \dot{\theta} + \theta = 0$$

- Ansatz: $\theta = \Theta_0 \cdot e^{s \cdot t}$ ($\Rightarrow \dot{\theta} = \Theta_0 \cdot s \cdot e^{s \cdot t}$)

→ Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} T_1 \cdot \Theta_0 \cdot s \cdot e^{s \cdot t} + \Theta_0 \cdot e^{s \cdot t} &= 0 \mid : \Theta_0 \cdot e^{s \cdot t} \\ \Rightarrow T_1 \cdot s + 1 &= 0 \\ \Rightarrow s &= -\frac{1}{T_1} \end{aligned}$$

→ Lösung der homogenen DGL:

$$\theta_{hom} = \Theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Beispiel (4)

- Spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$\begin{aligned} T_1 \cdot \dot{\theta} + \theta &= \theta_u + \begin{cases} \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \\ \theta_{inh} &= \theta_u + \begin{cases} \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Gesamtlösung:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_{hom} + \theta_{inh} \\ &= \Theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \theta_u + \begin{cases} \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiel (5)

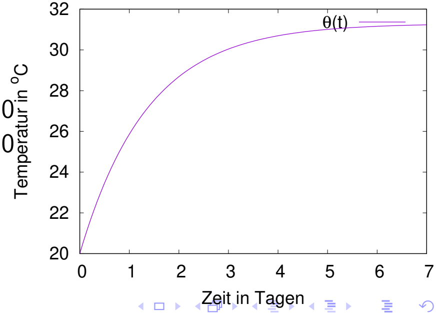
- Anfangsbedingungen: für $t \leq 0$ gilt: $\theta(t) = \theta_u$

$$\Rightarrow 0 = \Theta_0 + \begin{cases} \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Theta_0 = \begin{cases} -\frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

- Ergebnis („Sprungantwort"):

$$\theta = \theta_u + \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot \begin{cases} \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

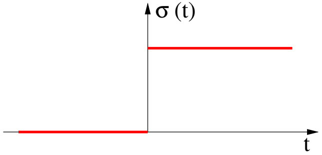


Spezielle Eingangsfunktionen

Hochschule RheinMain

- Anregung des Systems wird durch eine Eingangsfunktion (auch: „Störfunktion") beschrieben
- Im vorangegangenen Beispiel: *Sprungfunktion* $\sigma(t)$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



(**N.B.:** für $t = 0$ ist $\sigma(t)$ streng genommen undefiniert)

- Damit: Störfunktion ...

$$\theta_{inh} = \theta_u + \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} \cdot \sigma(t)$$

- ... und Sprungantwort des Beispielsystems:

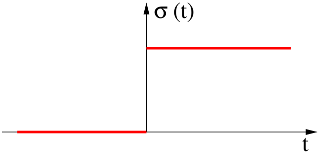
$$\theta = \theta_u + \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t)$$

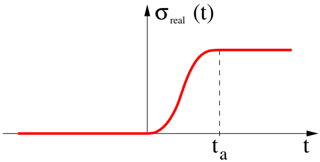
Sprungfunktion

Hochschule RheinMain

Technische Realisierbarkeit

- Unendlich schnelle Werteänderung nicht technisch realisierbar (Reale Signale sind **immer** stetig)





- Realistische Anstiegszeigen t_a
  - Elektronik: < 1 ns
  - Mechanik, Thermodynamik, etc. z.T. wesentlich größer

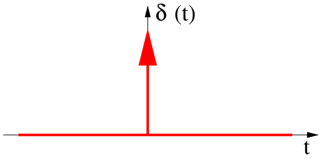
Bedeutung

- Sprungantwort eines Systems kann (innerhalb gegebener Grenzen) experimentell ermittelt werden
- Charakterisiert das dynamische Verhalten eines Systems

Impulsfunktion

Impulsfunktion $\delta(t)$ (auch: „Dirac-Impuls" oder „Dirac-Stoß")

- $\delta(t) = 0 \; \forall \; t \neq 0$
- für $t = 0$: unendlich hoher, unendlich schmaler Impuls der Fläche 1, d.h.: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
  - 1. Ableitung der Sprungfunktion: $\delta = \dot{\sigma}$



Bedeutung

- Eher theoretisches Konstrukt, technisch nicht realisierbar
- Enthält alle Frequenzen gleichermaßen
- Die „Eins der Laplace-Transformation" (s.u.)

Laplace-Transformation

Hochschule RheinMain

Definition

$$\mathcal{L}(y(t))(s) = Y(s) = \int_0^\infty y(t) \cdot e^{-st} dt$$

Schreibweise: $Y(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad y(t) \quad$ (→„$Y(s)$ korrespondiert zu $y(t)$")

- Umkehrbar eindeutige Abbildung von Funktionen im Zeitbereich in den Bildbereich („Laplace-Raum") mit s als neuer unabhängiger Variablen (s ist i.A. komplex: $s \in \mathbb{C}$, Dimension: Frequenz (Hz))
- Anwendbar auf Zeitfunktionen, die für $t < 0$ Null sind, d.h. $y(t) = y(t) \cdot \sigma(t) \; \forall \; t \in \mathbb{R}$
- Berechnung des Integrals ist i.d.R. nicht erforderlich, da es Korrespondenztabellen[1] gibt

Eigenschaften der $\mathcal{L}$-Transformation

Hochschule RheinMain

- Linearität, Skalierung und Verschiebung:

Überlagerungssatz:	$a \cdot u(t) + b \cdot v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a \cdot U(s) + b \cdot V(s)$
Ähnlichkeitssatz:	$u(a \cdot t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a} \cdot U\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebesatz:	$u(t - a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathrm{e}^{-as} \cdot U(s)$
Integration:	$\int_0^t u(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s} \cdot U(s)$

- Differentiation:

$$\dot{u}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s \cdot U(s) - u(0)$$

$$\ddot{u}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2 \cdot U(s) - s \cdot u(0) - \dot{u}(0)$$

$$\dddot{u}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^3 \cdot U(s) - s^2 \cdot u(0) - s \cdot \dot{u}(0) - \ddot{u}(0)$$

$$\ldots \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \ldots$$

$\mathcal{L}$-Transformation zum Lösen einer DGL (1)

Hochschule RheinMain

- Durch die Regel zur Differentiation werden Differentialgleichungen im Zeitbereich zu einfachen Gleichungen im Bildbereich:

$$T_1 \cdot \dot{y} + y = K_0 \cdot u \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad T_1 \cdot s \cdot Y(s) - y(0) + Y(s) = K_0 \cdot U(s)$$
$$\Rightarrow \quad Y(s) \cdot (T_1 s + 1) - y(0) = K_0 \cdot U(s)$$

- bzw. für $y(0) = 0$:

$$Y(s) \cdot (T_1 s + 1) = K_0 \cdot U(s)$$
$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_0}{T_1 s + 1} =: G(s)$$

- $G(s)$ heißt *Übertragungsfunktion* des Systems
- $G(s)$ liefert eine vollständige Beschreibung des Systems (Mit Ausnahme der Anfangszustände)

$\mathcal{L}$-Transformation zum Lösen einer DGL (2)

Hochschule RheinMain

- Aquariumsbeispiel (s.o.)

$$T_1 \cdot \dot{\theta} + \theta = K_0 \cdot \sigma(t) + \theta_u$$

(wobei (s.o) $T_1 = \frac{c_{H_2O} \cdot m}{A \cdot K_{Glas}}$ und $K_0 = \frac{P_{zu}}{A \cdot K_{Glas}}$)

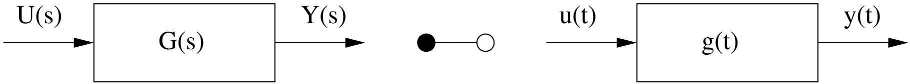
- Substitution: $y(t) := \theta(t) - \theta_u$ ($\Rightarrow \dot{y}(t) = \dot{\theta}(t)$)
- Damit DGL: $T_1 \cdot \dot{y} + y = K_0 \cdot \sigma(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\text{-Transformation:} \Rightarrow \quad & T_1\left(sY - y(0)\right) + Y = K_0 \cdot \frac{1}{s} \\
y(0) = 0 \Rightarrow \quad & Y = \frac{K_0}{T_1} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} \\
\mathcal{L}\text{-Rücktransformation:} \Rightarrow \quad & y(t) = \frac{K_0}{T_1} \cdot T1 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t)
\end{aligned}$$

- Rück-Substitution liefert gleiches Ergebnis wie oben:

$$\theta(t) = \theta_u + K_0 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t)$$

Übertragungsfunktion (1)



- Übertragungsverhalten eines Systems entspricht im Bildbereich einer Multiplikation mit der Übertragungsfunktion

$$\text{(s.o.)}\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

- Die Impulsfunktion $\delta(t)$ ist das „1-Element" der Laplace-Transformation, d.h. es gilt: $\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad 1$ (vgl. Korrespondenztabelle)

→ Bei Anregung mit einer Impulsfunktion antwortet das System mit seiner Übertragungsfunktion:

$$\text{Für } u(t) = \delta(t) \text{ gilt: } Y(s) = 1 \cdot G(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = g(t)$$

Übertragungsfunktion (2)

Hochschule RheinMain

- Für die Sprungantwort eines Systems gilt:

$$\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \text{für } u(t) = \sigma(t) \text{ gilt:}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

→ Die Sprungantwort ist das Integral über die Impulsantwort

→ Rückschluss auf die Übertragungsfunktion auch ohne „echten" Dirac-Impuls möglich

Übertragungsfunktion (3)

Hochschule RheinMain

- Die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems lässt sich als Quotient zweier Polynome darstellen:

$$
\begin{aligned}
\ldots + T_2^2\ddot{y} + T_1\dot{y} + y &= \ldots + K_2^2\ddot{u} + K_1\dot{u} + K_0 u \\
\mathcal{L} \Rightarrow Y(s)\cdot\left(\ldots + T_2^2 s^2 + T_1 s + 1\right) &= U(s)\cdot\left(\ldots + K_2^2 s^2 + K_1 s + K0\right) \\
\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) &= \frac{\ldots + K_2^2 s^2 + K_1 s + K_0}{\ldots + T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}
\end{aligned}
$$

- Dies lässt sich auch in *Nullstellenform* bringen::

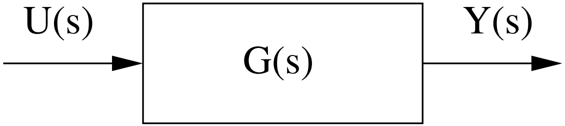
$$
G(s) = \frac{\ldots(s-\mu_2)\cdot(s-\mu_1)\cdot(s-\mu_0)}{\ldots(s-\lambda_2)\cdot(s-\lambda_1)\cdot(s-\lambda_0)}
$$

- Die λ_i sind die *Pole*, die μ_i die *Nullstellen* der Übertragungsfunktion

→ LTI-System kann auch durch Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion charakterisiert werden

Aggregation von Systemen

Hochschule RheinMain

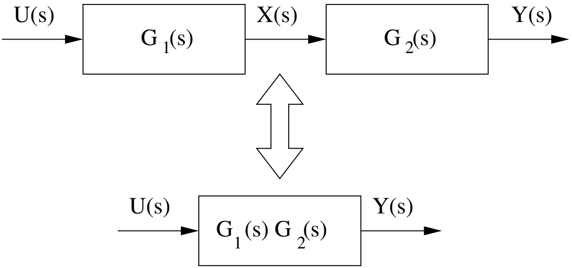


- (s.o.) Verhalten eines LTI-System kann durch seine Übertragungsfunktion $G(s)$ beschreiben werden

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

- LTI-Systeme können als Blöcke kombiniert werden..

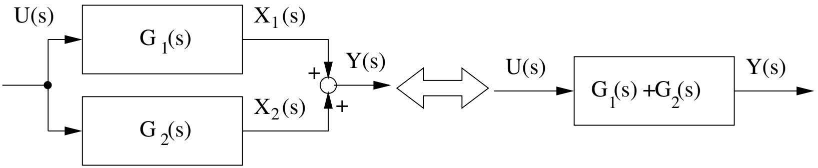
Serienschaltung



- Wegen Rückwirkungsfreiheit gilt:

$$\begin{aligned} X(s) &= U(s) \cdot G_1(s) \\ Y(s) &= X(s) \cdot G_2(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= U(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \end{aligned}$$

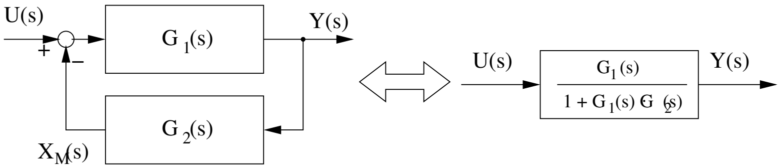
Parallelschaltung



- Addierschaltung:

$$
\begin{aligned}
X_1(s) &= U(s) \cdot G_1(s) \\
X_2(s) &= U(s) \cdot G_2(s) \\
\Rightarrow Y(s) &= U(s) \cdot (G_1(s) + G_2(s))
\end{aligned}
$$

Rückkopplung (Gegenkopplung)

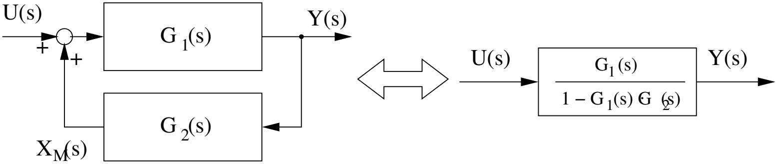


- Grundschaltung für Regelungen:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= E(s) \cdot G_1(s) \\
E(s) &= U(s) - X_M(s) \\
X_M(s) &= X(s) \cdot G_2(s) \\
\Rightarrow Y(s) &= U(s) \cdot \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}
\end{aligned}
$$

Rückkopplung (Mitkopplung)

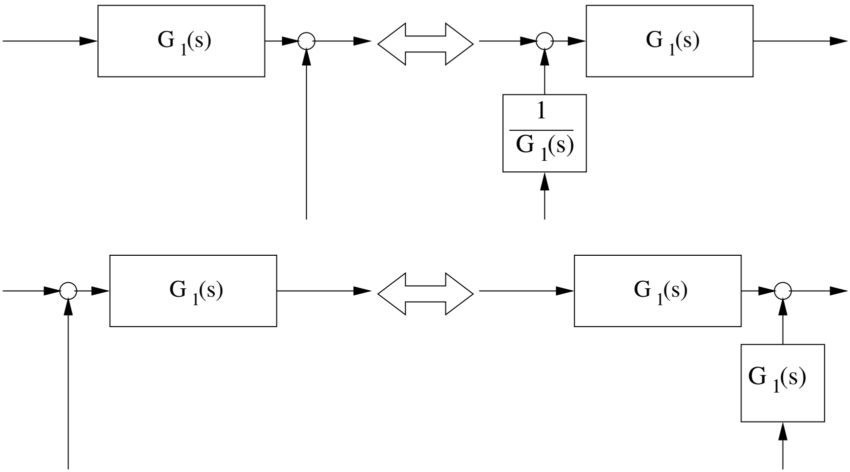
Hochschule RheinMain



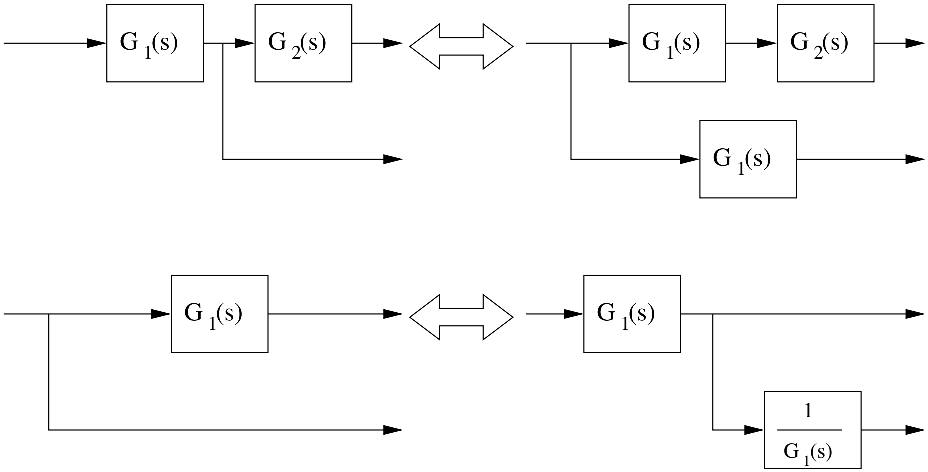
- Analog zu Gegenkopplung:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= E(s) \cdot G_1(s) \\
E(s) &= U(s) + X_M(s) \\
X_M(s) &= X(s) \cdot G_2(s) \\
\Rightarrow Y(s) &= U(s) \cdot \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_2(s)}
\end{aligned}
$$

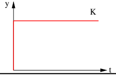
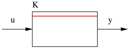
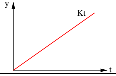
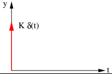
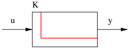
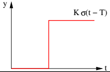
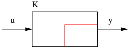
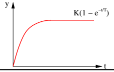
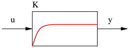
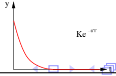
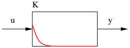
Verschieben von Summationsstellen



Verschieben von Verzweigungsstellen

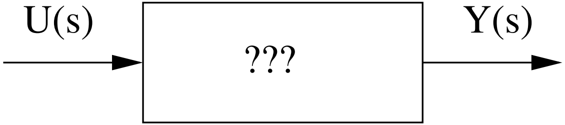


Wichtige Übertragungsfunktionen

Name	DGL	$G(s)$	SprungAW	Symbol
P-Glied	$y = K \cdot u$	K		
I-Glied	$y = K \cdot \int_0^\infty u(\tau) d\tau$	$\frac{K}{s}$		
D-Glied	$y = K \cdot \dot{u}$	$K \cdot s$		
TZ-Glied (T_t-Glied)	$y = K \cdot u(t - T)$	$K \cdot e^{-T \cdot s}$		
VZ_1-Glied (PT_1-Glied)	$T\dot{y} + y = K \cdot u$	$\frac{K}{1+Ts}$		
VD_1-Glied (DT_1-Glied)	$T\dot{y} + y = KT\dot{u}$	$\frac{KTs}{1+Ts}$		

Experimentelle Bestimmung der Ü-Fkt. (1)

Genaue physikale Zusammenhänge sind mitunter nicht bekannt



→ Es kann kein math. Modell des Systems aufgestellt werden

→ Vorgehen:

- Annahme eines (näherungsweise) passenden, parametrisierten Modells
- Ermitteln der Parameter durch Messungen im Zeitbereich

Experimentelle Bestimmung der Ü-Fkt. (2)

Hochschule RheinMain

- Viele praktische Systeme können durch ein Übertragungsglied 2. Ordnung (PT_2-Glied) approximiert werden.
- Normierte Übertragungsfunktion eines PT_2-Gliedes:

$$G_n(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

darin sind:

ω_0: Kennkreisfrequenz (Resonanzfrequenz) des Systems

ζ: Dämpfung des Systems

- Polstellen von $G_n(s)$ ...:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

... bestimmen das Zeitverhalten

Experimentelle Bestimmung der Ü-Fkt. (3)

Hochschule RheinMain

- Normierte Sprungantwort

→ Anregung mit $u(t) = \sigma(t) \bullet\!\!-\!\!\circ U(s) = \frac{1}{s}$:

$$Y_n(s) = G_n(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s}$$

- Laplace-Rücktransformation (längere Rechnung...)

für $\zeta \leq 1$:

$$y_n(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_0 t} \cdot \left(cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t) \right)$$

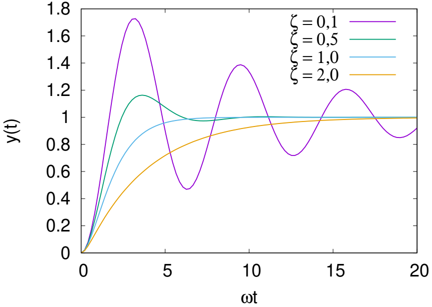
für $\zeta \geq 1$:

$$y_n(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_0 t} \frac{1}{2} \cdot \left((1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}) \cdot e^{-\sqrt{\zeta^2-1}\omega_0 t} + (1 + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}) \cdot e^{\sqrt{\zeta^2-1}\omega_0 t} \right)$$

Experimentelle Bestimmung der Ü-Fkt. (4)

Hochschule RheinMain

Sprungantwort eines Systems ist i.d.R. gut messbar



Mögliche Fälle:

- $\zeta < 0$: Instabil (System „explodiert")
- $\zeta = 0$: System schwingt ungedämpft (Mit Frequenz $F = \frac{\omega_0}{2\pi}$)
- $0 < \zeta < 1$: Abklingende Schwingung
- $\zeta = 1$: „Aperiodischer Grenzfall"
- $\zeta > 1$: Strebt gegen Endwert, keine Schwingung

Vorgehen:

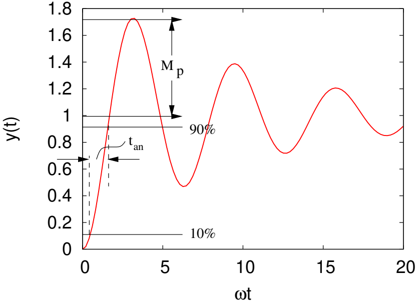
- Messen der Sprungantwort
- Ermitteln der Parameter (ζ, ω_0, Skalierfaktor)

Oft genügen schon ungenaue Werte als Anhaltspunkte

Experimentelle Bestimmung der Ü-Fkt. (5)

Hochschule RheinMain

Faustregeln ...



Faustformeln:

($t_s =$ Ausregelzeit für $\epsilon = 0.05$)

- $\zeta \approx sin\left(arctan\left(\frac{1}{\pi} ln \frac{1}{M_p}\right)\right)$
- $\omega_0 \approx \frac{3}{\zeta \cdot t_s}$
- Wert für $t \to \infty$: $e_\infty \Rightarrow$ Proportionalfaktor: $K = \frac{1}{e_\infty} - 1$

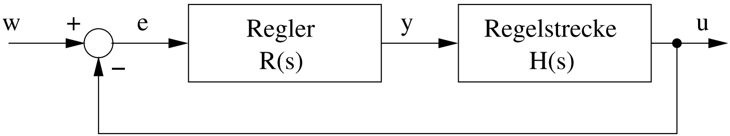
Damit nicht-normierte Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$$

Entwurf zeitkontinuierlicher Regler

Hochschule RheinMain

Allgemeine Reglerstruktur:



Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{R(s)H(s)}{1 + R(s)H(s)}$$

Idealziel:

- Entwurf eines Reglers so dass gilt: $e(t) = 0 \; \forall t$
- Kein Einfluss von Störungen auf Regel- und Messgrößen

Theoretisch erreichbar durch $|R(s)| \to \infty \Rightarrow G(s) \to 1$

Gütekriterien

Hochschule RheinMain

Beschränkung auf erreichbare Forderungen

- Der Regelkreis soll stabil bleiben und nicht schwingen
- Der Regelkreis soll der Führungsgröße $w(t)$ unabhängig von äußeren Störeinflüssen möglichst schnell und genau folgen
(→ er soll gutes „*Führungsverhalten*" zeigen)

Gütekriterien:

1. Stabilität
2. Schnelligkeit
3. Genauigkeit

Gütekriterien

Beschränkung auf erreichbare Forderungen

- Der Regelkreis soll stabil bleiben und nicht schwingen
- Der Regelkreis soll der Führungsgröße $w(t)$ unabhängig von äußeren Störeinflüssen möglichst schnell und genau folgen
(→ er soll gutes „*Führungsverhalten*" zeigen)

Gütekriterien:

1. Stabilität
2. Schnelligkeit
3. Genauigkeit

Im Folgenden näher betrachtet

Stabilität

Hochschule RheinMain

Definition: E/A-Stabilität (Auch: „BIBO$^{(*)}$-Stabilität")

Ein LTI-System heißt E/A-stabil, wenn für verschwindende Anfangswerte $x^{(i)} = 0$ und ein beschränktes Eingangssignal:

$$|w(t)| \quad < \quad w_{max} \; \forall \; t > 0$$

das Ausgangssignal beschränkt bleibt:

$$|u(t)| \quad < \quad u_{max} \; \forall \; t > 0$$

Anders ausgedrückt:

- Ein System ist stabil, wenn zu einer beschränkten Eingangsgröße eine beschränkte Ausgangsgröße gehört

$^{(*)}$(BIBO: Bounded Input Bounded Output)

Asymptotische Stabilität (1)

Hochschule RheinMain

Definition: Asymptotische Stabilität

Ein LTI-System heißt asymptotisch stabil, wenn seine Ausgangsvariable $u(t)$ mit der Zeit eindeutig nach Null strebt bei einer ebenfalls nach Null strebenden Eingangsvariable $w(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \quad \text{wenn} \quad \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$$

- D.h. ein asymptotisch stabiles System kehrt nach Abklingen einer Störung in seinen Ruhezustand zurück

Bedingung:

- Ein System ist asymptotisch stabil wenn die Pole (=Nullstellen des Nenners der Übertragungsfunktion) einen negativen Realteil haben.

Asymptotische Stabilität (2)

Hochschule RheinMain

Beispiel PT$_2$-Glied (s.o.)

- Normierte Übertragungsfunktion:

$$G_n(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

Wobei: $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$ (Polstellen von $G_n(s)$)

→ Instabil für $\zeta < 0$

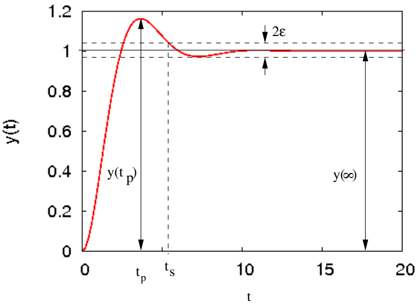
→ Stabil für $0 < \zeta < 1 \Rightarrow \Re\{\lambda_{1,2}\} = -\zeta\omega_0 < 0$

→ Stabil für $\zeta > 1$ da $\sqrt{\zeta^2 - 1} < \zeta$

Weitere Kriterien (Hurwitz-, Routh-, Nyquist,- Phasenrand-) hier nicht behandelt →[Lunze],[Wörn/Brinkschulte]

Dynamisches Verhalten (1)

- Zur Spezifikation von **Stabilität** und **Schnelligkeit**: Betrachte Sprungantwort
- „relative Stabilität” oder Stabilitätsgüte: Sprungantwort soll möglichst schnell auf stationären Wert gehen
- wichtige Maße: Überschwingweite M_p, Ausregelzeit t_s



- $M_p = \frac{y(t_p)}{y(\infty)}$

→ Überschwingen (*overshoot*): $M_o = M_p - 1$, $\ddot{u}(\%) = 100 \cdot M_o$

Dynamisches Verhalten (2)

Genauigkeit: Integralkriterien, z.B.:

- „ISE"-Kriterium (*integral of squared error*)

$$Q_1 = \int_0^\infty (1 - y(t))^2 \, dt$$

- „IAE"-Kriterium (*integral of absolute error*)

$$Q_2 = \int_0^\infty |1 - y(t)| \, dt$$

Neben den hier vorgestellten, anwendungsunabhängigen Verfahren werden in der Praxis auch anwendungsabhängige Kriterien verwendet (z.B. „Benchmarkbahnen" bei Robotern)

PID-Regler

Hochschule RheinMain

- In der Praxis i.d.R. kein Entwurf neuer Reglertypen
- Stattdessen Anpassen eines Standardreglers, so dass Gütekriterien (s.o.) erfüllt sind
- Am häufigsten verwendet: *PID*-Regler:
  - **P**ropotional-Anteil
  - **I**ntegral-Anteil
  - **D**ifferenzial-Anteil

PID-Regler: P-Anteil

Hochschule RheinMain

- P-Anteil: Stellgröße $y(t)$ Proportional zur Regeldifferenz $e(t)$
- Faktor (Verstärkung): K_p

⇒ Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{R(s)H(s)}{1 + R(s)H(s)} = \frac{K_p H(s)}{1 + K_p H(s)}$$

- Da für reale Regelstrecke i.A. gilt: $K_p H(s) > 0$ ist $|G(s)| < 1$, also $U(s) \neq W(s)$

→ Problem: Bleibende Regelabweichung

→ Regler **muss** um einen I-Anteil erweitert werden.

PID-Regler: PI-Anteil

Hochschule RheinMain

- Übertragungsfunktion eines PI-Reglers mit Nachstellzeit T_N:

$$R(s) \quad = \quad K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_N s}\right)$$

- <u>Keine</u> bleibende Regelabweichung
- **Aber:** Regelung reagiert langsam
- Abhilfe: Änderungen der Regeldifferenz $e(t)$ stärker betonen

→ Regler um einen D-Anteil erweitern.

PID-Regler und PD-Regler

- Allgemeine Übertragungsfunktion eines PID-Reglers:

$$R(s) \quad = \quad K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_v s\right)$$

- Falls höhere Verstärkung erforderlich und einfaches Erhöhen von K_p zur Instabilität führt: **PD**-Regler:

$$R(s) \quad = \quad K_P \cdot (1 + T_v s)$$

P & I Qualitativ

Hochschule RheinMain

P-Glied

- Verändert Stellsignal proportional zu Regeldifferenz
  („Je größer die Abweichung desto größer die Stellgröße")
- Verstärkungsfaktor K_p bestimmt Regelgeschwindigkeit
  („ Je höher desto schneller")
- Zu hoher Verstärkungsfaktor führt zu Instabilität
- Es bleibt eine dauerhafte Regeldifferenz

I-Glied

- Integriert die Regeldifferenz
  („Solange Regelabweichung → Stellgröße verändern")
- Regeldifferenz wird immer ausgeregelt
- Kann zu Instabilität führen

D Qualitativ

Hochschule RheinMain

D-Glied

- Differenziert die Regeldifferenz
  („Je stärker die Änderung der Regelabweichung desto stärker muss Stellgröße verändert werden")
- Verbessert i.d.R. Regelgeschwindigkeit und dynamische Regelabweichung
- Verstärkt besonders hochfrequente Anteile (Rauschen)
  → Neigung zum Schwingen

Einstellregeln für PID-Regler (1)

Hochschule RheinMain

Methode nach Ziegler und Nichols

1. Zunächst reiner P-Regler mit minimalem K_p
2. K_p erhöhen, bis ungedämpfte Schwingungen ausgeführt werden (→ Stabilitätsgrenze und krit. Verstärkung K_{pkr} erreicht)
3. Schwingungsdauer T_{kr} bei krit. Verstärkung messen

Dann Regelparameter:

P-Regler	$K_p = 0,5 K_{pkr}$
PI-Regler	$K_p = 0,45 K_{pkr}$
	$T_N = 0,85 T_{kr}$
PID-Regler	$K_p = 0,6 K_{pkr}$
	$T_N = 0,5 T_{kr}$
	$T_V = 0,12 T_{kr}$

Einstellregeln für PID-Regler (2)

Hochschule RheinMain

Weitere Verfahren

- Kompensationsreglerentwurf
- T-Summen Einstellverfahren
- Einstellregel von Chien, Hrones und Reswick (CHR)

Hier nicht weiter vertieft→[Wörn/Brinkschulte]

Unstetige Regelung

Hochschule RheinMain

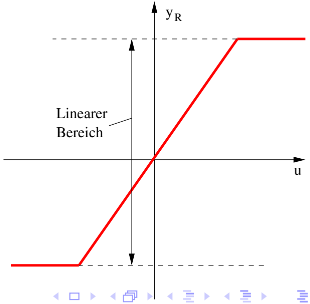
Statische Kennlinie eines Reglers

- Beschreibt das Übertragungsverhalten für statische (d.h. konstante) Signale
- Entsteht aus DGL durch Nullsetzen aller Ableitungen:

$$\begin{aligned} \ldots T_2^2 \cdot \ddot{y} + T_1 \cdot \dot{y} + y &= \ldots + K_2^2 \cdot \ddot{u} + K_1 \cdot \dot{u} + K_0 \cdot u \\ \Rightarrow y_R &= K_0 \cdot u \end{aligned}$$

Stetige Regler

- Bisher betrachtete Regler: Statische Kennlinie ist eine stetige Funktion
- Voraussetzung für LTI-System: statische Kennlinie ist zudem (zumindest stückweise) linear

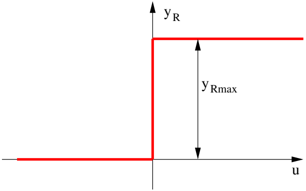


Unstetige Regelung

Hochschule RheinMain

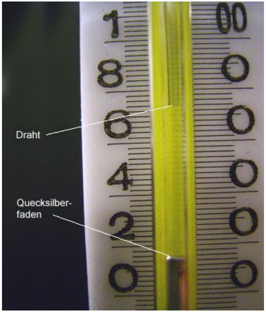
Dagegen unstetiger Regler

- Einfachste Form: *Zweipunktregler*
- Nur zwei diskrete Zustände
  1. Regeldifferenz $> 0 \rightarrow$ Ein
  2. Regeldifferenz $\leq 0 \rightarrow$ Aus



Technische Realisierung...

- ... ist denkbar einfach ...
  (z.B. Bimetallschalter, Kontaktthermometer, Relais, ...)
- ... und damit preiswert.



Zweipunktregler

Hochschule RheinMain

Einfachster unstetiger Regler

- Wohl der am weitesten verbreitete Regler (da einfach und billig)
- Zahlreiche Anwendungsbeispiele
  Kühlschrank, Bügeleisen, Heizkörperventil,
  Lichtmaschinen-Reglerschalter, ...

Hauptnachteil:

- Istwert pendelt ständig um den Sollwert
- Bei einfachen Systemen kein Problem
- Durch geeignete Maßnahmen (Meßgenaugkeit) lässt sich die Pendelamplitude sehr weit reduzieren

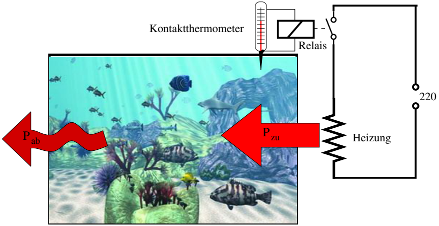
$\rightarrow$ Dann auch für komplexere Anwendungen nutzbar

- Dann ist aber auch der Preisunterschied zu stetigen Reglern nicht mehr groß

Zweipunktregler ohne Hysterese

Hochschule RheinMain

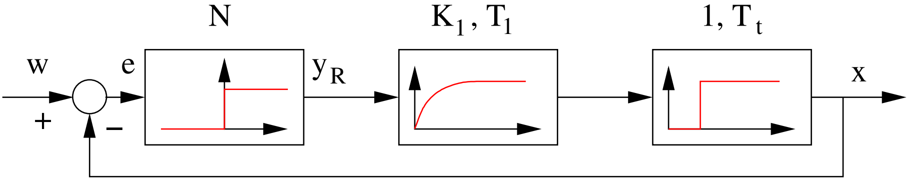
Beispiel: Aquarium (s.o.)



$$x = K_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t)$$

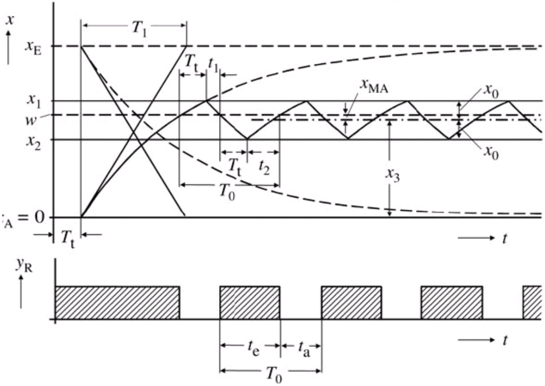
- Modellierung der Thermometer-Trägheit durch Laufzeit T_t
- Annahme: Thermometer-Schaltpunkt in beide Richtungen gleich

Modell:



Temperaturverlauf (1)

Hochschule RheinMain



[a]

- Inbetriebnahme bei $t = 0$
- Solltemperatur w
- Anfangstemperatur x_A
- Endtemperatur x_E

[a] Aus [Zacher/Reuter]

→ Periodische Temperaturschwankung um Mittelwert x_3 ($\neq w$!)

→ Amplitude der Schwankung x_0, Mittelwertabweichung x_{MA}

Temperaturverlauf (2)

Hochschule RheinMain

Schwankungsamplitude x_0

- x_1, x_2: oberer/unterer Grenzwert

$$x_1 = w + (x_E - w) \cdot (1 - e^{-\frac{T_t}{T_1}}) \quad , \quad x_2 = w \cdot e^{-\frac{T_t}{T_1}}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_0 = x_1 - x_2 = x_E \cdot (1 - e^{-\frac{T_t}{T_1}})$$

N.B: hängt nicht von w ab

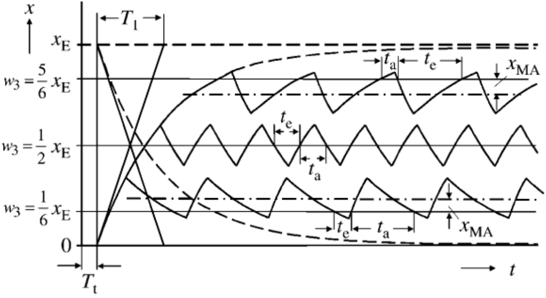
Mittelwert x_3 und Mittelwertabweichung x_{MA}

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_E \cdot (1 - e^{-\frac{T_t}{T_1}}) + 2w \cdot e^{-\frac{T_t}{T_1}} \right)$$

$$x_{MA} = w - x_3 = \left(w - \frac{x_E}{2} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_t}{T_1}} \right)$$

Temperaturverlauf (3)

Hochschule RheinMain



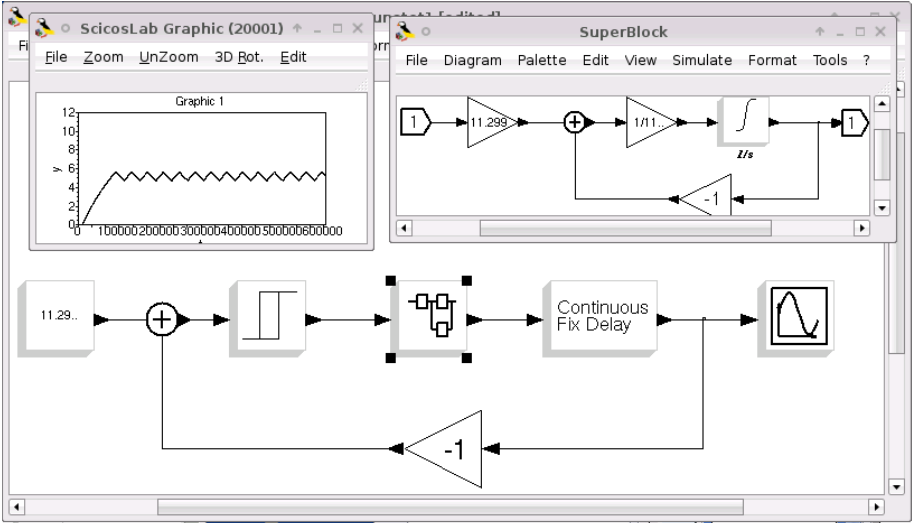
[a]

- Kurvenform ist sollwertabhängig
- Für $w = \frac{x_E}{2} \rightarrow x_{MA} = 0$ *Symmetrischer Betrieb*
- Dann: $t_e = t_a = T_t$

[a] Aus [Zacher/Reuter]

→ Schwingungsdauer im symmetrischen Betrieb:
$T_0 = 2t_e + 2t_a = 4T_t$

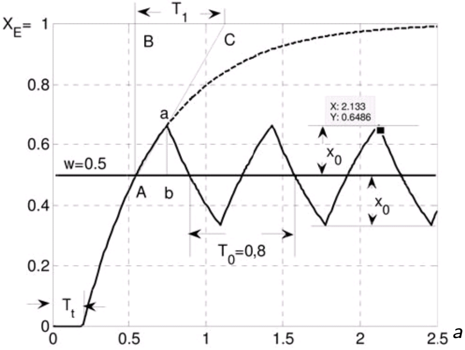
Modell in SciCosLab



Linearisierung

Hochschule RheinMain

Für kleine x_0: Annähernd lineare Verläufe



[a]

- Dreiecke ABC und Aab sind ähnlich

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{Ab}} \Rightarrow \frac{\frac{x_E}{2}}{T_1} = \frac{x_0}{T_t}$$

$\Rightarrow$ Faustformel:

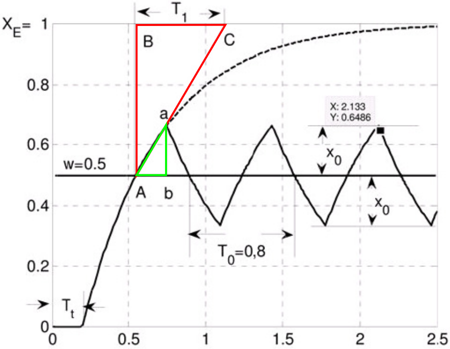
$$x_0 \approx \frac{x_e}{2} \cdot \frac{T_t}{T_1}$$

[a] Aus [Zacher/Reuter]

Linearisierung

Hochschule RheinMain

Für kleine x_0: Annähernd lineare Verläufe



[a]

- Dreiecke ABC und Aab sind ähnlich

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{Ab}} \Rightarrow \frac{\frac{x_E}{2}}{T_1} = \frac{x_0}{T_t}$$

$\Rightarrow$ Faustformel:

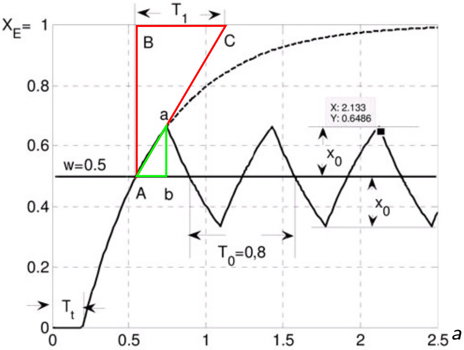
$$x_0 \approx \frac{x_e}{2} \cdot \frac{T_t}{T_1}$$

[a] Aus [Zacher/Reuter]

Linearisierung

Hochschule RheinMain

Für kleine x_0: Annähernd lineare Verläufe



[a]

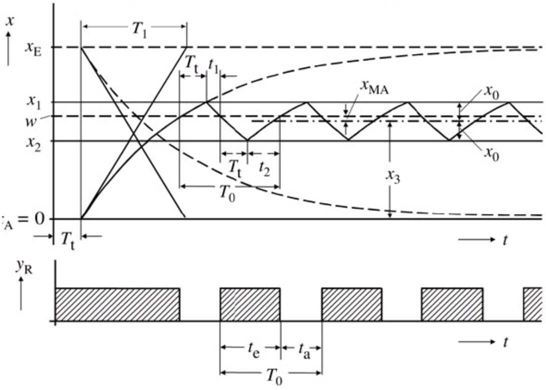
- Dreiecke ABC und Aab sind ähnlich $\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{Ab}} \Rightarrow \frac{\frac{x_E}{2}}{T_1} = \frac{x_0}{T_t}$

$\Rightarrow$ Faustformel:

$$x_0 \approx \frac{x_e}{2} \cdot \frac{T_t}{T_1}$$

[a] Aus [Zacher/Reuter]

Schaltfrequenz und Schwingdauer (1)



[a]

- Schwingdauer
  $T_0 = 2T_t + t_1 + t_2$
- Ausserdem $w = x_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$
- und (s.o.):
  $x_1 =$
  $w + (x_E - w) \cdot (1 - e^{-\frac{T_t}{T_1}})$

[a] Aus [Zacher/Reuter]

→ ... (längere Rechnung): $t_1 = T_1 \cdot ln\left(\frac{x_E}{w} + \left(1 - \frac{x_E}{w}\right) \cdot e^{-\frac{T_t}{T_1}}\right)$

Schaltfrequenz und Schwingdauer (2)

- Analog für t_2:

$$
\begin{aligned}
w - x_2 &= (x_e - x_2)(1 - e^{-\frac{t_2}{T_1}}) \\
e^{-\frac{t_2}{T_1}} &= 1 - \frac{w - x_2}{x_E - x_2} = \frac{x_E - w}{x_E - x_2} \\
\Rightarrow t_2 &= R_1 \cdot ln \frac{x_E - x_2}{x_E - w}
\end{aligned}
$$

- mit (s.o. $x_2 = w \cdot e^{-\frac{T_t}{T_1}}$:

$$
t_2 = T_1 \cdot ln \frac{x_E - w \cdot e^{-\frac{T_t}{T_1}}}{x_E - w}
$$

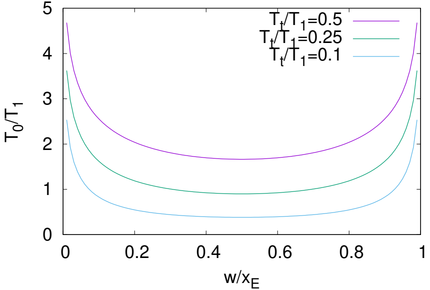
$$
\Rightarrow T_0 = 2T_t + T_1 \cdot ln \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{w}{x_E}} - e^{-\frac{T_t}{T_1}} \right) \cdot \left(\frac{x_E}{w} - e^{-\frac{T_t}{T_1}} \right) \right]
$$

Schaltfrequenz und Schwingdauer (3)

Hochschule RheinMain

Abhängigkeit der Schwingdauer vom Sollwert:

- Für $w = \frac{x_E}{2}$ ist unabhängig von T_t Schwingdauer minimal, d.h. die Schaltfrequenz maximal
- Vernünftiger Regelbereich etwa $0,2x_E < w < 0,8x_E$



- Für $T_t \to 0$ wird die Schwankungsbreite 0

$\Rightarrow$ Totzeit sollte minimiert werden

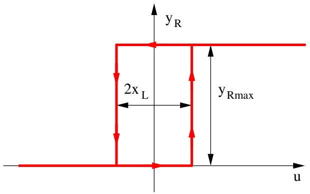
- Allerdings wird dann auch $T_0 = 0$, d.h. die Schaltfrequenz wird unendlich
- Mechanische Kontakte stoßen hier schnell an Grenzen

Zweipunktregler mit Hysterese

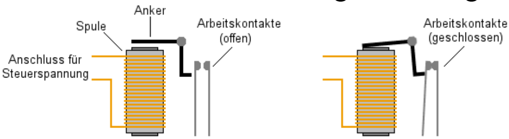
Hochschule RheinMain

Hysterese

- Reale Zweipunktregler sind stets Hysterese-behaftet
- Im Gegensatz zum Idealfall ohne Hysterese **zwei** Schaltschwellen:
  1. Einschalten bei $x = +x_L$
  2. Abschalten bei $x = -x_L$



- Entsteht z.B. durch Restmagnetisierung bei Relais:

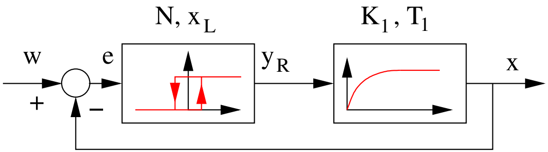


- Einschaltstrom ist höher als Abschaltstrom

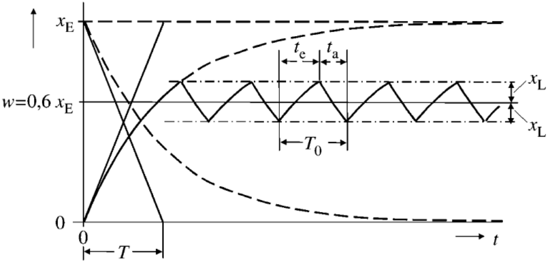
Beispiel: Aquarium (s.o.)

Hochschule RheinMain

Modell:



Temperaturverlauf:



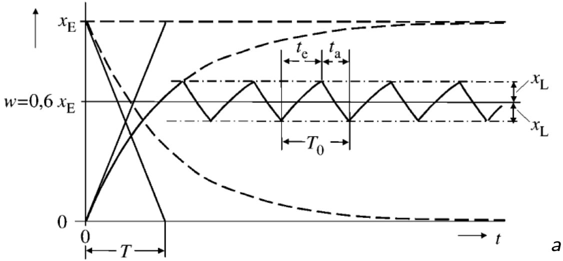
a

- Inbetriebnahme bei $t = 0$
- Anfangstemperatur 0
- Endtemperatur x_E
- Solltemperatur $0 \leq w \leq x_E$

[a] Aus [Zacher/Reuter]

Temperaturverlauf

Hochschule RheinMain



a

→ Periodische Schwankung

- **Symmetrisch** um Sollwert w

→ Amplitude: $2x_L$

[a] Aus [Zacher/Reuter]

- Schwingdauer und Frequenz:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_L &= (x_E - w + x_L) \cdot (1 - e^{-\frac{t_e}{T}}) \\ \Rightarrow t_e &= T \cdot ln \frac{x_E - w + x_L}{x_E - w - x_L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w - x_L &= (w + x_L) \cdot e^{-\frac{t_a}{T}} \\ \Rightarrow t_a &= T \cdot ln \frac{w + x_L}{w - x_L} \end{aligned}$$

⇒ t_e, t_a proportional zu T, für $w = \frac{x_E}{2}$ ist $t_a = t_e$

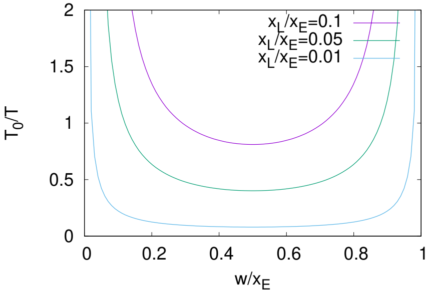
Schwingdauer und Frequenz (1)

Hochschule RheinMain

- Schwingdauer $T_0 = t_e + t_a$

$$\Rightarrow T_0 = T \cdot \left(ln\frac{x_E - w + x_L}{x_E - w - x_L} + ln\frac{w + x_L}{w - x_L} \right)$$

- Für $w = \frac{x_E}{2}$ ist die Schwingdauer minimal, d.h. die Schaltfrequenz maximal
- Vernünftiger Regelbereich etwa $0,2x_E < w < 0,8x_E$



Schwingdauer und Frequenz (2)

Hochschule RheinMain

- Ziel für möglichst kleine Schwingungsbreite: kleine Hysterese
- Allerdings wird für $x_L \to 0$ die Schwingungsdauer $T_0 \to 0$, d.h. die Schwingungsfrequenz $f_0 = \frac{1}{T_0} \to \infty$
- Die maximale Frequenz ergibt sich bei $w = \frac{x_E}{2}$, dann gilgt

$$T_{0min} = T \cdot 2 \cdot ln\frac{0,5x_E + x_L}{0,5x_E - x_L} = 2Tln\frac{1+2\frac{x_L}{x_E}}{1-2\frac{x_L}{x_E}}$$

- Näherung (Reihenentwicklung) für $\frac{2x_L}{x_E} \ll 1$:

$$T_{0min} \approx 2 \cdot T \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{x_L}{x_E} = 8T \cdot \frac{x_L}{x_E}$$

- Maximale Schaltfrequenz:

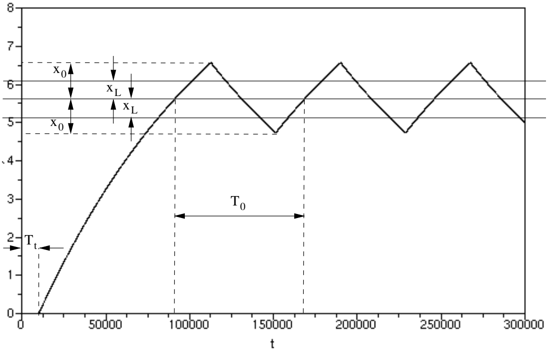
$$f_{0max} \approx \frac{x_E}{8Tx_L}$$

- Exakte Werte durch Simulation ...

Simulation

Hochschule RheinMain

- Simulation in Scicos: Aquarium mit Hysterese ($x_L = 0.5 \cdot x_E$) **und** Totzeit $T_t = 10000$



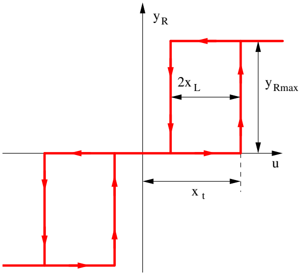
- Daraus abgelesen:
  - $T_0 = 168.100 - 91.490 = 76.600s$
  - $2x_0 = 6,6^\circ C - 4,7^\circ C = 1.9^\circ C$

Dreipunktregler

Hochschule RheinMain

- Zweipunktregler sind für Stellglieder mit Motorantrieb nicht gut geeignet (keine Möglichkeit zur Richtungsumkehr)

- Daher: *Dreipunktregler*
- Weiterer Vorteile:
- Ruhezustand ohne Dauerschwingen ist möglich
- „Abgestufte" Reaktion



Dreipunktregler: Statische Kennlinie

Motivation

Hochschule RheinMain

Vorgehensweise bisher:

- Eigenschaften der Regelstrecke bestimmen
  (z.B. experimentell aus SPrungantwort oder durch Modellierung)
- Wahl eines Reglers (z.B. PID), Festlegung seiner Anforderungen (Überschwingen, Ausregelzeit)
- Simulation, Optimierung, Test

Probleme dabei:

- Eigenschaften der Regelstrecke sind nicht immer konstant und nicht einfach zu berücksichtigen
- „Experten” können das System dennoch beherrschen

→ **Frage:** Wie kann man Expertenwissen auf Regler übertragen?

Regelbasis

Hochschule RheinMain

Beispiel:

- Der Bremsweg eines Zuges hängt ab von Beladung, Wetter, Steigung …
- Trotzdem bekommt ein erfahrener Lokführer i.d.R eine Zielbremsung hin (.. und das ohne große Physik-Kenntnisse)
- Würde man den Lokführer fragen, wie er denn den Bremsweg „regelt", so wäre die Antwort in etwa:

  „WENN es nicht regnet UND es warmes Wetter ist, UND viele Passagiere an Bord sind, DANN …"

→ Ziel bei der Entwicklung eines „Expertenreglers":
eine möglichst vollständige Liste solcher Regeln zusammen- stellen, in der alle vorstellbaren Fälle berücksichtigt sind

→ Diese Liste ist die **Regelbasis**

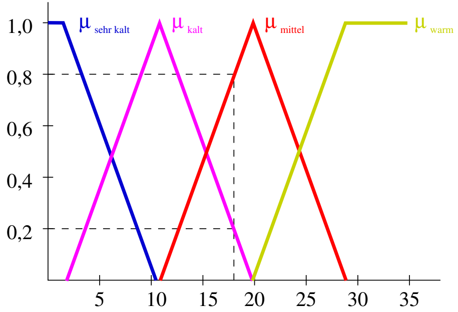
Unscharfe Begriffe

- **Fragen:**
  - was genau ist „warmes Wetter" (wieviele $^\circ C$ ...)
  - wieviel sind „viele Passagiere" (genaue Anzahl ...)
- Umgangssprachliche Begriffe wie „warm", „kalt", „schnell" sind zwar verständlich, aber dennoch unscharf (engl.: *fuzzy*)
- Gesucht: math. Methoden zur Verarbeitung unscharfer Begriffe
- Erster Schritt: *Fuzzyfizierung*:
  - Umwandlung exakter Eingangsgrößen in *linguistische Variablen*
  - Ermitteln eines Maßes der „Zugehörigkeit" des Wertes zu unscharfen Begriffen anhand von Zugehörigkeitsfunktionen μ.

Fuzzyfizierung

Hochschule RheinMain

Beispiel: Temperatur $\theta = 18^\circ C$:



$$\begin{aligned} \mu_{sehrkalt}(\theta) &= 0 \\ \mu_{kalt}(\theta) &= 0,2 \\ \mu_{mittel}(\theta) &= 0,8 \\ \mu_{warm}(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ „zu 20% kalt und zu 80% mittel"

- $\mu_{\mathbb{A}}$: Zugehörigkeitsgrad zu einer *unscharfen Menge*[2] $\mathbb{A}$
- Wird gewöhnlich aus Trapez-/Dreieckformen (s. Beispiel) oder Gaußfunktionen zusammengesetzt

Inferenz

Hochschule RheinMain

Nächster Schritt: Verarbeitung *Inferenz* der linguistischen Variablen

- Anwenden der Regelbasis auf die „fuzzifizierten" Eingangsgrößen
- Aus mehr oder weniger erfüllten Prämissen der Regeln („WENN ....UND ...") ergeben sich Folgerungen (Konklusionen) („...DANN.....")
- Diese können sich teilweise widersprechen
- Auch hier ergeben sich unscharfe Größen:
  - Folgerungen sind meist nicht zu 100% erfüllt
  - „Erfülltheitsgrad" als Maß der Wirksamkeit
- Inferenz umfasst drei Schritte:
  1. *Aggregation*: Bestimmen des Erfülltheitsgrades der Prämisse
  2. *Implikation*: Bestimmen des Erfülltheitsgrades der Konklusion
  3. *Akkumulation*: Zusammenfassen der Ergebnisse aus allen Regeln

Aggregation

Hochschule RheinMain

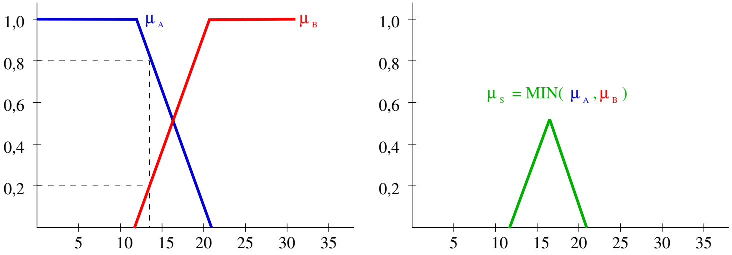
- Die Regelbasis besteht aus Prämissen und zugeordneten Konklusionen:

Regel Nr.	Prämisse	Konklusion
1	`WENN ... UND ...`	`DANN ....`
2	`WENN ... ODER ...`	`DANN ....`
3	`WENN NICHT ...`	`DANN ....`
...	...	....

- Aggregation: Anwenden der Prämissen auf linguistische Variablen
- Fragen:
  - Wie bildet man `UND`- und `ODER`-Verknüpfungen linguistischer Variablen?
  - Was ist das „Gegenteil" (`NICHT`) einer linguistischen Variablen?

UND: Schnittmenge

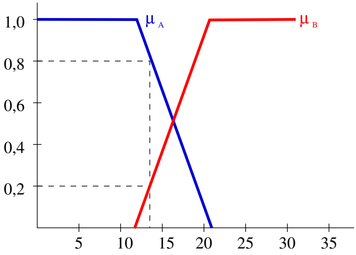
- Die Schnittmenge $\mu_{\mathbb{S}}$ zweier unscharfer Mengen[3] $\mu_{\mathbb{A}}$ und $\mu_{\mathbb{B}}$ entspricht der logischen UND-Verknüpfung
- wird als *t-Norm* $(\mu_{\mathbb{A}} \, UND \mu_{\mathbb{B}})$ bezeichnet
- Entspricht dem Minimum-Operator: $\mu_{\mathbb{S}} = MIN(\mu_{\mathbb{A}}, \mu_{\mathbb{B}})$:

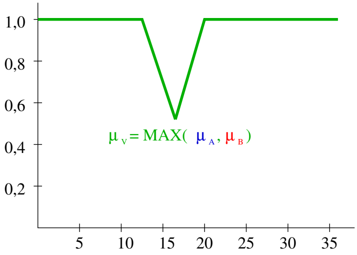


ODER: Vereinigungsmenge

Hochschule RheinMain

- Die Vereinigungsmenge $\mu_{\mathbb{V}}$ zweier unscharfer Mengen $\mu_{\mathbb{A}}$ und $\mu_{\mathbb{B}}$ entspricht der logischen ODER-Verknüpfung
- wird als *t-CoNorm* $(\mu_{\mathbb{A}}\, ODER \mu_{\mathbb{B}})$ bezeichnet
- Entspricht dem Maximum-Operator: $\mu_{\mathbb{V}} = MAX(\mu_{\mathbb{A}}, \mu_{\mathbb{B}})$:

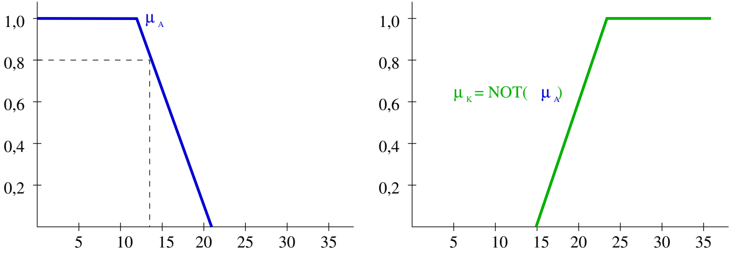




NICHT: Komplementärmenge

Hochschule RheinMain

- Die Komplementärmenge $\mu_{\mathbb{K}}$ einer unscharfen Menge $\mu_{\mathbb{A}}$ entspricht dem logischen NICHT-Operator
- Entspricht der Subtraktion von 1: $\mu_{\mathbb{K}} = NOT(\mu_{\mathbb{A}}) = 1 - \mu_{\mathbb{A}}$:



Implikation

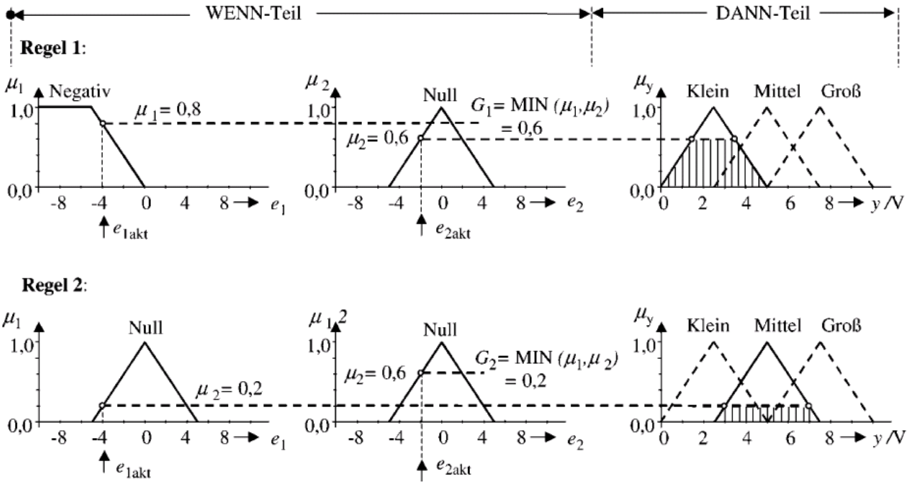
Hochschule RheinMain

- Regeln der Regelbasis liefern für jeder Prämisse wiederum linguistische Variablen als Ergebnis
- Diese werden mit dem Erfülltheitsgrad der Prämisse gewichtet
- Zu betrachten: alle *aktiven Regeln*: Alle Regeln mit einem Erfülltheitsgrad > 0
- Beispiel: Regelbasis:

Regel Nr.	**Prämisse**	**Konklusion**
1	`WENN` e_1 ist negativ `UND` e_2 ist null	`DANN` y ist klein
2	`WENN` e_1 ist null `UND` e_2 ist null	`DANN` y ist mittel

Implikation: Beispiel

Hochschule RheinMain

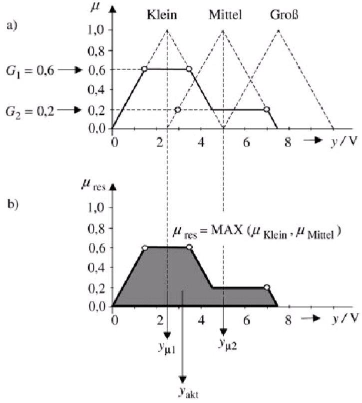


4

Akkumulation

Hochschule RheinMain

a) Jede aktive Regel liefert eine unscharfe Ergebnismenge



[a]

b) Ergebnismengen werden durch `ODER`-Verknüpfung zu einer unscharfen Vereinigungsmenge zusammengefaßt

[a] Aus [Zacher/Reuter]

Defuzzyfizierung (1)

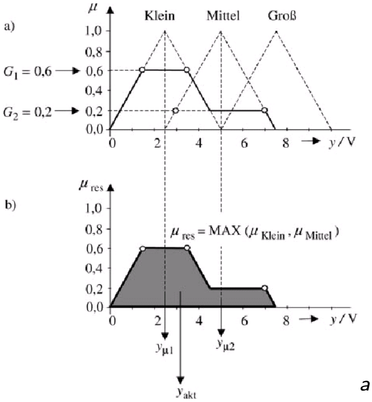
- Ergebnis der Inferenz: unscharfe Menge („Fläche im Diagramm")
- Defuzzyfizierung: daraus einen scharfen Wert ermitteln
- Verschiedene Methoden sind möglich, meist wird mit der Flächenschwerpunkt- oder COG[5]-Methode gearbeitet
- Flächenschwerpunkt der unscharfen Menge $\mu_{res}(y)$:

$$y_{akt} = \frac{\int_a^b y \cdot \mu_{res}(y) dy}{\int_a^b \mu_{res}(y) dy}$$

Defuzzyfizierung (2)

Hochschule RheinMain

- Im Beispiel: Fläche besteht aus Rechtecken und Dreiecken



[a]

→ einfach zu berechnen:

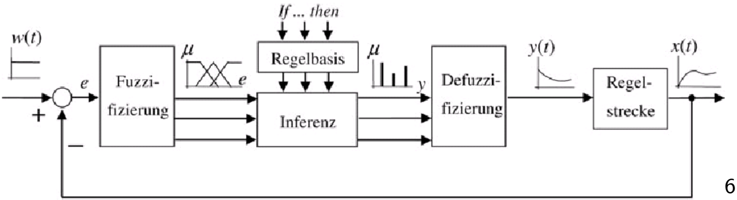
$$
\begin{aligned}
y_{akt} &= \frac{G_1 \cdot y_{\mu 1} + G_2 \cdot y_{\mu 2}}{G_1 + G_2} \\
&= \frac{0,6 \cdot 2,5 + 0,2 \cdot 5}{0,6 + 0,2} \\
&= 3,125
\end{aligned}
$$

[a] Aus [Zacher/Reuter]

Test des Reglers

Hochschule RheinMain

Aufbau eines Regelkreises mit Fuzzy-Regler:



6

- Ein Fuzzy-Regler muss in der Regel getestet, evtl. auch iterativ nachgebessert werden
- Erst hier zeigt sich, ob die Regelbasis brauchbar ist
- Hierzu können Simulationen in MATLAB/ScicosLab hilfreich sein

Eigenschaften von Fuzzy-Reglern

Hochschule RheinMain

- Im Vergleich zu „klassischen" Reglern sind Fuzzy-Regler ...
  - .. robust: behalten stabiles Verhalten, auch bei Änderungen der Regelstreckenparameter
  - .. mit weniger Aufwand zu entwickeln
- Typische Einsatzgebiete:
  - Haushaltsgeräte
  - Kraftfahrzeuge
  - Medizingeräte

Fuzzy-Beispiel: Temperaturregelung

Hochschule RheinMain

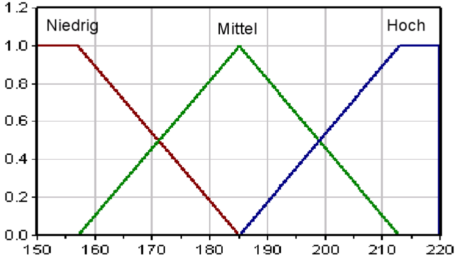
- Ein befragter Experte beschreibt die Temperatur X eines Ofens mit den Begriffen „niedrig”, „mittel” und „hoch”
- Der interessierende Temperaturbereich ist: $150^\circ C \leq X \leq 220^\circ C$
- Für eine effizientere Regelung soll auch die Temperaturänderung $\dot{X}$ erfasst werden
- Für diesen „Temperaturtrend” werden die Begriffe „fallend”, „gleichbleibend” und „steigend” definiert
- Der interessierende Bereich ist dabei: $-10\frac{^\circ C}{s} \leq \dot{X} \leq +10\frac{^\circ C}{s}$
- Nach Befragung des Experten werden für die Heizleistung Y die Begriffe „sehr niedrig”, „niedrig”, „mittel”, „hoch” und „sehr hoch” definiert.

Fuzzy-Beispiel: Fuzzyfizierung (1)

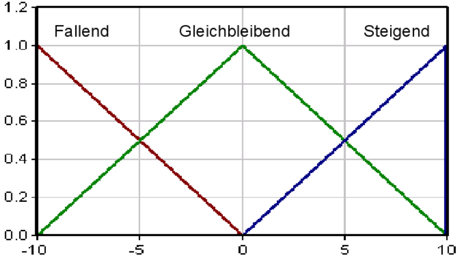
Hochschule RheinMain

Unscharfe Mengen für:

Temperatur $X[^\circ C]$



Temperaturtrend $\dot{X}[\frac{^\circ C}{s}]$



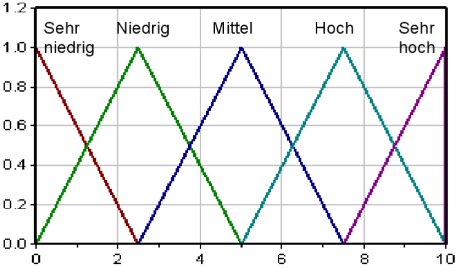
- z.B.: $X = 180^\circ C$
  - $\rightarrow \mu_{niedrig}(X) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(X) = 0,8$
  - $\rightarrow \mu_{hoch}(X) = 0$
- z.B.: $\dot{X} = -5\frac{^\circ C}{s}$
  - $\rightarrow \mu_{fallend}(\dot{X}) = 0,5$
  - $\rightarrow \mu_{gleichbleibend}(\dot{X}) = 0,5$
  - $\rightarrow \mu_{steigend}(\dot{X}) = 0$

Fuzzy-Beispiel: Fuzzyfizierung (2)

Hochschule RheinMain

Unscharfe Menge für:

Heizleistung $Y[kW]$



- z.B.: $Y = 6kW$
  - $\rightarrow \mu_{sehrniedrig}(Y) = 0$
  - $\rightarrow \mu_{niedrig}(Y) = 0$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,6$
  - $\rightarrow \mu_{hoch}(Y) = 0,4$
  - $\rightarrow \mu_{sehrhoch}(Y) = 0$

Als nächstes: Regelbasis aufstellen

- Durch Expertenbefragung
- Je nachdem, welchen Experten man fragt können die Regeln unterschiedlich ausfallen
- Erst ein Praxistest zeigt, ob die Regelbasis etwas taugt

Fuzzy-Beispiel: Regelbasis

Hochschule RheinMain

Regel Nr.	Prämisse	Konklusion
1	WENN X niedrig UND $\dot{X}$ fallend	DANN Y sehr hoch
2	WENN X niedrig UND $\dot{X}$ gleich	DANN Y hoch
3	WENN X niedrig UND $\dot{X}$ steigend	DANN Y mittel
4	WENN X mittel UND $\dot{X}$ fallend	DANN Y mittel
5	WENN X mittel UND $\dot{X}$ gleich	DANN Y mittel
6	WENN X mittel UND $\dot{X}$ steigend	DANN Y mittel
7	WENN X hoch UND $\dot{X}$ fallend	DANN Y mittel
8	WENN X hoch UND $\dot{X}$ gleich	DANN Y niedrig
9	WENN X hoch UND $\dot{X}$ steigend	DANN Y sehr niedrig

- Beispiel: $X = 180°C$, $\dot{X} = -5\frac{°C}{s}$

→ Aktive Regeln: 1,2,4,5

Fuzzy-Beispiel: Inferenz (1)

Hochschule RheinMain

Für alle aktiven Regeln: Schnittmenge bilden

Beispiel wieder: $X = 180^\circ C$, $\dot{X} = -5\frac{^\circ C}{s}$

Regel Nr.	Prämisse	Konklusion
1	`WENN` X niedrig `UND` $\dot{X}$ fallend	`DANN` Y sehr hoch
2	`WENN` X niedrig `UND` $\dot{X}$ gleich	`DANN` Y hoch
4	`WENN` X mittel `UND` $\dot{X}$ fallend	`DANN` Y mittel
5	`WENN` X mittel `UND` $\dot{X}$ gleich	`DANN` Y mittel

Fuzzy-Beispiel: Inferenz (1)

Hochschule RheinMain

Für alle aktiven Regeln: Schnittmenge bilden

Beispiel wieder: $X = 180^\circ C$, $\dot{X} = -5\frac{^\circ C}{s}$

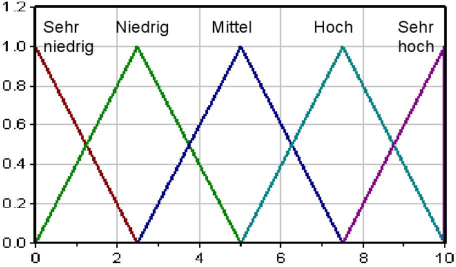
Regel Nr.	**Prämisse**	**Konklusion**
1	$MIN(0.2, 0.5) = 0.2$	DANN Y sehr hoch
2	$MIN(0.2, 0.5) = 0.2$	DANN Y hoch
4	$MIN(0.8, 0.5) = 0.5$	DANN Y mittel
5	$MIN(0.8, 0.5) = 0.5$	DANN Y mittel

Fuzzy-Beispiel: Inferenz (2)

Hochschule RheinMain

Durchführen der Inferenz

(Beispiel immer noch: $X = 180^\circ C$, $\dot{X} = -5\frac{^\circ C}{s}$)



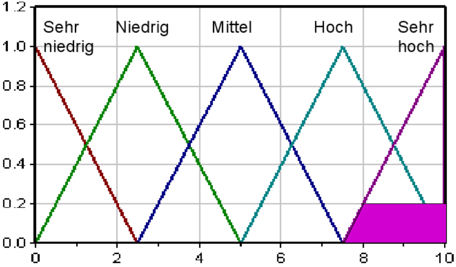
- z.B.: $Y = 6kW$
  - $\rightarrow \mu_{sehrhoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{hoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$

Fuzzy-Beispiel: Inferenz (2)

Hochschule RheinMain

Durchführen der Inferenz

(Beispiel immer noch: $X = 180^\circ C$, $\dot{X} = -5\frac{^\circ C}{s}$)



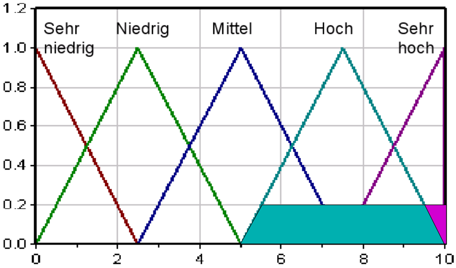
- z.B.: $Y = 6kW$
  - $\rightarrow \mu_{sehrhoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{hoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$

Fuzzy-Beispiel: Inferenz (2)

Hochschule RheinMain

Durchführen der Inferenz

(Beispiel immer noch: $X = 180^\circ C$, $\dot{X} = -5\frac{^\circ C}{s}$)



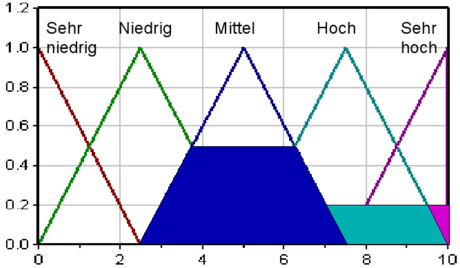
- z.B.: $Y = 6kW$
  - $\rightarrow \mu_{sehrhoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{hoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$

Fuzzy-Beispiel: Inferenz (2)

Hochschule RheinMain

Durchführen der Inferenz

(Beispiel immer noch: $X = 180^\circ C$, $\dot{X} = -5\frac{^\circ C}{s}$)

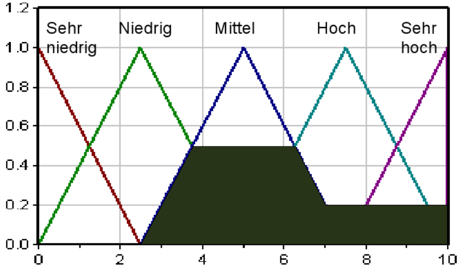


- z.B.: $Y = 6kW$
  - $\rightarrow \mu_{sehrhoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{hoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$

Fuzzy-Beispiel: Inferenz (2)

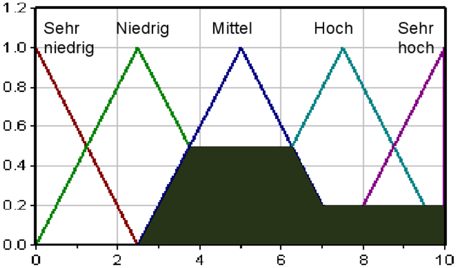
Durchführen der Inferenz

(Beispiel immer noch: $X = 180^\circ C$, $\dot{X} = -5 \frac{^\circ C}{s}$)



- z.B.: $Y = 6kW$
  - $\rightarrow \mu_{sehrhoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{hoch}(Y) = 0,2$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$
  - $\rightarrow \mu_{mittel}(Y) = 0,5$

Fuzzy-Beispiel: Defuzzyfizierung



- Hier: $Y_{akt} \approx 5,75$

- Flächenschwerpunkt nach:

$$Y_{akt} = \frac{\int_a^b Y \cdot \mu_{res}(Y) dY}{\int_a^b \mu_{res}(Y) dY}$$

Fuzzy-Beispiel: Vergleich mit PID-Regler

Hochschule RheinMain