Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Отчет по учебной практике (научно-исследовательской работе) (семестр 4)

Конечные цепи Маркова

Выполнил:

Милюшков Георгий Геннадьевич,

Группа 20.Б04-мм

Научный руководитель:

Кандидат физ.-мат. наук, доцент

Некруткин Владимир Викторович.

Кафедра статистического моделирования

Короткий отзыв научного руководителя

*Работа выполнена на _отличном_ уровне и может быть зачтена с оценкой _A_*

В. Некруткин

Санкт-Петербург

2022

1 Введение

Целью научно-исследовательской работы данного семестра была продолжение работы по изучению теории конечных цепей Маркова и решение задач по учебнику Джон Дж. Кмени и Дж. Лори Снелла “Конечные цепи Маркова”.

2 Проделанная работа

В ходе работы мною было прочитано третья, четвёртая и пятая глава книги. К соответствующим главам и параграфам были решены большая часть упражнений книги Джон Дж. Кемени и Дж. Лори Снелла “Конечные цепи Маркова”. Также, в данном семестре я использовал пособие “Markov Chains” преподавателя Кембриджского университета James Norris. Данное пособие была полностью мною прочитана в качестве вспомогательной литературы, а также для дополнительного изучения темы “Конечные цепи Маркова”.

Пройденные темы книги “Markov Chains”:

1. Definition, basic properties, the transition matrix.
2. Calculation of n-step transition probabilities, class structure, absorption and irreducibility.
3. Hitting probabilities and mean hitting times.
4. Survival probability for birth and death chains, stopping times and strong Markov property.
5. Recurrence and transience
6. Random walks in dimensions one ,two and three.
7. Invariant distribution
8. Existence and uniqueness of invariant distribution, mean return time, positive and null recurrence
9. Convergence to equilibrium for ergodic chains.
10. Long-run proportion of time spent in given state
11. Time reversal, detailed balance, reversibility, random walk on a graph

12. Concluding problems and recommendations for further study.

Материал пройденный по книге Джон Дж. Кемени и Дж. Лори Снелла

Глава 3

1. Введение в поглощающие цепи Маркова
2. Фундаментальная матрица
3. Приложения фундаментальной матрицы

Глава 4

1. Основные теоремы регулярной цепи Маркова
2. Закон больших чисел для регулярных цепей Маркова
3. Фундаментальная матрица регулярной цепи
4. Времена первого достижения
5. Дисперсия времени первого достижения
6. Предельная ковариация

Глава 5

1. Фундаментальная матрица эргодической цепи Маркова
2. Примеры циклических цепей

3 Примеры решения задач

Ниже представлены некоторые задачи и решения из тех которые я решал.

Задача 1:

Сегодня в стране Оз идет снег. Найдите среднее число различных типов погоды до ближайшего дождливого дня. Найдите вероятность того, что перед дождливым будет хотя бы один ясный день.

Решение:

201 Погода в стране Оз

$$\begin{array}{c|ccc} & R & N & S \\ \hline R & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ N & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ S & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{c|cc} & N & S \\ \hline N & 0 & \frac{1}{2} \\ S & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$N = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Не бывает $\frac{10}{3}$ разных погод, поэтому среднее количество если сегодня снег до дождя равно 3.

Условная вероятность, что процесс перейдет в s_j (R), при условии, что он покинул s_i (N) равна $\frac{p_{ij}}{1-p_{ii}}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-0} = \frac{1}{2}$$

Комментарий: Погода в стране Оз представлена в таблице в самом начале решения. R=rain=Дождливая, N=nice=ясная, S=snow=снежная

Задача 2:

Вычислить следующие величины в задаче о танковой дуэли:

А) Математическое ожидание и дисперсию числа раундов, в которых все три танка еще действуют.

В) Вероятность того, что на какой-то стадии танки А и С еще действуют, а танк В уже подбит.

C) Вероятность того, что на какой-то стадии танки A и C еще действуют, а танк C уже подбит.

D) Вероятность того, что танки A и B будут подбиты в одном и том же раунде.

E) , F)

(e) $\widehat{P}$, $\widehat{N}$, $\widehat{\tau}$, предполагая, что сражение выиграл C.
(f) $\widehat{P}$, $\widehat{N}$, $\widehat{\tau}$, предполагая, что ни один танк не уцелел.

Комментарий 1: P, N, t с шапками это переходная матрица, фундаментальная матрица и математическое ожидание соответственно изменённых состояний.

Комментарий 2: Задача о танковой дуэли:

Идет сражение между тремя танками. Танк A поражает свою цель с вероятностью 2/3, танк B с вероятностью 1/2, танк C- с вероятностью 1/3. Выстрелы производятся одновременно, если танк повержен, то он выбывает из сражения. Состоянием мы считаем множество танков, которые еще действуют. Написать матрицу, которая описывает процесс, когда все танки действуют, то A стреляет в B, B в C и C в A.

Решение:

22) а) Изначальная матрица танкового боя:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & E & A & B & C & AC & BC & ABC \\
\hline
E & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
AC & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\
BC & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
ABC & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9}
\end{array}$$

Задача заключается в нахождении времени когда действуют все три танка. Т.е можно считать все остальные 6 – поглощающими и матрицу такого вида.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & E & A & B & C & AC & BC & ABC \\
\hline
E & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
AC & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
BC & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
ABC & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9}
\end{array}$$

$$Q = \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$(I-Q) = \left(\frac{8}{9}\right)$$

$$N = (I-Q)^{-1} = \frac{9}{8}$$

Т.е. математическое ожидание (среднее значение) пока все три танка действуют $= \frac{9}{8}$

$$N_{sq} = \frac{81}{64}, \quad 2N_{dg} - I = \frac{10}{8} \qquad N(2N_{dg}-I) = \frac{90}{64}$$

$$N_2 = N(2N_{dg}-I) - N_{sq} = \frac{90}{64} - \frac{81}{64} = \frac{9}{64}$$

$\frac{9}{64}$ – дисперсия случайной величины. ~~[illegible]~~

~~также важно [illegible]~~

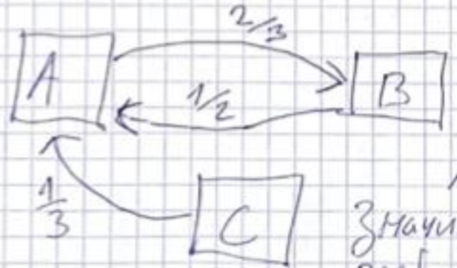
б) Считаем по "модифицированной" матрице из а). Там мы получили, что $N = \frac{9}{8}$

Вероятность того, что на какой-то стадии танки A и C ещё действуют, а танк B уже подбит, в наших обозначениях равен AC. Т.е. мы считаем NP_{AC}

$NP_{AC} = \cancel{1} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{4}$. Получается, что вероятность равна $\frac{1}{4}$.

c) Вероятность, что танки A и B ещё действуют, а C - подбит равна 0, так как это невозможно исходя из условия.

Мы обуславливались, что все танки стреляют одновременно в своего самого сильного противника. т.е вот такой рисунок



Т.е. танк C всегда будет в бою пока танки A и B живы.
Значит, невозможно, что C подбит, а A и B еще действуют
$\Rightarrow$ вероятность = 0

д) Вероятность, что A и B подбиты в одном и том же раунде возможна тогда и только тогда, когда победителем и единственным выжившим останется C. Т.к. невозможна дуэль A и B без C (смотрите задание c)

Следовательно рассчитываем N_{P_C}

$$N_{P_C} = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{2}$$

e)
$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} C & AC & BC & ABC \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ AC \\ BC \\ ABC \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \end{array}; \quad N = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{9}{28} & \frac{3}{8} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}; \quad B = NR = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{67}{112} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{112}{67} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{67}{112} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{32}{603} & \frac{56}{603} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}; \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{36}{469} & \frac{21}{134} & \frac{9}{8} \end{pmatrix} \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5097}{3752} \end{pmatrix}$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{446}{603} & \frac{32}{603} & \frac{56}{603} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

г) $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ $\quad R = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{9}{28} & \frac{3}{8} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}$ $\quad B = NR = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{15}{112} \end{pmatrix}$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{112}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{112} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{64}{135} & \frac{56}{135} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}; \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{24}{35} & \frac{7}{10} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{703}{280} \end{pmatrix}; \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{64}{135} & \frac{56}{135} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Используются формулы:

$N = (I - Q)^{-1}$ (фундаментальная матрица).

$b_{11} = 1$. Фундаментальная матрица для $\hat{P}$ получается следующим образом. Матрица $\hat{R}$ есть вектор-столбец $\hat{R} = \left\{ \frac{p_{i1}}{b_{i1}} \right\}$. Пусть D_0 — диагональная матрица с диагональными элементами b_{j1} (при невозвратных s_j). Тогда

$$\hat{Q} = D_0^{-1} Q D_0.$$

Отсюда

$$\hat{Q}^n = D_0^{-1} Q^n D_0$$

$$\hat{N} = D_0^{-1} [I + Q + Q^2 + \ \ldots] D_0 = D_0^{-1} N D_0.$$

$\hat{B}$ и $\hat{\tau}$ можно получить, исходя из $\hat{N}$.

Задача 3:

Найдите математическое ожидание и дисперсию времени пребывания в состоянии s_1 за первые n шагов в примере 14.

Комментарий: Пример 14: Производится серия опытов,в каждом из которых подбрасывается две правильные монеты. Обозначим через s_1 выпадание два орла, через s_2 выпадание орла и решки и через s_3 - выпадание двух решек.

Решение:

Глава 4,2

7) s_1 – 2 орла — $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

s_2 = орел и решка — $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

s_3 = 2 решки — $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$$P=\begin{array}{c|ccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline s_1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ s_2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ s_3 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

– Вероятности выпадания s_1, s_2, s_3 не зависят от того, что выпадало раньше.

$a=(a_1,a_2,a_3)$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_1+a_2+a_3 \\ a_1 &= \frac{1}{4}a_1+\frac{1}{4}a_2+\frac{1}{4}a_3 \\ a_2 &= \frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}a_3 \\ a_3 &= \frac{1}{4}a_1+\frac{1}{4}a_2+\frac{1}{4}a_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= a_3=\frac{1}{2}a_2 \\ a &= \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

$$A=\begin{array}{c|ccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline s_1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ s_2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ s_3 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} = P$$

, так и должно быть, т.к. в теории 4.3 говорится, что если $A=P$ то испытания независимы.

~~[illegible]~~ Ожидание пребывания в S_1. Согласно теореме 4.2.1, марковская цепь с предельным вектором

$a=(a_1 \ldots, a_r)$: $M_j[v_j^{(n)}] \to a_j$

Следовательно, мы ожидаем, что при протяжении длительного интервала времени вероятность $s_1=\frac{1}{4}$

Дисперсия стремится к нулю.

Комментарий:

Используется данная теорема:

4.2.1. Теорема (*закон больших чисел*). *Рассмотрим регулярную марковскую цепь с предельным вектором* $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$. *Для любого начального распределения* π

$$\mathsf{M}_\pi\left[v_j^{(n)}\right] \to a_j \tag{a}$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}_\pi\left[\left|v_j^{(n)} - a_j\right| > \varepsilon\right] \to 0 \tag{b}$$

при n, *стремящемся к бесконечности.*

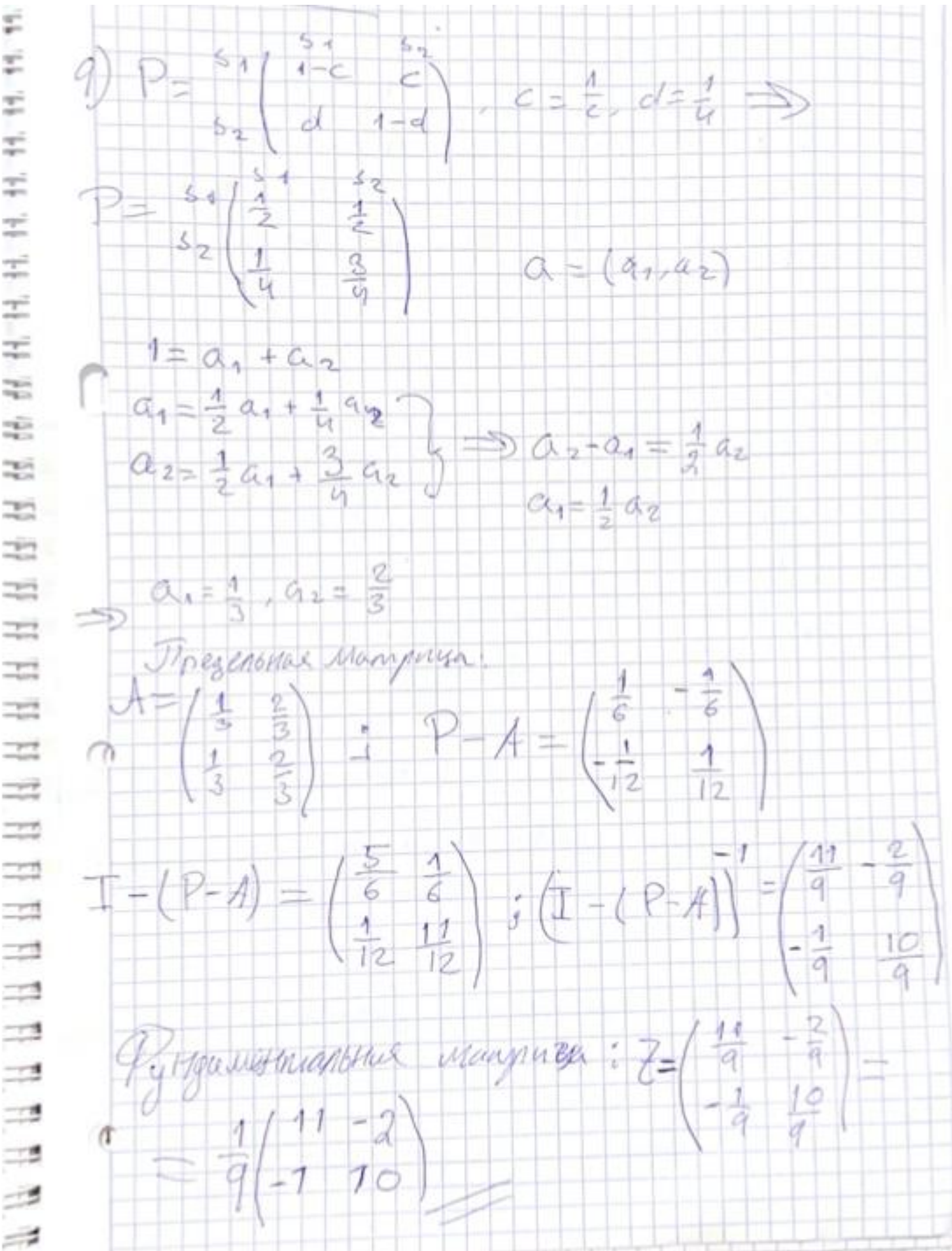
Задача 9:

Найти фундаментальную матрицу для:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-c & c \\ d & 1-d \end{pmatrix} \end{array}.$$

При c=1/2 и d=1/4

Решение:



9) $P = \begin{array}{c|cc} & s_1 & s_2 \\ \hline s_1 & 1-c & c \\ s_2 & d & 1-d \end{array}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$

$P = \begin{array}{c|cc} & s_1 & s_2 \\ \hline s_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ s_2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$ $\qquad a = (a_1, a_2)$

$1 = a_1 + a_2$

$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} a_2 \\ a_2 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{4} a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 - a_1 = \frac{1}{2} a_2$

$a_1 = \frac{1}{2} a_2$

$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}, \; a_2 = \frac{2}{3}$

Предельная матрица:

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $P - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$

$I - (P - A) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$; $\left[I - (P - A)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$

Фундаментальная матрица: $Z = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$

4 Заключение

Это второй семестр работы по теме “Марковские цепи”. В данном семестре мне удалось узнать много новых методов решений задач и лучше понять теорию связную с этой темой. Мне очень понравилось работать с Марковскими цепями, так как они часто очень прикладные и и применимы в повседневной жизни. Это делает желание изучать данную тему на много сильнее. Мне кажется я добился главной цели по знакомству с данными цепями и решению некотных задач.

Литература

Джон Дж. Кемени и Дж. Лори Снелла “Конечные цепи Маркова”, Москва, 1970 “Наука”

James Norris “Markov Chains”