Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Γιώργος Κούκας 9486

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την online παραμετροποίηση που καλούμαστε να κάνουμε στα διάφορα συστήματα που μας δίνονται. Θα προσπαθήσουμε να προσομοιώσουμε τα συστήματα αυτά μέσω του λογισμικού του MATLAB και να βρούμε τις κατάλληλες παραμέτρους ώστε να προσεγγιστεί όσο το δυνατόν καλύτερα γίνεται το εκάστοτε σύστημα μας. Οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτής της κλίσης και του Lyapunov είτε σε παράλληλη μορφή είτε σε μεικτή.

Θέμα 1

Μαθηματική Ανάλυση

$$\dot{x} = -ax + bu$$

Το σύστημα που μας δίνεται στο 1^{o} θέμα περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση. Παρακάτω θα ακολουθήσει μια μαθηματική ανάλυση για να μπορέσουμε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων που εισάγοντας το στο λογισμικό του MATLAB με τον κατάλληλο κώδικα θα μας παραμετροποιήσει το σύστημα.Εάν θεωρήσω το x σαν έξοδο έχουμε $\dot{y} = -ay + bu$

Θέλουμε να το φέρουμε στη μορφή:

$$y = \theta^{*T}\varphi$$

$$\dot{y} = a_m y - a_m y - ay + bu$$

$$a_m y + \dot{y} = (a_m - a)y + bu$$

$$sY + a_m y = (a_m - a)Y + bU$$

$$y = \frac{1}{s + a_m}[(a_m - a)y + bU]$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\theta^* = [a_m - a, b]^T$$

Και

$$\phi = \left[\frac{1}{s + a_m}Y + \frac{1}{s + a_m}U\right]^T$$

Οπότε φέραμε το σύστημα μας στην μορφή:

$$y = \theta^{*T}\varphi$$

Για να προσεγγίσουμε τώρα τις τιμές των παραμέτρων $\hat{a}, \hat{b}$ θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε το σφάλμα που ορίζεται ως:

$$e = y - \hat{y}$$

όπου το $\hat{y}$ είναι η έξοδος που παίρνουμε από τα προσεγγισμένα $\hat{a}, \hat{b}$ στην εξίσωση:

$$\dot{\hat{y}} = -a \cdot \hat{y} + bu$$

Ομοίως έχουμε:

$$\hat{\theta} = \left[a_m - \hat{a}, \hat{b}\right]^T$$

Θα προσπαθήσουμε όσο το σύστημα μας «λειτουργεί» να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα e και να εξάγουμε τις μεταβλητές $\hat{a}, \hat{b}$. Παίρνουμε την συνάρτηση $K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(y - \hat{\theta}^T\varphi)^2}{2}$ την οποία αν παραγωγήσουμε παίρνουμε:

$$\nabla K(\hat{\theta}) = -(y - \hat{\theta}^T\varphi)\varphi = -e\varphi$$

Οπότε η κλίση των παραμέτρων θα είναι:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \cdot \nabla K(\hat{\theta})$$

Η επιλογή του γ>0 δεν πρέπει να είναι ούτε μικρή ούτε πολύ μεγάλη, από την εξίσωση

$$\nabla K(\hat{\theta}) = -e\varphi$$

Προκύπτουν 2 εξισώσεις:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma \cdot e \cdot \varphi_1$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma \cdot e \cdot \varphi_2$$

$$\gamma > 0$$

Εάν εφαρμόσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση $\phi = \left[\frac{1}{s+a_m}Y + \frac{1}{s+a_m}U\right]^T$

Τότε προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\dot{\varphi}_1 = -a_m\varphi_1 + y,\ \ \varphi_1(0) = 0$$

$$\dot{\varphi}_2 = -a_m\varphi_2 + u,\ \ \varphi_2(0) = 0$$

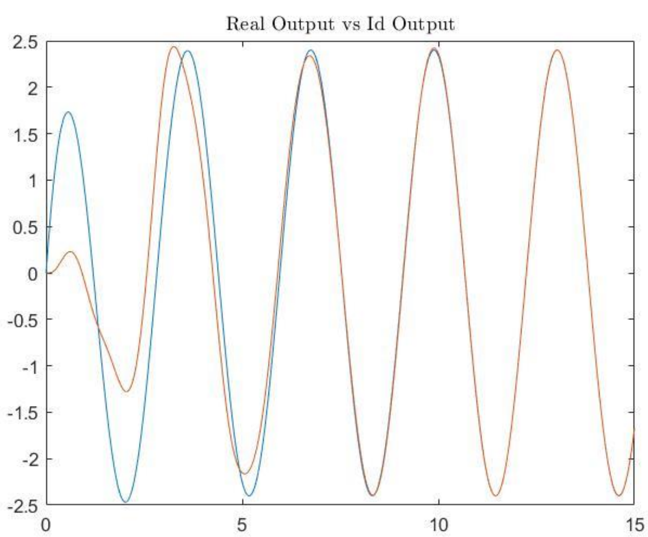
οπότε:

$$\dot{\hat{y}} = (\hat{\theta}_1 - a_m)\hat{y} + \hat{\theta}_2 u$$

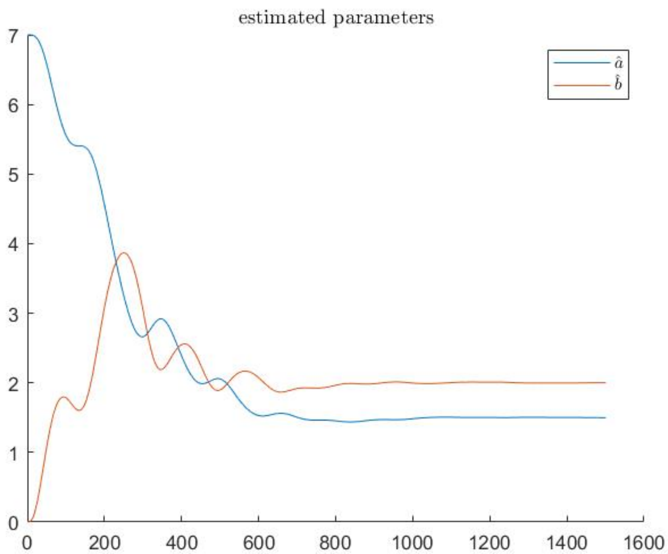
Το παραπάνω αποτελεί το σύστημα που κατασκευάσαμε για να προσεγγίζει το πραγματικό το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε εμείς είναι να επιλέξουμε τις παραμέτρους a_m, γ.

Προσομοίωση

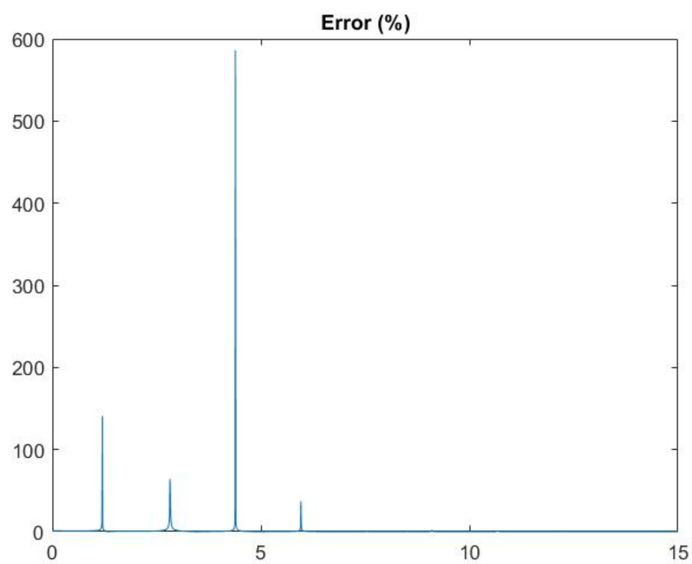
Μετά από δοκιμές στο λογισμικό του MATLAB και παίρνοντας υπόψιν τις μετρικές Mean Squared Error και settling time, δηλαδή ο χρόνος όπου το σφάλμα θα είναι μικρότερο των 5%, καταλήξαμε στις εξής τιμές $\gamma = 7$ και $a_m = 7$ παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα.



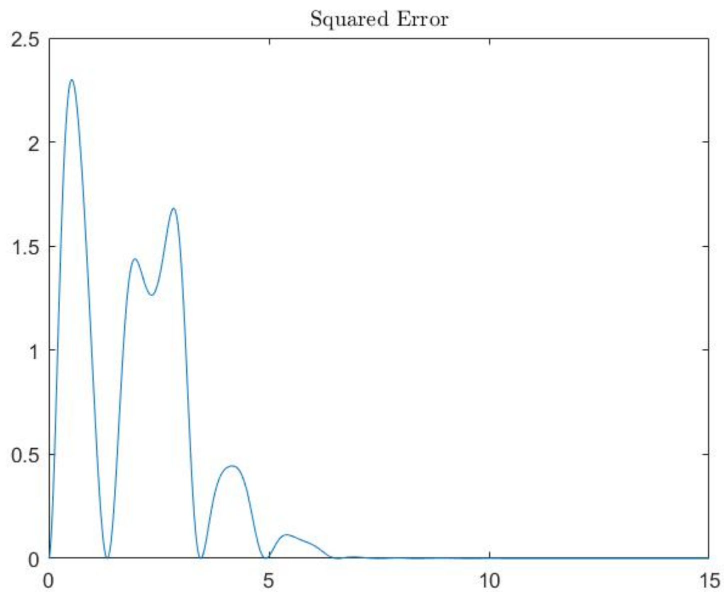
Εικόνα 1 Έξοδος Πργματική - Έξοδος ID συστήματος



Εικόνα 2 Προσέγγιση παραμέτρων



Εικόνα 3 Ποσοστιαίο Σφάλμα

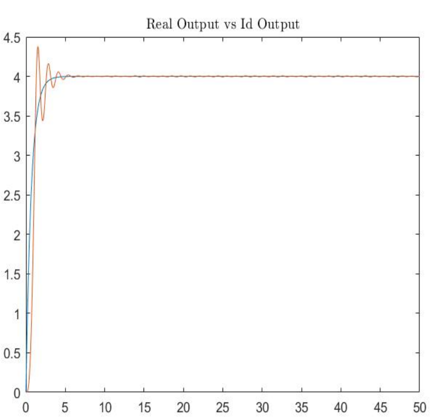


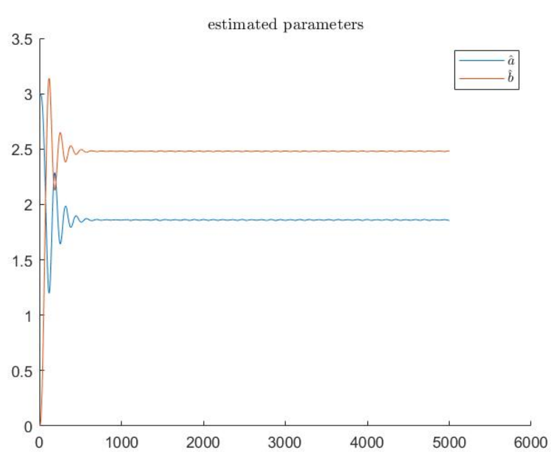
Εικόνα 4 Σφάλμα Τετραγωνισμένο

Βλέπουμε ότι για αυτές τις τιμές των a_m, γ . έχουμε χαμηλό settling time περί τα 13.8 δευτερόλεπτα. Επίσης οι παράμετροι προσεγγίζουν πολύ γρήγορα τις πραγματικές τιμές τους.

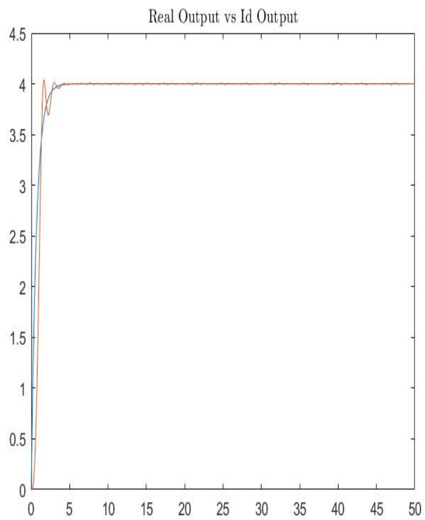
Το πρόβλημα με την σταθερή είσοδο $u(t) = 3$ είναι ότι το μοντέλο μας δεν μπορεί για τις διάφορες τιμές του gamma,am να προβλέψει σωστά τις εκτιμώμενες παραμέτρους.

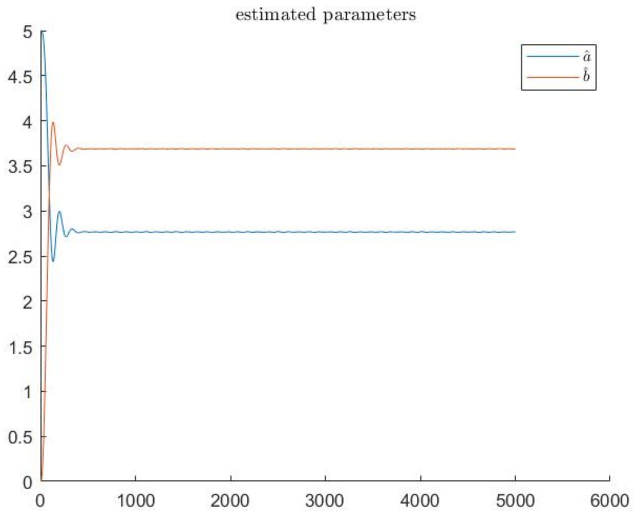
$$a_m, \gamma = 3$$



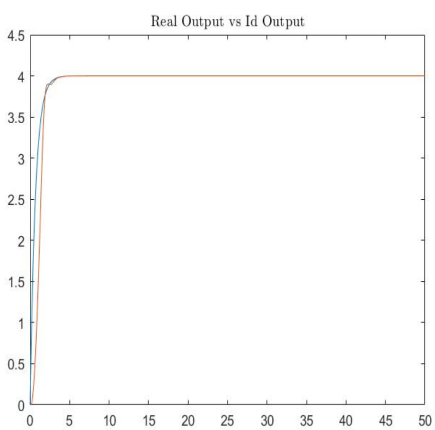


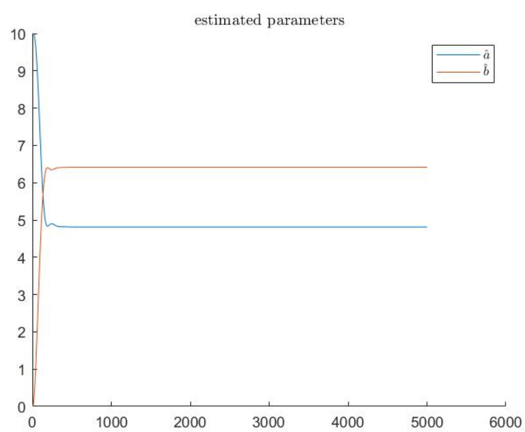
$a_m, \gamma = 5$





$a_m, \gamma = 10$





Θέμα 2

Μαθηματική Ανάλυση

Σε αυτό το σημείο θα κατασκευάσουμε δύο εκτιμητές με την μέθοδο Lyapunov(Παράλληλη -Μεικτή) με την είσοδο όπως και προηγουμένως $u(t) = 3\cos(2t)$ και θα συγκρίνουμε τις 2 αυτές μεθόδους μεταξύ τους.

Παράλληλος Σχεδιασμός

Η εξίσωση που περιγράφει το σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\dot{y} = -\theta_1^* y + \theta_2^* u \,, y(0) = 0$$

Υποθέτοντας ότι $\theta_1^* = a$, $\theta_2^* = b$ και το σύστημα προσέγγισης είναι:

$$\dot{\hat{y}} = -\hat{\theta}_1^* y + \hat{\theta}_2^* u, y(0) = 0$$

Επίσης το σφάλμα ορίζεται ως:

$$e = y - \hat{y}$$

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{\hat{y}}$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{y} - \widetilde{\theta_2} u$$

Όπου $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1$ και $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2$ και θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \geq 0$$

Με $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, εάν παραγωγίσουμε εδώ έχουμε:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$

$$\dot{V} = -e^2\theta_1^* + e\tilde{\theta}_1\hat{y} - e\tilde{\theta}_2 u + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$

Επειδή $V > 0$ και θέλουμε να φτάνει στο σημείο ισορροπίας ,θέλουμε $\dot{V} < 0$:

$$\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 = -e\tilde{\theta}_1\hat{y}, \;\; \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2 = e\tilde{\theta}_2 u$$

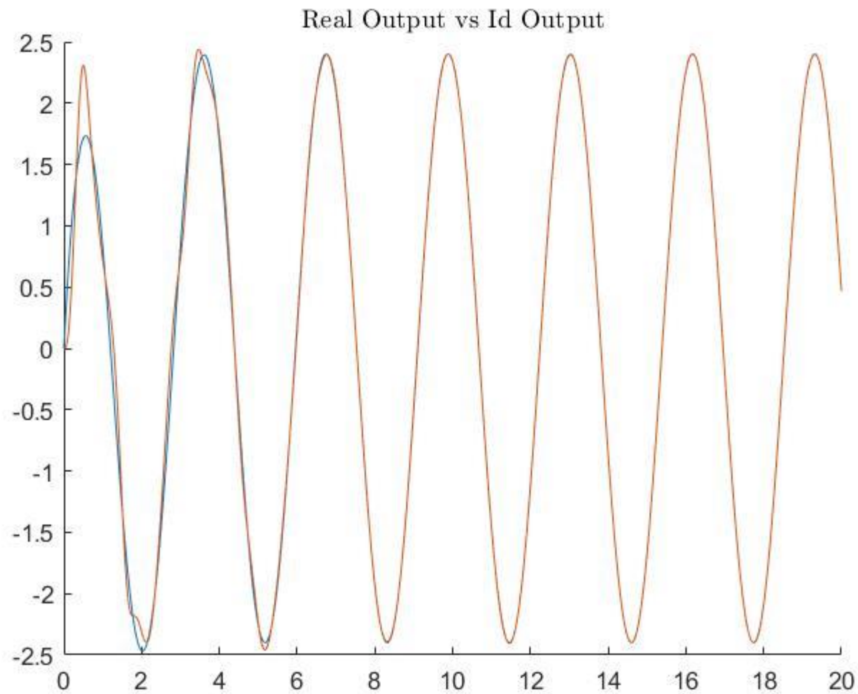
$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u$$

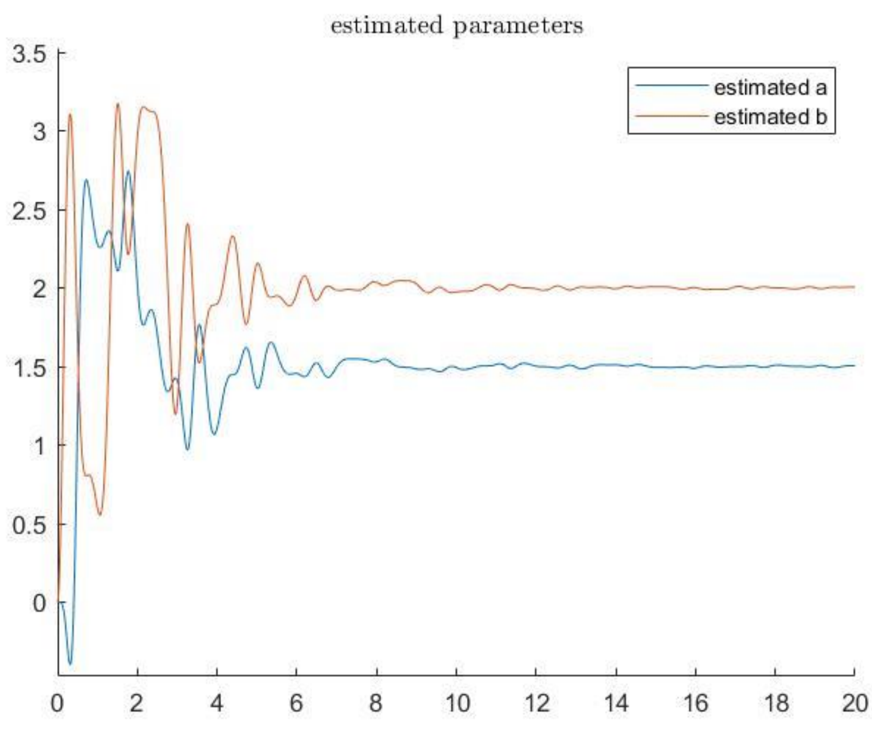
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{y}$$

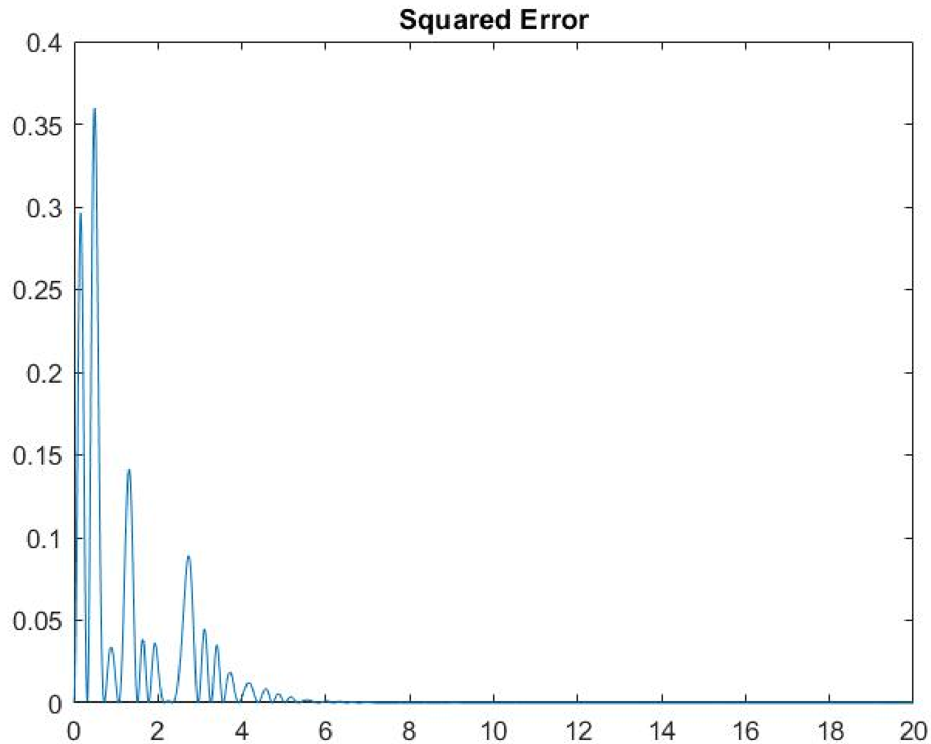
Οπότε πληρείται το $V > 0$, $\dot{V} < 0$

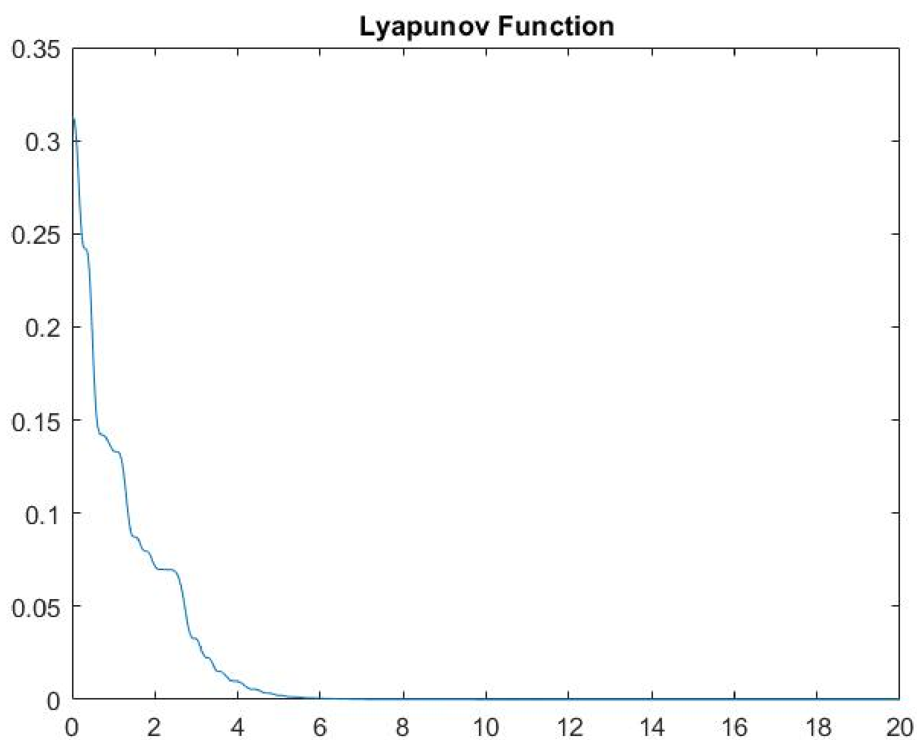
Κατασκευάσαμε το μοντέλο που με παράλληλη δομή προσεγγίζει το πραγματικό μας σύστημα.

Με κατάλληλη επιλογή των γ_1, γ_2 επιλέξαμε ότι $\gamma_1 = 10, \gamma_2 = 10$ και πήραμε τα εξής αποτελέσματα:


Real Output vs Id Output
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


estimated parameters
estimated a
estimated b
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


Squared Error
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


Lyapunov Function
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

Βλέπουμε ότι η μέθοδος αυτή έχει μικρό χρόνο σύγκλισης και εκτίμησης των παραμέτρων για τις παραμέτρους που επιλέξαμε επίσης η συνάρτηση Lyapunov συγκλίνει στο 0 οπότε επιβεβαιώνεται η μαθηματική ανάλυση που παρατέθηκε παραπάνω.

Μεικτός Σχεδιασμός

Αυτήν την φορά το μοντέλο μας περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\dot{\hat{y}} = -\hat{\theta}_1 y + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (y - \hat{y}), \;\; y(0) = 0$$

Όπως και πριν $\hat{\theta}_1 = a, \hat{\theta}_2 = b$, δουλεύοντας μαθηματικά όπως και στον παράλληλο σχεδιασμό καταλήγουμε στο:

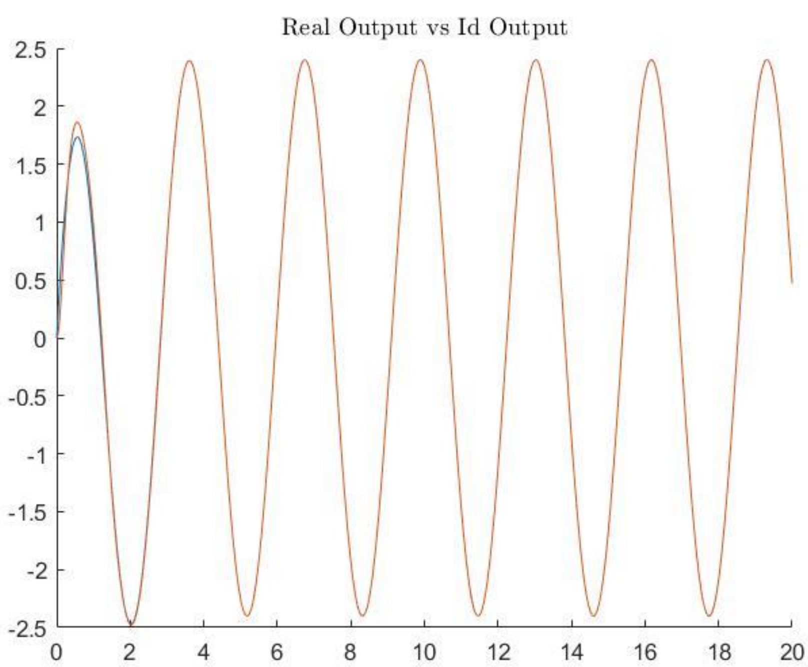
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{y}$$

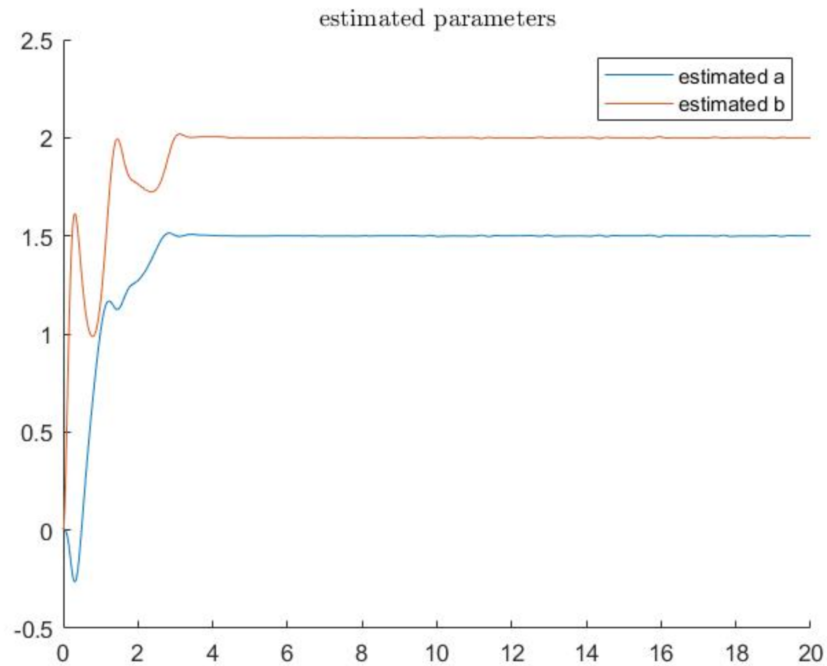
$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μας βοηθούν να παράγουμε τις εκτιμήσεις για τα $\hat{a}, \hat{b}$. Επιλέξαμε τις τιμές

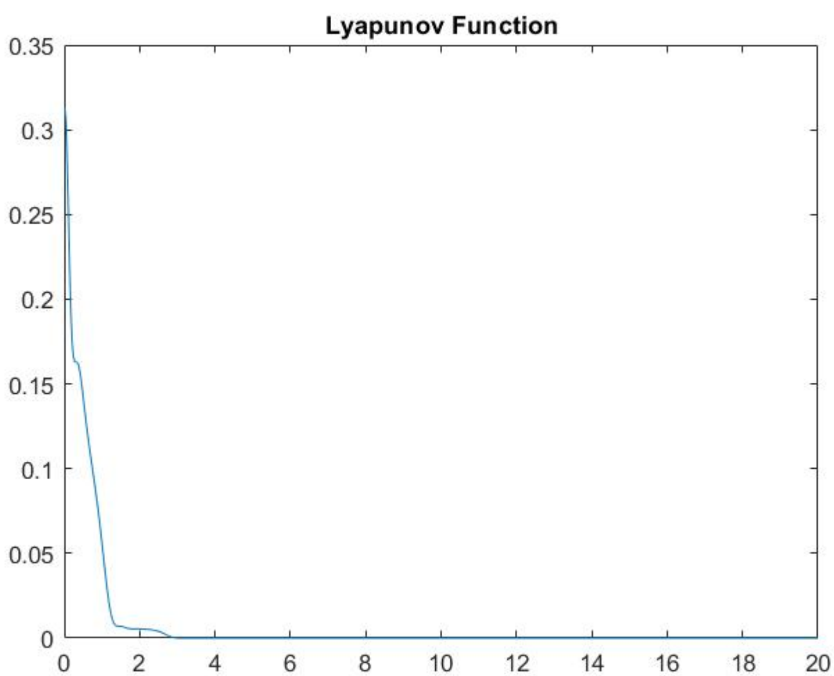
$$\gamma_1 = 10, \;\; \gamma_2 = 10 \;\; , \theta_m = 10$$

Τα διαγράμματα που αποκομίσαμε στο Matlab για αυτές τις τιμές είναι:

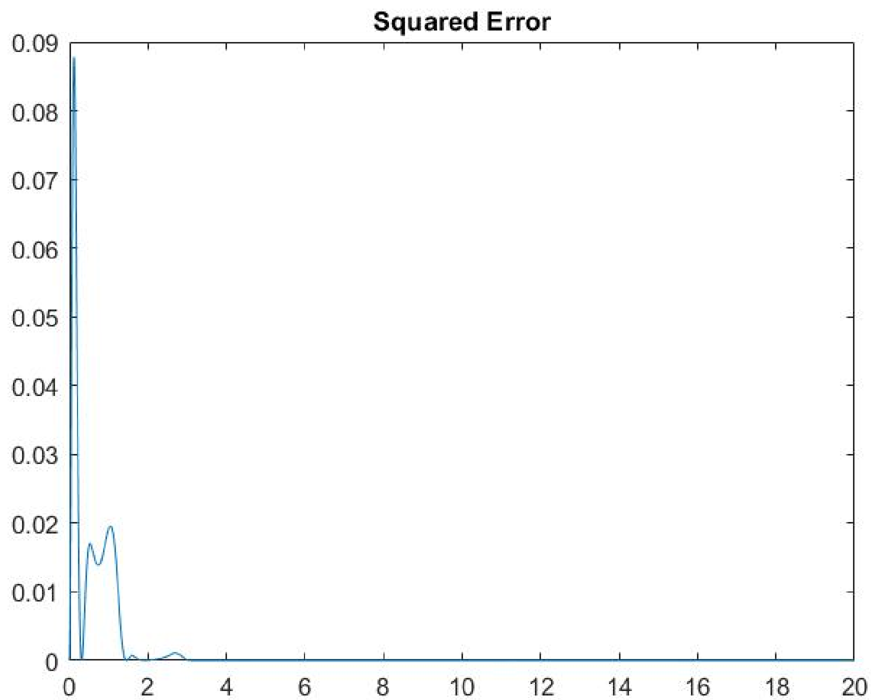




estimated parameters
estimated a
estimated b

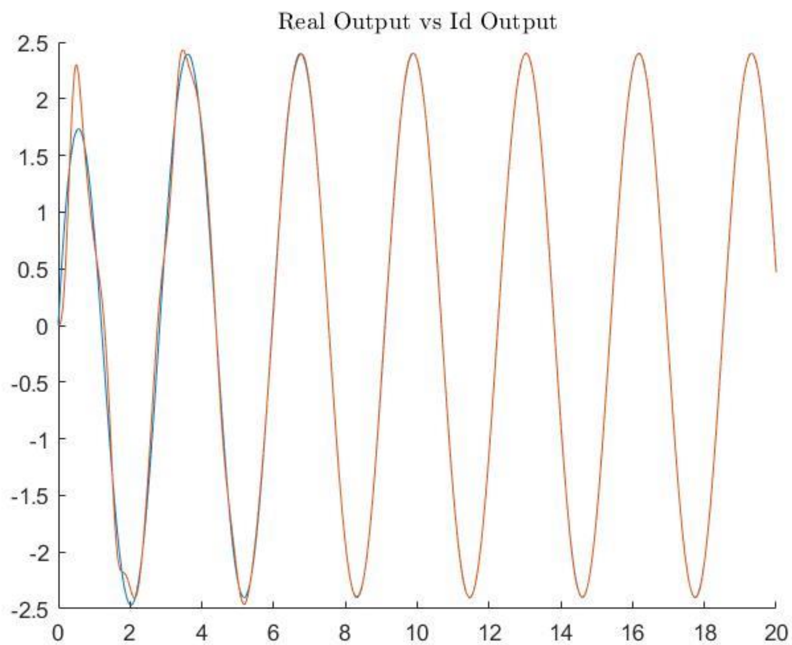


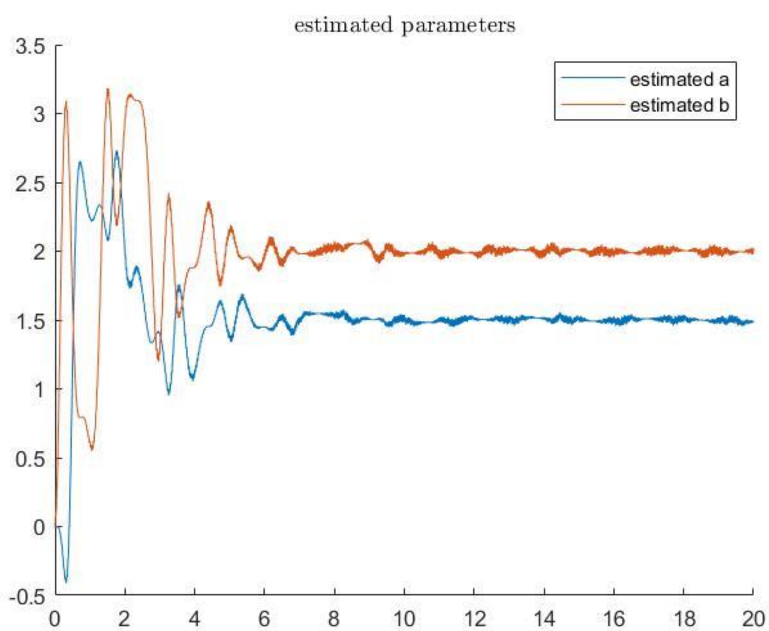
Lyapunov Function

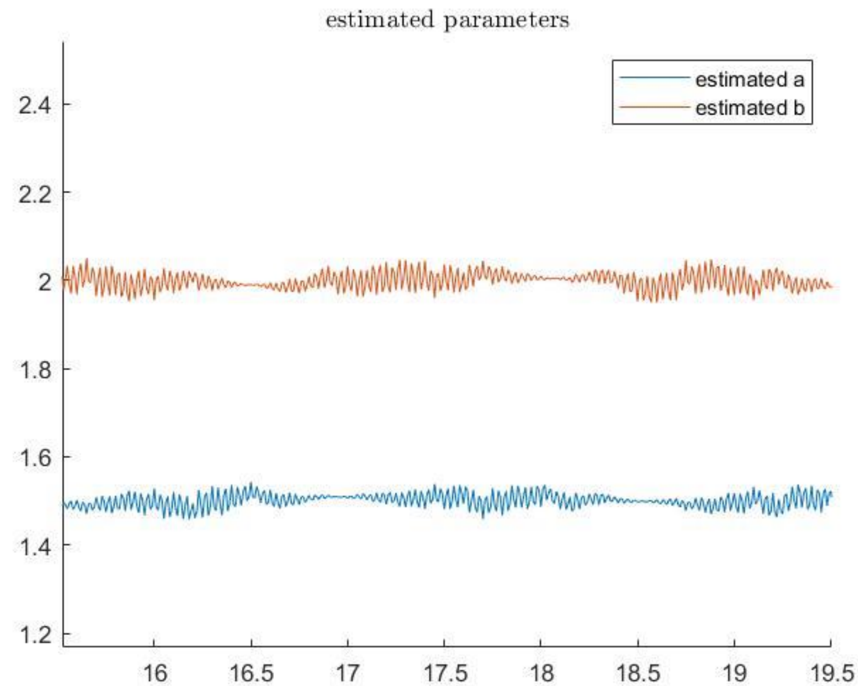


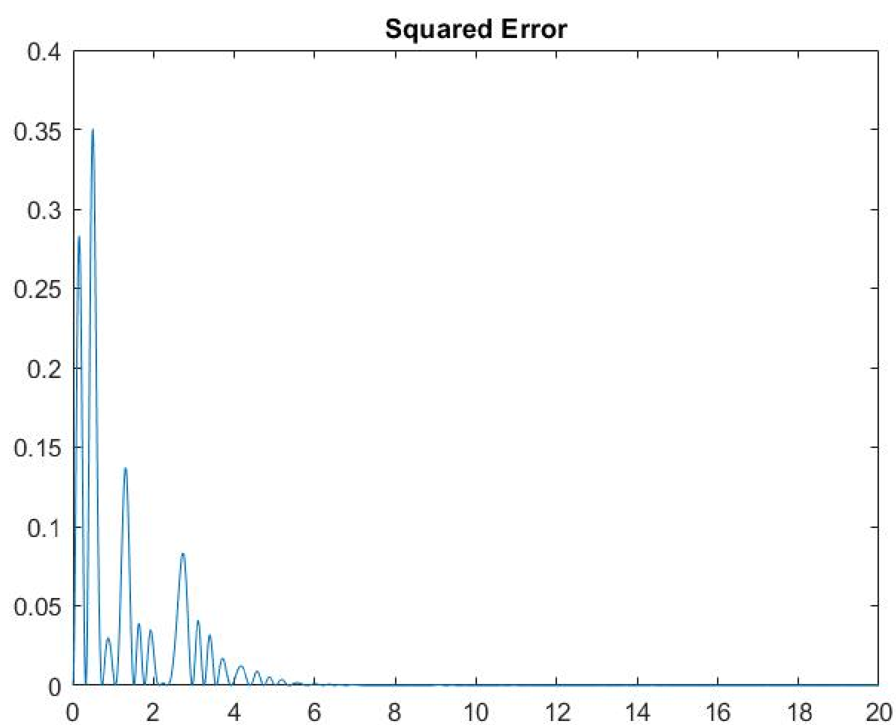
Παράλληλος Σχεδιασμός με θόρυβο

Εάν εφαρμόσουμε θόρυβο $n(t) = n_0\, sin(2\pi f t)$ με $n_0 = 0{,}25$, $f = 30\ Hz$ δεχόμαστε τα εξής διαγράμματα:


Real Output vs Id Output
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


estimated parameters
estimated a
estimated b
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

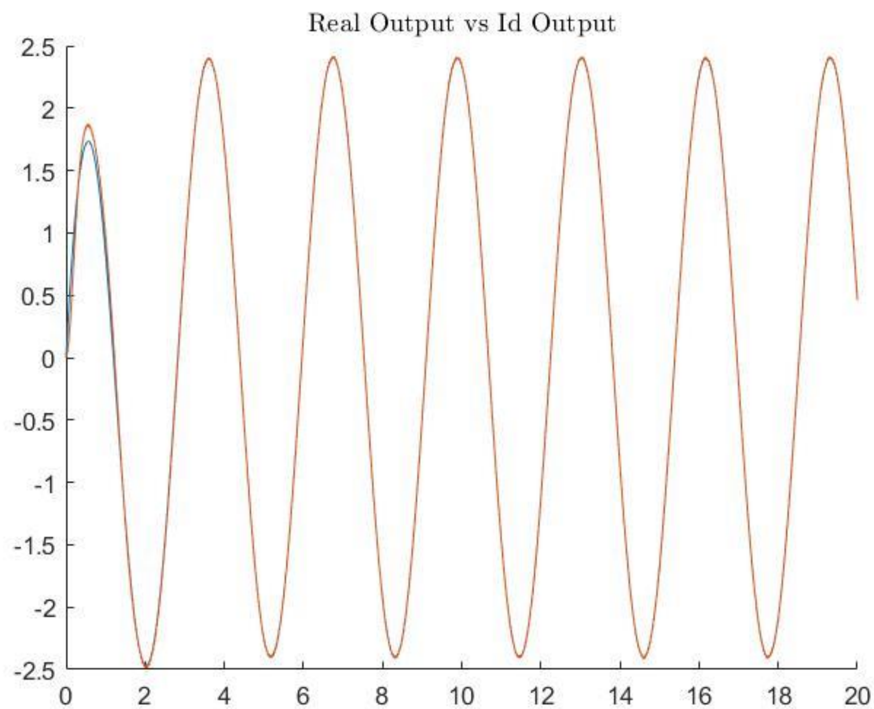


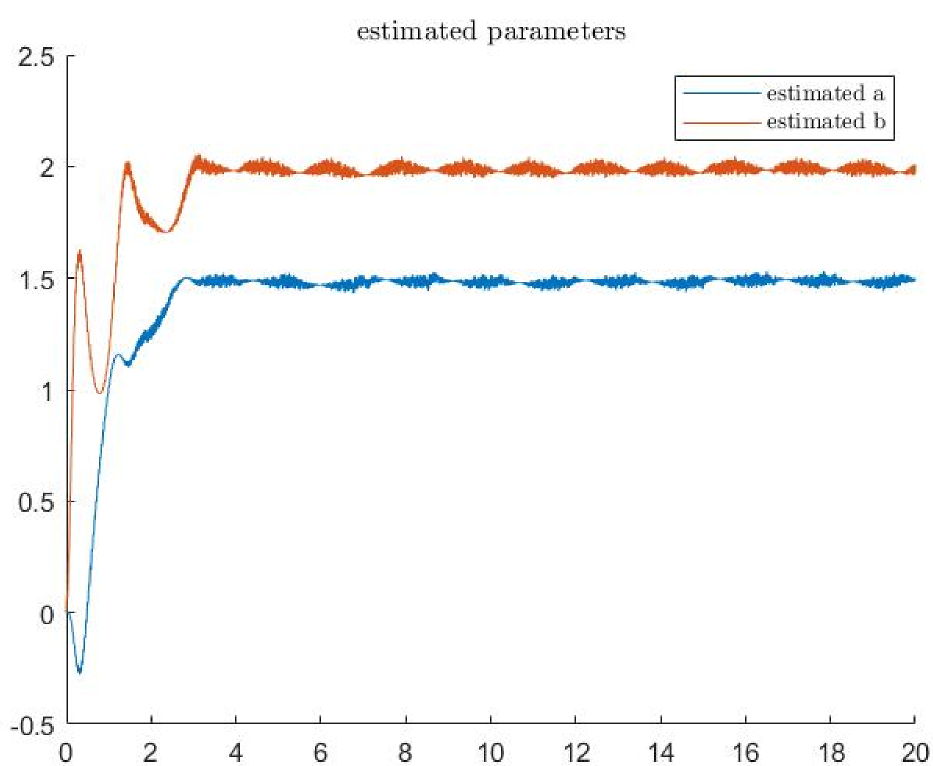


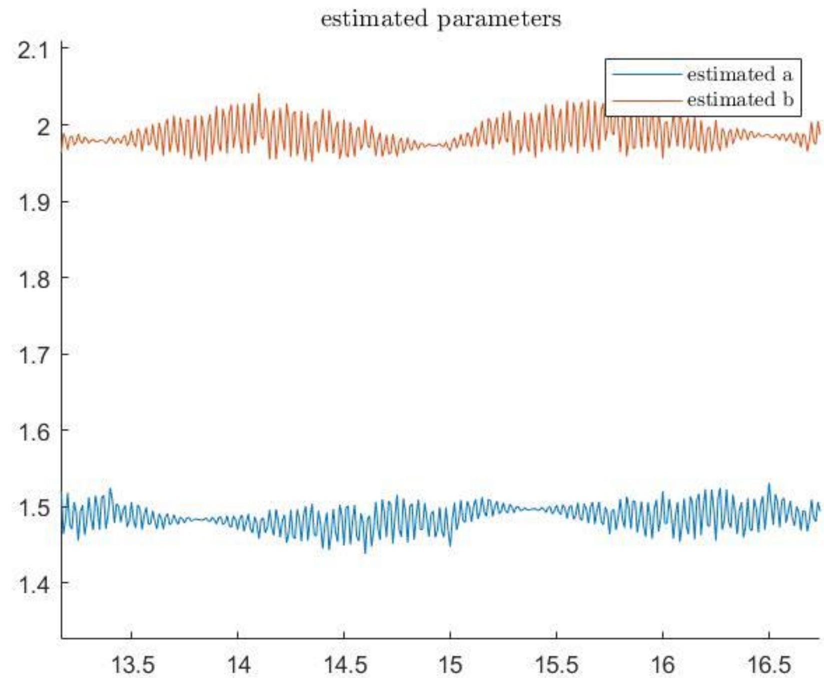
Εδώ βλέπουμε ότι υπάρχει ταλάντωση των εκτιμώμενων παραμέτρων και ότι το η έξοδος δεν επηρεάζεται.

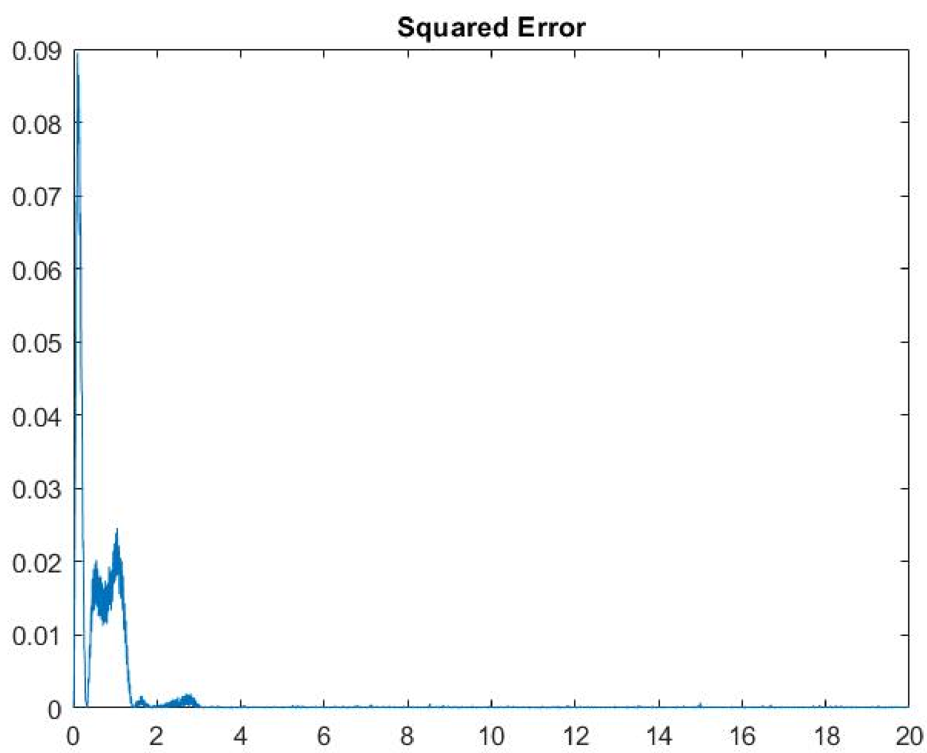
Μεικτός Σχεδιασμός με θόρυβο

Τα διαγράμματα που παίρνουμε εάν προσθέσουμε τον θόρυβο στην έξοδο για τον μεικτό σχεδιασμό είναι:



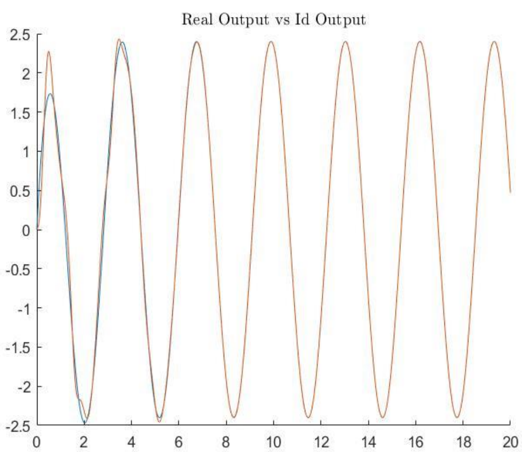


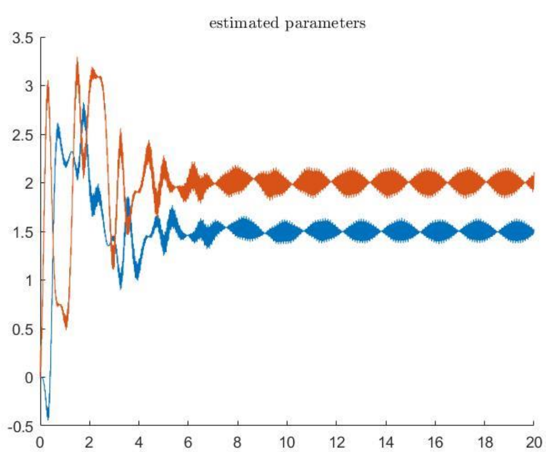

estimated parameters
estimated a
estimated b
2.1
2
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
13.5
14
14.5
15
15.5
16
16.5


Squared Error
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

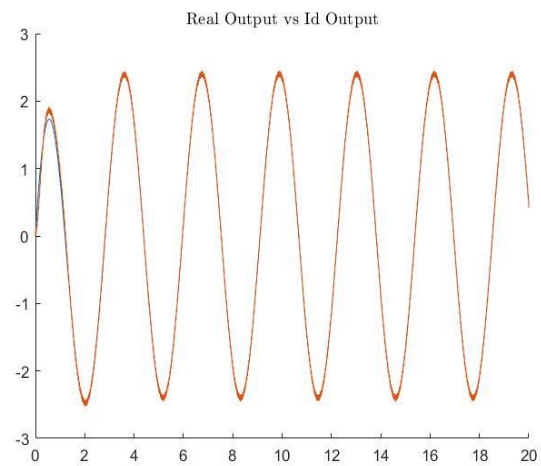
Εδώ βλέπουμε ότι η εκτιμώμενες παράμετροι πάλι ταλαντώνονται αλλά η εκτιμώμενη έξοδος παραμορφώνεται παραπάνω από ότι στον παράλληλο σχεδιασμό κάτι το οποίο φαίνεται αν αυξήσουμε το πλάτος του θορύβου σε $n_0 = 1$ και η συχνότητα ίδια.

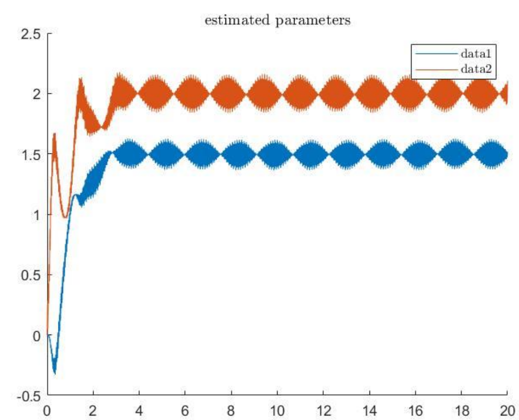
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ



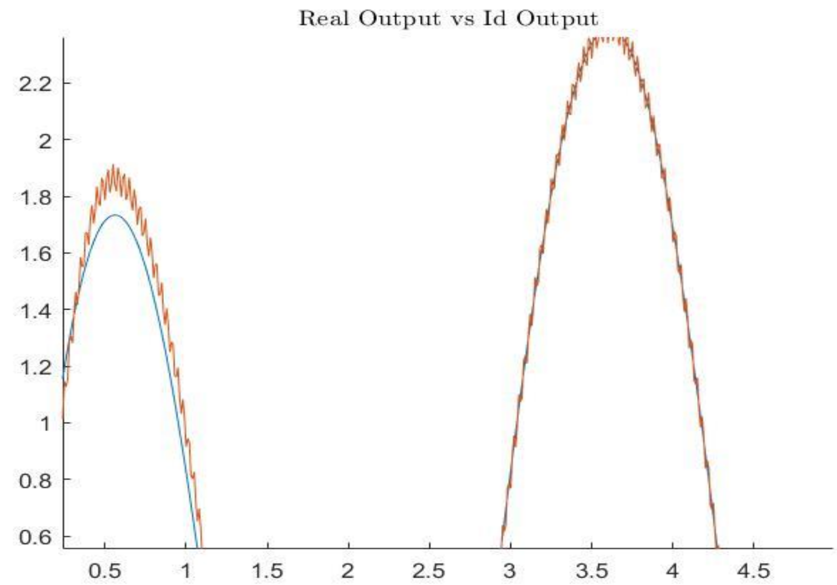


ΜΕΙΚΤΟΣ





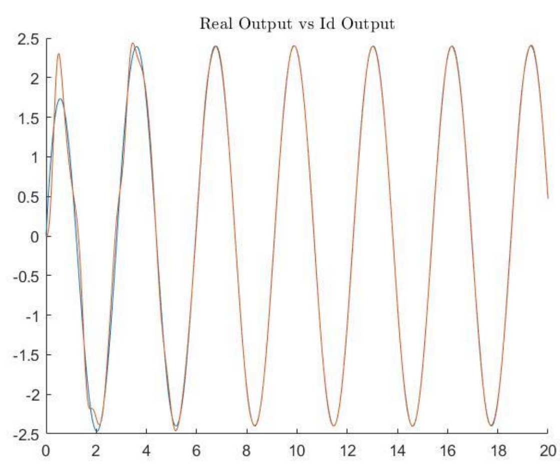
Εάν ζουμάρουμε στην έξοδο του μεικτού θα δούμε ότι η εκτιμώμενη έξοδος ταλαντώνεται γύρω από την πραγματική



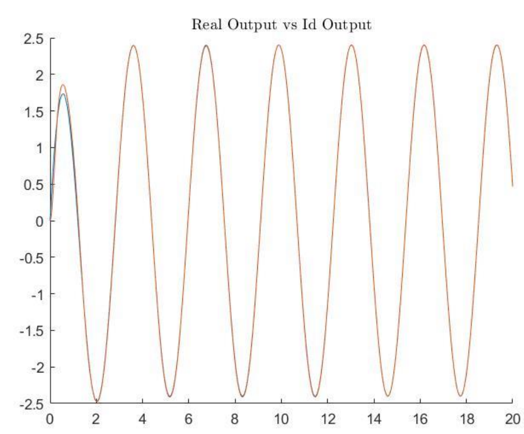
Ενώ αν αυξήσουμε κι άλλο το πλάτος του θορύβου το φαινόμενο γίνεται ακόμα χειρότερο.

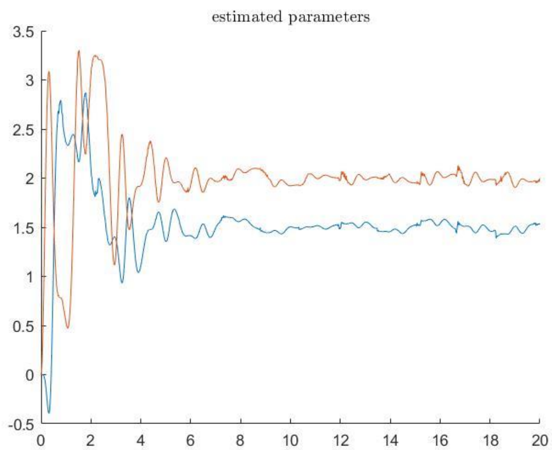
Εάν μεταβάλουμε την συχνότητα περί τα $f = 100Hz$, $n_0 = 0.25$ τότε φαίνεται ο μεικτός σχεδιασμός να είναι πιο ανθεκτικός από τον παράλληλο ο οποίος δυσκολεύεται να εκτιμήσει τις παραμέτρους αλλά και να κλείσει προς την πραγματική έξοδο.

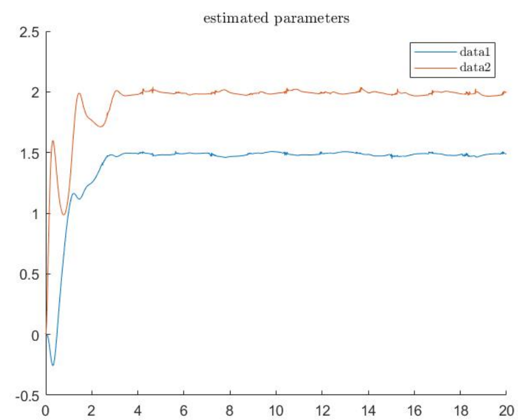
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ



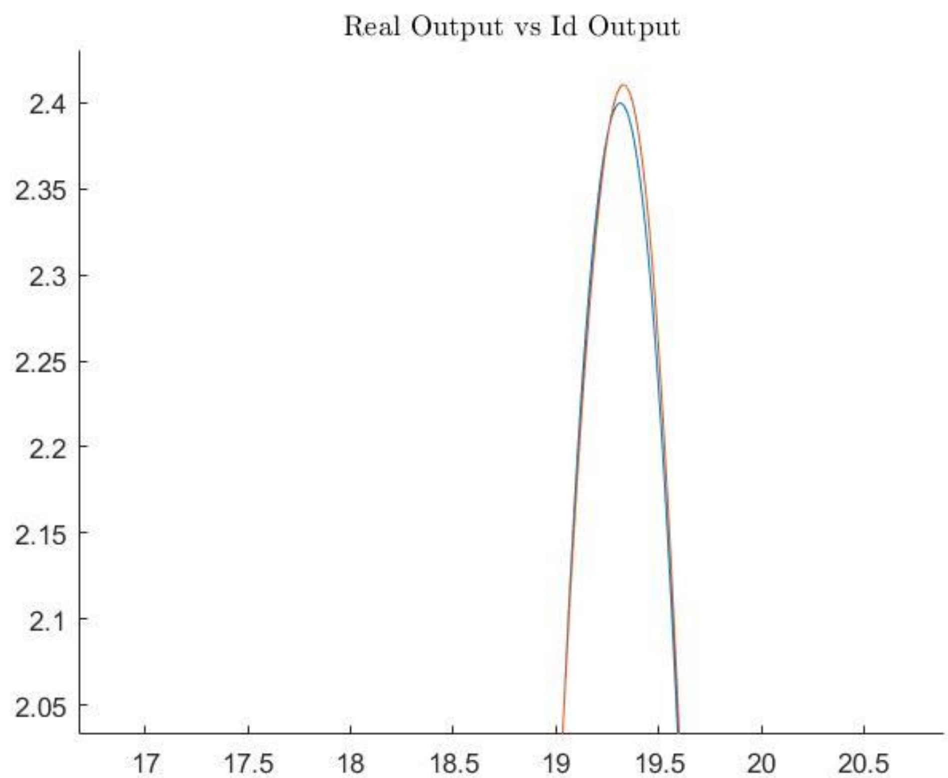
ΜΕΙΚΤΟΣ







Εάν ζουμάρουμε στην έξοδο του παράλληλου θα δούμε ότι η εκτιμώμενη έξοδος ακόμα και μετά το πέρας πολλών δευτερολέπτων έχει αρκετά μεγάλο σφάλμα.



Θέμα 3

Μαθηματική Ανάλυση

Σε αυτό το σημείο μας ζητείται να εφαρμόσουμε την μέθοδο Lyapunov παράλληλης δομής σε ένα σύστημα ανώτερης τάξης. Θα μοντελοποιήσουμε το σύστημα ως εξής:

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad y(0) = [0\ 0]^T$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

Με είσοδο $u = 7{,}5\, cos(3t) + 10\, cos(2t)$ *και* $a_{11} = -0{,}5$, $a_{12} = -3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -2$ *και* $b_1 = 1$, $b_2 = 1.4$

Το σφάλμα το ορίζουμε ως:

$$e = y - \hat{y}$$

$$\dot{e} = Ay + Bu - \hat{A}\hat{y} - \hat{B}u$$

$$\dot{e} = Ae - \tilde{A}\hat{y} - \tilde{B}u$$

Όπου $\tilde{A} = \hat{A} - A, \tilde{B} = \hat{B} - B$

Η συνάρτηση **Lyapunov** που επιλέγουμε είναι:

$$V = \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2\gamma_1} tr\{A^{-T} A\} + \frac{1}{2\gamma_2} tr\{B^{-T} B\} \geq 0$$

Με $\gamma_1, \gamma_2 > 0$

Εάν παραγωγήσω την συνάρτηση Lyapunov τότε:

$$\dot{V} = e^T A e + tr\left\{ -A^{-T} e \hat{x}^T - B^T e u^T + \frac{1}{\gamma_1} A^{-T} \dot{\hat{A}} + \frac{1}{\gamma_2} B^{-T} \dot{\hat{B}} \right\}$$

Ομοίως με πριν θέλουμε $\dot{V} \leq 0$ οπότε:

$$\dot{\hat{A}} = \gamma_1 e \hat{x}^T$$

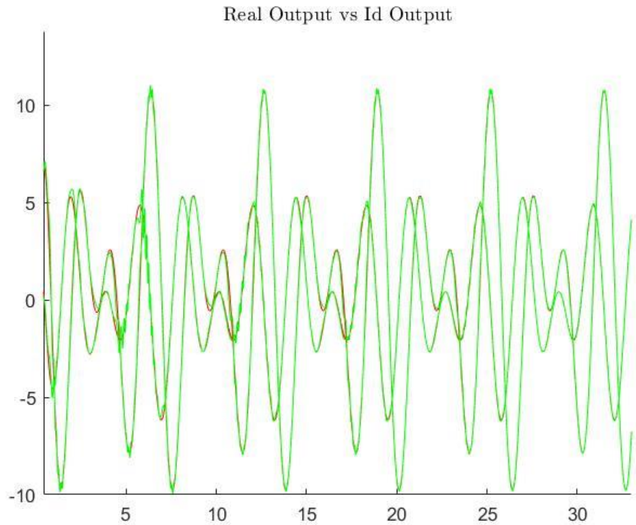
$$\dot{\hat{B}} = \gamma_2 e u$$

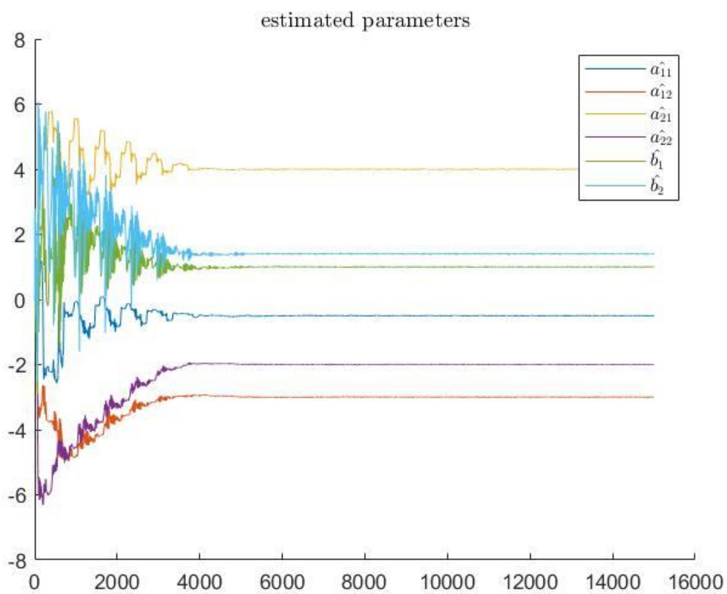
Καταλήγοντας στις εξισώσεις που θα μας βοηθήσουν να προσομοιώσουμε το μοντέλο μας στο MATLAB.

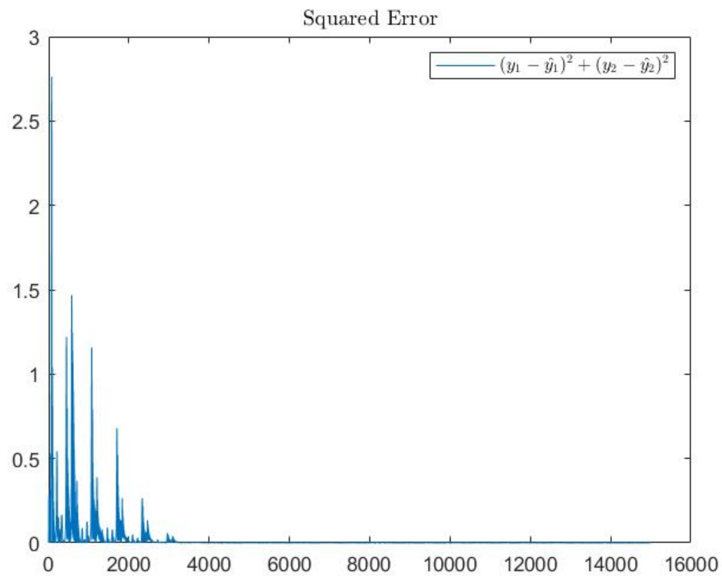
Προσομοίωση

Ως μετρική επιλογής των γ_1, γ_2 θα επιλέξουμε το settling time όταν δηλαδή το τετραγωνικό σφάλμα θα πέσει για πρώτη φορά κάτω από 0,1%. Μετά από πολλές δοκιμές καταλήξαμε στα $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 11$

Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα που εξάγουμε από τις προσομοιώσεις μας στο Matlab.







Βλέπουμε ότι το μοντέλο μας δουλεύει ικανοποιητικά αφού η εκτιμώμενες παράμετροι προσεγγίζουν επιτυχώς τις πραγματικές και το σφάλμα με την πάροδο του χρόνου σχεδόν μηδενίζεται.

Ο κώδικας βρίσκεται στο συμπιεσμένο αρχείο που παρατίθεται και αυτή η αναφορά, διάφορα κομμάτια κώδικα που είναι σαν σχόλιο είναι επειδή είναι έτσι γραμμένος ώστε να χρησιμοποιώ διάφορα μέρη του κάθε φορά. Η ode45 επιλέχθηκε για την λύση των διαφορικών εξισώσεων. Το αρχείο demo είναι αυτό που πρέπει να τρέξει ο χρήστης για να εξάγει τα δεδομένα και διαγράμματα που θέλει.