Aufg. 3,2) / Quantile

Aufg. 2) / E(1)

Hochschule RheinMain
Wintersemester 2021/22

Fachbereich DCSM
Prof. Dr. Adrian Ulges

Test 2 zur Veranstaltung

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________ Punkte: ____________________

Übungsgruppe *(bitte ankreuzen)*

- ☐ MO, 10:00 (Kaiser)
- ☐ DI, 10:00 (Kaiser)
- ☐ MI, 10:00 (Eversheim)
- ☐ keine
- ☐ DO, 14:15 (Ulges)
- ☐ FR, 11:45 (Ulges, online)
- ☐ FR, 14:15 (Eversheim)

☐ Ich habe das Seminar bereits bestanden und schreibe nur zu Übungszwecken mit.

Hinweise:

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 40 Minuten.*
- *Beachten Sie die* **Hinweise zum Test in Stud.IP**.
- *Sie dürfen auch die Rückseiten der Blätter beschreiben.*
- *Geben Sie Ergebnisse als Bruch oder gerundet auf 3 Nachkommastellen an.*
- *Die alleinige Angabe eines Endergebnisses ist nicht ausreichend.*
  Geben Sie immer einen Rechenweg / eine Begründung an!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Mit Corona infizierte Personen haben Kontakte, die sich ~~erwartungsgemäß~~ zu 30% anstecken. Die Kontakte sind unabhängig voneinander.

1. Bob hat 5 Kontakte. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Bob **weniger als** ~~3~~ 2 seiner Kontakte angesteckt hat. Benennen Sie hierzu eine **diskrete Verteilung** und die zugehörigen **Parameter**. 2

(0,5)

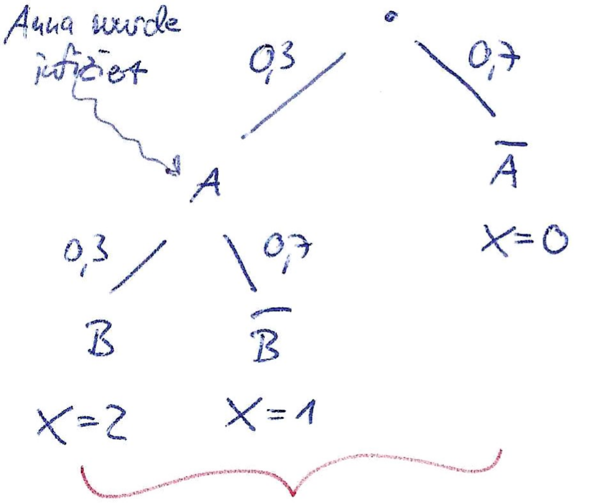
Binomial, $n=5$, $p=0{,}3$

$$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) \quad 0{,}5$$

$$= \binom{5}{0}\cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^5 + \binom{5}{1}\cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^4 \quad \} \, 0{,}5$$

$$= 0{,}168 + 0{,}360 = 0{,}528 \quad 0{,}5$$

2. Xavier hatte mit seiner Freundin Anna einen Kontakt. Danach hat Anna mit Bernhard einen Kontakt, bei dem Sie – **falls** Sie sich infiziert hat – das Virus zu 30% weitergegeben hat. Berechnen Sie für die Gesamtzahl der infizierten Kontakte **Realisierungen** und zugehörige **Wahrscheinlichkeiten**. Hinweis: Es bietet sich ein **Ereignisbaum** an. 2



1 (wenn Baum korrekt!)

$P(X=0) = 0{,}7$

$P(X=1) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$

$P(X=2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

Realisierungen sind Zahlen!

x_i	0	1	2
p_i	0,7	0,21	0,09

1

Aufgabe 2 (3 Punkte)

1. Alice hat 10 **kurze** Kontakte (Übertragungswahrscheinlichkeit je Kontakt: 10%) und 3 **lange** Kontakte (Übertragungswahrscheinlichkeit je Kontakt: 40%). Berechnen Sie den **Erwartungswert** für die Gesamtzahl der insgesamt infizierten Kontakte mittels unserer **Rechenregeln** für Zufallsvariablen. 1

X_1 = Anzahl infizierter kurzer Kontakte $(n_1 = 10,\ p_1 = 0{,}1)$

X_2 = " " langer " $(n_2 = 3,\ p_2 = 0{,}4)$

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

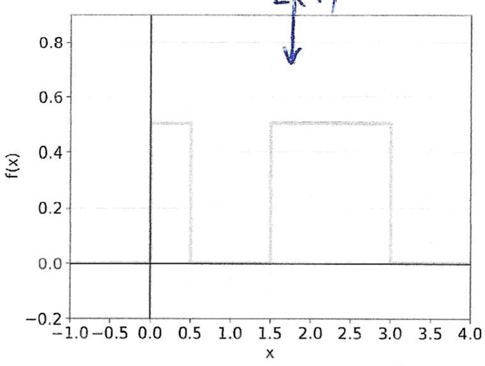
$$= n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2$$

$$= 10 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 2{,}2$$ 1

2. Gegeben die Zufallsvariable X mit Dichte f, berechnen Sie **E(X)** mittels Integration. 2

Rechenweg!

$E(X)$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2}x\, dx + \int_{1{,}5}^{3} \frac{1}{2}x\, dx$$ 0,5

Stammfunktion!

$$= \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^{0{,}5} + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{1{,}5}^{3}$$ ← ~~0,5~~ 1

$$= \cancel{\frac{1}{16}} - 0 + \frac{9}{4} - \cancel{\frac{9}{16}} = \frac{9}{4} - \frac{2}{4} = \frac{7}{4}$$ 0,5

Aufgabe 3 (4 Punkte) 0-=4

Die Schuhgröße von Frauen X sei **normalverteilt** mit $\mu = 39$ und $\sigma^2 = 16$.

1. Leiten Sie die Wahrscheinlichkeit her, dass eine beliebige Frau eine Schuhgröße zwischen 38 und 43 besitzt. 2

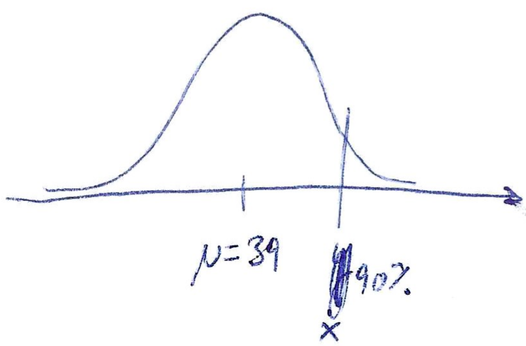
$$P(38 \le X \le 43) = P\left(\frac{38-39}{4} \le Y \le \frac{43-39}{4}\right)$$

$$= N\left(\tfrac{4}{4}\right) - N\left(\tfrac{-1}{4}\right) \quad 0{,}5$$

$$= N(1) - \left(1 - N\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) \quad 0{,}5$$

$$= \underbrace{0{,}8413 - (1 - 0{,}5987)}_{0{,}5} = 0{,}44 \quad 0{,}5$$

2. Leiten Sie das **90%-Quantil** von X her. 1



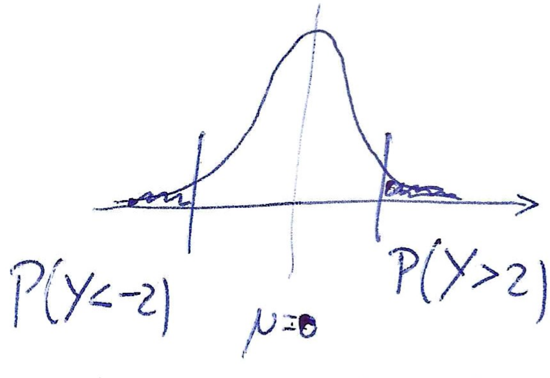
$$P(X \le x_{90\%}) = 0{,}9$$

$$P\left(Y \le \underbrace{\frac{x_{90\%} - 39}{4}}\right) = 0{,}9 \quad 0{,}5$$

$$y_{90\%} = 1{,}282$$

$$x_{90\%} = y_{90\%} \cdot 4 + 39 = 44{,}128 \quad 0{,}5$$

3. Gilt für **standardnormalverteilte** Variablen Y, dass $P(Y < -2) = 1 - P(Y > 2)$? Begründen Sie informell anhand einer Skizze. 1



Falsch. Die W'keiten sind gleich, nicht Gegenw'keiten!

Unerläuterte Skizze reicht nicht! Welche Bereiche entsprechen welchen W'keiten?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei X eine **hypergeometrisch** verteilte Zufallsvariable mit bekanntem N=10 und K=4. Wir ziehen 3 Realisierungen von X und erhalten folgende Stichprobe:

$$k_1, \ldots, k_3 = 3, 3, 4.$$

Gesucht ist der **Parameter n**.

1. Berechnen Sie die Likelihood für n=9, $L(9)$. 2

$$L(9) = P(X=k_1; n=9) \cdot P(X=k_2; n=9) \cdot P(X=k_3; n=9)$$

~~P(X=2) ausgerechnet. Noch 1,5~~

$$= \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{6}}{\binom{10}{9}} \cdot \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{6}}{\binom{10}{9}} \cdot \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{6}{5}}{\binom{10}{9}} \quad 1{,}5$$

$$= \frac{4 \cdot 1}{10} \cdot \frac{4 \cdot 1}{10} \cdot \frac{1 \cdot 6}{10} = \frac{96}{1000} \quad 0{,}5$$

2. Für welche Werte von n wird die Likelihood **null**? Begründen Sie **knapp**. 1

- Für $n<4$: Weil $k_3=4$, ~~können~~ (wir ziehen 4 weiße Kugeln) können wir nicht weniger als 4 ziehen.
- Für $n>10$: Wir können nicht mehr ~~als~~ Kugeln ziehen als vorhanden.

eins von beiden: 1 Punkt.

Punkte nur bei Begründung!

3. *(etwas kniffliger)* Wird $L(4)$ **höher** oder **niedriger** sein als $L(9)$? Begründen Sie knapp und **informell**, ohne $L(4)$ konkret auszurechnen. 1

Wenn wir nur 4 der Kugeln ziehen, ist es sehr unwahrscheinlich (fast) alle der weißen zu ziehen. Die Stichprobenwerte sollten niedriger sein. $\rightarrow L(4) < L(9)$

Nur Mit Nenner argumentiert: 0,5.

(Ausgerechnet: $L(4) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{4}} \cdot \ldots = 0{,}00006$ (viel kleiner)