8) 3) i) $L_2 =_{def} \{a^m b^n c^n \mid m,n \geq 0\}$

$L_3 =_{def} \{a^n b^n c^m \mid m,n \geq 0\}$

$G_3 = (\{a,b,c\}, \{S,A,B\}, S, P_2)$

$S \to A \mid B \mid AB \mid \varepsilon$

$A \to aAb \mid ab$

$B \to cB \mid c$

Analog zeigen wir L_2 ist kontextfrei.

Zusammen gilt:

$L_2 \cap L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

und wir wissen das $L_2 \cap L_3$ <u>nicht</u> kontextfrei.

D.h.: Der Schnitt zweier kontextfreier Sprachen ist nicht unbedingt auch kontextfrei

ii) Wir wissen: (Aus vorheriger Übung)
Die kontextfreien Sprachen sind unter der Vereinigung abgeschlossen.

Annahme: Das Komplement einer kontextfreien Sprache ist kontextfrei, dann ist

$$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$$

für kontextfreie Sprachen L_1 und L_2.

↯ zu Teil i ⇒ Annahme falsch

9) 1) $P = \{$

$E \to E + E,$

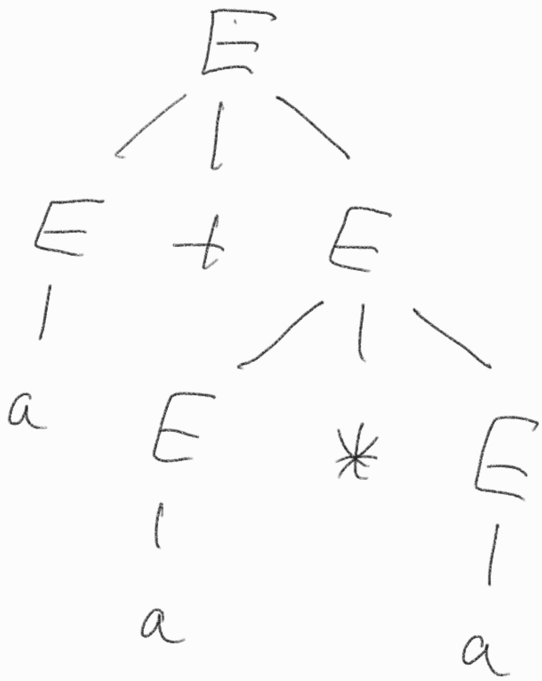
$E \to E * E,$

$E \to (E),$

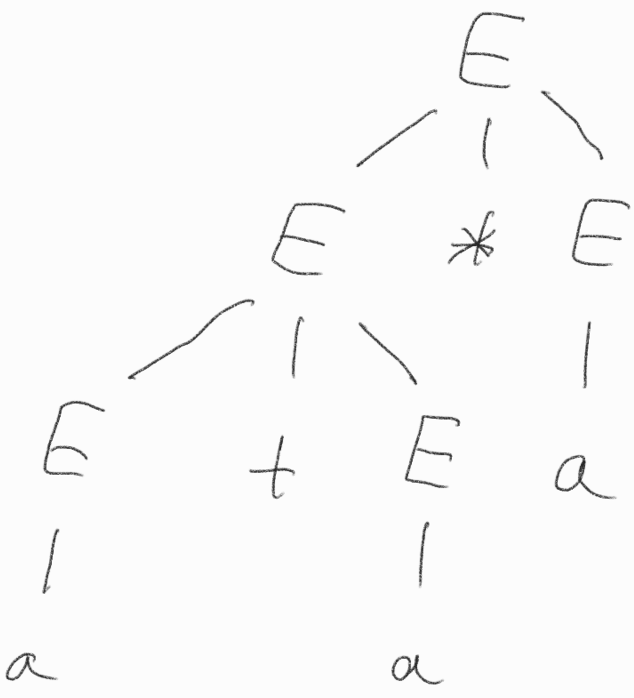
$E \to a$

$\}$

a) $E \vdash E+E \vdash E+E*E \vdash a+a*a$



b) $E \vdash E * E \vdash E + E * E \vdash a + a * a$



$\Rightarrow$ kontextfreie Grammatiken können mehrdeutig sein

2) $L_1 =_{def} \{0^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

Annahme: L_1 ist kontextfrei, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und es gelten die Eigenschaften des Pumping Lemmas.

Wähle $z = 0^p$, wobei p Primzahl und $n \leq p$.

Es existiert eine Zerlegung $z = uvwxy$ und alle Wörter uv^iwx^iy, $i \geq 0$ sind in L_1 enthalten.

Wähle $i = p+1$, also $z' = uv^{p+1}wx^{p+1}y \in L_1$.

Es gilt:

$$|z'| = |u| + |v| \cdot (p+1) + |w| + |x| \cdot (p+1) + |y|$$

$$= \underbrace{|u| + |v| + |w| + |x| + |y|}_{p} + |v| \cdot p + |x| \cdot p$$

$$= p + |v| \cdot p + |x| \cdot p = p \cdot (1 + |v| + |x|)$$

Da $|vx| \geq 1$ gilt:

ist $(1+|v|+|x|) \geq 2$

Also kann $|z'|$ keine Primzahl sein ↯

$\Rightarrow$ L ist nicht kontextfrei

j ↓ / i →	1	2	3	4	5
$\{\}$	b	a	a	b	a
1	B	A, C	A, C	B	A, C
2	S, A	B	S, C	S, A	
3	$\emptyset$	B	B		
4	$\emptyset$	S, A			
5	A, S, C				
6					

$P = \{$

$S \rightarrow AB$

$S \rightarrow BC$

$A \rightarrow BA$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow CC$

$B \rightarrow b$

$C \rightarrow AB$

$C \rightarrow a$

$\}$