Hochschule RheinMain | Fachbereich DCSM
Wintersemester 2020/21 | Prof. Dr. Adrian Ulges

Klausur zur Veranstaltung
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
24.02.2021

- Halten Sie Ihre **Matrikelnummer** bereit.
- Die Klausurdauer beträgt **90 Minuten**, zuzüglich **15 Minuten** für den Upload Ihrer Lösung. Ein Upload nach Ablauf dieser Deadline ist **nicht mehr möglich**.
- Laden Sie Ihre Lösung in Stud.IP (Ordner wird von Prof. Ulges bekanntgegeben) hoch. Akzeptiert wird **ein einziges PDF**. Sollten Sie mehrere PDFs hochladen, wird die **zeitlich letzte** Version vor der Abgabe-Deadline gewertet.
- Achtung: Der Name Ihres PDF **muss** "Vorname_Nachname.pdf" sein (z.B. Max_Mustermann.pdf). Akzeptiert wird außerdem nur eine Bearbeitung der Klausurversion mit **Ihrer Matrikelnummer**.
- Sie können die Klausur auf eigenem Papier bearbeiten. Versehen Sie aber **jede Seite mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer**.
- Schreiben Sie **deutlich** und achten Sie auf eine adäquate Bilderfassung beim Upload – Unleserliche Inhalte werden nicht gewertet.
- Punkte können nur bei Angabe eines nachvollziehbaren **Lösungswegs** vergeben werden.
- Es reicht, wenn Sie Ihre Lösungen mit einer Genauigkeit von **vier Nachkommastellen** (alternativ als **gekürzten Bruch**) angeben.
- Lesen Sie die Aufgabenstellungen **vollständig**. Sollten während der Klausur Unklarheiten bestehen, ist es möglich im Chat kurze **Fragen zur Aufgabenstellung** zu stellen.
- Die Aufgaben sind **eigenständig ohne Anwesenheit von oder Kommunikation mit anderen Personen** über Inhalte der Prüfung während der Prüfungszeit zu bearbeiten.
- Jegliche Beteiligung an **Täuschungsversuchen** führt zum **Nichtbestehen** der Prüfung. Im Falle eines mehrfachen oder schwerwiegenden Täuschungsversuches kann die oder der zu Prüfende **exmatrikuliert** werden.
- Es werden nur Prüfungen gewertet, für die fristgerecht vor Prüfungsbeginn das **Antrittsformular** ordnungsgemäß ausgefüllt und unterschrieben eingereicht wurde. Wurde das Antrittsformular eingereicht (und nicht fristgerecht zurückgezogen), jedoch **keine bewertbare Leistung** abgegeben, so gilt die Prüfung als nicht bestanden.
- Wer an der Prüfung teilnimmt, obwohl sie/er sich **gesundheitlich** dazu nicht imstande fühlt, übernimmt bewusst das darin liegende Risiko.

Viel Erfolg!

Name und Matrikelnummer: ______________________________

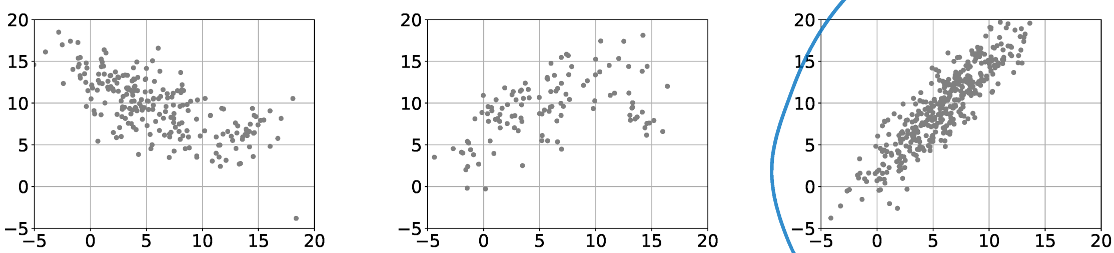
Aufgabe 1 (3+4+8+4=19 Punkte)

a) Gegeben sei eine k-variate Stichprobe von m Objekten. **Wieviele Zeilen und wieviele Spalten** hat die Kovarianzmatrix Σ? Begründen Sie in mindestens zwei Sätzen.

- Σ enthält die Kovarianz für alle Paare von Merkmalen. 2
- Das macht $K \times K$ Paare.

1

b) Gegeben sind drei Stichproben, von denen nur eine auf die untere Kovarianzmatrix passt. Geben Sie die richtige Stichprobe an. Geben Sie für die falschen Stichproben **jeweils einen Grund** an, warum die Stichproben falsch sind, und erläutern Sie den Grund.



(a) (b) (c)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 13.5 & 17.3 \\ 17.2 & 26.9 \end{pmatrix}$$

(a) hat negative Kovarianz,
2 Stichprobe fallend (Σ_{12} ist aber positiv).

(b) hat eine stärkere Streuung
2 in x-Richtung, aber $\Sigma_{22} > \Sigma_{11}$

$1+4+9$

$-1+8+27$

$-1+6$

c) Gegeben ist die folgende Stichprobe:

x_i	-1	0	2	3
y_i	1	4	3	0

Fitten Sie das Modell $\mathcal{M}_a(x) = -x^2 + ax + 4$ mit **Least Squares** auf die Stichprobe. Stellen Sie die **Fehlerfunktion** $E(a)$ auf und bestimmen Sie die Lösung a^* als Minimum von E. *Hinweis: Eine Prüfung der zweiten Ableitung ist nicht erforderlich.*

$$E(a) = \sum_i \left(-x_i^2 + ax_i + 4 - y_i\right)^2 \quad 1$$

$$E'(a) = \sum_i \left(-x_i^2 + ax_i + 4 - y_i\right) \cdot x_i 2 = 0 \quad 2 \quad 1$$

$$a \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i^3 - 4 \sum_i x_i + \sum_i x_i y_i \quad 2$$

$$a \cdot 14 = 34 - 4 \cdot 4 + 5 \quad 1$$

$$a = 23/14 \quad 1$$

$a = 19/4$

$a = -111/98$

d) Die Werte einer beliebigen Stichprobe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ liegen auf einer Geraden mit Parametern (a, b), d.h. $y_i = ax_i + b$. Wir ermitteln die Ausgleichsgerade (a^*, b^*) der Stichprobe mittels linearer Regression. Zeigen Sie: $a^* = a$.

$$a^* \overset{1}{=} \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x}) \cdot (\underbrace{ax_i + \cancel{b}}_{y_i} - (a\bar{x} + \cancel{b}))}{s_x^2} \quad 1$$

$$= \frac{a \cdot \cancel{s_x^2}}{\cancel{s_x^2}} = a \quad ✓ \quad 2$$

Name und Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 2 (5+5+4=14 Punkte)

a) Ein LKW soll auf einer **Rundreise** die 7 Städte Berlin, München, Hamburg, Köln, Frankfurt, Stuttgart und Düsseldorf besuchen. Hierbei sollen aber zwei beliebige der Städte **ausgelassen** werden. Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Routen. Begründen Sie anhand einer Formel aus der Kombinatorik.

$n=7$, $k=5$, ohne Wdhlg., geordnet. 2

$\rightarrow \frac{7!}{(7-5)!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520$ 1 1 1

840
6720

b) Bestimmen Sie die Anzahl möglicher Routen, auf denen München als **dritte oder vierte** Stadt besucht wird.

München 3. + # München 4. 2

$= 6\cdot 5\cdot 1\cdot 4\cdot 3 + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 1\cdot 3$ 2

$= 360 + 360 = 720$ 1

240
1680

c) Richtig oder falsch: "Erhöht man im Urnenmodell bei einer ungeordneten Stichprobe den Parameter *k*, **steigt immer** die Anzahl der Möglichkeiten"? Begründen Sie.

Gilt nicht. 1 Gegenbsp.: Ungeordnet, ohne Wdhlg.

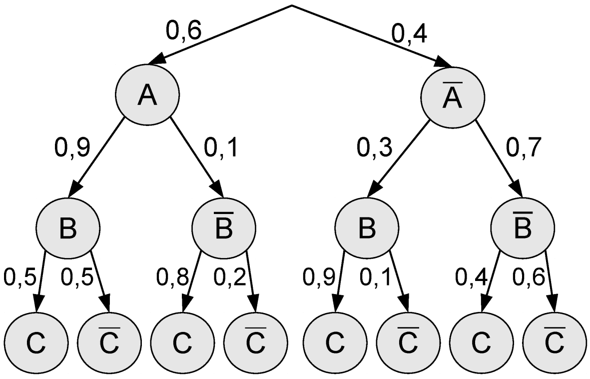
$n=5$ $k=3$ $k=4$ 3

$\binom{5}{3} = 10 > \binom{5}{4} = 1.$

Name und Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 3 (8+4+4=16 Punkte)

a) Gegeben den folgenden Ereignisbaum, leiten Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten her. Geben Sie jeweils einen vollständigen **Rechenweg mit Wahrscheinlichkeiten**, nicht nur mit Zahlen an.



- $P(B, \overline{C}, A)$ $= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(\overline{C}|B,A)$ 1   0,108

  $= 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}27$ 1

- $P(\overline{B}, C)$ $= P(A,\overline{B},C) + P(\overline{A},\overline{B},C)$ 1

  $= 0{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4$ 1   0,104 0,216

  $= 0{,}048 + 0{,}112 = 0{,}16$ 1

- $P(B|C, \overline{A})$ $= \dfrac{P(B,C,\overline{A})}{P(C,\overline{A})} = \dfrac{P(B,C,\overline{A})}{P(B,C,\overline{A}) + P(\overline{B},C,\overline{A})}$ 1

  $= \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9}{\text{〃} + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4}$ 1 $= 0{,}49$ 1

  0,176
  0,276

b) Im Wiesbadenener ÖPNV sind 10% aller Fahrgäste Schwarzfahrer (d.h. sie bezahlen ihre Fahrt absichtlich nicht). Die anderen Fahrgäste sind ehrlich. 80% der Schwarzfahrer haben keine Fahrkarte, die übrigen 20% führen (gefälschte) Karten mit sich. Ehrliche Fahrgäste haben in 5% der Fälle ihre Karte vergessen.
Wir definieren die Ereignisse S (Fahrgast ist ein Schwarzfahrer), das Gegenereignis $\overline{S}$ (Fahrgast ist ehrlich), sowie K (Fahrgast hat eine [echte oder gefälschte] Fahrkarte dabei). Geben Sie sämtliche **im Text enthaltenen Wahrscheinlichkeiten** formal an.

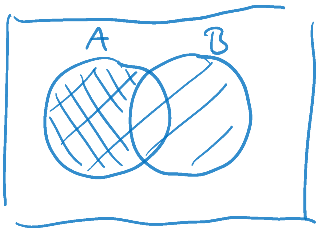
$P(S) = 0{,}1$ 1

$P(\overline{K}|S) = 0{,}8$ 1,5 0,2

$P(\overline{K}|\overline{S}) = 0{,}05$ 1,5 0,03

c) Ist die folgende Wahrscheinlichkeit immer 0, immer 1, oder kann sie zwischen 0 und 1 liegen? **Begründen Sie formal**.

$$P(A \cup B \,|\, A \cap \overline{B})$$



1

Da $A \cap \overline{B} \subseteq A \cup B$,

gilt $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cup B) \overset{(*)}{=} A \cap \overline{B}$

1

$$\rightarrow P(A \cup B \,|\, A \cap \overline{B}) = \frac{P((A \cup B) \cap (A \cap \overline{B}))}{P(A \cap \overline{B})} \overset{(*)}{=} \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A \cap \overline{B})}$$

1

$= 1$

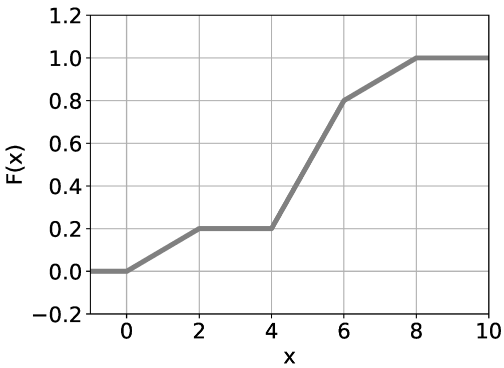
1

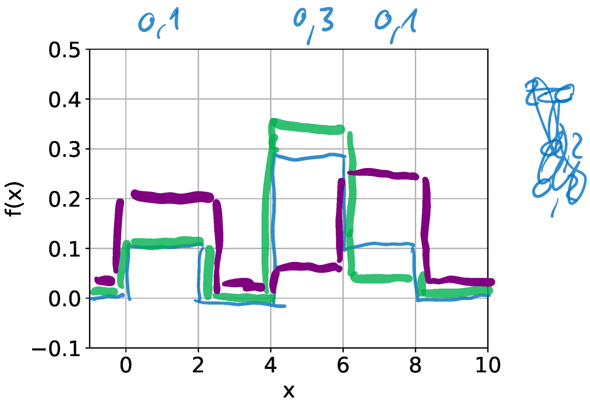
Name und Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 4 (4+6 = 10 Punkte)

1 Höhe falsch: 3
Plateaus mit richtigen Grenze 2

a) Gegeben sei eine stetige Zufallsvariable X mit stückweise linearer Verteilungsfunktion F (links). Skizzieren Sie rechts die zugehörige Dichtefunktion.





b) Faire **vierseitige Würfel** zeigen mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Zahlen $1-4$. Wir werfen zwei solche Würfel und erhalten zwei Werte X_1, X_2. Es sei

$$X := X_1 - X_2$$

die Differenz der Augen (z.B. $X = 1 - 4 = -3$). Bestimmen Sie die **Varianz** von X. *Hinweise: (1) Der Erwartungswert eines einzelnen Würfels beträgt* 2.5. *(2) Es bieten sich die Rechenregeln für Zuvallsvariablen an.*

Betrachte zuerst einzelnen Wurf:

$$\mathrm{Var}(X_i) \overset{1}{=} \frac{1}{4} \cdot \sum_i (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left((1-2{,}5)^2 + (2-2{,}5)^2 + (3-2{,}5)^2 + (4-2{,}5)^2 \right) \;\; 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 \right) = \frac{5}{4} = 1{,}25. \;\; 1$$

$\Rightarrow$ Gesamt-Varianz: 1

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \overset{1}{(-1)^2} \cdot \mathrm{Var}(X_2)$$

$$= 1{,}25 + 1{,}25 = 2{,}5 \;\; 1$$

Name und Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe 5 (6+4+4 = 14 Punkte)
Eine faire Münze zeige entweder Kopf oder Zahl. Die Münze wird viermal geworfen. Es sei X die Anzahl der erzielten "Kopf"-Würfe.

a) Geben Sie den **Verteilungstyp** von X and und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, $\underbrace{\text{zweimal}}_{A}$ oder dreimal Kopf zu werfen.

Binomial mit $n=4$ und $p=0{,}5$ 1

$$P(A) = P(X=2) + P(X=3) \quad 1$$

$$= \binom{4}{2} \cdot \underbrace{p^2 \cdot (1-p)^2} + \binom{4}{3} \cdot \underbrace{p^3 \cdot (1-p)^1} \quad 2$$

$$= \underbrace{6 \cdot 1/16}_{0{,}375} + \underbrace{4 \cdot 1/16}_{0{,}25} \quad 1 \quad = 10/16 = 0{,}625 \quad 1$$

Auch 0,625

b) Wir wiederholen das Experiment, verwenden nun aber eine unfaire Münze mit unbestimmter "Kopf"-Wahrscheinlichkeit. Berechnen Sie die beiden fehlenden Werte, $P(X = 3)$ und $P(X = 4)$.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$P(X=0) = (1-p)^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow (1-p) = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3} \quad 1{,}5$$

$$\Rightarrow p = 1/3 \quad 0{,}5$$

$$\Rightarrow P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot (1/3)^3 \cdot (2/3)^1 = \frac{8}{81} \quad 1$$

$$\Rightarrow P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot (1/3)^4 = \frac{1}{81} \quad 1$$

Name und Matrikelnummer: ______________________________

c) Wir haben für die Binomialverteilung eine Formel kennengelernt, die $P(X = k+1)$ in Abhängigkeit von $P(X = k)$ ausdrückt. Leiten Sie eine analoge Formel für die **Poisson-Verteilung** her.

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$P(X=k+1) = \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \cdot e^{-\lambda} \quad 1$$

$$= \frac{\lambda \cdot \lambda^k}{(k+1) \cdot k!} \cdot e^{-\lambda} \quad 2$$

$$= \frac{\lambda}{(k+1)} \cdot P(X=k) \quad 1$$

Name und Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe 6 (6+3+7 = 16 Punkte)

Die Numpy-Routine foo() erhält als Parameter eine **Matrix** in Form eines Numpy-Arrays X mit shape $(200, 5)$.

```
    def foo(X):
1.      X = X[:100,-2]
2.      Y = np.mean(X)
3.      Z = X*X
        return np.mean(Z) - Y*Y
```

a) Beschreiben Sie für jede der Zeilen 1-3, **was** die Zeile berechnet, und geben Sie die **shape** des Ergebnisses der Zeile an.

- Zeile 1: wählt die ersten 100 Elemente der vorletzten Spalte aus. 1
  shape: (100,) 1
- Zeile 2: Bildet das Mittel über die ausgewählten Elemente. 1
  shape: 1 1
- Zeile 3: Quadriert jeden der 100 Werte. (elementweise!) 1
  Shape: (100,) 1

b) Beschreiben Sie: Welche **bekannte Formel** berechnet die Funktion foo() auf welchem Teil der Daten?

Varianz 1 mit Verschiebungssatz 1
auf den ersten 100 Werten
der vorletzten Spalte 1

Name und Matrikelnummer: ______________________________

c) Die Mieten in Wiesbaden seien **normalverteilt** mit $\mu = 640$ EUR und $\sigma = 200$. Berechnen Sie mit Hilfe von Standardisierung, wieviele Prozent aller Mieter mehr als 800 EUR zahlen.

1

$$P(X > 800) = 1 - P(X \leq 800)$$

$$= 1 - P\left(Y \leq \frac{800-640}{200}\right)$$ 1

std. norm. vtlt.

Sollte notiert sein!

2 eine von beiden

$$= 1 - N(0{,}8)$$

-0,2 0,533

$$= 1 - 0{,}7881$$ 2

0,7019
0,5793

(0,5315 wäre $N(0{,}08)$)

$$= 0{,}2119$$ 1

0,2981
0,4207

Name und Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 7 (7+4 = 11 Punkte)

a) Gegeben ist folgende Stichprobe:

$$x_1, \ldots, x_6 = 18, 20, 14, 17, \cancel{17}^{15}, 15.$$

Wir nehmen an, die Stichprobenwerte seien unabhängig und normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Standardabweichung $\sigma = 3$. **Testen Sie die Hypothese** "$\mu \leq 15$" bei Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$.

1 $\bar{X} = 16{,}833$ 16,5

2 $u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{16{,}833 - 15}{3/\sqrt{6}} = 1{,}497$

1,223	1,497
1,282	2,326

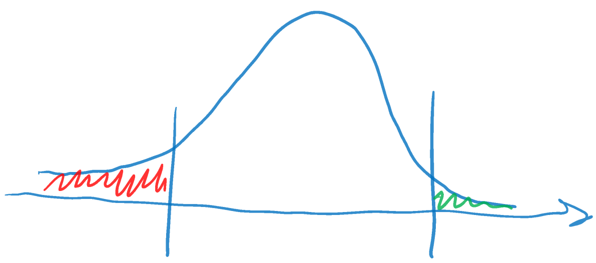
Kritische Grenze: $x_{0,9} = 1{,}282$ 1

1

Weil $u = 1{,}497 \geq 1{,}282 = x_{0,9}$ wird H_0 verworfen.

2

b) **Richtig oder falsch**: "Wenn ein Test die Hypothese $\mu \geq \mu_0$ ablehnt, akzeptiert derselbe Test die Hypothese $\mu \leq \mu_0$ bei gleichen Parametern auf jeden Fall"? Begründen Sie in mindestens zwei Sätzen, gerne anhand einer Skizze.



Wird $\mu \geq \mu_0$ abgelehnt, ist der Testwert sehr niedrig (links). 1,5

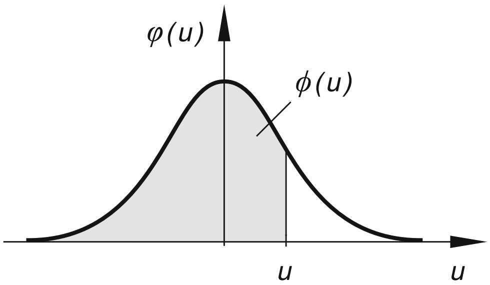
$\mu \geq \mu_0$ würde nur abgelehnt, falls Testwert extrem hoch (rechts) 1,5

$\rightarrow$ $\mu \geq \mu_0$ wird akzeptiert, Aussage ist korrekt. 1

Name und Matrikelnummer: ____________________

Name und Matrikelnummer: ______________________________

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung



Schrittweite: $\Delta u = 0{,}01$

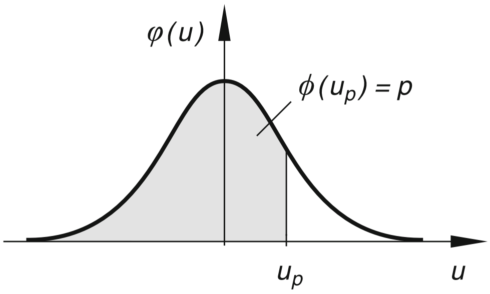
Für *negative* Argumente verwende man die Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \qquad (u > 0)$$

Für $u \geq 4$ ist $\phi(u) \approx 1$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5639	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8398
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0.9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung



p: Vorgegebene Wahrscheinlichkeit $(0 < p < 1)$

u_p: Zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil (*obere* Schranke)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von p das jeweils zugehörige Quantil u_p (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

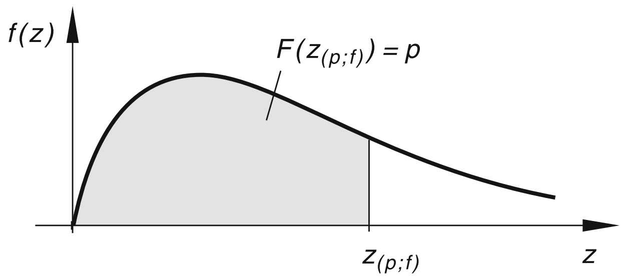
p	u_p	p	u_p
0,90	1,282	0,1	−1,282
0,95	1,645	0,05	−1,645
0,975	1,960	0,025	−1,960
0,99	2,326	0,01	−2,326
0,995	2,576	0,005	−2,576
0,999	3,090	0,001	−3,090

Formeln:

$$u_{1-p} = -u_p$$

$$u_p = -u_{1-p}$$

Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung



p: Vorgegebene Wahrscheinlichkeit ($0 < p < 1$)

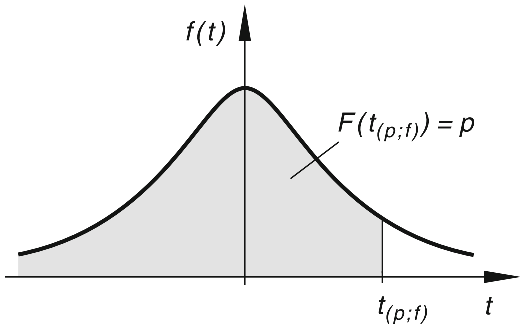
f: Anzahl der Freiheitsgrade

$z_{(p;f)}$: Zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden (*obere* Schranke)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von p das jeweils zugehörige Quantil $z_{(p;f)}$ in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

	p									
f	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,020	0,051	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,554	0,831	1,15	1,16	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,06	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,67	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
22	8,6	9,5	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
24	9,9	10,9	12,4	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von „Student“



p: Vorgegebene Wahrscheinlichkeit ($0 < p < 1$)

f: Anzahl der Freiheitsgrade

$t_{(p;f)}$: Zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden (*obere* Schranke)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von p das jeweils zugehörige Quantil $t_{(p;f)}$ in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

	p				
f	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,707	31,820	63,654
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Formeln:

$$t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}$$

$$t_{(p;f)} = -t_{(1-p;f)}$$