1)

$$r_1 = \underline{a}(a|b)^*\underline{b}$$

$$= \underline{a}(a^*b^*)^*\underline{b}$$

$$r_2 = (a|b)^*\underline{a}(a|b)^*\underline{a}(a|b)^*\underline{a}(a|b)^*$$

$$r_3 = (a|b)^*\underline{abab}(a|b)^*$$

$$r_4 = a(a|b) \mid ba(a|b)^* \mid bba(a|b)^* \quad \varepsilon$$

$$= \varepsilon \mid b \mid (a \mid ba \mid bba \mid bbb(a|b))(a|b)^*$$

2) $\gamma_1 =_{def} (0^*)1(0^*)$

$L(\gamma_1) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält genau eine $1\}$

$\gamma_2 =_{def} \Sigma^* 1 \Sigma^* \quad \Sigma = \{0,1\}$

$L(\gamma_2) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält mindestens eine $1\}$

$\gamma_3 =_{def} \{1^*(0(1^+))^*\}$

$L(\gamma_3) = \{w \in \{0,1\}^* \mid$
$1^{n_1} 0 1^{n_2} 0 1^{n_3} 0 1^{n_4} \ldots 0 1^{n_k},$
mit $n_1 \geq 0, n_2, \ldots, n_k > 0, k \geq 0\}$

$$\gamma_4 =_{def} (\Sigma\Sigma\Sigma)^*$$

$$L(\gamma_4) = \{w \in (0,1)^* \mid |w| \text{ ist ein Vielfaches von } 3\}$$

3) i)

$$L_1 =_{def} \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gilt } |w|_1 = |w|_0\}$$

Satz: L_1 ist nicht regulär

Beweis: Annahme: L_1 ist regulär, dann gilt das Pumping-Lemma und es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$

$S = 0^n 1^n \in L_1$

Nach Pumping Lemma kann S in drei Teile aufgeteillt werden.

$S = uvw$

sodass $uv^iw \in L_1$ für $i \geq 0$

Wir wissen das $|uv| \leq n$,

also besteht das v nur aus 0len.

$\Rightarrow uv^iw \notin L_1$ für $i \geq 2$

$\Rightarrow L_1$ nicht regulär

ii) $L_2 =_{def} \{ ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$

Beweis: Anahme: L_2 ist regulär

$\Rightarrow$ Pumping Konstante

$$S = \underbrace{0^n 1}_{w} \underbrace{0^n 1}_{w} \in L_2$$

$S = uvw$ und $|uv| \leq n$,

dann besteht v nur aus 0len.

$\Rightarrow uv^iw \notin L_2$ für $i \geq 2$ ↯

iii) $L_3 = \{ 0^{2^n} \mid n \geq 0 \}$

Beweis: Annahme: L_3 ist regulär

$\Rightarrow$ Es gibt eine Pumping Konstante

$s = 0^{2^n} \in L_3$

$s = uvw$ mit $|uv| \leq n$.

Wenn das $n < 2^n$ gilt

$|v| < 2^n$.

$\Rightarrow |uvvw| =$
$|uvw| + |v| < 2^n + 2^n$

$= 2^{n+1}$.

Außerdem gilt, dass

$|v| \geq 1$, also

$2^n < |uvvw|$.

Zusammen gilt daher:

$$2^n < \underbrace{|uvvw|}_{\text{ist keine 2er Potenz}} < 2^{n+1} \quad ↯$$