

# Основы машинного обучения

## Лекция 6

### Линейная регрессия и градиентный спуск

Евгений Соколов

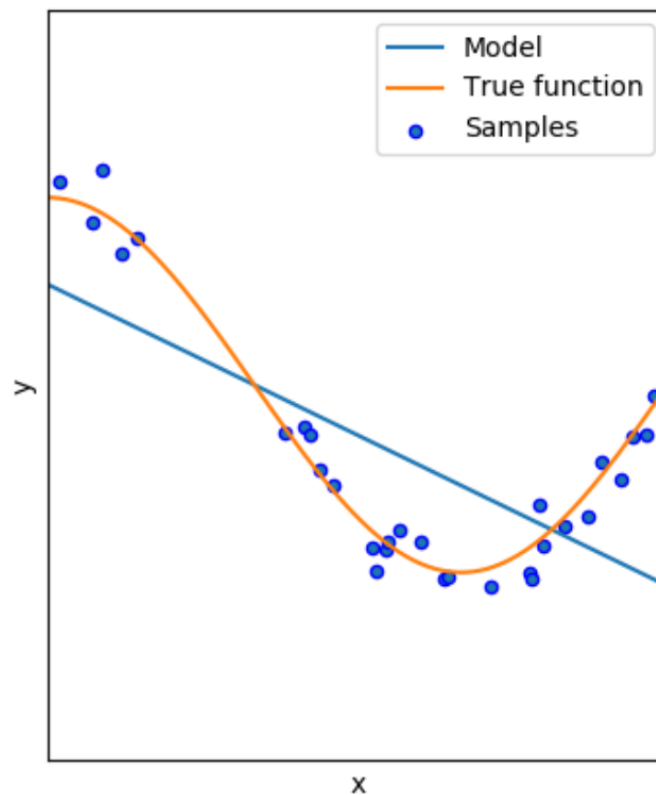
[esokolov@hse.ru](mailto:esokolov@hse.ru)

НИУ ВШЭ, 2025

# Переобучение и регуляризация линейных моделей

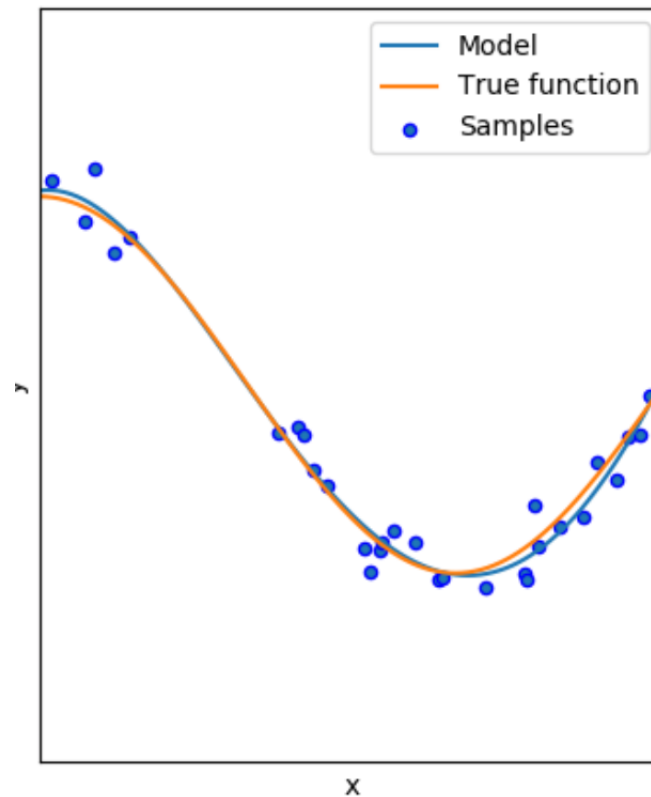
# Нелинейная задача

$$a(x) = w_0 + w_1 x$$



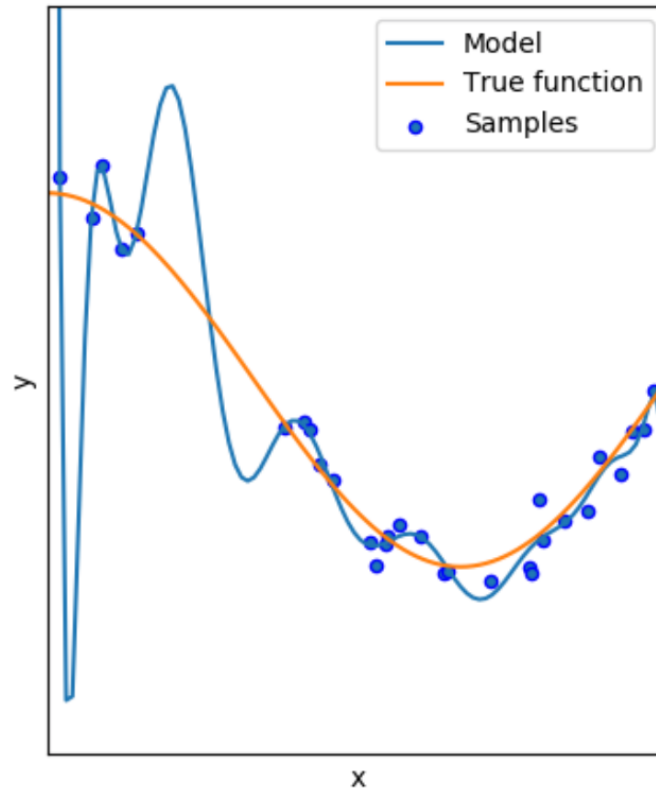
# Нелинейная задача

$$a(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4$$



# Нелинейная задача

$$a(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + \dots + w_{15}x^{15}$$



# Симптом переобучения

$$a(x) = 0.5 + 13458922x - 43983740x^2 + \dots$$

- Большие коэффициенты — симптом переобучения
- Эмпирическое наблюдение

# Симптом переобучения

- Большие коэффициенты в линейной модели — это плохо
- Пример: предсказание роста по весу

$$a(x) = 698x - 41714$$

- Изменение веса на 0.01 кг приведет к изменению роста на 7 см
- Не похоже на правильную зависимость

# Регуляризация

- Будем штрафовать за большие веса!
- Пример функционала:

$$Q(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (\langle w, x_i \rangle - y_i)^2$$

- Регуляризатор:

$$\|w\|^2 = \sum_{j=1}^d w_j^2$$



# Регуляризация

- Регуляризованный функционал

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (\langle w, x_i \rangle - y_i)^2 + \lambda \|w\|^2 \rightarrow \min_w$$

- $\lambda$  — коэффициент регуляризации

# Регуляризация

- Регуляризованный функционал

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (\langle w, x_i \rangle - y_i)^2 + \lambda \|w\|^2 \rightarrow \min_w$$

- Аналитическое решение:

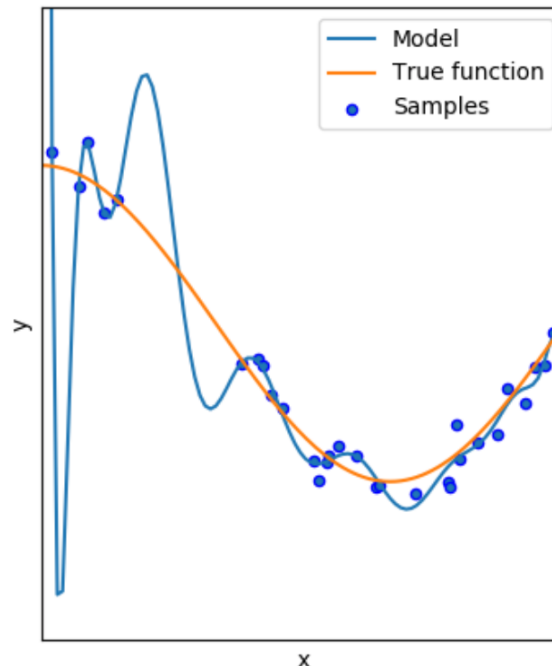
$$w = (X^T X + \lambda I)^{-1} X^T y$$

- Гребневая регрессия (Ridge regression)

# Эффект регуляризации

$$a(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + \dots + w_{15}x^{15}$$

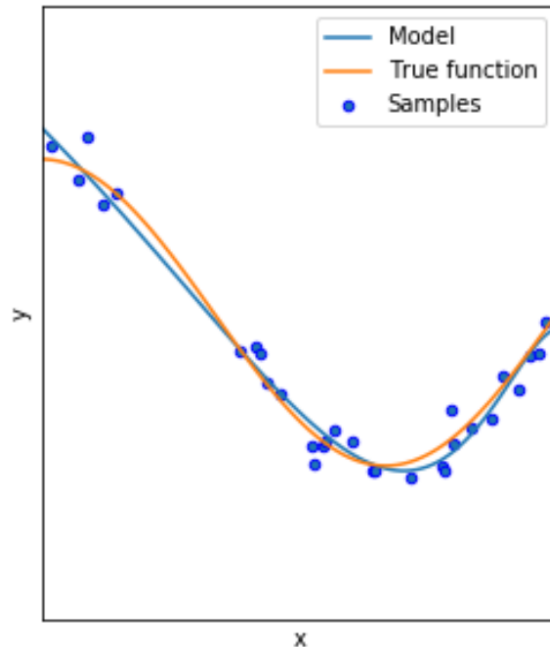
$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min_w$$



# Эффект регуляризации

$$a(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + \dots + w_{15}x^{15}$$

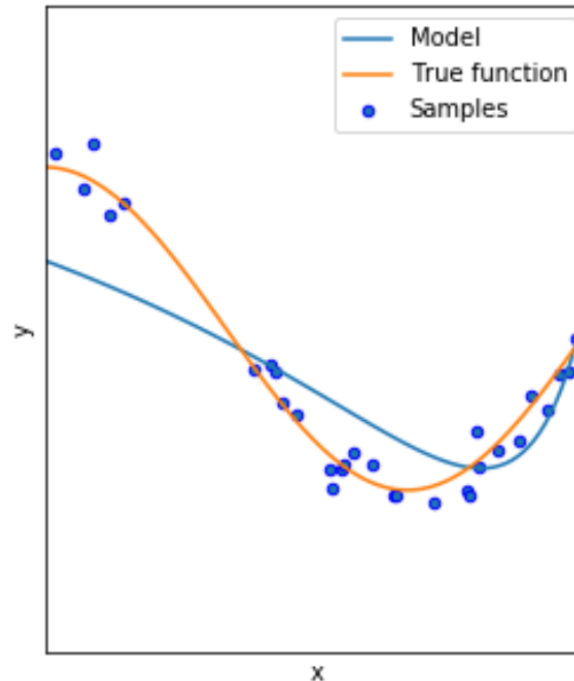
$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2 + \mathbf{0.01} \|w\|^2 \rightarrow \min_w$$



# Эффект регуляризации

$$a(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + \dots + w_{15}x^{15}$$

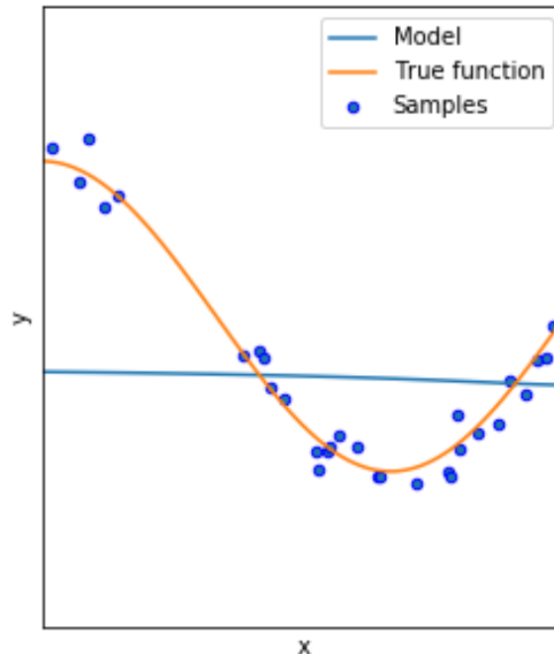
$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2 + \mathbf{1} \|w\|^2 \rightarrow \min_w$$



# Эффект регуляризации

$$a(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + \dots + w_{15}x^{15}$$

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2 + \textcolor{red}{100} \|w\|^2 \rightarrow \min_w$$



# Лассо

- Регуляризованный функционал

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (\langle w, x_i \rangle - y_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^d |w_j| \rightarrow \min_w$$

- LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)
- Некоторые веса зануляются
- Приводит к отбору признаков

# Регуляризаторы

- $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^d z_j^2}$  —  $L_2$ -норма
- $\|z\|_1 = \sum_{j=1}^d |z_j|$  —  $L_1$ -норма



# Интерпретация линейных моделей

# Предсказание стоимости квартиры

$$\begin{aligned} a(x) = & 100.000 * (\text{площадь}) \\ & + 500.000 * (\text{число магазинов рядом}) \\ & + 100 * (\text{средний доход жильцов дома}) \end{aligned}$$

# Предсказание стоимости квартиры

$$\begin{aligned} a(x) = & 100.000 * (\text{площадь}) \\ & + 500.000 * (\text{число магазинов рядом}) \\ & + 100 * (\text{средний доход жильцов дома}) \end{aligned}$$

- Чем больше вес, тем важнее признак?

# Предсказание стоимости квартиры

$$\begin{aligned} a(x) = & 100.000 * (\text{площадь в кв. м.}) \\ & + 500.000 * (\text{число магазинов рядом}) \\ & + 100 * (\text{средний доход жильцов дома}) \end{aligned}$$

- Чем больше вес, тем важнее признак?

# Предсказание стоимости квартиры

$$\begin{aligned} a(x) = & 10 * (\text{площадь в кв. см.}) \\ & + 500.000 * (\text{число магазинов рядом}) \\ & + 100 * (\text{средний доход жильцов дома}) \end{aligned}$$

- Чем больше вес, тем важнее признак?

# Предсказание стоимости квартиры

$$\begin{aligned} a(x) = & 100.000 * (\text{площадь в кв. м.}) \\ & + 500.000 * (\text{число магазинов рядом}) \\ & + 100 * (\text{средний доход жильцов дома}) \end{aligned}$$

- Чем больше вес, тем важнее признак?

# Предсказание стоимости квартиры

$$\begin{aligned} a(x) = & 100.000 * (\text{площадь в кв. м.}) \\ & + 500.000 * (\text{число магазинов рядом}) \\ & + 100 * (\text{средний доход жильцов дома}) \end{aligned}$$

- Чем больше вес, тем важнее признак?
- Только если признаки масштабированы!

# Масштабирование признаков

- Отмасштабируем  $j$ -й признак
- Вычисляем среднее и стандартное отклонение признака на обучающей выборке:

$$\mu_j = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} x_i^j$$

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (x_i^j - \mu_j)^2}$$



# Масштабирование признаков

- Вычтем из каждого значения признака среднее и поделим на стандартное отклонение:

$$x_i^j := \frac{x_i^j - \mu_j}{\sigma_j}$$

# Регуляризация

- Если модель переобучается, то веса используются для запоминания обучающей выборки
- Правильнее масштабировать признаки и регуляризовать модель перед изучением весов

# Градиент и его свойства

# Среднеквадратичная ошибка

- MSE для линейной регрессии:

$$Q(w_1, \dots, w_d) = \sum_{i=1}^{\ell} (\textcolor{red}{w}_1 x_1 + \dots + \textcolor{red}{w}_d x_d - y_i)^2$$

# Градиент

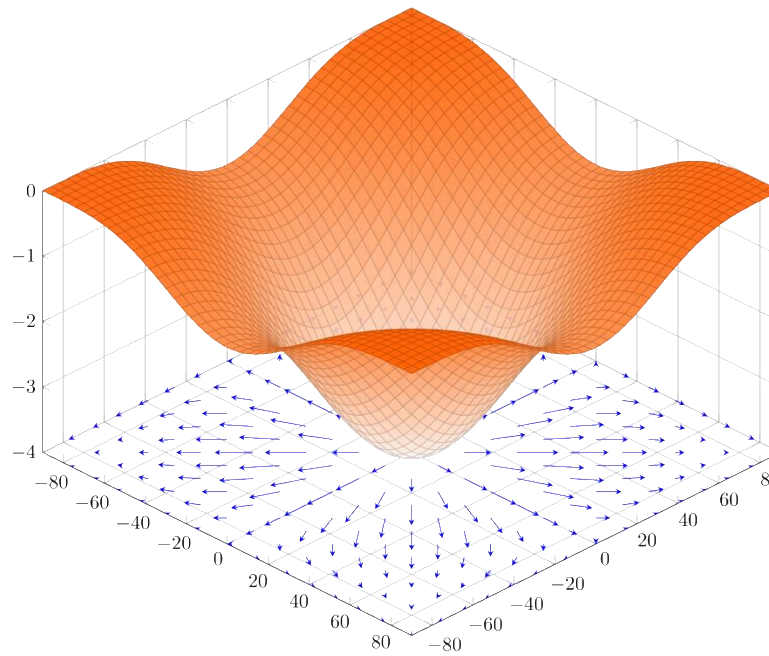
- Градиент — вектор частных производных

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right)$$

- У градиента есть важное свойство!

# Важное свойство

- Зафиксируем точку  $x_0$
- В какую сторону функция быстрее всего растёт?



# Важное свойство

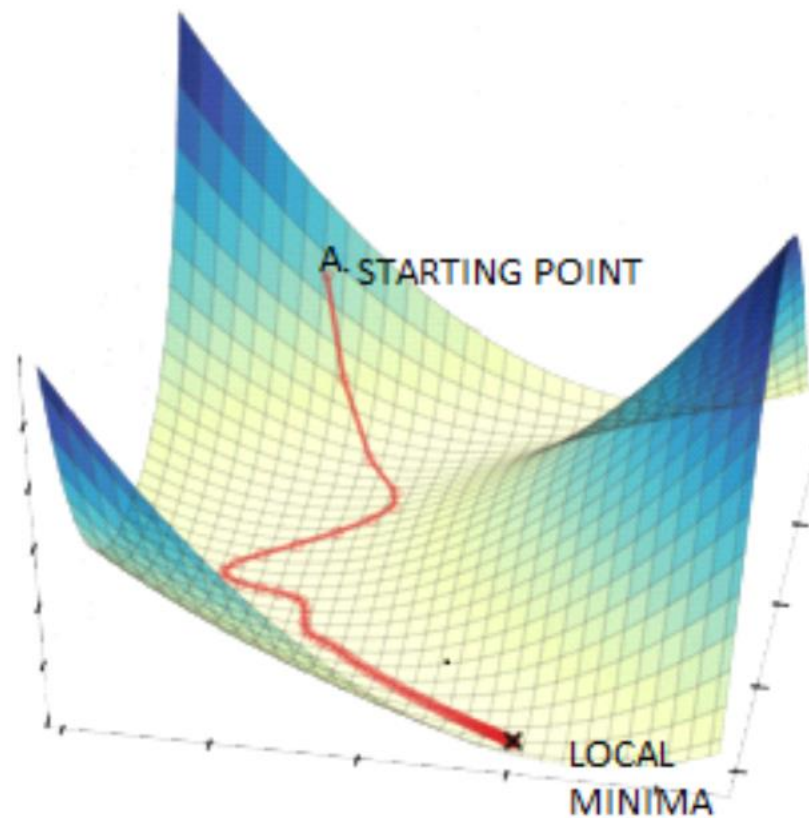
- Зафиксируем точку  $x_0$
- В какую сторону функция быстрее всего растёт?
- В направлении градиента!
- А быстрее всего убывает в сторону антиградиента

Как это пригодится?





Как это пригодится?



Градиентный спуск

# Градиентный спуск

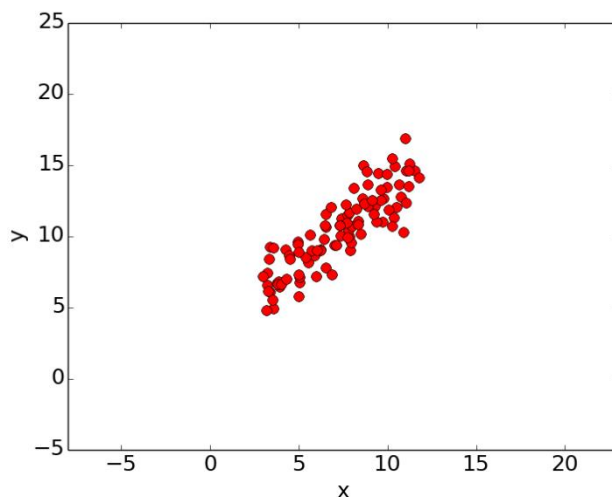
- Стартуем из случайной точки
- Сдвигаемся по антиградиенту
- Повторяем, пока не окажемся в точке минимума

# Парная регрессия

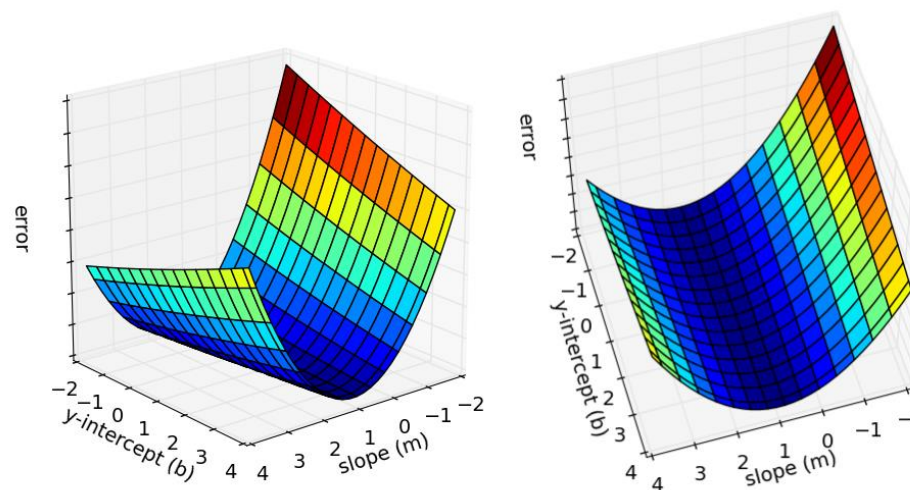
- Простейший случай: один признак
- Модель:  $a(x) = w_1x + w_0$
- Два параметра:  $w_1$  и  $w_0$
- Функционал:

$$Q(w_0, w_1) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (w_1x_i + w_0 - y_i)^2$$

# Парная регрессия



Выборка



Функционал ошибки

# Парная регрессия

$$Q(w_0, w_1) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (w_1 x_i + w_0 - y_i)^2$$

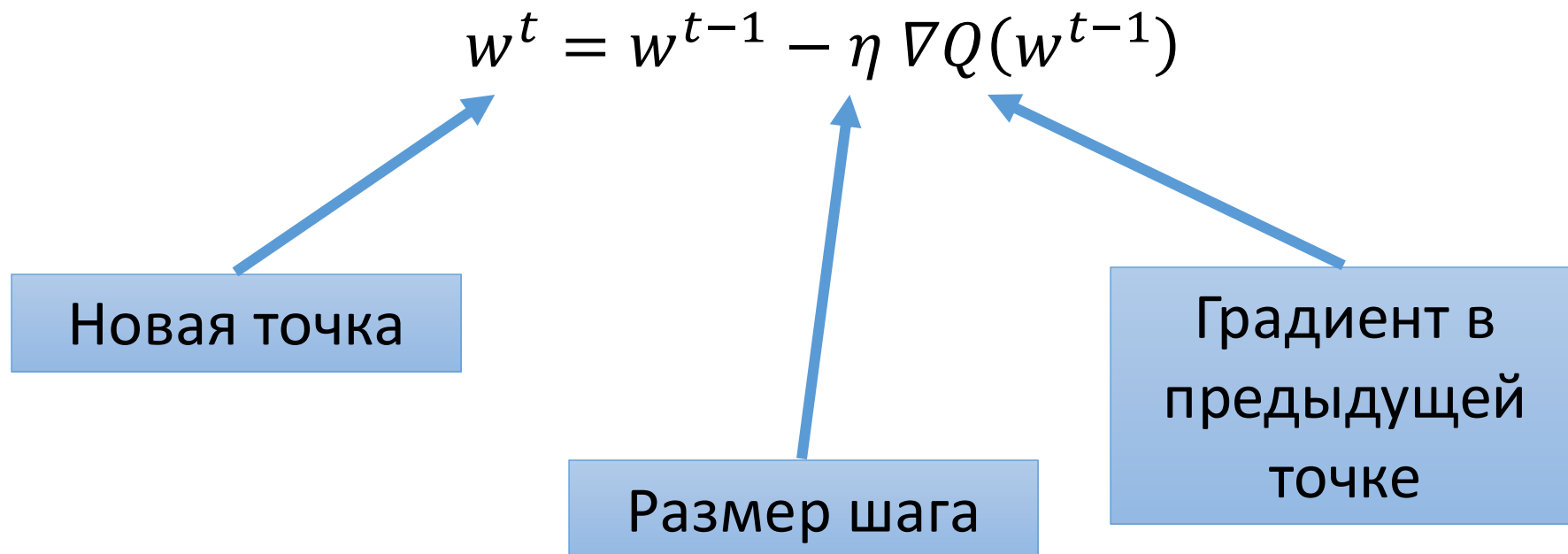
- $\frac{\partial Q}{\partial w_1} = \frac{2}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} x_i (w_1 x_i + w_0 - y_i)$
- $\frac{\partial Q}{\partial w_0} = \frac{2}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (w_1 x_i + w_0 - y_i)$
- $\nabla Q(w) = \left( \frac{2}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} x_i (w_1 x_i + w_0 - y_i), \frac{2}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (w_1 x_i + w_0 - y_i) \right)$

# Начальное приближение

- $w^0$  — инициализация весов
- Например, из стандартного нормального распределения

# Градиентный спуск

- Повторять до сходимости:





# Сходимость

- Останавливаем процесс, если

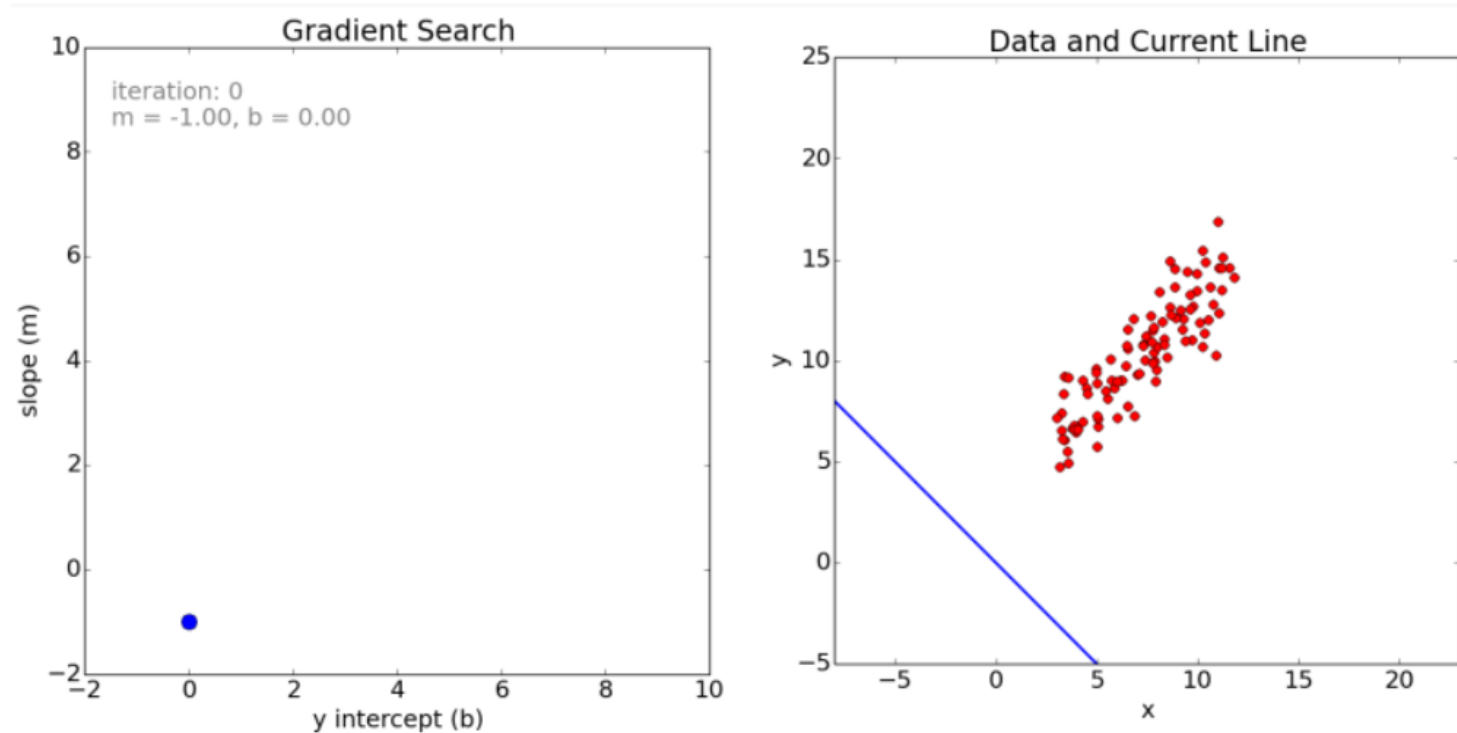
$$\|w^t - w^{t-1}\| < \varepsilon$$

- Другой вариант:

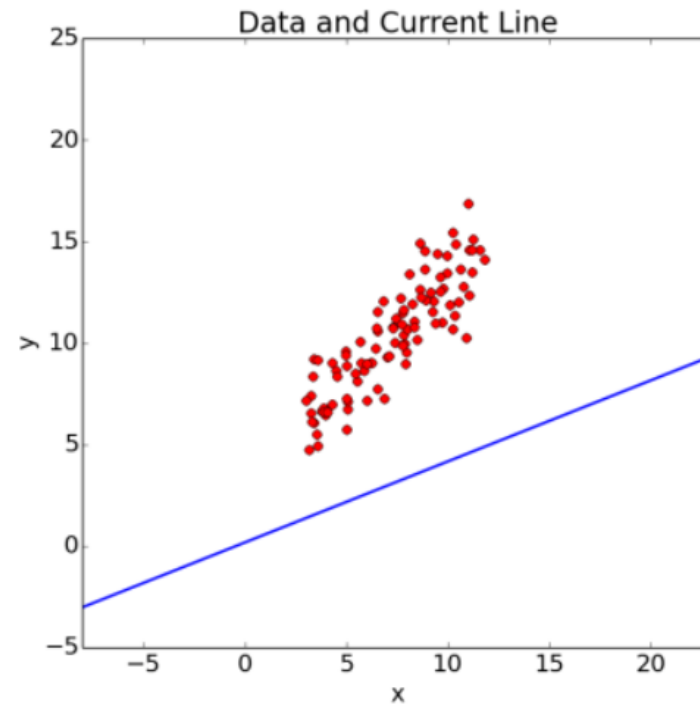
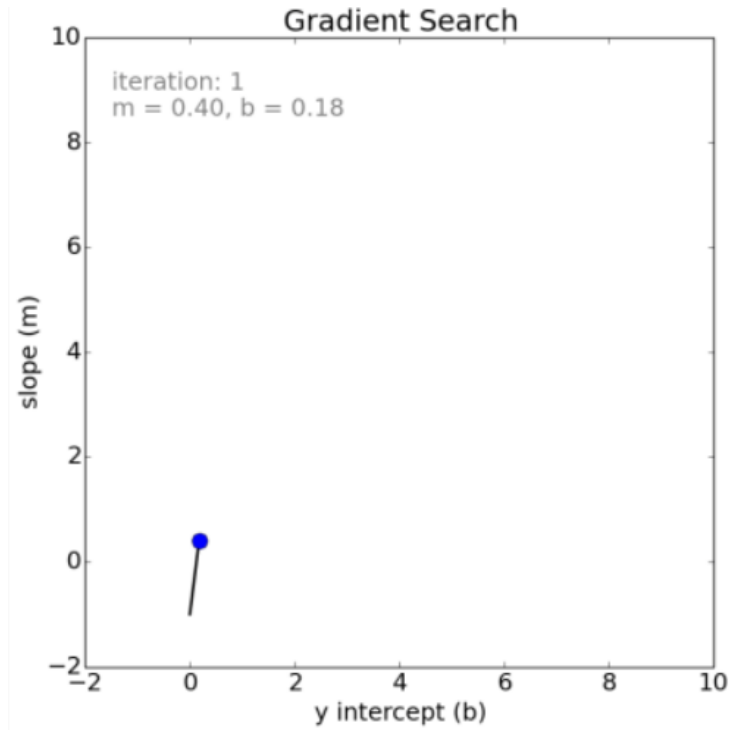
$$\|\nabla Q(w^t)\| < \varepsilon$$

- Или пока ошибка на отложенной выборке уменьшается

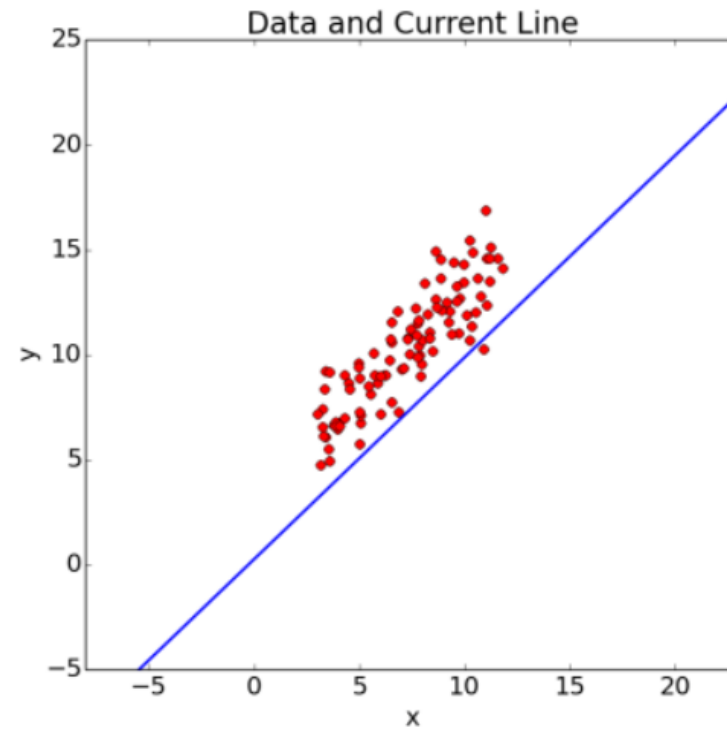
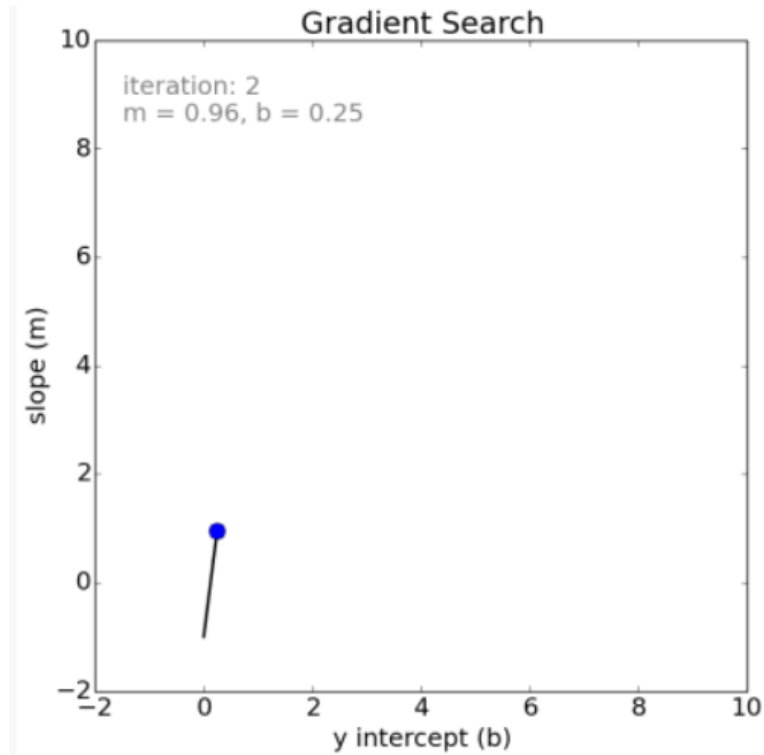
# Парная регрессия



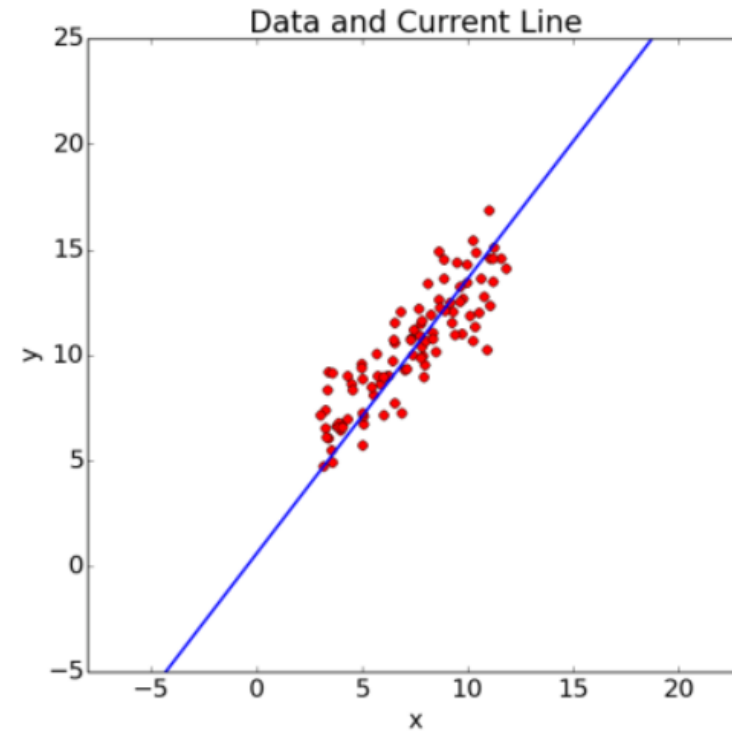
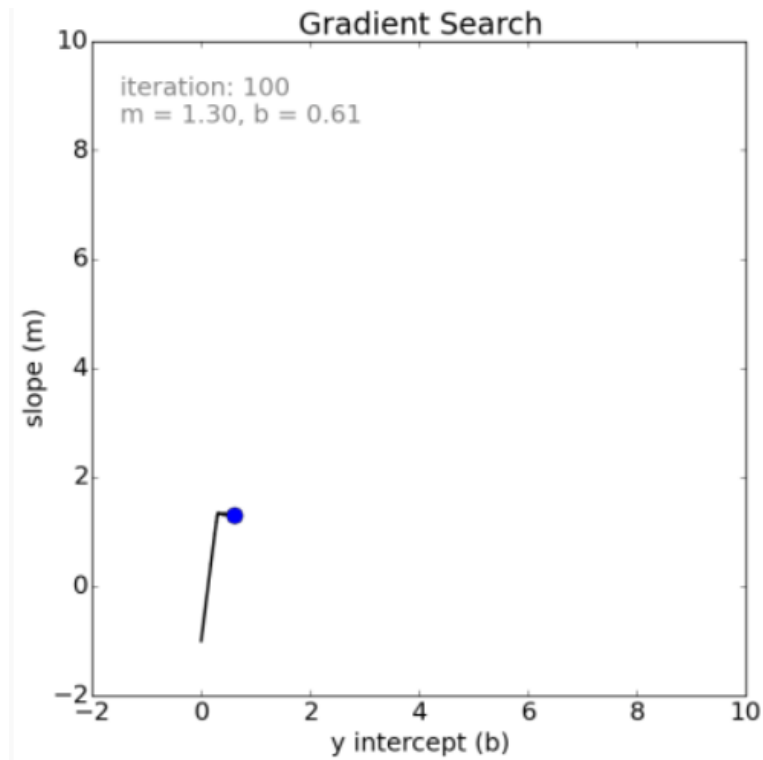
# Парная регрессия



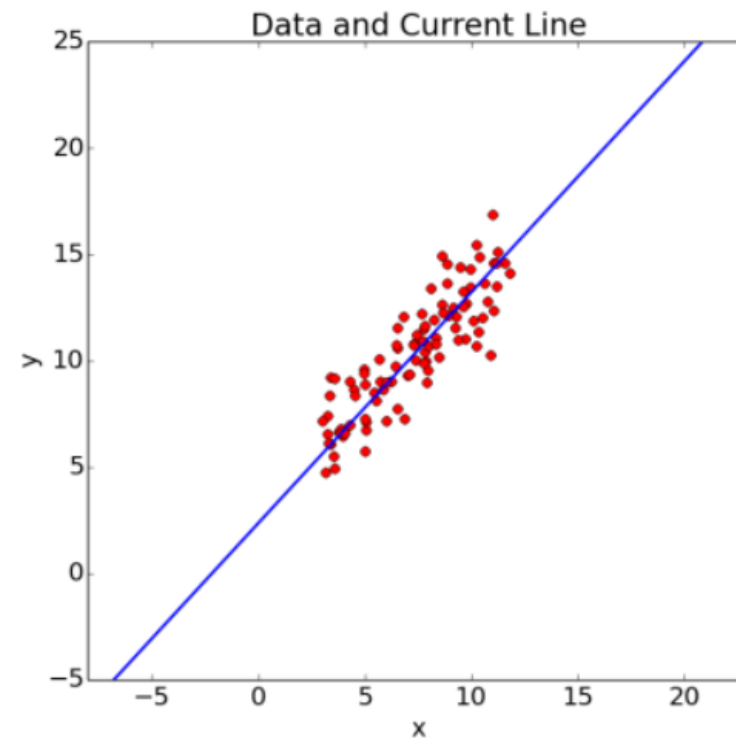
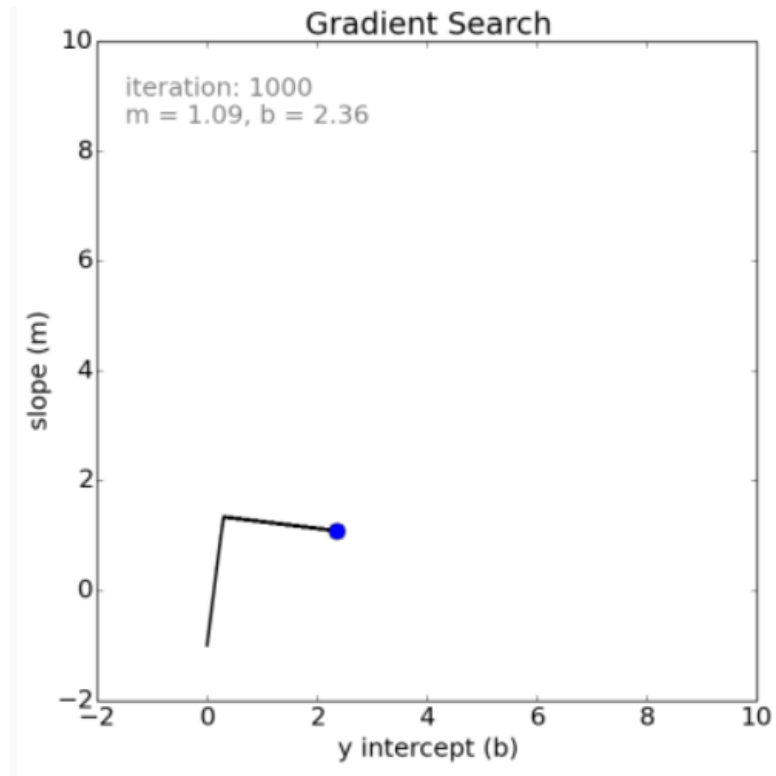
# Парная регрессия



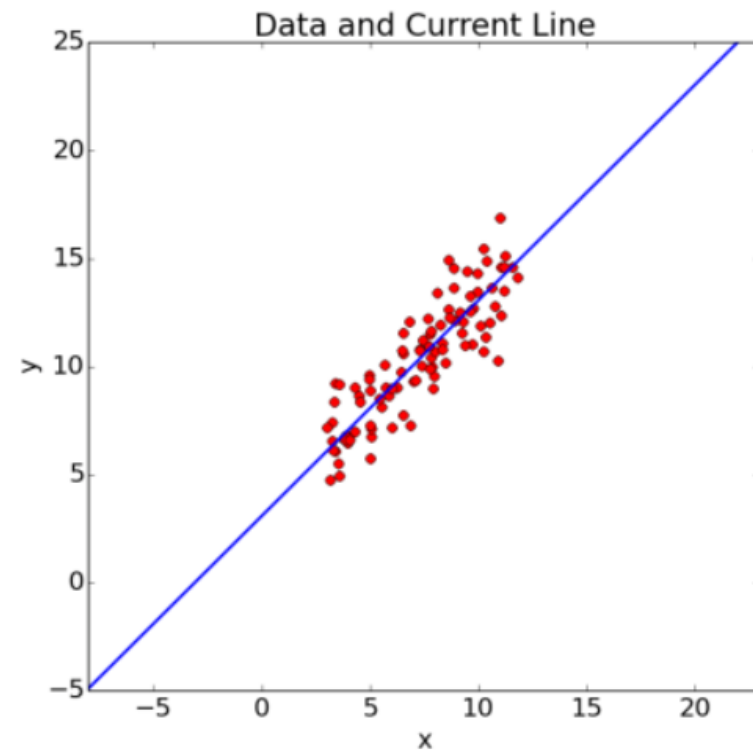
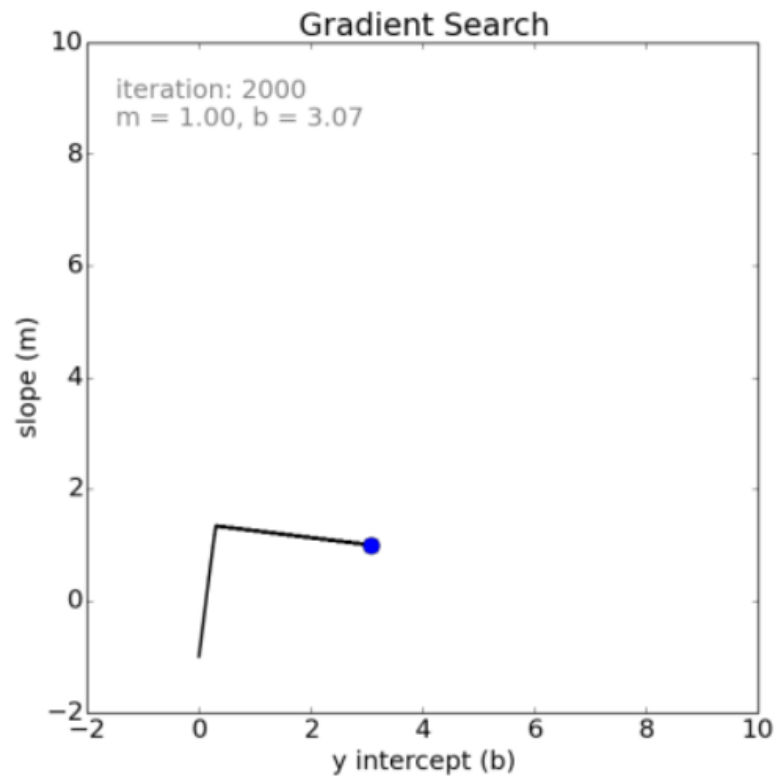
# Парная регрессия



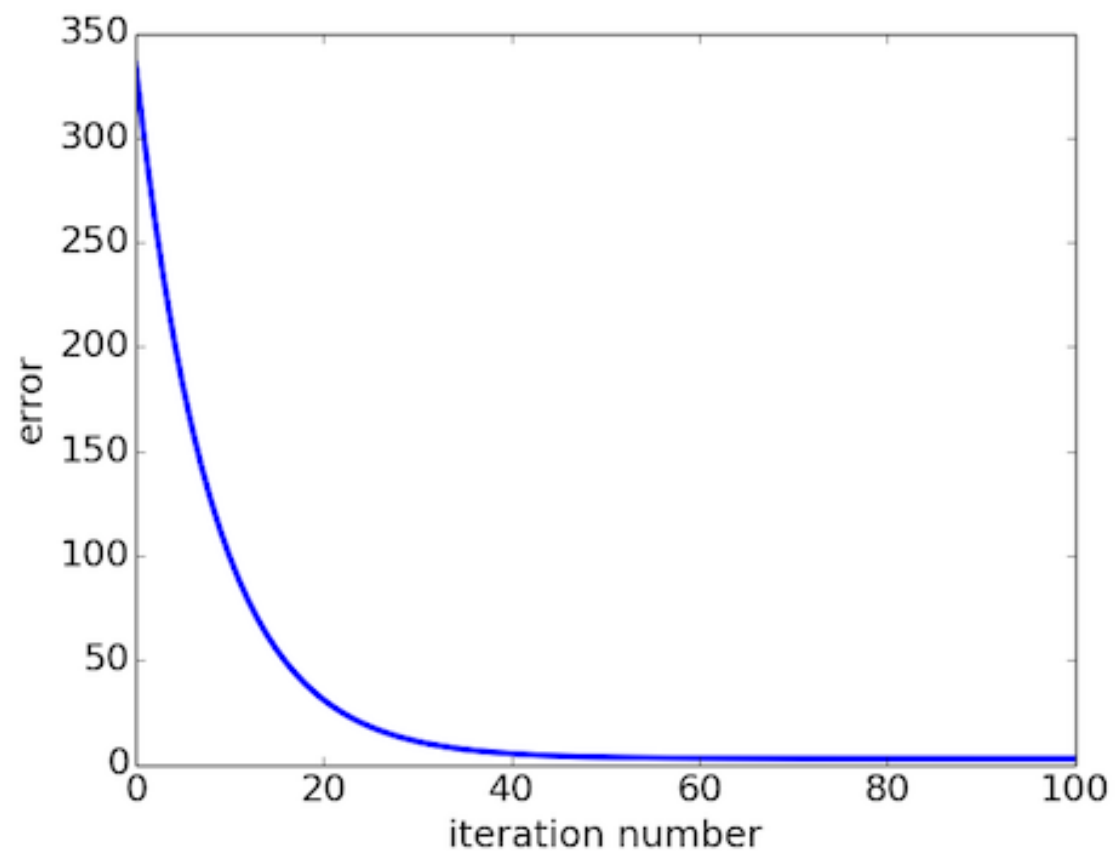
# Парная регрессия



# Парная регрессия



# Функционал ошибки





# Линейная регрессия

$$Q(w) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (\langle w, x \rangle - y_i)^2$$

- $\frac{\partial Q}{\partial w_1} = \frac{2}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} x_{i1} (\langle w, x \rangle - y_i)$
- ...
- $\frac{\partial Q}{\partial w_d} = \frac{2}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} x_{id} (\langle w, x \rangle - y_i)$
- $\nabla Q(w) = \frac{2}{\ell} X^T (Xw - y)$

# Градиентный спуск

1. Начальное приближение:  $w^0$

2. Повторять:

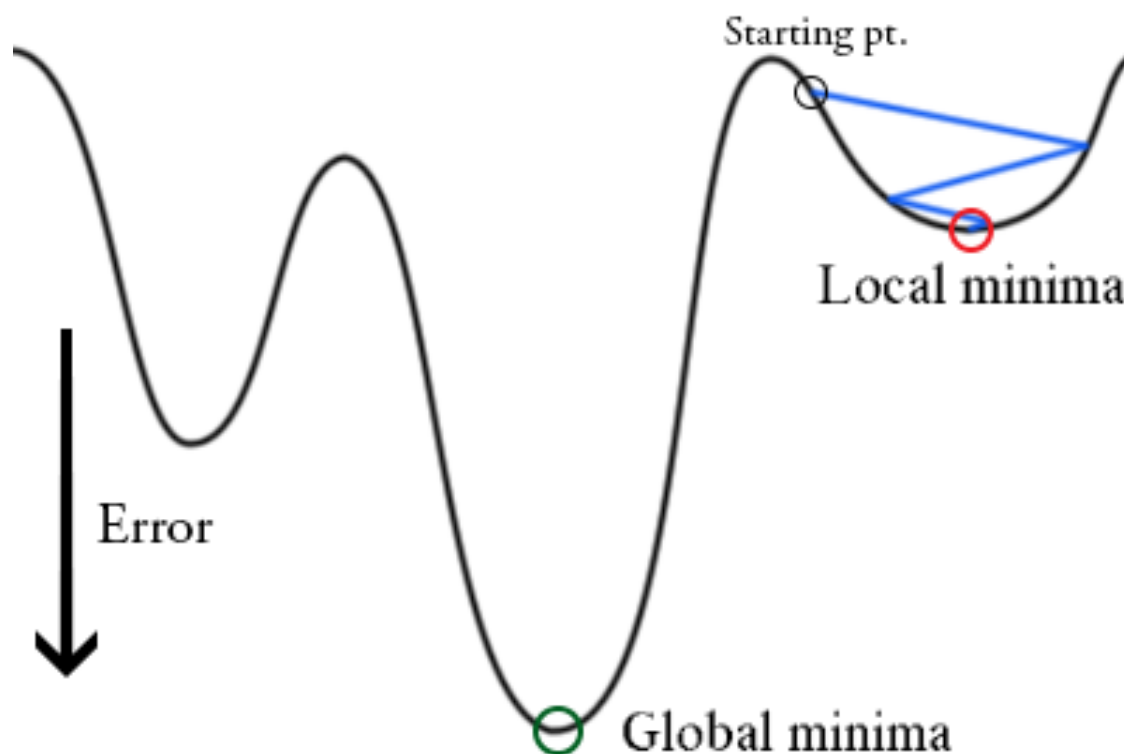
$$w^t = w^{t-1} - \eta \nabla Q(w^{t-1})$$

3. Останавливаемся, если

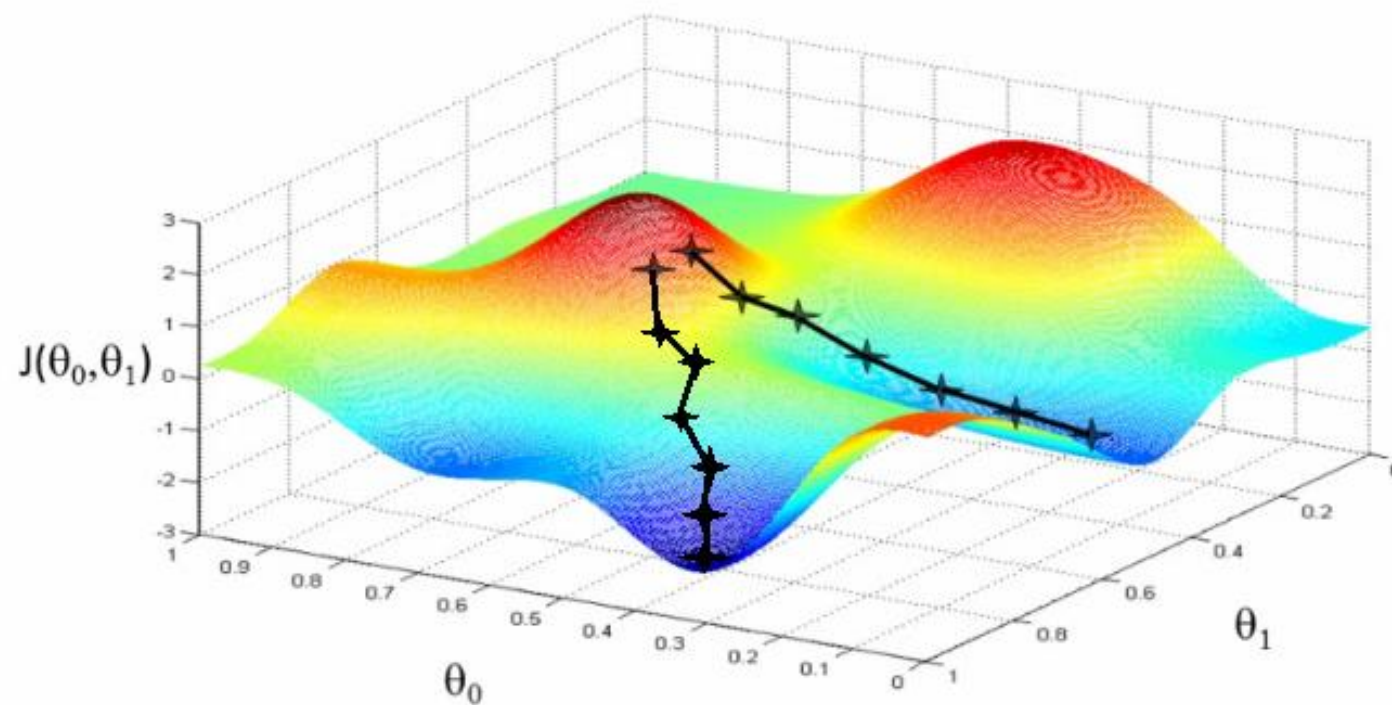
$$\|w^t - w^{t-1}\| < \varepsilon$$

# Локальные минимумы

- Градиентный спуск находит только локальные минимумы



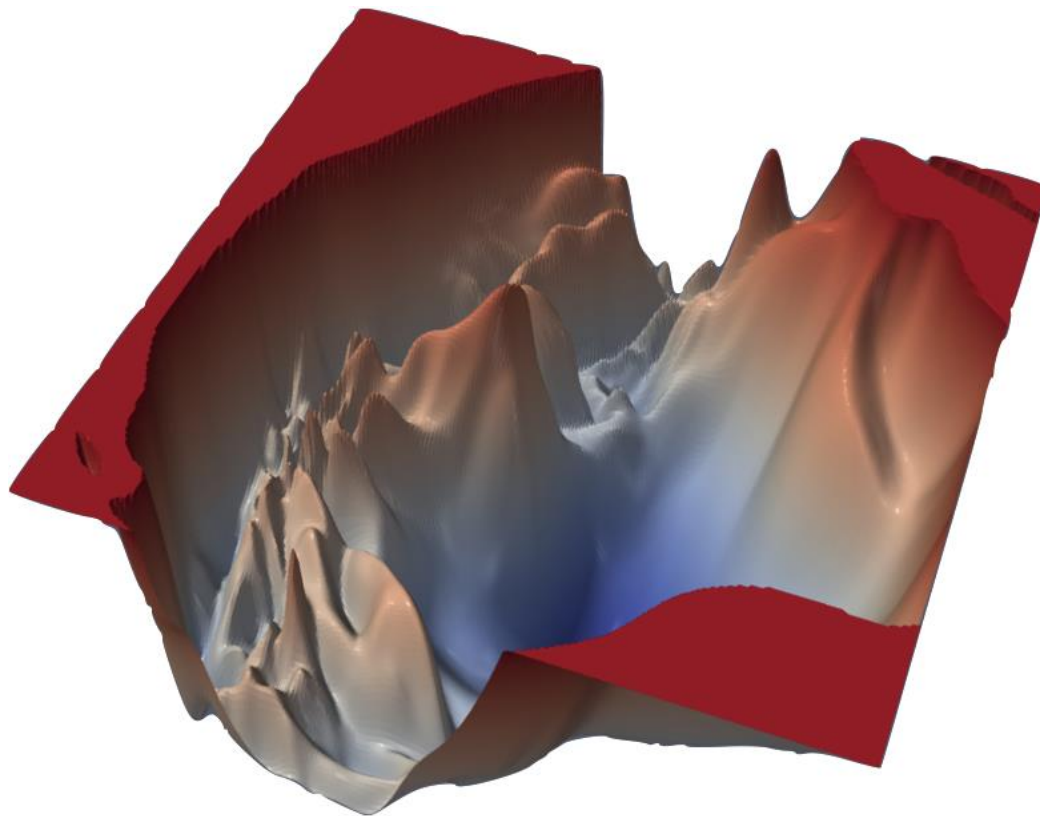
# Локальные минимумы



# Локальные минимумы

- Градиентный спуск находит **локальный минимум**
- Мультистарт — запуск градиентного спуска из разных начальных точек
- Может улучшить результат

# Локальные минимумы



# Длина шага

$$w^t = w^{t-1} - \eta \nabla Q(w^{t-1})$$

- Позволяет контролировать скорость обучения

# Длина шага

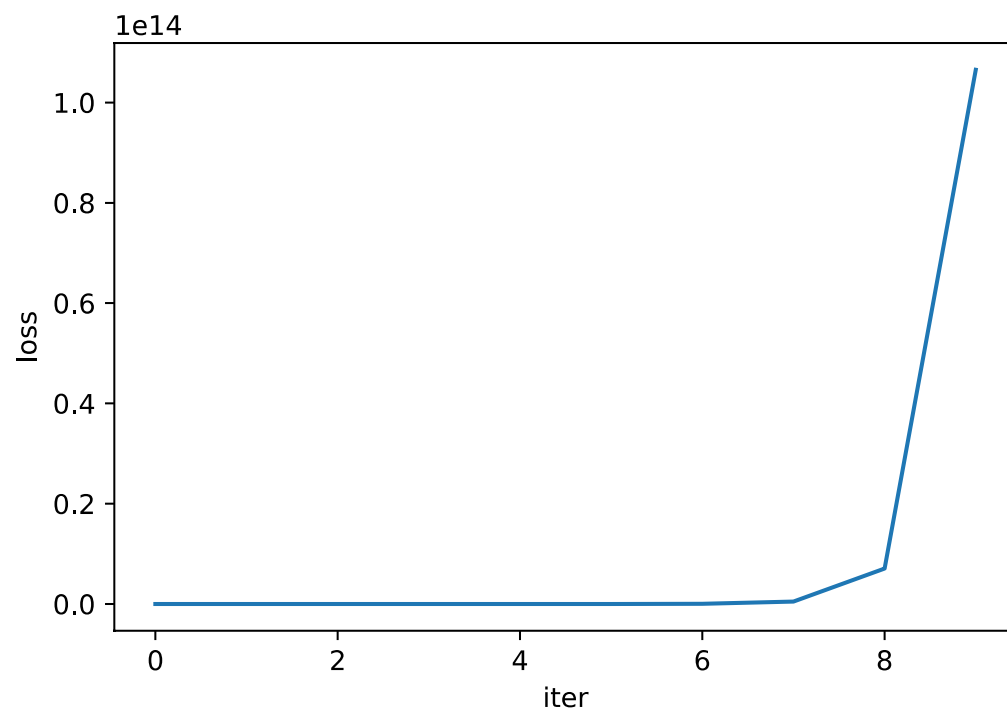
```
[[ 0.8194022 -11.97609413 -34.41655678  0.98167246 -34.14405489]
 [ -2.83614512  17.19489715  3.29562399  63.8054227  39.70301275]
 [  3.10906179  11.26049837  0.51404712  22.64032379 -28.62078735]
 ...,
 [ -3.61976507  17.63933655  31.65890573  22.5124188 -75.6386039 ]
 [ -1.98472285  3.98588887  29.6135414 -11.11816  33.98746403]
 [ -3.34136103 -12.81955782 -19.5542601  12.62435442  50.24876879]]
```



# Длина шага

Градиент на первом шаге:

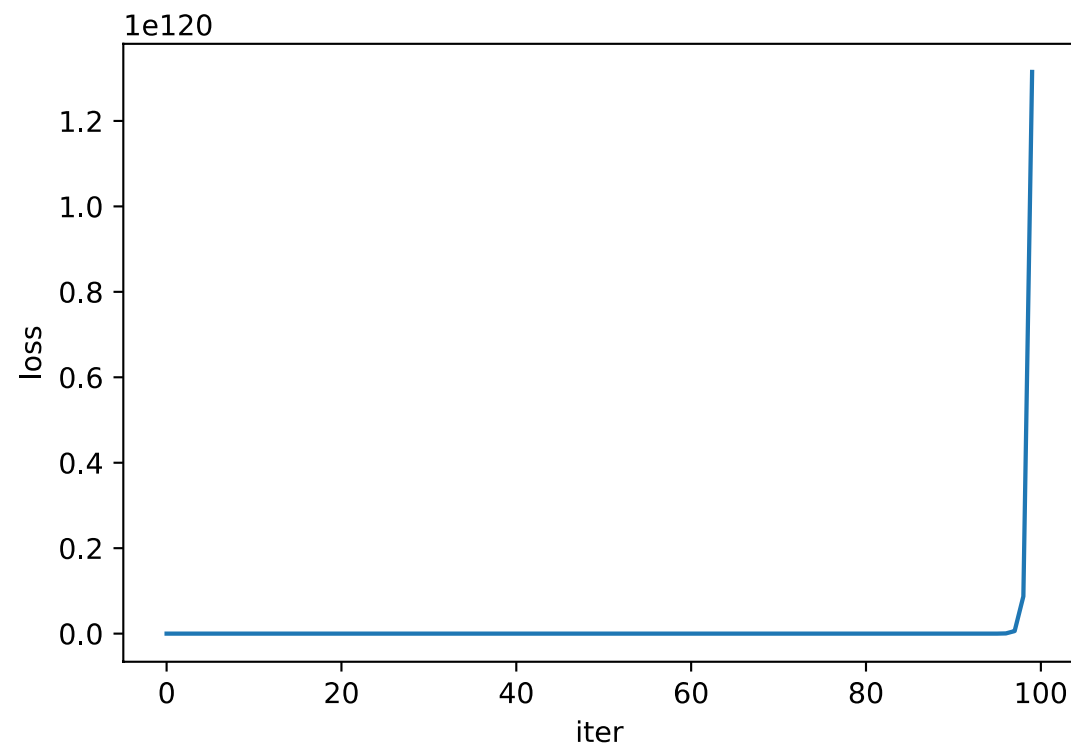
[ 26.52, 564.80, 682.90, 5097.71, 12110.87]



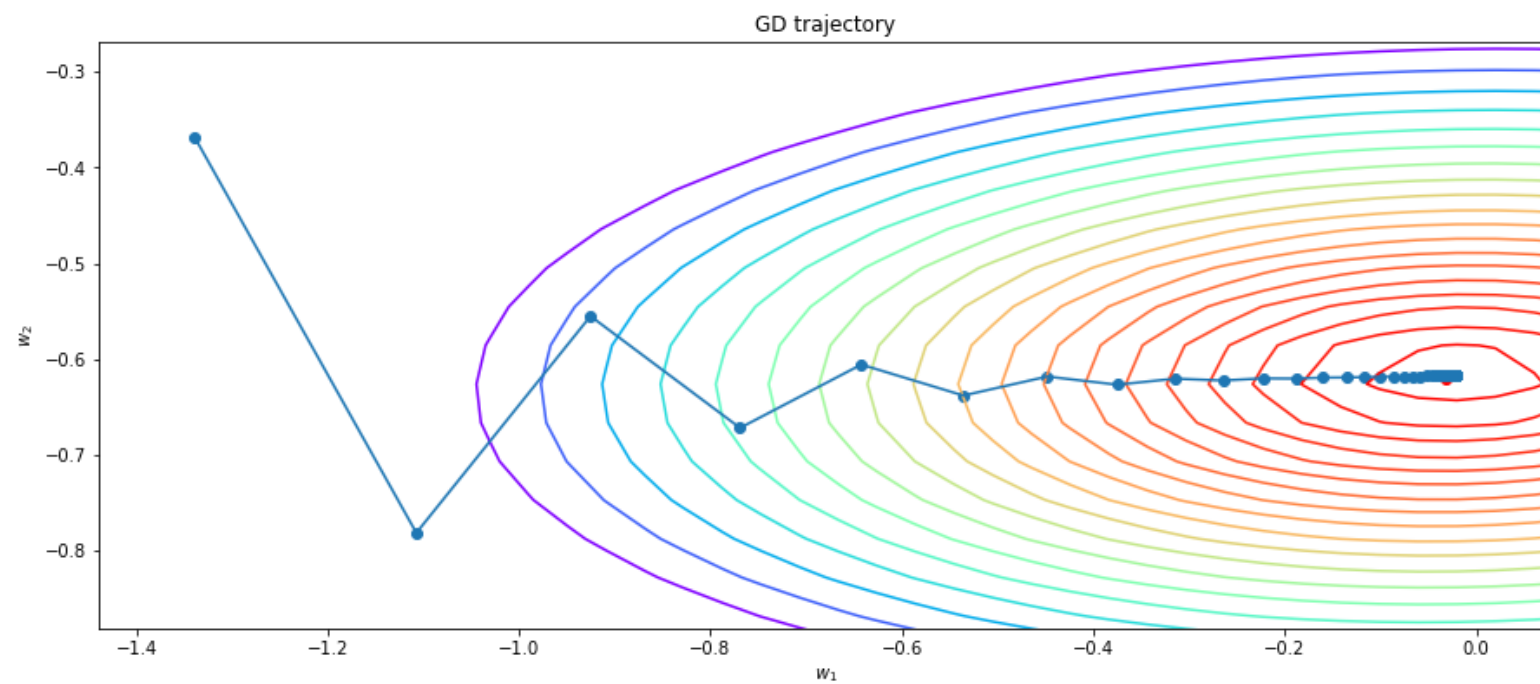
# Длина шага

Градиент на первом шаге:

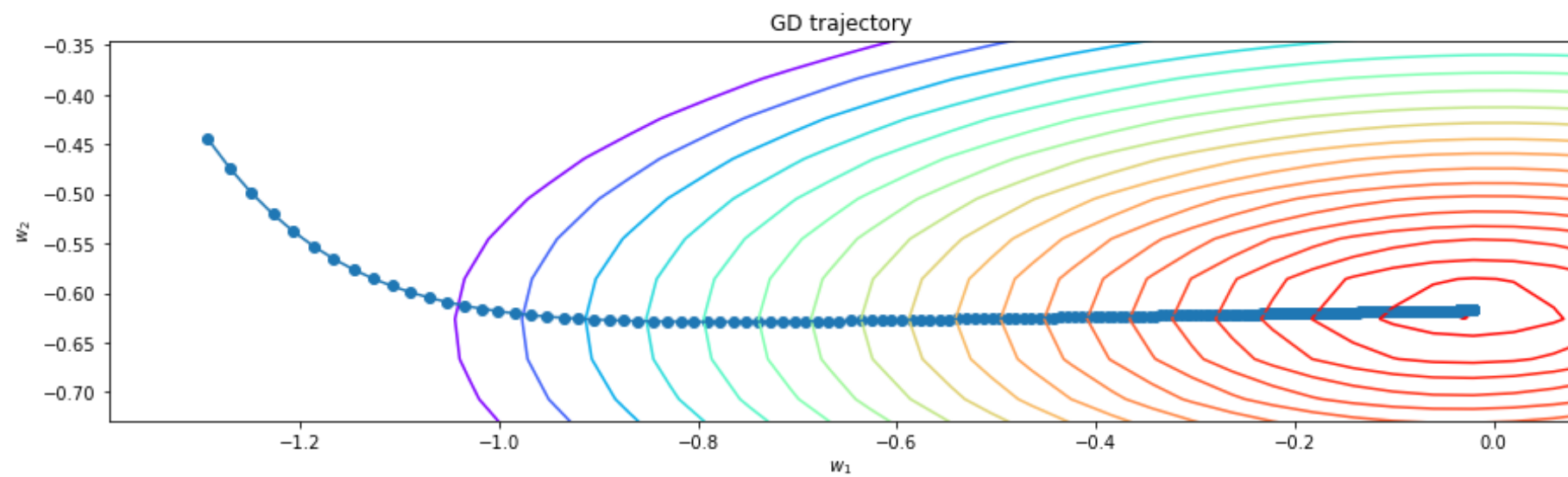
[ 26.52, 564.80, 682.90, 5097.71, 12110.87]



# Длина шага



# Длина шага



# Длина шага

$$w^t = w^{t-1} - \eta \nabla Q(w^{t-1})$$

- Позволяет контролировать скорость обучения
- Если сделать длину шага недостаточно маленькой, градиентный спуск может разойтись
- Длина шага — параметр, который нужно подбирать

# Переменная длина шага

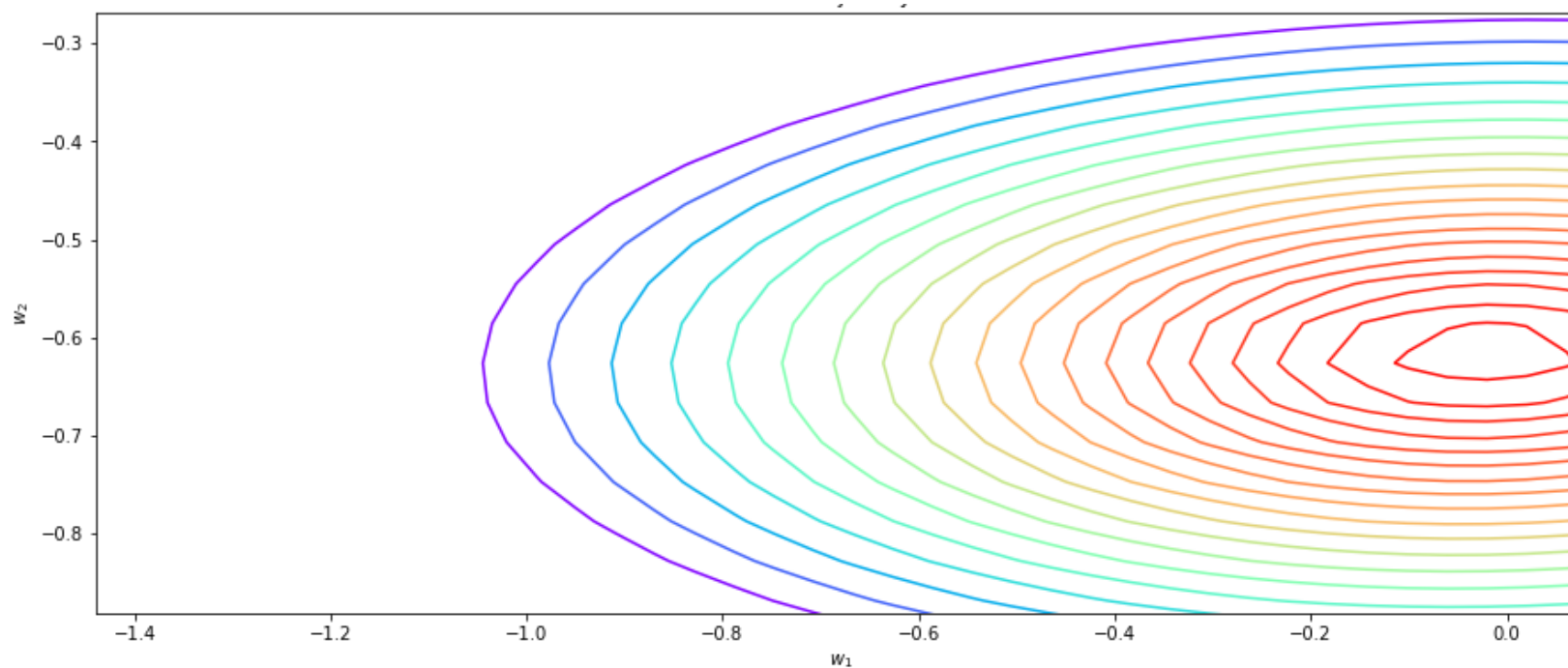
$$w^t = w^{t-1} - \eta_t \nabla Q(w^{t-1})$$

- Длину шага можно менять в зависимости от шага
- Например:  $\eta_t = \frac{1}{t}$
- Ещё вариант:  $\eta_t = \lambda \left( \frac{s}{s+t} \right)^p$

# Масштабирование признаков

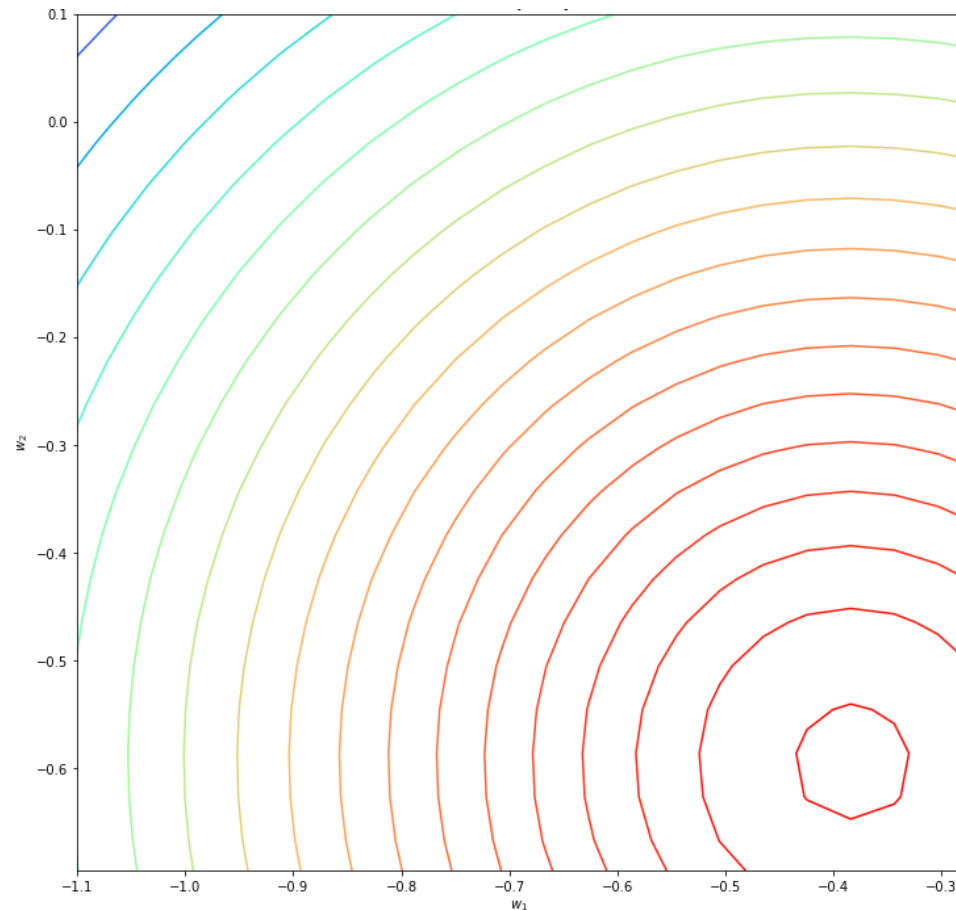
```
[[ 0.8194022 -11.97609413 -34.41655678  0.98167246 -34.14405489]
 [ -2.83614512  17.19489715  3.29562399  63.8054227  39.70301275]
 [ 3.10906179  11.26049837  0.51404712  22.64032379 -28.62078735]
 ...,
 [ -3.61976507  17.63933655  31.65890573  22.5124188 -75.6386039 ]
 [ -1.98472285  3.98588887  29.6135414 -11.11816  33.98746403]
 [ -3.34136103 -12.81955782 -19.5542601  12.62435442  50.24876879]]
```

# Масштабирование признаков





# Масштабирование признаков



# Масштабирование признаков

- Вычтем из каждого значения признака среднее и поделим на стандартное отклонение:

$$x_i^j := \frac{x_i^j - \mu_j}{\sigma_j}$$