Algorithmen und Datenstrukturen

– Sommersemester 2019 –

Kapitel 02: Komplexitätsanalyse

Prof. Dr. Adrian Ulges

B.Sc. AI / ITS / WI
Fachbereich DCSM
Hochschule RheinMain

Kosten von Algorithmen

Wieviele Ressourcen (Laufzeit/Speicher) benötigt ein Algorithmus?

Ansätze

1. **Benchmarking**: Implementiere den Algorithmus in einer Programmiersprache und teste ihn mit verschiedenen Eingaben.
2. **Zählen der Elementaroperationen** des Algorithmus, Ableitung einer Kostenformel.

Nachteile von Benchmarking?

- Benchmarking-Ergebnisse sind abhängig von Kontextfaktoren *(Hardware, Sprache, Compiler, Implementierungsdetails, Last)*.
- In der Regel sind nicht alle möglichen Eingaben testbar.

```java
import java.util.Arrays;

class Enigma {

    public static int minPos(int[] numb
                             int k) {

        int min_pos = k;

        for(int i=k; i<numbers.length;
            if(numbers[i]<numbers[min_p
                min_pos = i;
            }
        }

        return min_pos;
    }


    public static void swap(int[] numbe
                            int pos1,
                            int pos2) {

        int help = numbers[pos1];

        numbers[pos1] = numbers[pos2];
        numbers[pos2] = help;
    }


    public static void enigma(int[] num

        for(int k=0; k<numbers.length;

            int min_pos = minPos(number
            swap(numbers, min_pos, k);
        }
    }
```

Kosten von Algorithmen

In ADS verfolgen wir Ansatz 2:

- Wir führen den Algorithmus gedanklich auf einer Maschine mit bestimmten Kosten für verschiedene Operationen aus.
- Wir zählen bestimmte Einzelschritte *(Feldzugriffe, Additionen, Vergleiche, ...)*
- **Schlüsselfrage**: Wie verhält sich der Algorithmus für große Eingaben?

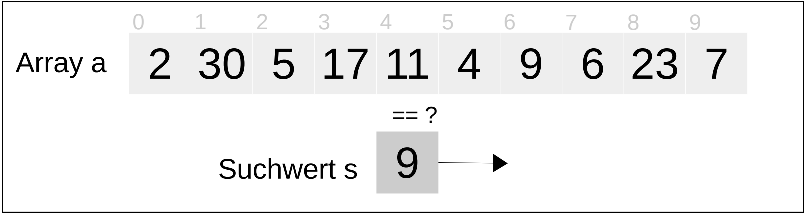
Vorteile dieser Kostenschätzung

- Generelle Aussage, unabhängigkeit von Plattform+Implementierung.
- Betrachtung aller möglicher Eingaben.
- Aufwandsfrei *(keine Implementierung, kein Testen)*.

```
import java.util.Arrays;

class Enigma {

    public static int minPos(int[] numb
                             int k) {

        int min_pos = k;

        for(int i=k; i<numbers.length;
            if(numbers[i]<numbers[min_p
                min_pos = i;
            }
        }

        return min_pos;
    }


    public static void swap(int[] numbe
                            int pos1,
                            int pos2) {

        int help = numbers[pos1];

        numbers[pos1] = numbers[pos2];
        numbers[pos2] = help;
    }


    public static void enigma(int[] num

        for(int k=0; k<numbers.length;

            int min_pos = minPos(number
            swap(numbers, min_pos, k);
        }
    }
```

Outline

Beispiel: Lineare Suche



Problemstellung

- Gegeben: Ein Array $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$, ein Suchwert s.
- Gebe die Position zurück, an der der Suchwert im Array vorkommt. Ist der Wert nicht vorhanden, gebe n zurück.

Ansatz

- Durchlaufe das Array von links nach rechts mit Variable `pos`.
- Breche ab, falls `a[pos]` gleich dem Suchwert ist.

Beispiel: Lineare Suche

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Array a	2	30	5	17	11	4	9	6	23	7

== ?

Suchwert s 9 →

Pseucodode

```
1 pos = 0
2 while pos < n and a[pos] != s:
3     pos = pos+1
4 return pos
```

Kostenanalyse *(Beispiel rechts oben)*

Wir zählen **Vergleiche**, **Additionen**, **Feldzugriffe**, **Zuweisungen**:

- Initiale Zuweisung (Zeile 1): Kosten 1.
- 6 erfolglose Schleifendurchläufe (Zeile 2+3).
- Je Durchlauf: Kosten 5.

  (2 Vergleiche & 1 Feldzugriff (Zeile 2), 1 Addition & 1 Zuweisung (Zeile 3))
- 7. Schleifendurchlauf: Suchwert gefunden, Kosten 3.

  (2 Vergleiche & 1 Feldzugriff (Zeile 2))
- Verlassen der Schleife, Algorithmus ist terminiert.
- **Gesamtkosten: $1 + 6 \cdot 5 + 3 = 34$ Schritte**.

Effizienz von Algorithmen: Formalisierung

Generellere Aussage: Abstrahiere über die Eingabedaten

(a) Umfang: *Wie lang ist das zu durchsuchende Array?*
(b) Schwierigkeit: *Wo befindet sich der Suchwert im Array?*

(a) Umfang: Die Problemgröße

> *Gegeben ein zu lösendes Problem, bezeichnen wir den Umfang der Eingabedaten als* **Problemgröße** $n \in \mathbb{N}$.

Die Problemgröße kann *(je nach Art des zu lösenden Problems)* verschiedene Dinge bezeichnen:

- Die Länge eines Arrays
- Die Anzahl der Knoten in einem Graph
- Die Länge eines kryptografischen Schlüssels in Bit
- Die Anzahl der zu planenden Züge eines Schachcomputers.
- ...

(b) Die Schwierigkeit

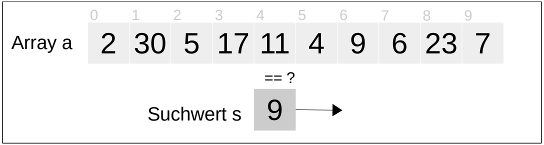
Gegeben die Problemgröße n, betrachten wir ...

1. den **besten Fall** *(engl. 'best case')*
   - Betrachte die "einfachste" Eingabe (der Größe n), welche die minimal mögliche Anzahl an Schritten verursacht.
   - Dies ist meist nicht besonders interessant.

2. den **mittleren Fall** *(engl. 'average case')*
   - Betrachte alle möglichen Eingaben (der Größe n) und mittle die Anzahl der benötigten Schritte.
   - Dies ist meist relevant, aber schwierig zu berechnen.

3. den **schlechtesten Fall** *(engl. 'worst case')*
   - Betrachte die „schwierigste“ Eingabe (der Größe n) mit der maximal möglichen Anzahl an Schritten.
   - Dies ist meist relevant und leicht zu berechnen.

Beispiel: Lineare Suche



Pseudocode

```
1 pos = 0
2 while pos < n and a[pos] != s:
3     pos = pos+1
4 return pos
```

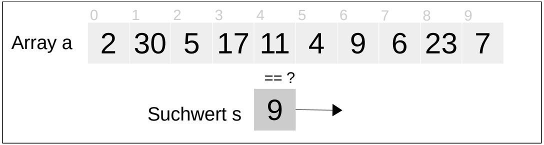
Best Case

- Suchwert befindet sich an der 1. Position im Array.
- Kosten: 4 *(1 Zuweisung (Zeile 1), 2 Vergleiche & 1 Feldzugriff (Zeile 2)*

Worst Case

- Suchwert befindet sich nicht im Array.
- n erfolglose Schleifendurchläufe, jeweils Kosten 5.
- Zusatzkosten: 2 *(1 Zuweisung (Zeile 1), 1 Schleifenabbruch (Zeile 2)*
- **Gesamtkosten:** $2 + 5 \cdot n$.

Beispiel: Lineare Suche



Pseucodode

```
pos = 0
while pos < n and a[pos] != s:
    pos = pos+1
return pos
```

Average Case

- Annahme: n+1 gleich wahrscheinliche Fälle *(Der Suchwert befindet sich an Position 0, 1, 2, ..., n-1, oder er ist "nicht enthalten")*.

Beispiel: Lineare Suche (cont'd)

Aufwandsschätzung: Do-it-Yourself

Berechnen Sie den **Worst-Case-Aufwand** des folgenden Algorithmus. Zählen Sie nur die **Feldzugriffe**.

```
# Gegeben: Ein n-elementiges
#          Array a
b := ein n-elementiges Array
for i = 0,..., n-1:
    b[i] = psum(a,i)
return b
```

```
function psum(a,i):
    result = 0
    pos = 0
    while pos <= i:
        result += a[pos]
        pos += 1
    return result
```

Aufwandsschätzung: Do-it-Yourself

Outline

Kostenfunktionen

Definition (Kostenfunktion)

Gegeben sei ein Algorithmus $\mathcal{A}$. Die **Kostenfunktion** *(oder* **Laufzeit***) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ ordnet jeder Problemgröße n den Ressourcenbedarf (z.B. die Anzahl der Operationen) $a(n)$ zu, die $\mathcal{A}$ zur Verarbeitung einer Eingabe der Größe n benötigt.*

Anmerkungen

- Wir können Kostenfunktionen für den Worst/Best/Average Case definieren. Für die lineare Suche gilt z.B. *(siehe oben)*:

$$a^{best}(n) = 4 \qquad a^{worst}(n) = 2 + 5n \qquad a^{avg}(n) = \frac{5/2 \cdot n^2 + 13/2 \cdot n + 2}{n+1}$$

- Die Kostenfunktion ist eine mathematische Folge:
  Wir können für den Funktionswert a_n <u>oder</u> $a(n)$ schreiben.

Vereinfachung von Kostenfunktionen

Statt der exakten Anzahl der Einzelschritte reicht uns eine grobe Abschätzung. Dies führt zur **O-Notation**, dem zentralen Konzept der Aufwandsschätzung.

Schritt 1: Stärkstes Wachstum

- Wir konzentrieren uns auf den **am stärksten wachsenden Summanden** der Kostenfunktion:

$$4n^2 + \cancel{2n + 5} \longrightarrow 4n^2$$

- Warum? Weil für große n der relative Fehler vernachlässigbar ist *(hier für n=10000: 0.005%)*.

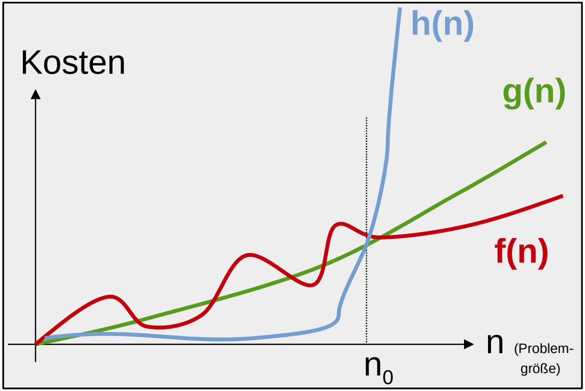
Vereinfachung von Kostenfunktionen

Schritt 2: Faktoren entfernen

$$\cancel{4}\,n^2 \longrightarrow n^2$$

- Konstante Faktoren beeinträchtigen die wichtigsten Aussagen nicht, wie z.B. “Bei einer Verdopplung der Eingabegröße braucht der Algorithmus doppelt so lange”.
- Eine Konstante 4 könnte auch durch eine vier mal schnellere Maschine erreicht werden. Diese Details interessieren uns hier nicht *(sondern die generelle Güte eines Algorithmus)*.

O-Notation: Illustration



- f wächst “nicht viel schneller” als g, oder kurz: $f \in O(g)$.
- Es gilt auch: $g \in O(f)$ (g wächst nicht viel schneller als f).
- Es gilt auch: $g \in O(h)$ (g wächst nicht viel schneller als h).
- Es gilt **nicht**: $h \in O(g)$ (h wächst schneller als g).

Definition: O-Notation

Definition (O-Notation)

Es seien f und g zwei Kostenfunktionen. Wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\mathbf{f(n) \leq c \cdot g(n) \text{ für alle } n \geq n_0},$$

dann schreiben wir $f \in O(g)$ (oder $f(n) \in O(g(n))$).

Anmerkungen

- **Umgangssprachlich** bedeutet $f \in O(g)$:
  "f wächst nicht deutlich schneller als g".
- $O(g)$ ist demnach die **Menge aller Kostenfunktionen**, die nicht deutlich schneller wachsen als f.
- Wir sprechen: "f ist von der Ordnung g" oder auch **"f ist O von g"**.

Definition: O-Notation

Anmerkungen (cont'd)

- Mit der O-Notation fassen wir ähnliche Algorithmen/Aufwandsfunktionen zu **Klassen** zusammen: Algorithmen, deren Aufwand ähnlich schnell wächst, gehören zur gleichen Klasse (sie besitzen gleiche **Komplexität**).
- Gängig ist auch die Schreibweise $f = O(g)$ (statt $f \in O(g)$). Dies ist aber missverständlich, denn die O-Beziehung ist **nicht symmetrisch**: Aus $n = O(n^2)$ folgt <u>nicht</u> $n^2 = O(n)$.

Definition: O-Notation

Beispiel-Klassen

- "linear": n, $1000n + 3$
- "quadratisch": n^2, $7n^2 + 5n - 10$
- "logarithmisch": $log_2(n)$, $log_3(n)$, $log_8(n) + 4$
- "exponentiell": 2^n, $2^n + n^{10000} + 100000$

Weitere Anmerkungen

Wir unterscheiden im Folgenden zwischen der ...

- **Laufzeit** eines Algorithmus f_n *(= exakte Anzahl an Rechenschritten, umständlich zu berechnen)*.
- **Komplexität** $O(f_n)$ (= grobe Abschätzung, leicht zu berechnen, "genau genug").

Man sollte die Komplexität möglichst präzise angeben.
Beispiel: Für $f_n = 2n$ gilt $f_n \in O(2^n)$, aber auch $f_n \in O(n)$ *(besser!)*.

Komplexitätsklassen als Mengen

O-Notation: Beweis (Variante 1)

$$\cancel{4}\,n^2 + \cancel{2n+5} \longrightarrow n^2$$

Wir zeigen per **vollständiger Induktion**: $\underbrace{4n^2 + 2n + 5}_{f} \in \underbrace{O(n^2)}_{g}$.

O-Notation: Beweis (Variante 1)

O-Notation: Theorie

Theorem (Grenzwerte und die O-Notation)

1. *Ist* $\frac{f_n}{g_n}$ *konvergent, folgt* $f_n \in O(g_n)$
2. *Gilt* $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = \infty$, *folgt* $f_n \notin O(g_n)$.

Beweis (zu 1.)

$\frac{f_n}{g_n}$ sei konvergent

$\rightarrow \frac{f_n}{g_n}$ ist beschränkt *(siehe Analysis)*.

$\rightarrow$ Es gibt eine Schranke $c \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{f(n)}{g(n)} \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{f(n)}{g(n)} \leq c$ für alle $n \geq n_0$.

$\rightarrow f \in O(g)$.

O-Notation: Beweis (Variante 2)

$$\cancel{4}\, n^2 + \cancel{2n+5} \longrightarrow n^2$$

Wir zeigen per **Folgengrenzwert**: $\underbrace{4n^2 + 2n + 5}_{f} \in \underbrace{O(n^2)}_{g}$.

O-Notation: Beweis (Variante 2)

Die O-Notation: Weitere Symbole

Definition ($f \in o(g)$)

Ist $\frac{f_n}{g_n}$ eine **Nullfolge**, *schreiben wir $f_n \in o(g_n)$.*

Anmerkungen

- Umgangssprachlich: *"f wächst* **deutlich langsamer** *als g"*.
- **Beispiel**: $n \in o(n^2)$, aber $2n^2 \notin o(n^2)$.

Definition ($f \in \Theta(g)$)

Gilt sowohl $f_n \in O(g_n)$ als auch $g_n \in O(f_n)$, so schreiben wir $f_n \in \Theta(g_n)$.

Anmerkungen

- Ugs.: *"f und g wachsen* **ungefähr gleich schnell**."
- **Beispiel**: $2n^3 \in \Theta(n^3)$, aber $2n^2 \notin \Theta(n^3)$.

Die O-Notation: Weitere Symbole

Definition ($f \in \Omega(g)$)

$f \in \Omega(g)$ gilt genau dann wenn $g \in O(f)$.

Anmerkungen

- Ugs.: "f wächst nicht deutlich langsamer als g."
- **Beispiel**: $2n^3 \in \Omega(n^2)$, aber $2n \notin \Omega(n^2)$.

Do-Aufwandsklassen–Yourself

a_n	$1000n^3$	2^n	$log_2(n)$
b_n	n^4		1
$a_n \in O(b_n)$?		✓	
$b_n \in O(a_n)$?		✓	
$a_n \in o(b_n)$?		—	
$b_n \in o(a_n)$?		✓	
$a_n \in \Omega(b_n)$?		—	
$b_n \in \Omega(a_n)$?		✓	
$a_n \in \Theta(b_n)$?		✓	
$b_n \in \Theta(a_n)$?		✓	

O-Notation: Rechenregeln

Theorem (O-Notation: Rechenregeln)

$O(c \cdot f_n) = O(f_n)$ $O(f_n + c) = O(f_n)$	*Ignorieren von Konstanten*
$O(f_n + g_n) = O(max(f_n, g_n))$	*Stärkster Summand zählt*
$O(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0) = O(n^k)$	*Polynome*
$(f \in O(g)$ *und* $g \in O(h)) \rightarrow f \in O(h)$	*Transitivität*
$(f \in O(h)$ *und* $g \in O(k)) \rightarrow f \cdot g \in O(h \cdot k)$	*Multiplikation*
...	

Anmerkungen

- Weitere Rechenregeln folgen im Praktikum.

Outline

Die O-Notation und Code-Primitive

In der Praxis können wir mit Hilfe der O-Notation die Aufwandsklasse von Code bestimmen *(hier für den Worst Case)*.

1. Einmalige Ausführung

- Initialisierung und "Aufräumen" bestehen häufig aus Einzelbefehlen *(z.B. Variablen-Initialisierungen)*.
- Deren Aufwand ist **konstant** ($O(1)$) und somit vernachlässigbar.

```
# Lineare Suche

pos = 0

while pos < n and a[pos] != s:
  pos = pos+1

return pos
```

2. Sequenzen

- Bei hintereinander ausgeführten Algorithmenteilen zählt nur der Aufwändigste.
- Siehe auch unsere Rechenregel: $O(f+g) = O(max(f,g))$

```
// Algorithmus A, Sequenz
f
g
h
```

O(A) = O(f + g + h)
= O(max(f,g,h))

Die O-Notation und Code-Primitive

3. Verzweigung

- Gesamtkosten = Kosten für Prüfen der if-Bedingung, plus Kosten des teureren Zweigs

```
// Algorithmus A, Verzweigung
if t:
    f
else:
    g
h
```

O(B) = O(t) + O(max(f,g)) + O(h)
= O(max(t,f,g,h))

4. Schleifen

- Aufwand für Ausführung eines Durchlaufs $\times$ # Durchläufe
- Gilt für While-Schleifen und For-Schleifen

```
// Algorithmus A, While-Schleife
while t:
    f
```

O(A) = O((t+f) · #Durchläufe)

(in Abhängigkeit von n)

```
// Algorithmus A, For-Schleife
for i in 1...n:
    f
```

O(A) = O(f · n)

Beispiel: Lineare Suche

```
1 pos = 0
2 while pos < n and a[pos] != s:
3     pos = pos+1
4 return pos
```

Abschätzung (Worst Case)

- **Initialisierung und "Aufräumen"** (Zeile 1+4) besitzen konstanten Aufwand → $O(1)$
- **Kosten je Schleifendurchlauf** (Zeile 2+3) → $O(1)$
  - Prüfung der Schleifenbedingung: $O(1)$
  - ggfs. Ausführung des Schleifenkörpers: $O(1)$
- **Anzahl der Durchläufe (Worst Case)** → $O(n)$
- **Gesamtkosten**

$$O(1) + O(1) \cdot O(n) = O(n)$$

- Der Algorithmus "Lineare Suche" besitzt **lineare Komplexität**.

Beispiel: Duplicate Checker

```
for i = 1..n:

    if linear_search(a, i):
        return True

return False
```

```
function linear_search(a, i):
    suchwert = a[i]
    for j = i+1...n:
        if a[j]==suchwert:
            return True
    return False
```

Algorithmus

- **Gegeben**: Array *a* der Länge *n (beginnt bei a[1])*.
- **Ergebnis**: True wenn *a* mind. einen Wert mehrfach enthält.
- Wir ermitteln die **Komplexität** im **Worst Case**:

Beispiel: Duplicate Checker

```
for i = 1..n:

    if linear_search(a, i):
        return True

    return False
```

```
function linear_search(a, i):
    suchwert = a[i]
    for j = i+1...n:
        if a[j]==suchwert:
            return True
    return False
```

Beispiel: Duplicate Checker

```
for i = 1..n:

    if linear_search(a, i):
        return True

    return False
```

```
function linear_search(a, i):
    suchwert = a[i]
    for j = i+1...n:
        if a[j]==suchwert:
            return True
    return False
```

Outline

Einige wichtige Aufwandsklassen

Theorem (Wichtige Aufwandsklassen)

Die folgende Aufstellung zeigt typische Aufwandsklassen, die bei Algorithmen (Suchen, Sortieren, Planen, ...) häufig auftreten:

Klasse	**Name**	**Beispiel-Algorithmus (Worst-case-Aufwand)**
$O(1)$	*konstant*	*Suche in Array der Länge 42*
$O(\log n)$	*logarithmisch*	*Suche in balanciertem Baum*
$O(n)$	*linear*	*lineare Suche*
$O(n \cdot \log n)$	*linearithmisch*	*Mergesort*
$O(n^2)$	*quadratisch*	*Insertionsort*

Einige wichtige Aufwandsklassen

Theorem (Wichtige Aufwandsklassen (Cont'd))

Klasse	**Name**	**Beispiel-Algorithmus (Worst-case-Aufwand)**
$O(n^p)$	*polynomiell*	*Multiplikation von zwei* $n \times n$*-Matrizen*
$O(2^n)$	*exponentiell*	*Naiver SAT-Solver (n Variablen)*
$O(n!)$	*Fakultät*	*Naiver TSP-Solver (n Städte)* $O(n!)$

Aufwandsklassen: Verhalten

n	$\log n$	n	$n \cdot \log(n)$	n^2	n^3	2^n
10	3,32	10	33,22	100	1000	1024
100	6,64	100	66,44	10000	10^6	$1,27 \cdot 10^{30}$
1000	9,97	1000	9966	10^6	10^9	10^{301}
10000	13,29	10000	132877	10^8	10^{12}	10^{3010}

- Algorithmen bis zu linearithmischer Komplexität sind in der Regel **effizient**.
- Höhergradig polynomielle Komplexität ist bei moderaten Problemgrößen noch **praktisch handhabbar**.
- **Exponentielle** Algorithmen sind **nicht praktikabel**.
  $\rightarrow$ **rote Linie** = Grenze des praktisch Machbaren.

Quelle: Hartmann – "Mathematik für Informatiker"

O-Notation: Diskussion

Sinn der O-Notation

- Die O-Notation dient uns als **erste Näherung**, um schnell das Skalierbarkeitsverhalten von Algorithmen **abzuschätzen**.

Grenzen der O-Notation

- In der Praxis sind konstante Faktoren oft **nicht vernachlässigbar** *(engl.: "constants matter")*. **Beispiel**: Es ist wichtig ob ein Mausklick in 0.2 oder 2 Sekunden verarbeitet wird.
- Wenn die **Problemgröße gering** ist, kann ein laut O-Notation schlechteres Verfahren besser sein.
- Spezielle **Hardware** wird nicht berücksichtigt *(Bsp. GPUs im Deep learning)*.
- Oft betrachtet man den Worst Case, der **Average Case** kann aber wichtiger sein *(Bsp. Quicksort, Simplex)*.

Outline

Die binäre Suche

- Bisher: Komplexität einzelner **Algorithmen**.
- **Achtung**: Ein **Problem** kann durch **viele verschiedene Algorithmen** gelöst werden!

> Definition (Komplexität eines Problems)
>
> *Die Komplexität eines Problems entspricht der Komplexität des* **effizientesten Algorithmus***, der das Problem löst.*

Anmerkungen

- Die Komplexität eines Problems ist **schwierig** zu bestimmen.
  Gibt es bessere Algorithmen als die uns bekannten?

Die Komplexität des Problems "Suchen"

- Wir nehmen nun an, das Feld $a[0], \ldots, a[n-1]$ sei **sortiert**.
- Hier ist das Suchproblem **maximal O(n)** *(lineare Suche)*.
- **Frage**: Geht es noch besser?

Die binäre Suche: Ansatz

Suche nicht von links nach rechts, sondern prüfe ob das Element in der **Mitte** $a[m]$ (mit $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) dem Suchwert s entspricht.

- Ist $a[m] = s$, brechen wir ab (Erfolg).
- Ist $a[m] < s$, suchen wir in der rechten Hälfte weiter.
- Ist $a[m] > s$, suchen wir in der linken Hälfte weiter.

Beispiel (Suchwert s=8)

1	2	2	4	6	6	7	9	
1	2	2	4	6	6	7	9	Prüfe das mittlere Element $a[m]$
...								
1	2	2	4	6	6	7	9	$a[m] < s \rightarrow$ rechte Hälfte ...
1	2	2	4	6	6	7	9	Prüfe das mittlere Element ...
1	2	2	4	6	6	7	9	$a[m] < s \rightarrow$ rechte Hälfte ...
1	2	2	4	6	6	7	9	...
1	2	2	4	6	6	7	9	...
1	2	2	4	6	6	7	9	Abbruch.

Die binäre Suche: Algorithmus

```
#  Binäre Suche
function binsearch(links, rechts):
    if rechts < links:              # Fall 1: Suche erfolglos
      return 0
    m = (links+rechts)/2
    if s == a[m]:                   # Fall 2: Suchwert gefunden
      return m
    else if s < a[m]:
      return binsearch(links, m-1)  # Fall 3a: Suche links weiter
    else
      return binsearch(m+1, rechts) # Fall 3b: Suche rechts weiter

return binsearch(0, n-1)
```

- Rekursive Methode `binsearch`, die zwei Integer-Werte `links` und `rechts` erhält. Diese markieren die linkeste und rechteste Position des noch zu durchsuchenden Teils des Arrays.
- Initialer Aufruf (unten): `binsearch(0, n-1)`.
- Suchen in linker/rechter Hälfte mit rekursivem Aufruf (3a,3b).
- Mit jedem rekursiven Aufruf halbiert sich die Problemgröße.

Die binäre Suche: Komplexität

```
#  Binäre Suche
function binsearch(links, rechts):
    if rechts < links:            # Fall 1: Suche erfolglos
      return 0
    m = (links+rechts)/2
    if s == a[m]:                 # Fall 2: Suchwert gefunden
      return m
    else if s < a[m]:
      return binsearch(links, m-1)  # Fall 3a: Suche links weiter
    else
      return binsearch(m+1, rechts) # Fall 3b: Suche rechts weiter

return binsearch(0, n-1)
```

Laufzeit $f(n)$?

- Ein Durchlauf von `binsearch()` besitzt konstante Kosten c.
- Rekursiver Aufruf führt zu halb so großem Problem: $f(n/2)$.
- Abbruchbedingung (Bereich besitzt Breite 1): Kosten c'.
- Wir erhalten eine sogenannte **Rekurrenzgleichung**:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n/2) + c \\
f(1) &= c'
\end{aligned}
$$

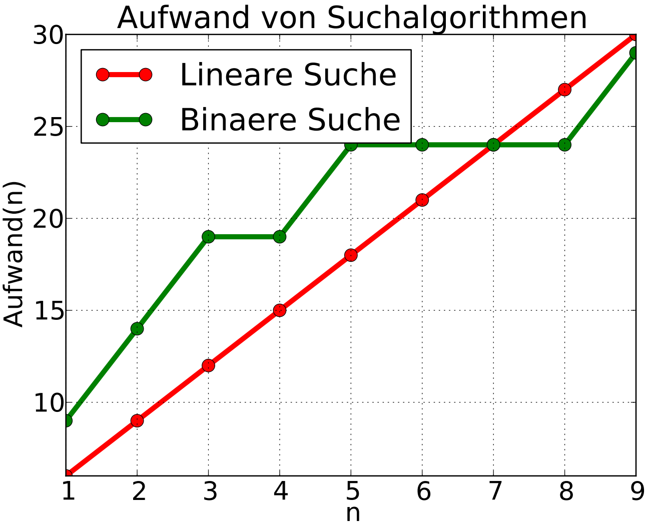
Die binäre Suche: Komplexität

Die binäre Suche: Komplexität

Die binäre Suche: Komplexität

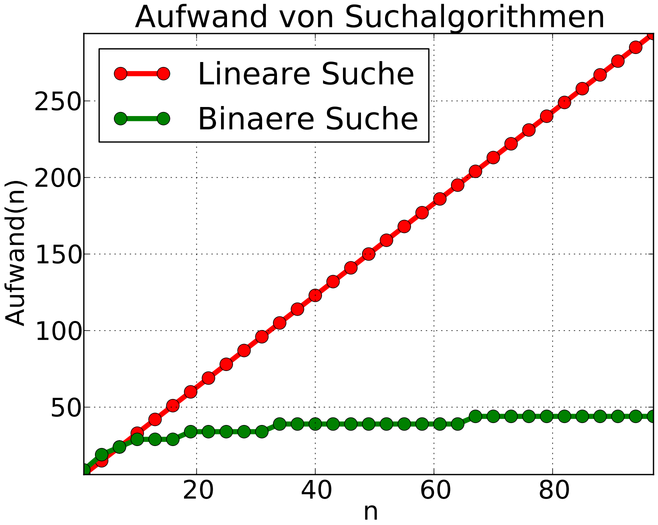
Lineare Suche vs. binäre Suche

Wir plotten die Laufzeit von linearer Suche ($O(n)$) und binärer Suche ($O(log(n))$) gegen die Problemgröße n:



Lineare Suche vs. binäre Suche

Mit wachsendem n wird der Vorteil der binären Suche deutlich:



Lineare Suche vs. binäre Suche

Mit wachsendem n wird der Vorteil der binären Suche deutlich: