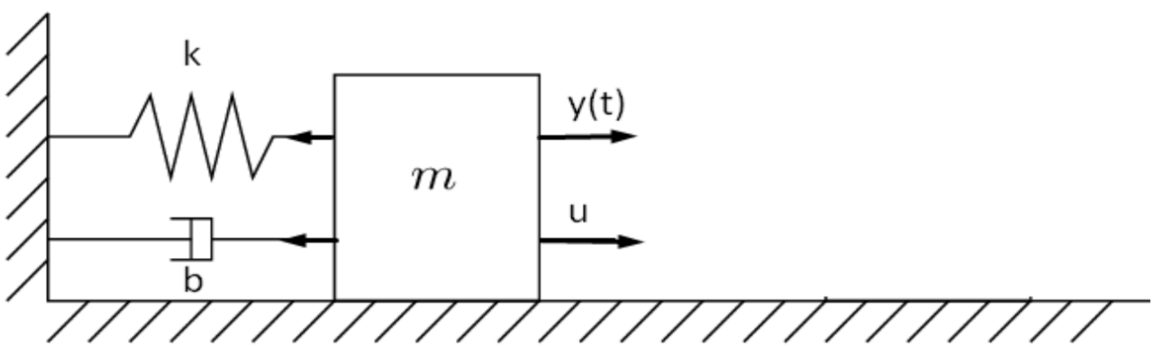
Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Γιώργος Κούκας 9486

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την παραμετροποίηση 2 δυναμικών συστημάτων, ενός νευτονιακού συστήματος Μάζας-Ελατηρίου-Αποσβεστήρα και ενός κυκλώματος διαφορικής εξίσωσης 2ου βαθμού πηνίου, πυκνωτή, αντίστασης. Θα προσπαθήσουμε στα 2 αυτά προβλήματα με την βοήθεια του λογισμικού του MATLAB και διαφόρων μεθόδων που παρατίθενται στο μάθημα να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα που εμφανίζεται στα εκάστοτε συστήματα.

Σύστημα 1: Μάζα, Ελατήριο, Αποσβεστήρας



Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει από το παραπάνω σχέδιο είναι η εξής:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = u$$

Εξάγουμε από την εξίσωση το:

$\theta = \left[\frac{b}{m}\,\frac{k}{m}\,\frac{1}{m}\right]^T$ και το $\Delta = \left[-\dot{y} - yu\right]^T$

Οπότε θα ισχύει : $\ddot{y}=\theta^{*T}\Delta$, όμως εμείς θέλουμε όσο μπορούμε να φέρουμε το σύστημα μας σε μια εξίσωση τέτοια ώστε να μην έχει μη μετρησίμα στοιχεία όπως η δέυτερη παράγωγος οπότε παίρνουμε ένα ευσταθές φίλτρο Λ(s) = (s+p1)(s+p2) όπου οι p1,p2 θετικοί και αφόυ το εφαρμόσουμε παίρνουμε:

$$y=\theta_{\lambda}^{T}\zeta$$

Με

$$\theta_{\lambda}=\left[\theta_1^{*T}-\lambda^T,\theta_2^{*T}\right]^T \mu\varepsilon \theta_1^{*}=\left[\frac{b}{m}\,\frac{k}{m}\right]^T,\theta_2^{*}=\left[\frac{1}{\mu}\right]^T$$
$$\kappa\alpha\iota\lambda=\left[\left(p_1+p_2\right)\left(p_1p_2\right)\right]$$

Οπότε εν τέλει:

$$\theta_{\lambda}=\left[\frac{b}{m}-\left(p_1+p_2\right),\frac{k}{m}-p_1p_2,\frac{1}{m}\right]^T$$

Επίσης,

$$\zeta=\left[-\frac{\dot{y}}{\Lambda(s)},-\frac{y}{\Lambda(s)},\frac{u}{\Lambda(s)}\right]^T=\left[-\frac{sy}{\Lambda(s)},-\frac{y}{\Lambda(s)},\frac{u}{\Lambda(s)}\right]^T$$

Για να ελαχιστοποίησουμε το σφάλμα θα υπολογίσουμε το θ_0 ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ανάμεσα στα πραγματικά $y(t_i)$ και τις εξόδους του μοντέλου $\hat{y}(t_i)$

Οπότε έχουμε:

$$\theta_0=argmin_{\theta}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(y(t_i)-\hat{y}(t_i)\right)^2}{2}$$

Το οποίο λύνεται ώς εξής:

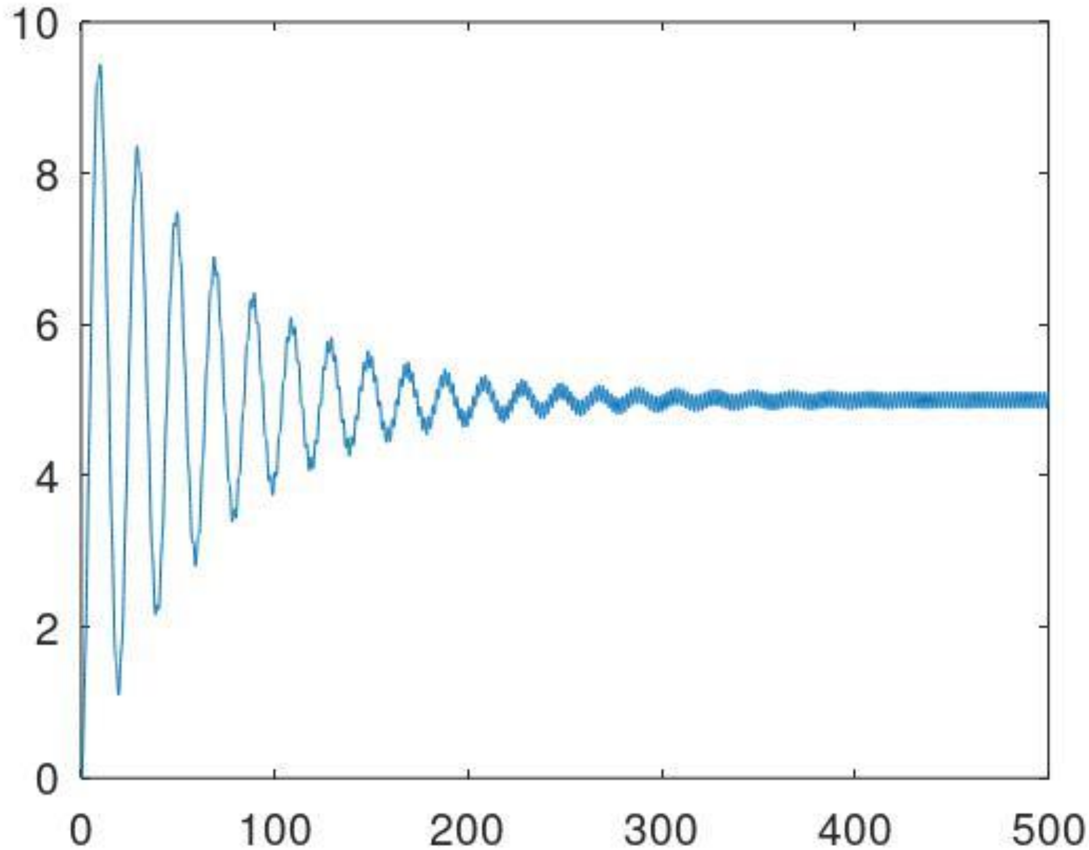
$$\theta_0=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\zeta(t_i)\zeta^T(t_i)\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\zeta(t_i)y(t_i)\right)$$

Βάζοντας στο λογισμικό του Matlab , υπολογίζουμε το θ_0 και οι υπολογίζουμε και τις μεταβλητές m,b,k λύνοντας την εξίσωση $\theta_{\lambda}=\theta_0$.

Βάζοντας τις δοθείσες παραμέτρους της εργασίας για:

$$m = 10kg, b = 0.3\frac{kg}{s}, k = 1,5\frac{kg}{s^2}, u = 10\sin(3t) + 5N, t = [0, 10], u_0 = 0$$

Έχουμε το εξής διάγραμμα:



Από το οποίο μπορούμε να καταλάβουμε ότι το σύστημα μας είναι μια φθίνουσα ταλάντωση κάτι το οποίο περιμέναμε λόγω της παρουσίας του αποσβεστήρα.

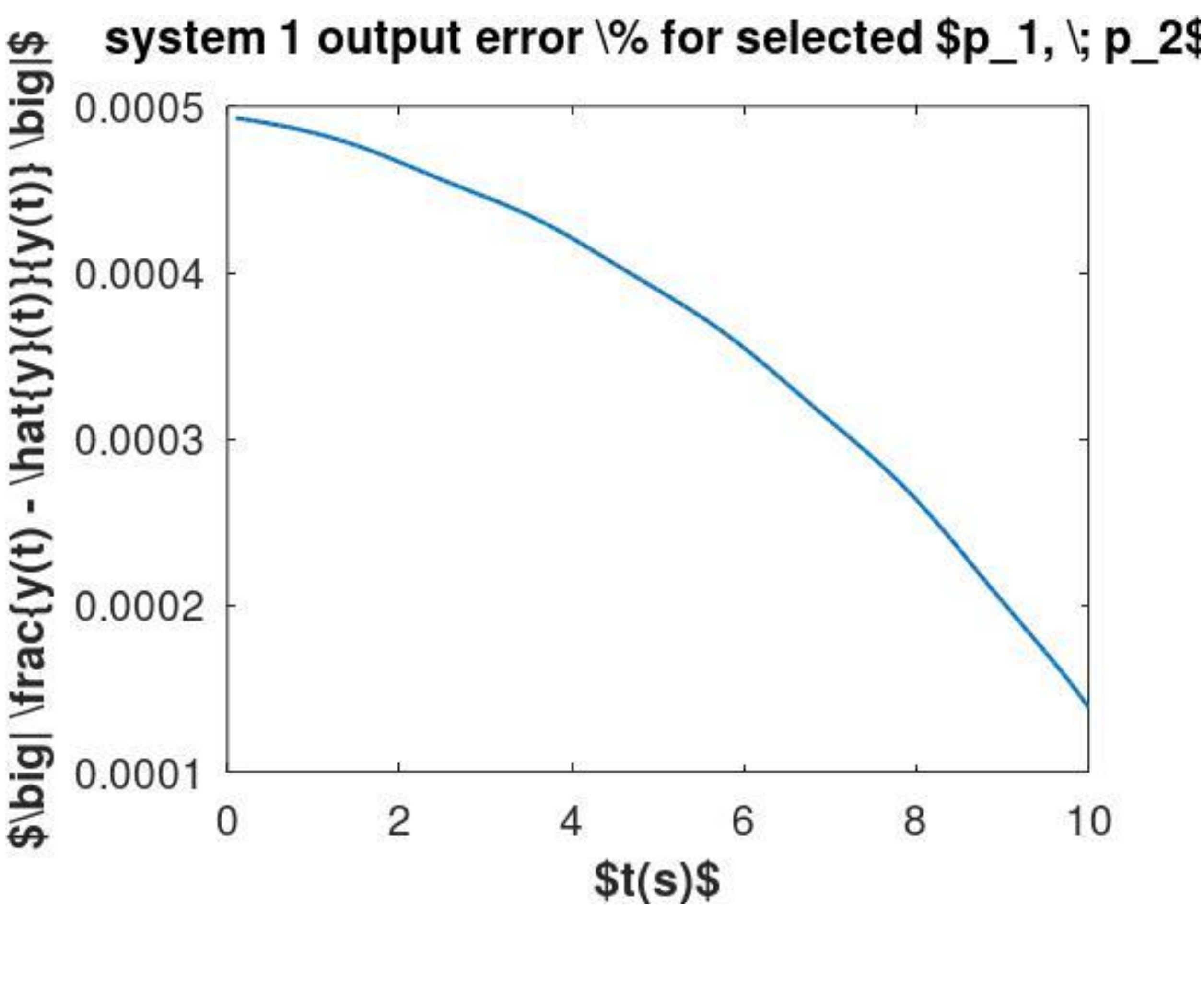
Τώρα για να υπολογίσουμε το σφάλμα e , αποθηκεύουμε τις τιμές που μας δίνει η ode45 σε έναν πίνακα και για διάφορες τιμές των πόλων εξάγουμε προβλέψεις για τις παραμέτρους m, b, k. Οι πόλοι βρίσκονται από το σφάλμα που παρατίθεται παρακάτω:

$$e = \left| \frac{m - \hat{m}}{m} \right| + \left| \frac{b - \hat{b}}{b} \right| + \left| \frac{k - \hat{k}}{k} \right|$$

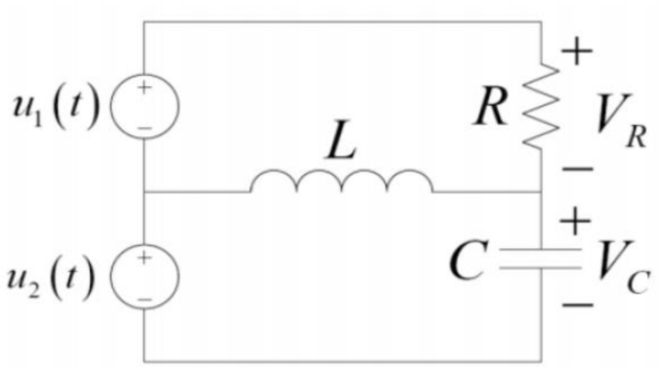
Προσπαθώντας να προσομοιώσω με πόλους p_1, p_2 στο διάστημα $\left[0.1, 5\right]$ με βήμα 0.2 βλέπω ότι ιδανικές παράμετροι είναι, στους πόλους 0.5,0.5:

$$m = 9.995065303241445$$
$$b = 0.3000903509998474$$
$$k = 1.499538132030445$$

Με το διάγραμμα το σφάλματος να παραθέτεται παρακάτω σε σχέση με τον χρόνο:



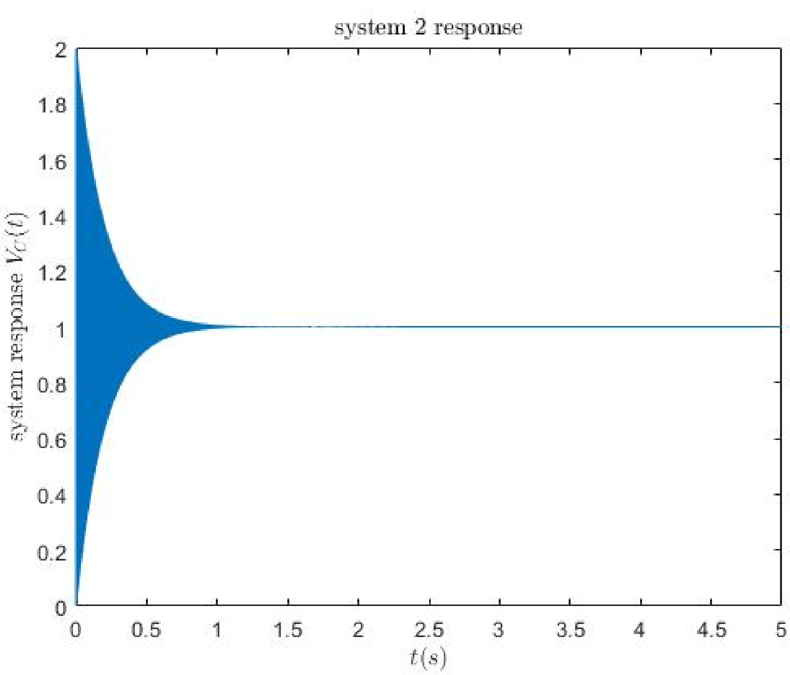
Σύστημα 2: Κύκλωμα Αντίστασης, Πηνίου, Πυκνωτή



Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει εάν αναλύσουμε το κύκλωμα είναι η εξής:

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u}_2 + \frac{1}{LC}u_2 + \frac{1}{RC}u_1$$

Θεωρώντας έξοδο την τάση στα άκρα του πυκνωτή το διάγραμμα αυτής είναι το εξής:



Όπως και πριν θεωρώ ότι:

$$\theta^* = \left[\frac{1}{RC} \; \frac{1}{LC} \; \frac{1}{RC} \; \frac{1}{LC} \; \frac{1}{RC} \; 0 \right], \Delta = \left[-\dot{V}_C - V_C \;\; \dot{u}_2 u_2 \;\; \dot{u}_1 u_1 \right]^T$$

Έτσι ώστε να ισχύει το εξής:

$$\ddot{y} = \theta^{*\,T} \Delta$$

Πρέπει να βρούμε ένα ευσταθές φίλτρο Λ(s) έτσι ώστε το μοντέλο να μπορεί να περιγραφηθεί χωρίς την παρουσία μη μετρήσιμων μεταβλητών

$$y = \theta_\lambda{}^T \zeta$$

Όπου

$$\theta_\lambda = \left[\theta_1{}^{*T} - \lambda^T, \theta_2{}^{*T} \right], \theta_1{}^* = \left[\frac{1}{RC} \; \frac{1}{LC} \right]^T, \theta_1{}^* = \left[\frac{1}{RC} \; \frac{1}{LC} \; \frac{1}{RC} \; 0 \right], \lambda = \left[p_1 + p_2, p_1 p_2 \right]$$

$$\text{άρα}$$

$$\theta_\lambda = \left[\frac{1}{RC} - \left(p_1 + p_2 \right) \frac{1}{LC} - \left(p_1 + p_2 \right) \frac{1}{RC} \; \frac{1}{LC} \; \frac{1}{RC} \; 0 \right]^T$$

$$\text{και}$$

$$\zeta = \left[-\frac{\dot{V}_C}{\Lambda(s)} - \frac{V_C}{\Lambda(s)} \; \frac{\dot{u}_2}{\Lambda(s)} \; \frac{u_2}{\Lambda(s)} \; \frac{\dot{u}_1}{\Lambda(s)} \; \frac{u_1}{\Lambda(s)} \right]^T = \left[-\frac{sV_C}{\Lambda(s)} - \frac{V_C}{\Lambda(s)} \; \frac{su_2}{\Lambda(s)} \; \frac{u_2}{\Lambda(s)} \; \frac{su_1}{\Lambda(s)} \; \frac{u_1}{\Lambda(s)} \right]^T$$

Χρειαζόμαστε ένα αρκετά μικρό χρονικό διάστημα βήματος για να μπορέσουμε να έχουμε μια ικανοποιητική αναπαράσταση του συστήματος μας.

Εφαρμόζουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για διάφορες τιμές των πόλων και αποθηκεύουμε τις διάφορες παραμέτρους και υπολογίζουμε την μέση απόλυτη διαφορά των πραγματικών V_C και του μοντέλου $\hat{V}_C$ προσπαθώντας να την ελαχιστοποιήσουμε.

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| V_C(t_i) - \hat{V}_C(t_i) \right|$$

Το ελάχιστο σφάλμα που μπορούσαμε να έχουμε για τους πόλους 200, 210 ήταν e= 0.0256560388475908 .

Με τις παραμέτρους να είναι περί τα $1/RC = 10.0061505179521, 1/LC = 24910031.4620132$. Τώρα θα βρούμε τον πίνακα μεταφοράς G

για τον οποίο ισχύει

$$V_C = GU$$

Με $$U = \left[u_1(s)\ u_2(s) \right]^T$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην αρχική μας διαφορική εξίσωση βρίσκουμε:

$$\left(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right)V_C = \frac{1}{RC}su_1 + \left(\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right)u_2 \Rightarrow$$
$$V_C = \left[\frac{\frac{1}{RC}s}{P(s)}\ \frac{\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{P(s)}\right]U,$$
$$P(S) = s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}$$

Άρα,

$$G(s) = \left[\frac{\frac{1}{RC}s}{P(s)}\ \frac{\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{P(s)}\right]$$

Οπότε εν τέλει έχουμε

$$P(s) = s^2 + 10.0061506179521s + 24910031.4620132$$

Όταν βάζουμε 3 λάθος μετρήσεις στο εικονικό βολτόμετρο βλέπουμε ότι αλλάζει σημαντικά η κάθε παράμετρος που μας ενδιαφέρει με

$$1/RC = 39.7643760293228 \kappa\alpha\iota\ 1/LC = 962714.976352663$$

Οπότε τα σφάλματα προκύπτουν ως εξής:

$$e\left(\frac{1}{RC}\right)=\left|\frac{10.00615-39.7643760293228}{10.00615}\right|=2.975=297.5\%$$

$$e\left(\frac{1}{LC}\right)=\left|\frac{24910031.462-962,714.9763}{24910031.462}\right|=0.6133=61.33\%$$

Με σφάλμα αυτή την φορά να είναι περί τα e = 0.0265332209091384, καταλαβαίνουμε άρα ότι επηρεάζουν πάρα πολύ αυτές οι λάθος τιμές και το μοντέλο μας δεν θα τείνει στο πραγματικό σύστημα.

Οι κώδικες και οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε λογισμικό MATLAB και παρατίθενται στο συμπιεσμένο αρχείο.

Γιώργος Κούκας 9486