8) 3) i) $L_2 =_{def} \{ a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0 \}$

$G_2 = (\{a, b, c\}, \{S, A, B\}, S, P_2)$

$S \to A \mid B \mid AB$

$A \to aAb \mid ab$

$B \to cB \mid c$

Analog dazu kann $G_3$ von $L_3$ erzeugt werden und es kann gezeigt werden, dass sie kontextfrei ist.

Zusammen gilt:

$L_2 \cap L_3 = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$

Wir wissen $L_2 \cap L_3$ <u>nicht</u> kontextfrei ist.

D.h.: Der Schnitt zweier kontextfreier Sprachen ist nicht unbedingt auch kontextfrei

ii)

Wir wissen: (Aus vorherigen Übungen)

Die kontextfreien Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen.

Annahme: Das Komplement einer kontextfreien Sprache ist kontextfrei, dann ist

$$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$$

für kontextfreie Sprachen $L_1$ und $L_2$.

↯ zu Teil i ⇒ Anahme falsch #

9) 1)

$P = \{$

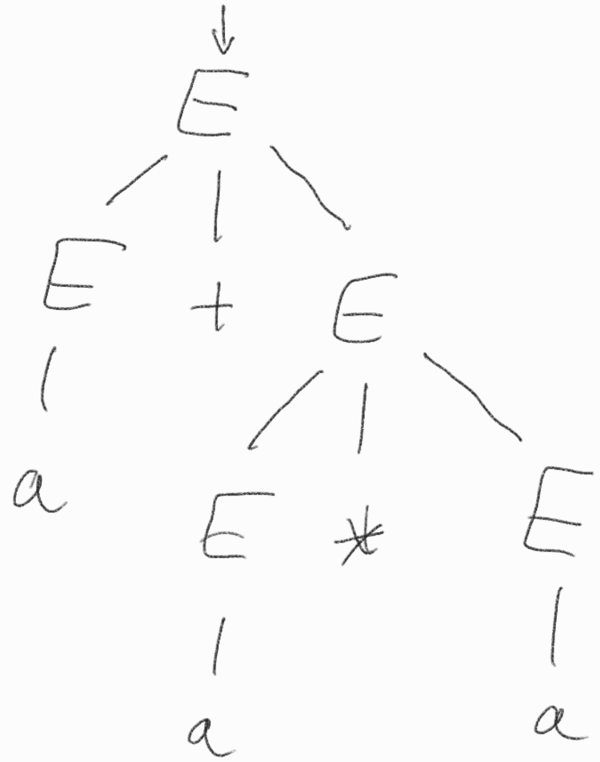
$E \to E + E$

$E \to E * E,$

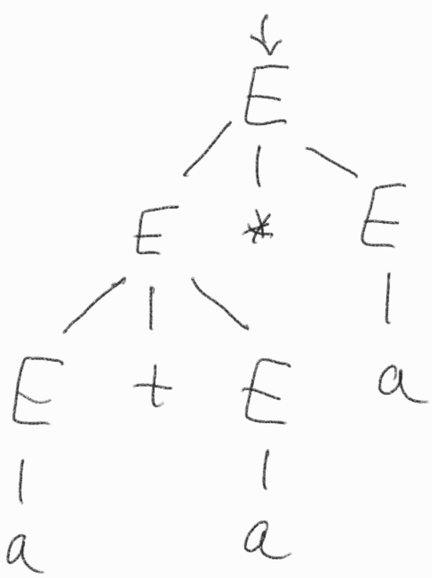
$E \to (E),$

$E \to a \quad \}$

a) $E \vdash E+E \vdash E+E*E \vdash a+a*a$




b) $E \vdash E*E \vdash E+E*E \vdash a+a*a$



$\Rightarrow$ kontextfreie Gramatiken können mehrdeutig sein

2) $L_1 =_{def} \{ 0^p \mid p \text{ ist Primzahl} \}$ ist nicht kontextfrei.

Annahme: $L_1$ ist kontextfrei, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und es gelten die Eigenschaften des Pumping Lemmas.

Wählen $z = 0^p$, wobei $p$ Primzahl mit $n \leq p$.

Also existiert eine Zerlegung $z = uvwxy$ und alle Wörter $uv^iwx^iy$, $i \geq 0$ sind in $L_1$ enthalten.

Wähle $i = p+1$, also

$z' = uv^{p+1}wx^{p+1}y \in L_1$.

Es gilt:

$$|z'| = \underbrace{|u| + |v| + |w| + |x| + |y|}_{p} + |v| \cdot p + |x| \cdot p$$

$$= p + |v| \cdot p + |x| \cdot p = p \cdot (1 + |v| + |x|)$$

da $|vx| \geq 1$ gilt:

ist $(1 + |v| + |x|) \geq 2$

Also $|z'|$ keine Primzahl $\lightning$ $z' \notin L$

$\Rightarrow L_1$ nicht kontextfrei

3)

| {} | b | a | a | b | a |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | B | C, A | C, A | B | C, A |
| 2 | A, S, C | B | S, C | S, C, A | |
| 3 | ∅ | B | B | | |
| 4 | ∅ | S, A | | | |
| 5 | A, C, S | | | | |
| 6 | | | | | |

P = {
S → AB
S → BC
A → BA
A → a
B → CC
B → b
C → AB
C → a
}

$\Rightarrow$ $baaba \in L(G)$