<u>Behauptung:</u>

Ein vollständiger Binärbaum der Tiefe n hat 2^n-1 innere Knoten.

<u>Beweis</u> durch Induktion:

Induktionsverankerung:

$n=0$:

Ein Binärbaum der Tiefe 0 ist ein einziges Blatt, hat also keinen inneren Knoten.
Es gilt:

$$2^n-1 \;=\; 2^0-1 \;=\; 1-1 \;=\; 0$$

Die Behauptung ist wahr.

Induktionsvorraussetzung:

Sei nun $n>0$ und gelte die Behauptung für alle vollständigen Binärbäume der Tiefe $x<n$.

Induktionsschritt:

Ein vollständiger Binärbaum *B* der Tiefe *n* besteht aus einer Wurzel mit zwei Teilbäumen T_1 und T_2 als Kinder.
Jeder innere Knoten in einem der Teilbäume ist auch innerer Knoten in *B*. Jedes Blatt in einem der Teilbäume ist auch Blatt in *B*. Ein Knoten aus T_i $(i\in\{1,2\})$, der den Abstand *k* zur Wurzel aus *B* hat, hat den Abstand $k-1$ zur Wurzel von T_i .
Deshalb sind T_1 und T_2 selbst vollständig und haben die Tiefe n-1. Also gilt für sie die Induktionsvorraussetzung; sie haben jeweils $2^{n-1}-1$ innere Knoten.

Die inneren Knoten in *B* sind die inneren Knoten in T_1 und T_2 sowie die Wurzel.
Insgesamt also

$$(2^{n-1}-1)+(2^{n-1}-1)+1 \;=\; 2*2^{n-1}-1 \;=\; 2^n-1$$

q.e.d.