7)

4) Sei L regulär. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ gilt:

$x = uvw$ mit

i) $|v| \geq 1$

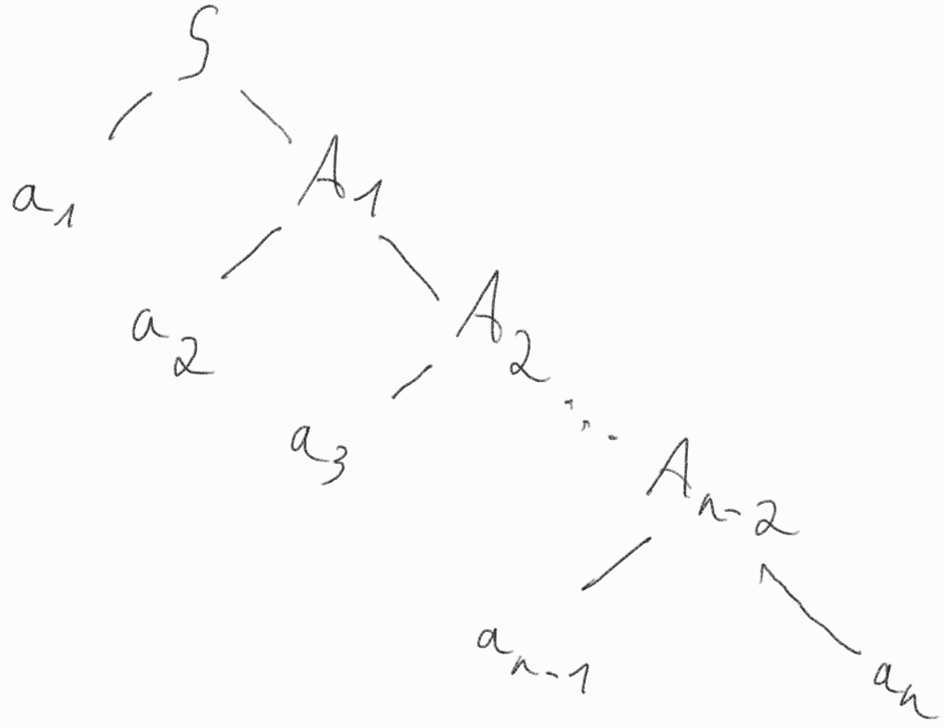
ii) $|uv| \leq n$

iii) $uv^iw \in L$ für $i \in \mathbb{N}$

Beweis:

Da L regulär ist, existiert eine Typ3-Grammatik $G = (\Sigma, N, P, S)$ mit $L(G) = L$.

Ein Syntaxbaum von $x \in L$ sieht dann wie folgt aus:



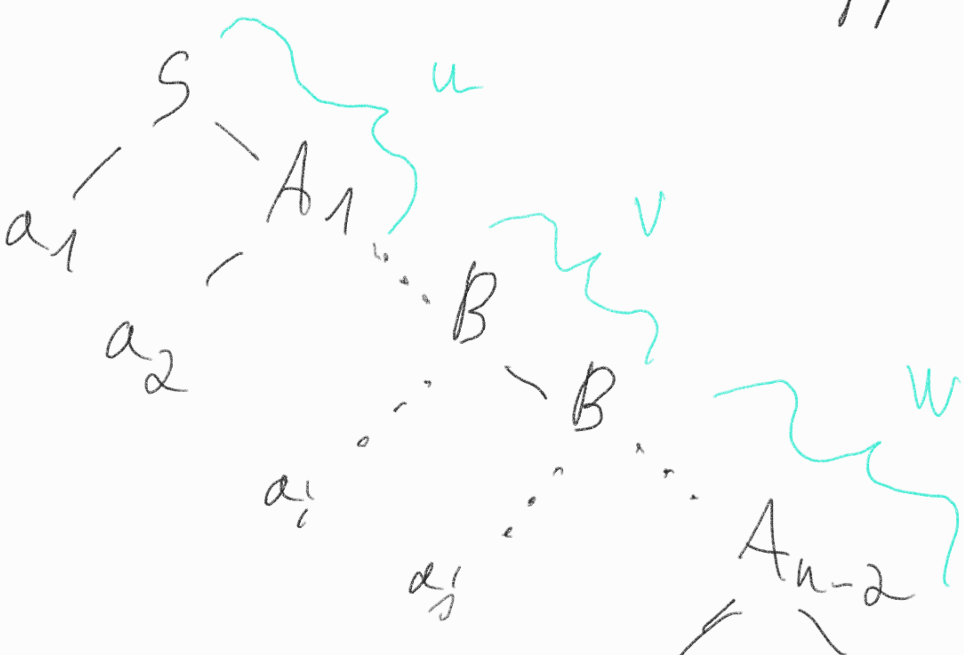
$X = a_1 a_2 \cdots a_n$

$A_1, A_2 \cdots A_{n-2} \in N$

Wir definieren $n =_{def} \#(N)+2$

Für jedes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq n$ gilt:

Im Syntaxbaum kommen mind. $\#(N)+1$ Nichtterminale vor $\Rightarrow$ mindestens ein Nichtterminales kommt doppelt vor



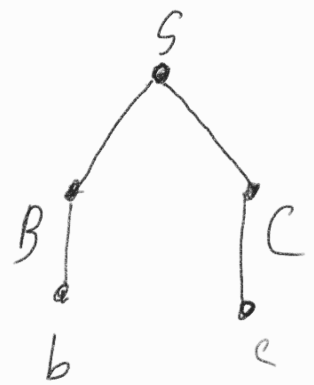
D.h.

Mit $|v| \geq 1$, nach spätestens $\#(N)+1$ Nichtterminalen kommt $\Rightarrow$

$|uv| \leq \#(N)+2 = n$

und damit auch $uv'w \in L$

8) 1) Für eine Gramatik in Chomsky-Normalform ergeben sich Syntaxbäume der Form:



Regeln der Form $A \to BC$

Regeln der Form $A \to a$

D.h. gibt $x \in L(G)$, dann sieht der Ersetzungsprozess wie folgt aus:

$$S \vdash A_1 A_2 \vdash A_1 A_2' A_3' \vdash \ldots \vdash A_1 A_2' A_3' \ldots A_{|x|}'$$

Da in jedem Ableitungsschritt ein Nichtterminales dazu kommt brauchen wir $|x|-1$ Schritte und $|x|$ um $A_1' \dots A_{|x|}' \vdash x$ zu erzeugen.

Zusammen: $2|x|-1$ Schritte

2) Gegeben: $G = (\{),(,\wedge,\vee,\neg,x\},\{F\},F,P)$

$P = \{$

1. $F \to (F \wedge F)$,
2. $F \to (F \vee F)$,
3. $F \to \neg F$,
4. $F \to x$

$\}$

ist nicht in Chomsky NF.

$\Rightarrow$ konstruiere äquivalente Grammatik G'

1. $F \to (F \wedge F)$ wird zu $F \to AFUFZ$

2. $F \to (F \vee F)$ — " — $F \to AFOFZ$

3. $F \to \neg F$ — " — $F \to NF$

4. Neue Regeln: $A \to ($
$U \to \wedge$
$O \to \vee$
$Z \to)$
$N \to \neg$

Regeln kürzen:

- $F \to A_1 R_1$, $R_2 \to U R_3$, $R_3 \to FZ$, $R_2 \to O R_3$

$G'' = (\{\,),\ (,\ \vee,\ \wedge,\ \neg\},\ \{R_1, R_2, R_3, A, F, U, O, Z, N\},\ F,\ P'\}$