Εργασία 3η *Κούκας Γεώργιος 9486*

Περιεχόμενα

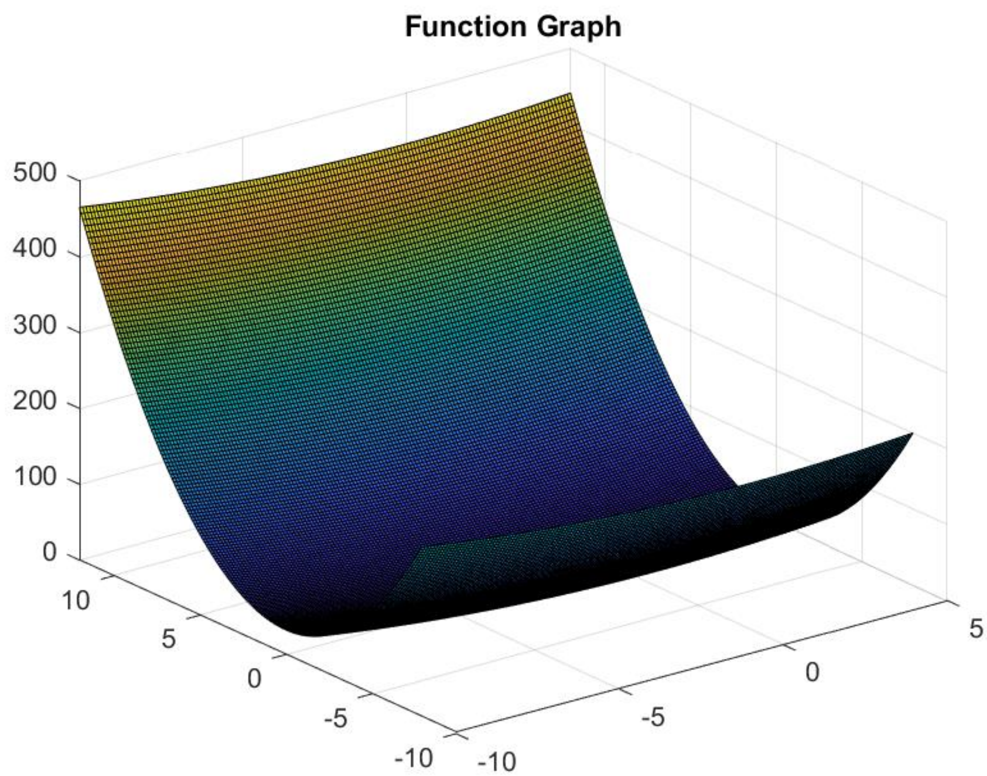
1. Εισαγωγή

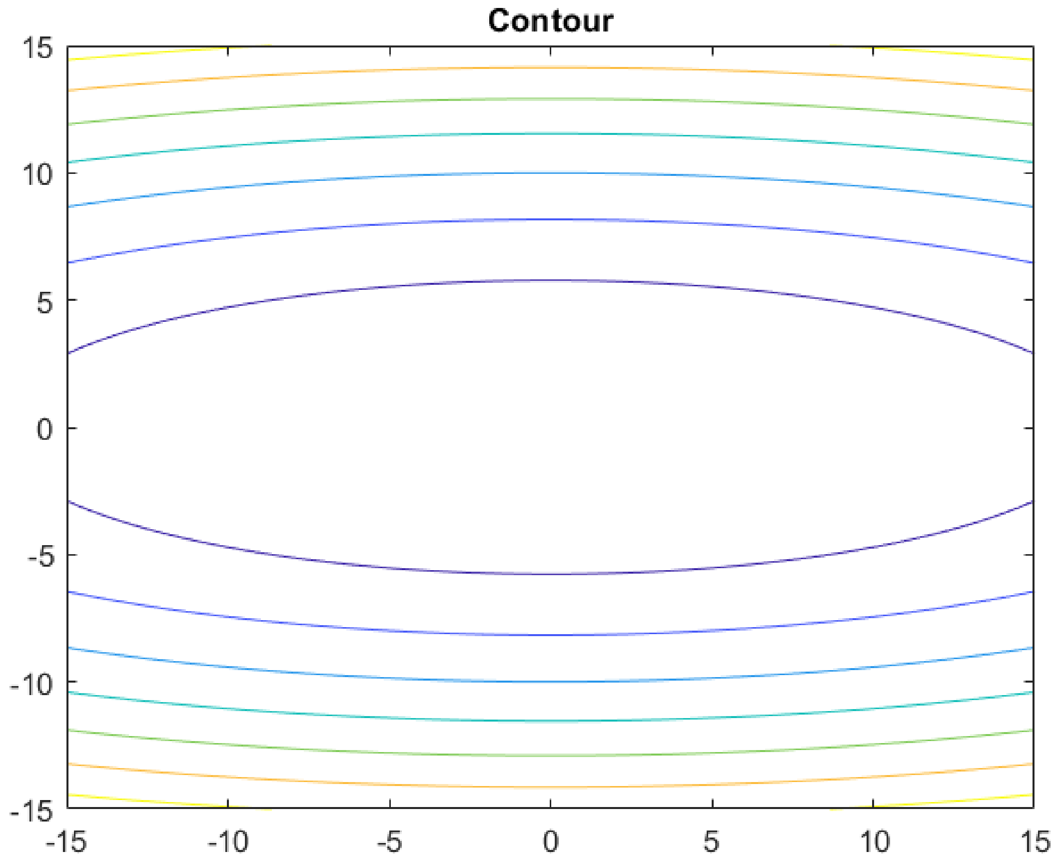
Η δεύτερη εργασία του μαθήματος «Τεχνικές Βελτιστοποίησης» υλοποιείται στο λογισμικό MATLAB και πραγματεύεται αλγορίθμους αναζήτησης ελαχίστου συνάρτησης με 2 μεταβλητές x,y από δεδομένα αρχικά σημεία.

Οι συνάρτηση με την οποία θα ασχοληθούμε είναι:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$$

Ένα γράφημα της συνάρτησης φαίνεται παρακάτω μαζί με το Contour Diagram της:





Τα διαγράμματα αυτά μας δίνουν μια ιδέα για το που θα ψάξουμε το ελάχιστο της συνάρτησης.

Θα προσπαθήσουμε με τις εξής μεθόδους να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση τοπικά.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΘΟΔΟΥ:

Σύμφωνα με την μέθοδο μέγιστης καθόδου, το διάνυσμα κατεύθυνσης το υπολογίζουμε ως την αρνητική κλίση του συνάρτησης υπολογισμένο κάθε φορά στο εκάστοτε χ και γ.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΘΟΔΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ:

ΣΗ διαφοροποίηση που γίνεται σε αυτή την μέθοδο είναι ότι ο παράγοντας ο οποίος μας δείχνει την κατεύθυνση της κίνησης των x,y τώρα υπολογίζεται από το $\Pr\{\, x_k - s_k \nabla \mathrm{f}(x_k) \,\}$ όπου το $\Pr$ είναι η προβολή από τους περιορισμούς που μας δίνονται παρακάτω.

2. Μαθηματική ανάλυση - Διαγράμματα

Παρουσιάζονται διαγράμματα 2 μορφών για να μας βοηθήσουν σε σχηματισμό συμπεράσματος, αυτά που δείχνουν την πορεία του ελαχίστου της συνάρτησης σε συνάρτηση με τις επαναλήψεις του αλγορίθμου και μια κάτοψη της συνάρτησης που δείχνει την πορεία των x_k μέχρι να βρουν το τοπικό ελάχιστο ή να τερματίσει ο αλγόριθμος.

2.1. Θέμα 1 Μέθοδος Steepest Descent

Για το πρώτο θέμα:

Επειδή $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix}$ για να έχουμε σύγκλιση θα πρέπει:

$$x_{1(\kappa+1)} = x_{1(\kappa)} - \frac{2}{3}\gamma_\kappa x_{1(\kappa)}$$

$$x_{2(\kappa+1)} = x_{2(\kappa)} - 6\gamma_\kappa x_{2(\kappa)}$$

Εδώ είναι :

$$\left|\frac{x_{(\kappa+1)}}{x_{(\kappa)}}\right|$$

Άρα

$$\left|1 - \frac{2}{3}\gamma_\kappa\right| < 1$$

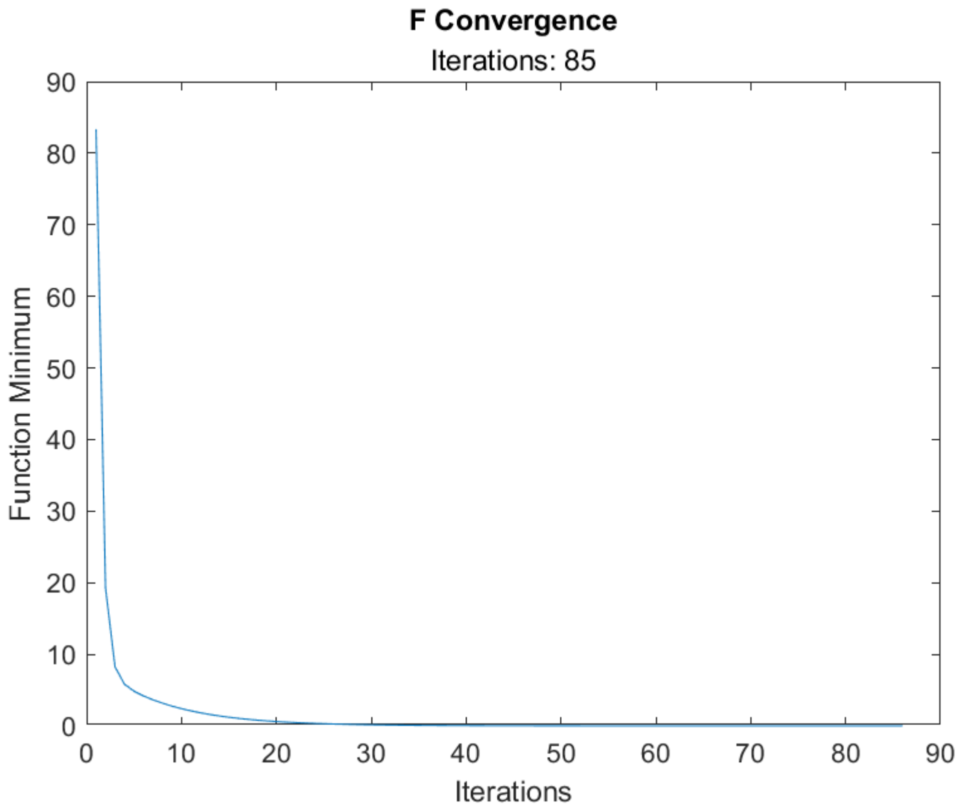
$$|1 - 6\gamma_\kappa| < 1$$

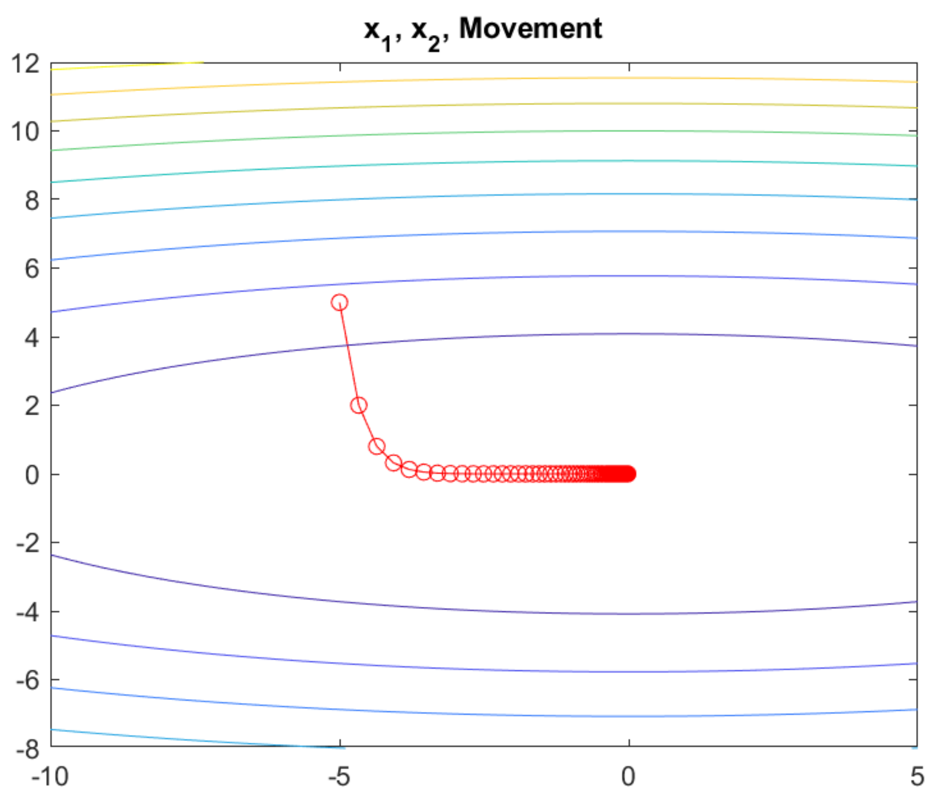
Οπότε

$$0 < \gamma_\kappa < \frac{1}{3}$$

2.1.1 $\gamma_\kappa = 0.1$

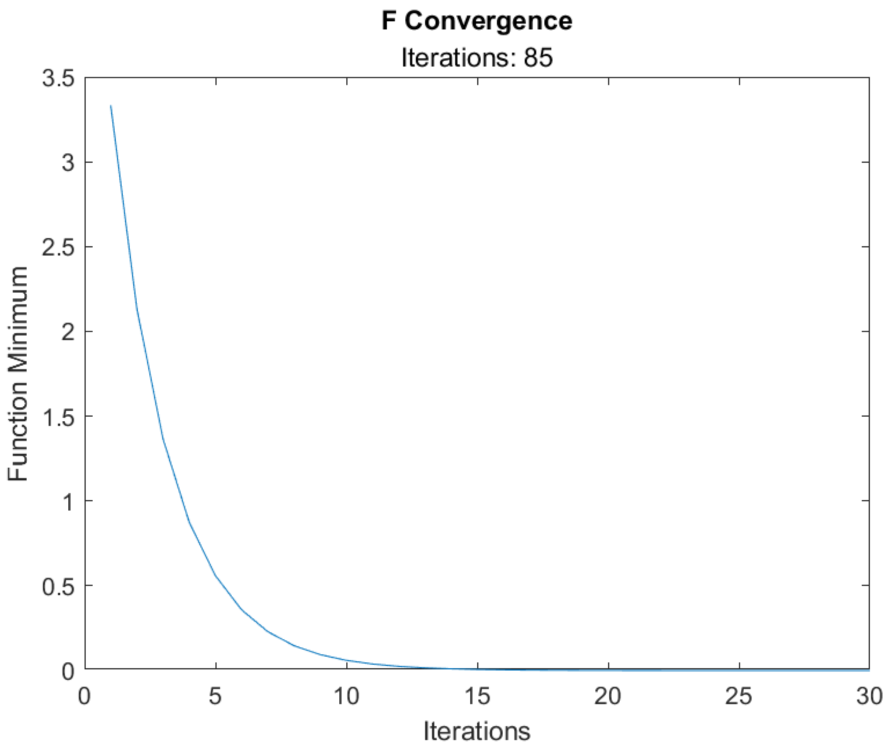
Αρχικό Σημείο: **(-5,5)**

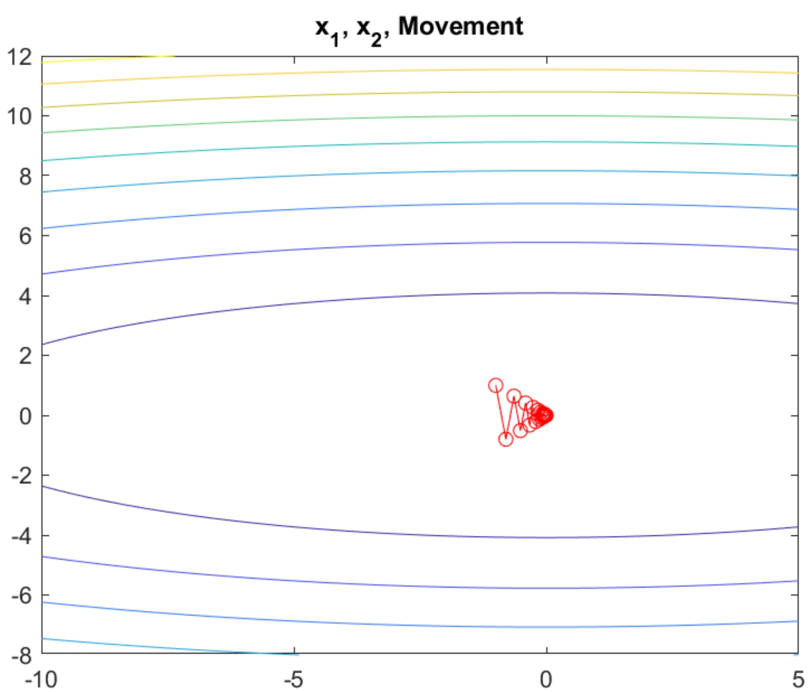

F Convergence
Iterations: 85
Function Minimum
Iterations
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90


x_1, x_2, Movement
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-5
0
5

2.1.2 $\gamma_\kappa = 0.3$

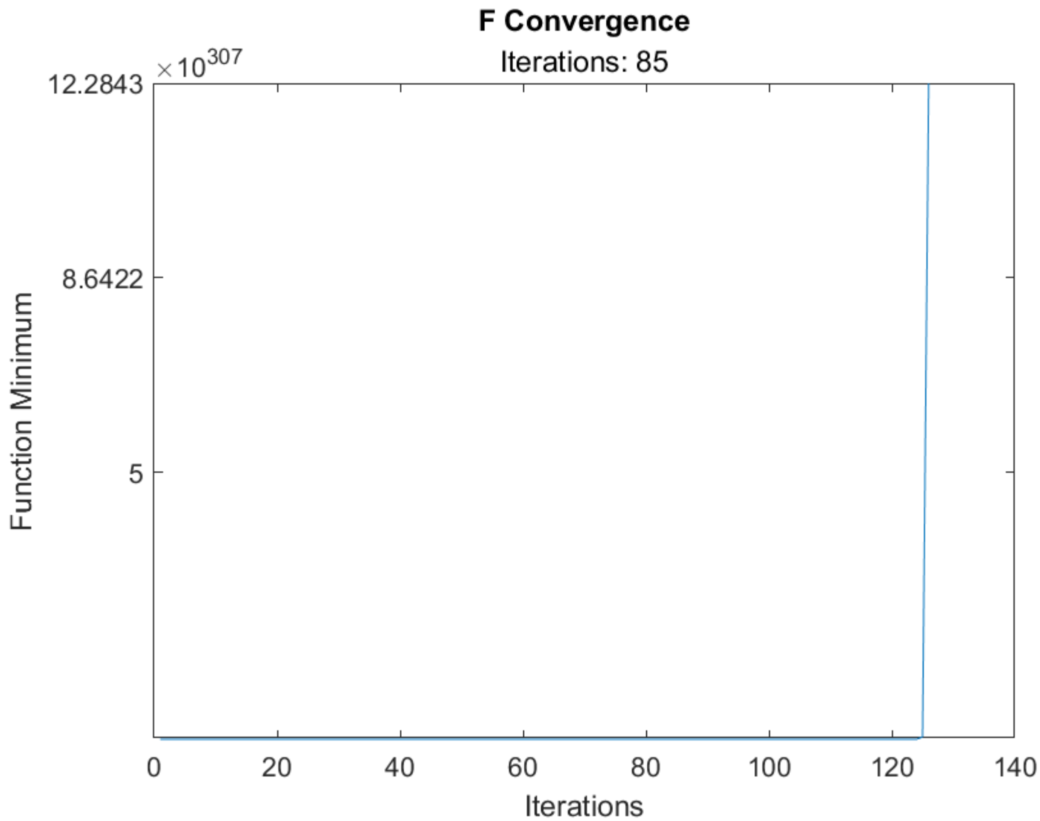
Αρχικό Σημείο: **(-5,5)**

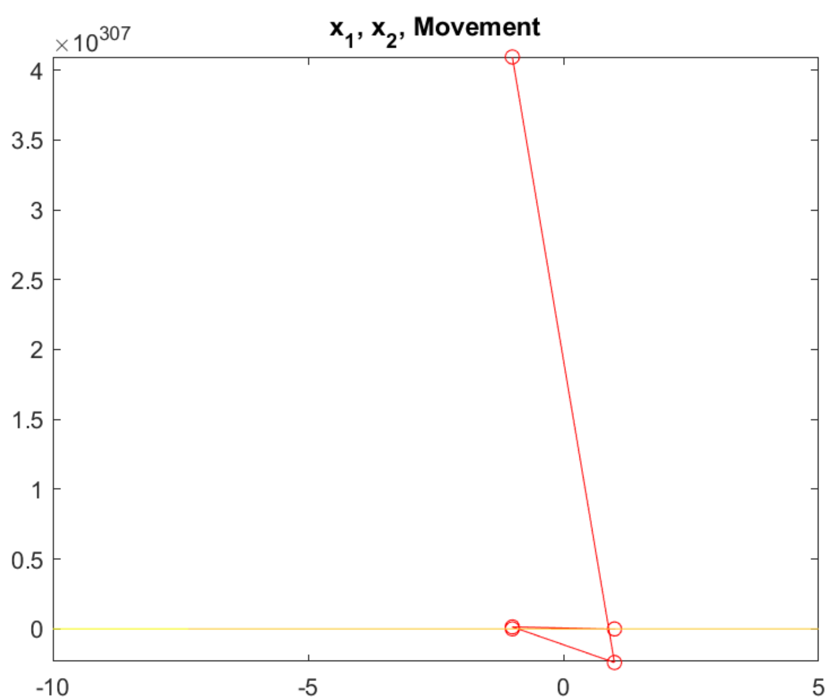




2.1.3 $\gamma_\kappa = 3$

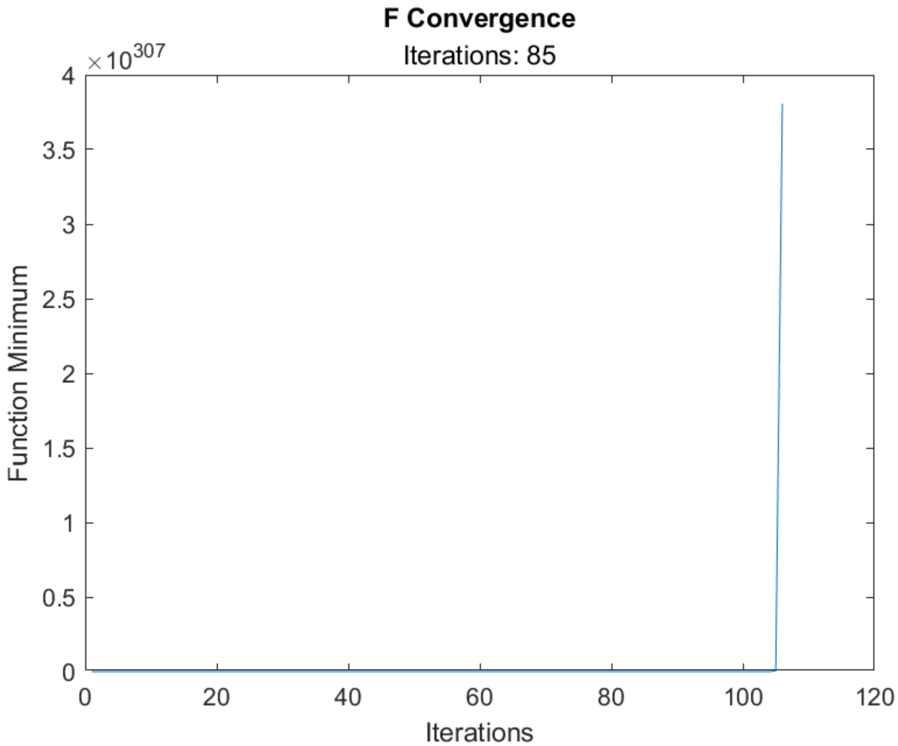
Αρχικό Σημείο: **(-5,5)**

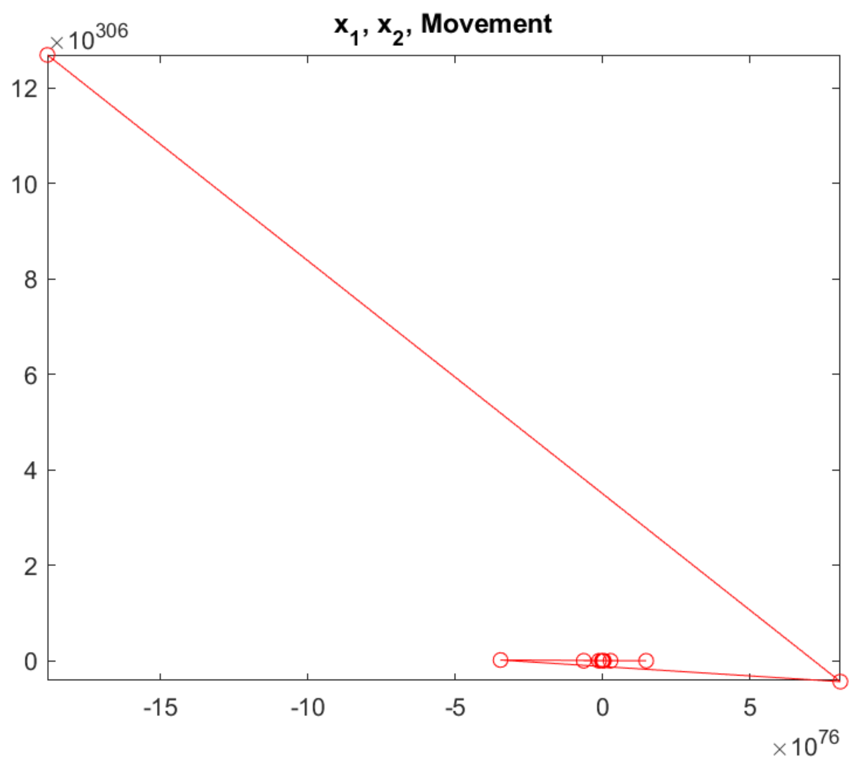




2.1.4 $\gamma_\kappa = 5$

Αρχικό Σημείο: **(-5,5)**





2.1.5 Παρατηρήσεις

Βλέπουμε ότι τα γ τα οποία συμφωνούν με τον μαθηματικό περιορισμό που διατυπώσαμε όταν εισαχθούν στον αλγόριθμο μας δίνουν μια ομαλή λειτουργεία του με την συνάρτηση μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων να φτάνει στο ελάχιστο της.

Στα ερωτήματα 3,4 του πρώτου θέματος όμως βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος που κατασκευάσαμε δεν μπορεί να φτάσει στο μαθηματικό αποτέλεσμα που ξέρουμε κάτι το οποίο και είναι αναμενόμενο.

2.2 Θέμα 2 Μέθοδος Steepest Descent με Προβολή

Επειδή $\nabla \mathrm{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix}$ για να έχουμε σύγκλιση θα πρέπει:

Επειδή:

$$x_{(\kappa+1)} = x_{(\kappa)} + \gamma_\kappa(\bar{x}_\kappa - x_{(\kappa)})$$

Όπου :

$$\bar{x}_\kappa = Pr\{x_{(\kappa)} - s_k \nabla \mathrm{f}(x_k)\}$$

Τότε:

$$x_{1(\kappa+1)} = x_{1(\kappa)} - s_\kappa \frac{2}{3}\gamma_\kappa x_{1(\kappa)}$$

$$x_{2(\kappa+1)} = x_{2(\kappa)} - s_\kappa 6\gamma_\kappa x_{2(\kappa)}$$

Εδώ είναι :

$$\left|\frac{x_{(\kappa+1)}}{x_{(\kappa)}}\right|$$

Άρα

$$\left|1 - \frac{2}{3}s_\kappa \gamma_\kappa\right| < 1$$

$$|1 - 6s_\kappa\gamma_\kappa| < 1$$

Οπότε:

$$0 < s_\kappa\gamma_\kappa < \frac{1}{3}$$

2.2.1 Plots

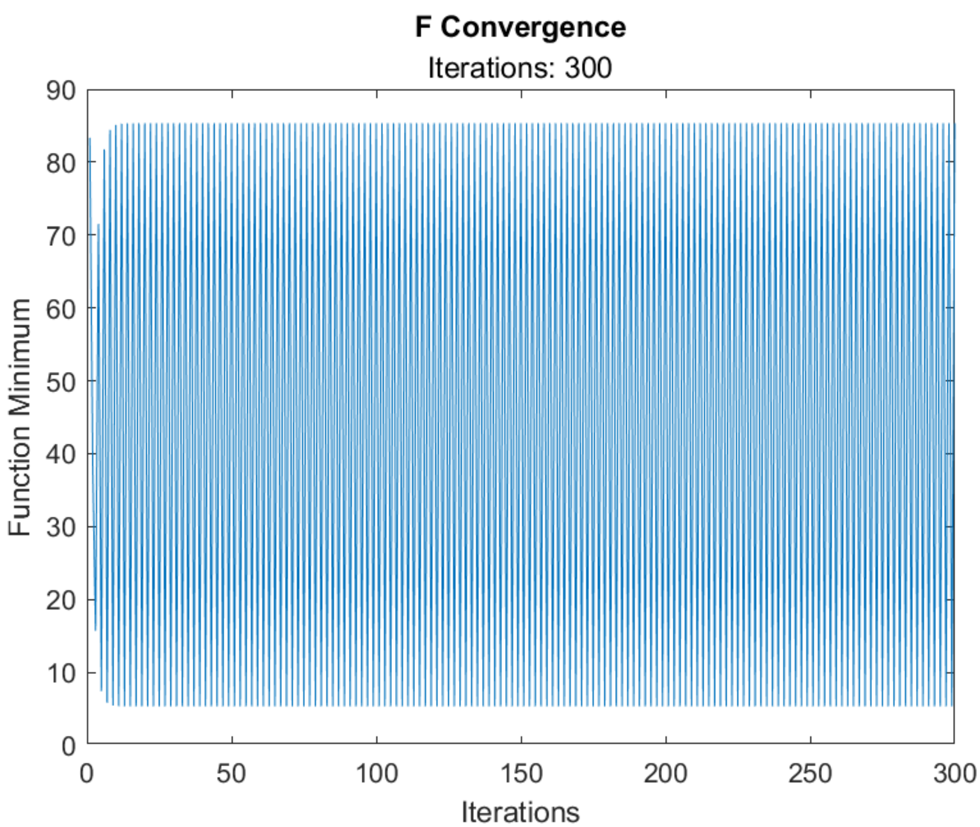
Αρχικό Σημείο: **(5,-5)**

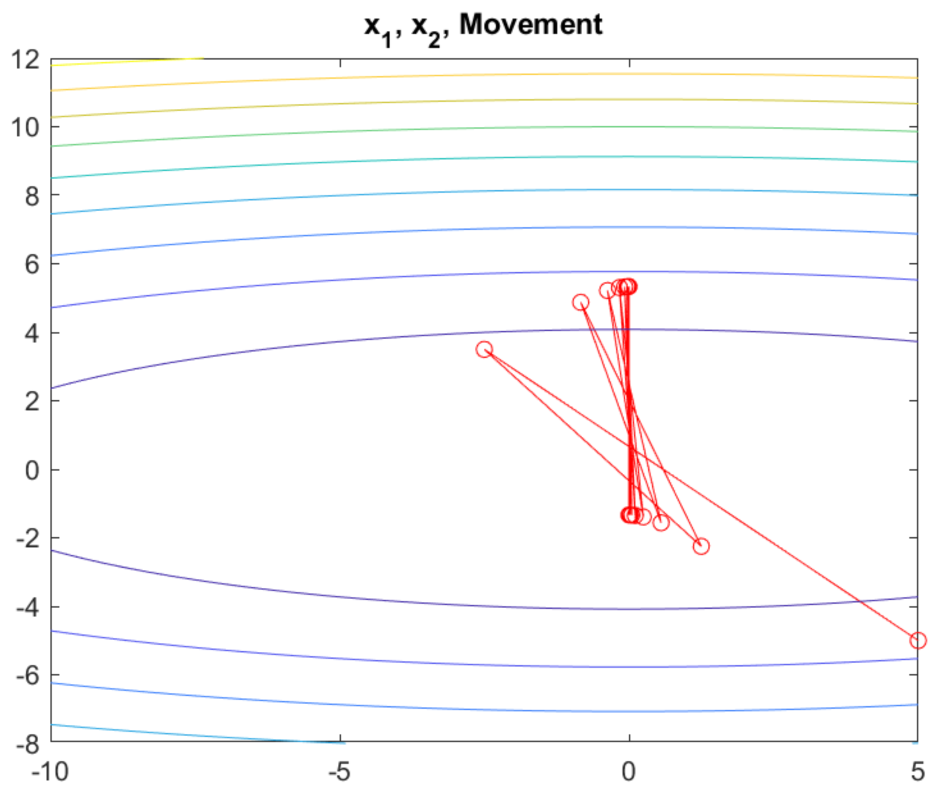
$$s_k = 5$$

$$\gamma_k = 0{,}5$$

$$\varepsilon = 0.01$$

$$s_\kappa\gamma_\kappa = 2.5 > \frac{1}{3}$$





2.3 Θέμα 3 Μέθοδος Steepest Descent με Προβολή

2.3.1 Plots

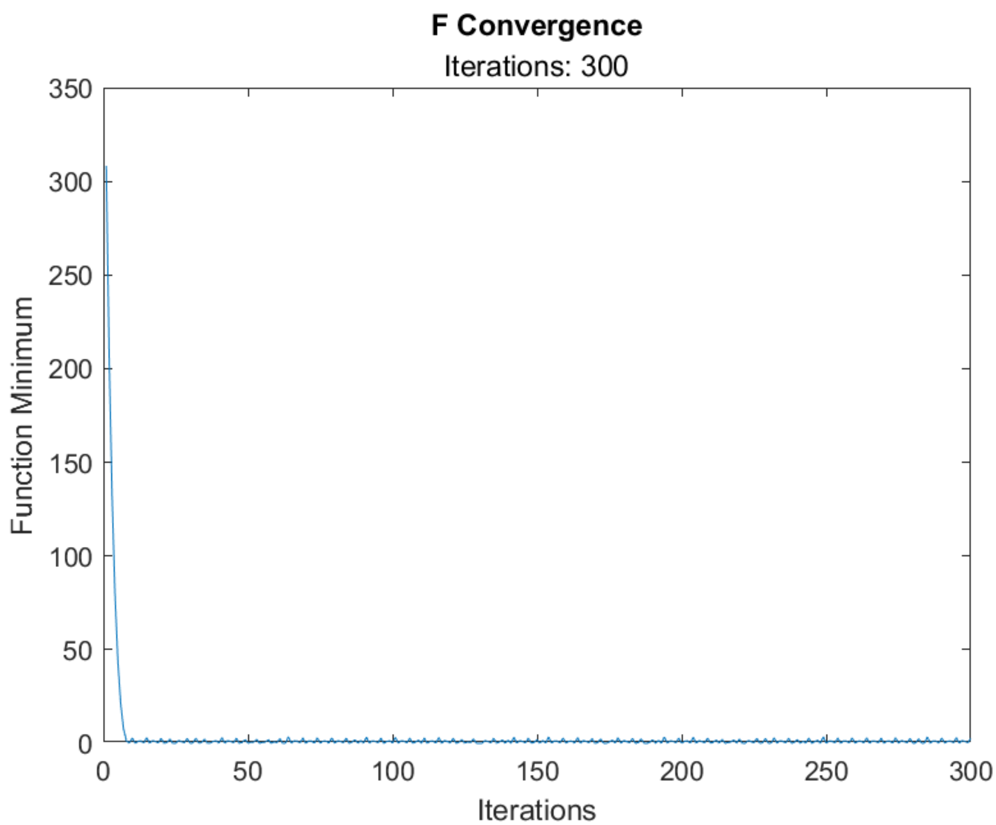
Αρχικό Σημείο: **(-5,10)**

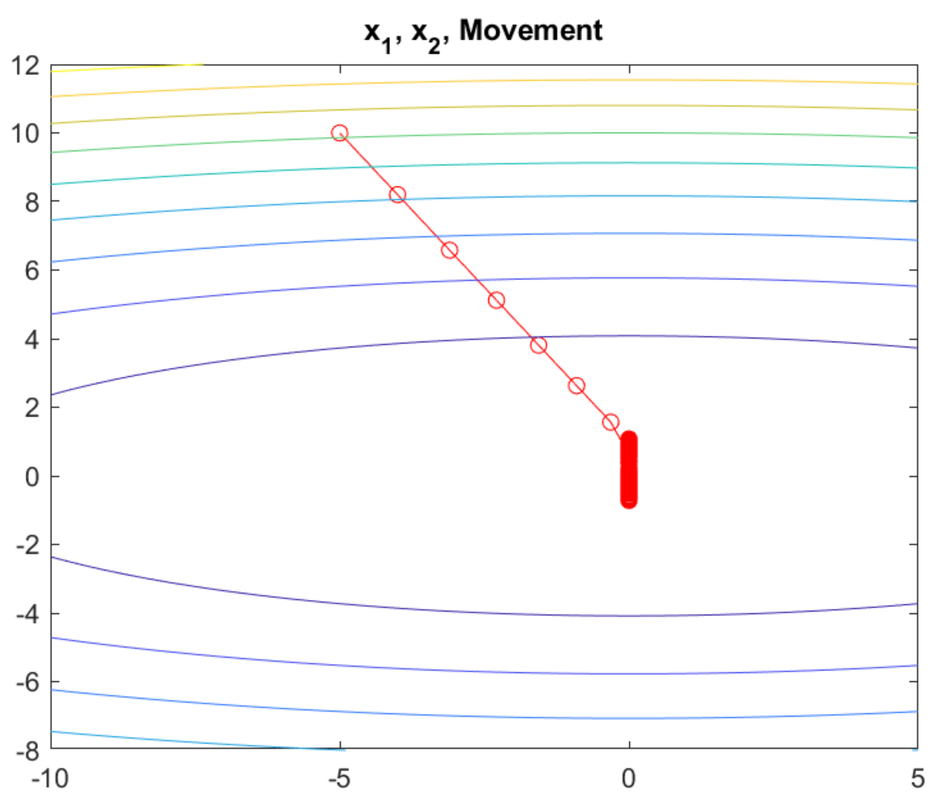
$$s_k = 15$$

$$\gamma_k = 0{,}1$$

$$\varepsilon = 0.01$$

$$s_\kappa \gamma_\kappa = 1{,}5 > \frac{1}{3}$$


F Convergence
Iterations: 300
Function Minimum
Iterations
350
300
250
200
150
100
50
0
0
50
100
150
200
250
300


x_1, x_2, Movement
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-5
0
5

2.4 Θέμα 2 Μέθοδος Steepest Descent με Προβολή

2.4.1 Plots

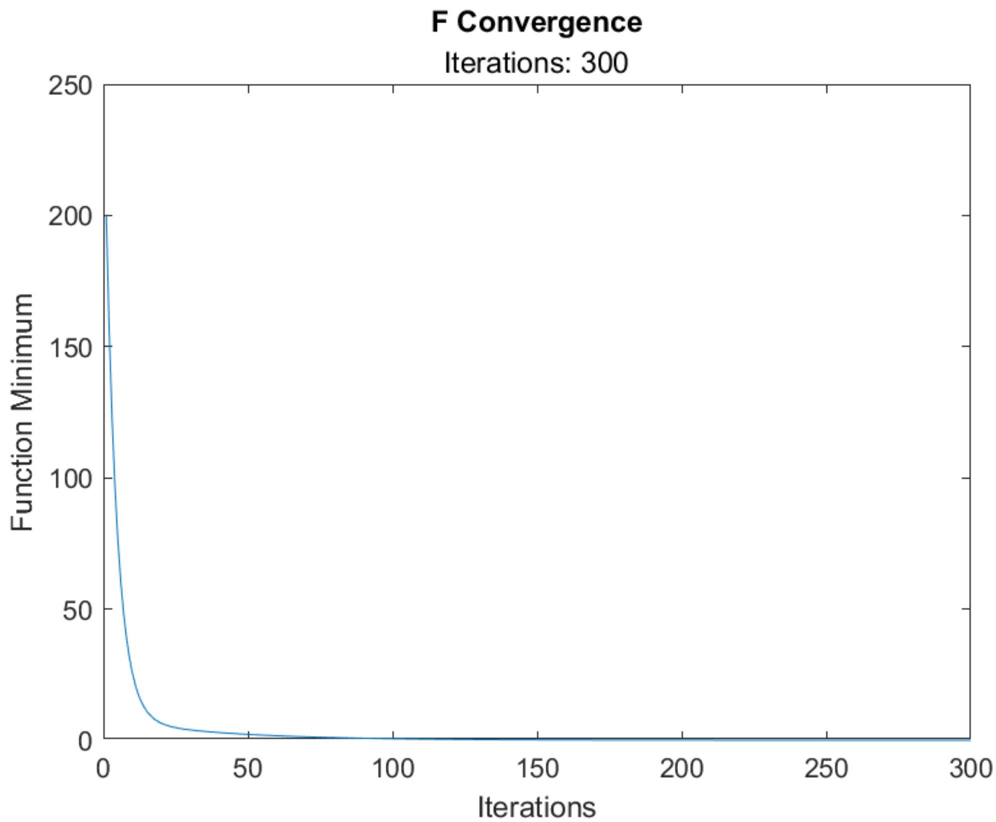
Αρχικό Σημείο: **(8,-10)**

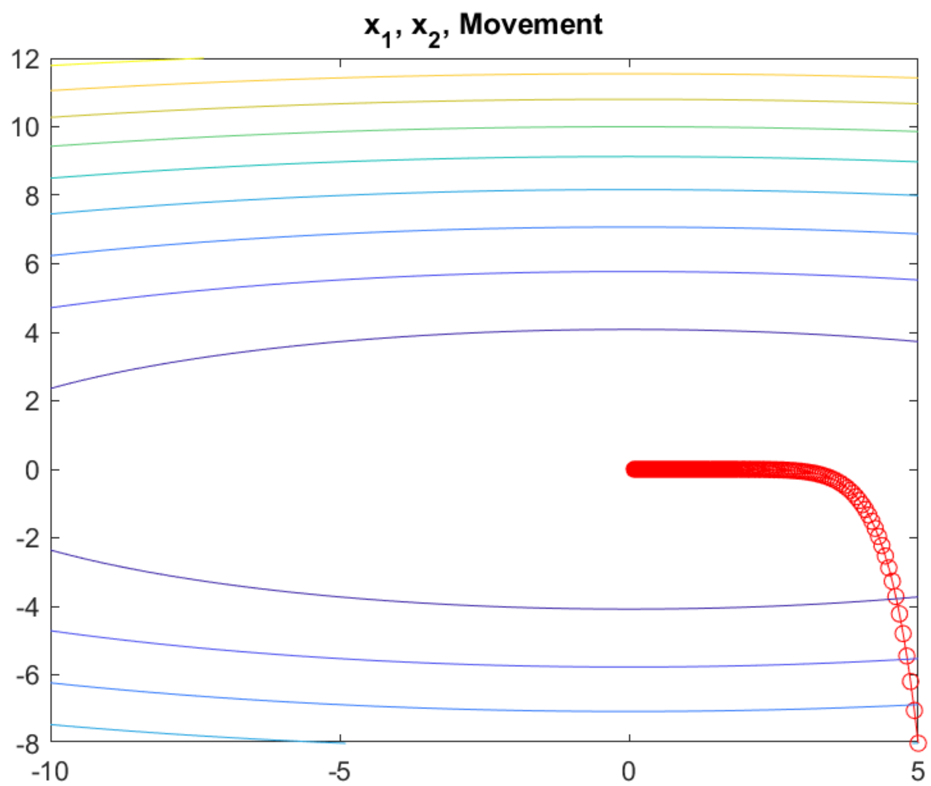
$$s_k = 0{,}1$$

$$\gamma_k = 0{,}2$$

$$\varepsilon = 0.01$$

$$s_\kappa \gamma_\kappa = 0{,}02 < \frac{1}{3}$$





2.5 Παρατηρήσεις

- Στο θέμα 2° προσέχουμε ότι το γινόμενο $s_\kappa \gamma_\kappa$ είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{3}$ οπότε δεν περιμέναμε ότι θα έχουμε σύγκλιση κάτι το οποίο φαίνεται και από τις ταλαντώσεις που κάνει η συνάρτηση επ' άπειρον. Επίσης **σε σχέση με το θέμα 1°** μπορεί το γ_κ να είναι έξω από τους περιορισμούς που έχουμε για την μέθοδο μέγιστης καθόδου αλλά ξανά-τονίζουμε ότι εδώ μας νοιάζει το γινόμενο $s_\kappa \gamma_\kappa$ το οποίο μας καλύπτει και με μεγάλο βήμα έχουμε σύγκλιση.
- Στο θέμα 3° προσέχουμε ότι το γινόμενο $s_\kappa \gamma_\kappa$ είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{3}$ οπότε δεν περιμέναμε ότι θα έχουμε σύγκλιση κάτι το οποίο φαίνεται και από τις ταλαντώσεις που κάνει το σημείο στον άξονα του y, παρόλο που δεν φαίνεται στο διάγραμμα της σύγκλισης το x_2 δεν συγκλίνει ποτέ. **Ένας απλός και πρακτικός τρόπος** να λυθεί το πρόβλημα μας είναι να αλλάξουμε το γ_κ κάνοντάς το π.χ. 0.02 όπου τότε το γινόμενο θα είναι $s_\kappa \gamma_\kappa = 0.3 < 1/3$ και τότε ο αλγόριθμος θα βρει με επιτυχία το ελάχιστο.
- Στο θέμα 4° προσέχουμε ότι το γινόμενο $s_\kappa \gamma_\kappa$ είναι μικρότερο του $\frac{1}{3}$ οπότε περιμέναμε ότι θα έχουμε σύγκλιση κάτι το οποίο φαίνεται και από το διάγραμμα της σύγκλισης αλλά και από το διάγραμμα κίνησης του σημείου. Το μόνο «κακό» είναι ότι λόγου μικρού βήματος αργεί να τελειώσει ο αλγόριθμος.