1) $L_1 =_{def} \{ w \in \{a,b\}^* \mid$ w beginnt mit einem a und endet mit einem b $\}$

$r_1 = \underline{a}\,(a|b)^*\,\underline{b} = a(\Sigma)^* b$
$= a(a^*b^*)^* b$

$a^*b^* = \varepsilon b \; a \varepsilon = ba$

$ab = ab \neq ba$

$L_2 =_{def} \{ w \in \{a,b\}^* \mid$ w enthalten mindestens drei a $\}$

$r_2 = (a|b)^*\underline{a}\,(a|b)^*\,\underline{a}\,(a|b)^*\,\underline{a}\,(a|b)^*$

$L_3 =_{def} \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält abab als Teilstring $\}$

$r_3 = (a|b)^* abab (a|b)^*$

$L_4 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ ein beliebiger String der ungleich bb und bbb ist $\}$

$r_4 = \varepsilon | b | (a | ba | bba | bbb(a|b))(a|b)^*$

2) $r_1 = (0^*) 1 (0^*)$

$L(r_1) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält genau eine 1 $\}$

$r_2 = \Sigma^* 1 \Sigma^*$

$L(r_2) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält mindestens eine 1 }

$r_3 = \{ 1^*(0(1^+))^* \}$

$L(r_3) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid 1^{n_1} 0 1^{n_2} 0 1^{n_3} \ldots 0 1^{n_k}$

$, n_1 \geq 0, n_2, \ldots, n_k > 0, k > 0 \}$

$r_4 = (\Sigma \Sigma \Sigma)^*$ $\quad \Sigma \triangleq (0|1)$

$L(r_4) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid |w|$ ist ein Vielfaches von 3 $\}$

3)

i) $L_1 =_{def} \{ w \in \{0,1\}^* \mid$ es gilt $|w|_1 = |w|_0 \}$

Beweis: Annahme: L_1 ist regulär, dann gilt das Pumping Lemma und es gibt auch eine Pumping Konstante n.

$s = 0^n 1^n \in L_1$

Nach Pumping Lemma kann s in $s = uvw$ aufgeteilt werden, sodass $uv^iw \in L_1$ für $i \geq 0$.

Wir wissen, dass $|uv| \leq n$, also besteht v nur aus Oen.

$\Rightarrow uv^iw \notin L_1$ für $i \geq 2 \rightarrow$ ↯

ii) $L_2 =_{def} \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Beweis: Annahme: L_2 ist regulär, das heist wir dürfen das Pumping Lemma benutzen.

$$S = \underbrace{0^n 1}_{w} \underbrace{0^n 1}_{w} \in L_2 \quad \text{mit}$$

der Pumping Konstante n und $S = uvw$ und $|uv| \leq n$, also besteht v aus 0en.

Dies bewirkt, dass $uv^iw \notin L_2$ für $i \geq 2$ ↯

iii)

$L_3 =_{def} \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

Beweis: Annahme: L_3 ist regulär. => Pumping Konstante n kann genutzt werden.

Sei $S = 0^{2^n} \in L_3$

und $S = uvw$ mit $|uv| \leq n$.

Da $n < 2^n$ gilt insbesondere $|v| < 2^n$

(1) Damit gilt $|uvvw| = |uvw| + |v| < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

(2) Weiterhin gilt, dass $|v| \geq 1$, also $2^n < |uvvw|$

Zusammen:

$$2^n \overset{1}{<} \underbrace{|uvvvw|}_{\text{kann keine 2er Potenz sein}} \overset{2}{<} 2^{n+1} \quad ↯$$

$$0^{2^2} = 0000$$

$$\underbrace{u \mid v}_{\leq 4} \mid w \to \varepsilon$$