

## Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (WS 2021/22)

### Aufgabenblatt 9

zu bearbeiten bis: 09.01.2022, 23:59 Uhr

---

#### Aufgabe 9.1 (ML-Schätzer: German Tanks)

Lösen Sie das “German Tank Problem” (siehe Vorlesungsvideos) mittels ML-Schätzung. Hierbei sei die Seriennummer  $X$  von Panzern gleichverteilt im Bereich  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Gegeben den Parameter  $N$  (die Gesamtzahl der Panzer), lautet die Verteilung von  $X$  also:

$$P(X = k; N) = \begin{cases} 1/N & \text{falls } 1 \leq k \leq N \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gegeben sei nun eine Stichprobe der Seriennummern einiger Panzer:

$$k_1, \dots, k_{10} = 48, 64, 17, 97, 35, 75, 38, 51, 7$$

- Formulieren Sie die Likelihood-Funktion  $L(N)$ .
- Bestimmen Sie die generelle Formel für den ML-Schätzer  $\hat{N}$ : Für welches  $N$  wird  $L(N)$  maximal? Wieviele Panzer existieren demnach insgesamt?

#### Aufgabe 9.2 (ML-Schätzer anwenden)

Ein Server wird mit baugleichen Festplatten betrieben. Das Log des Servers zeigt die folgenden Ereignisse:

...  
März 2017: Zwei neue Festplatten eingebaut.  
November 2017: Platte 1 fällt aus (und wird ausgetauscht).  
Januar 2019: Platte 1 fällt aus (und wird ausgetauscht).  
Februar 2019: Platte 2 fällt aus (und wird ausgetauscht).  
Februar 2020: Platte 1 fällt aus (und wird ausgetauscht).  
Dezember 2020: Platte 2 fällt aus (und wird ausgetauscht).  
Juni 2021: Platte 2 fällt aus.  
...

$X$  sei die (exponentialverteilte) Dauer bis zum Ausfall einer Festplatte (in Monaten).

- Erheben Sie aus dem obigen Log eine Stichprobe von Betriebsdauern bis zum jeweiligen Ausfall.
- Berechnen Sie auf Basis der Stichprobe den ML-Schätzer  $\hat{\lambda}$ . Hinweis: Es ist nicht gefordert, die Schätzfunktion herzuleiten!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft eine Festplatte mindestens zwei Jahre ohne Ausfall?

### Aufgabe 9.3 (Erwartungstreue)

Gegeben sei eine i.i.d.-Stichprobe normalverteilter Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Wir vergleichen den folgenden Schätzer  $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2} \cdot X_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n X_i$  mit dem ML-Schätzer  $\hat{\mu} = \bar{X}$ .

- a) Untersuchen Sie ob der Schätzer  $\hat{\mu}_2$  erwartungstreu ist.
- b) Würden Sie den Schätzer  $\hat{\mu}_2$  dem ML-Schätzer  $\hat{\mu}$  vorziehen? Begründen Sie informell anhand der Varianz.

### Aufgabe 9.4 (Intervallschätzer)

Daniel fährt an jedem Werktag zur Hochschule und zeichnet über zehn Tage die Fahrtzeit (in Minuten) auf:

$$x_1, \dots, x_{10} = 35, 47, 51, 32, 45, 40, 60, 38, 40, 40.$$

Wir modellieren die Fahrtzeit als eine normalverteilte Zufallsvariable  $X$ . Bestimmen Sie den Intervallschätzer für  $\mu$  (bei Konfidenzniveau  $\gamma = 90\%$ ) ...

- a) wenn  $\sigma = 10$ .
- b) wenn  $\sigma$  nicht bekannt ist.
- c) Daniel zeichnet weitere Tage auf. Wir nehmen an, dass sich hierbei  $\bar{x}$  und  $s^*$  nicht ändern ( $\sigma$  sei immer noch unbekannt). Wie oft muss Daniel seine Fahrtzeit messen, bis die Breite des Konfidenzintervalls unter 1 sinkt?