

## Оглавление

Решение типовых задач .....	2
Практические задания .....	15
Задача 1 .....	16
Задача 2 .....	17
Задача 3 .....	18
Задача 4 .....	19
Задача 5 .....	20
Задача 6 .....	20
Задача 7 .....	22
Задача 8 .....	23
Задача 9 .....	24
Задача 10 .....	25
Задача 11 .....	26
Задача 12 .....	27
Задача 13 .....	27
Задача 14 .....	28
Задача 15 .....	28
Задача 16 .....	29
Задача 17 .....	29
Задача 18 .....	30
Задача 19 .....	31
Задача 20 .....	32
Теоретические вопросы к экзамену .....	33

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

## РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**Задача 1**

Решение задачи основано на непосредственном использовании определения предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |u_n - A| < \varepsilon.$$

**Пример 1**

С помощью определения предела последовательности показать, что последовательность  $u_n = (2n-1)/(n+1)$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет своим пределом число 2. Найти целое значение  $N$ , начиная с которого  $|u_n - A| < 10^{-2}$ .

**Решение**

Рассмотрим неравенство

$$|u_n - 2| = \left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{-3}{n+1} \right| < \varepsilon, \quad n - \text{натуральное,}$$

откуда  $n > \varepsilon/3 - 1$ . Следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = [3/\varepsilon - 1] : \forall n > N \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Т.о., число 2 является пределом последовательности. Пусть теперь  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Тогда  $N(1/100) = [3/0,01 - 1] = [300 - 1] = 299$ .

**Задача 2**

При решении задач 2а и 2б рекомендуется пользоваться I и II замечательными пределами:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

**Пример 2**

Найти предел  $A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**Решение**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos 2x - 1))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin^2 x)^{\frac{-1}{2 \sin^2 x} \cdot \frac{-2 \sin^2 x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 - 2 \sin^2 x)^{\frac{-1}{2 \sin^2 x}} \right]^{\frac{-2 \sin^2 x}{x^2}} = e^{-2}. \end{aligned}$$

т.к. выражение в квадратной скобке стремится к числу  $e$  по I замечательному пределу, а выражение в показателе — к числу  $-2$  по II замечательному пределу.

### Задачи 3, 4

Эти задачи являются стандартными задачами дифференцирования. Для вычисления  $y'(x)$  необходимо знать:

- производные основных элементарных функций;
- правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного;
- правило дифференцирования сложной функции (правило "цепочки").

#### Правило "цепочки"

Пусть сложная функция  $y(x)$  задана цепочкой равенств:

$$y = f(u), \quad u = g(t), \quad t = p(x) \quad \text{или} \quad y(x) = f(u(t(x)))$$

(цепочка может быть произвольной длины). В этом случае

$$y'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}. \quad (1)$$

### Пример 3

Найти производную  $y'(x)$ :

$$y = \sin \left( \ln \left( \sqrt{1+x^2} - x \right) \right).$$

### Решение

Полагаем  $t = \sqrt{1+x^2} - x$ ,  $u = \ln t$ ,  $y = \sin u$ . Согласно формуле (1) имеем

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos u \cdot \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \cos \left( \ln \left( \sqrt{1+x^2} - x \right) \right). \end{aligned}$$

Можно не вводить промежуточные функции и сразу написать:

$$y' = \cos \left( \ln \left( \sqrt{1+x^2} - x \right) \right) \cdot \left( \ln \left( \sqrt{1+x^2} - x \right) \right)' =$$

продифференцировали синус, умножили на производную аргумента:

$$= \cos \left( \ln \left( \sqrt{1+x^2} - x \right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \cdot \left( \sqrt{1+x^2} - x \right)' =$$

продифференцировали логарифм и умножили на производную аргумента. Нашли производную аргумента логарифма:

$$\begin{aligned} & \cos \left( \ln \left( \sqrt{1+x^2} - x \right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = \\ & = - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \cos \left( \ln \left( \sqrt{1+x^2} - x \right) \right). \end{aligned}$$

#### Пример 4

Найти производную  $y'(x)$  :

$$y(x) = \arcsin \left( \sqrt{1-e^x} \right).$$

#### Решение

Имеем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-e^x)}} \cdot \left( \sqrt{1-e^x} \right)' = \frac{1}{\sqrt{e^x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^x}} \cdot (1-e^x)' = - \frac{\sqrt{e^x}}{2\sqrt{1-e^x}}.$$

#### Задача 5

Данная задача связана с вычислением логарифмической производной. Пусть задана функция  $y = f(x)$ . Имеем:

$$\ln y = \ln f(x), \quad \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = (\ln(f(x)))',$$

следовательно:

$$y'(x) = y(x) \cdot (\ln(f(x)))'. \quad (2)$$

Формула логарифмической производной упрощает нахождение производной, если функция  $\ln(f(x))$  дифференцируется легче, чем исходная функция  $f(x)$  ( $f(x)$  содержит произведения, частное, степени и удобна для логарифмирования).

Пусть, например, функция задана в виде:

$$y = f(x) \equiv \frac{(f_1(x))^{a(x)} (f_2(x))^{b(x)}}{(f_3(x))^{c(x)}}.$$

В этом случае

$$\ln(f(x)) = a(x) \ln(f_1(x)) + b(x) \ln(f_2(x)) - c(x) \ln(f_3(x))$$

и, согласно формуле (2),

$$y' = y(x) [a(x) \ln(f_1(x)) + b(x) \ln(f_2(x)) - c(x) \ln(f_3(x))]'. \quad (2)$$

Дифференцировать каждое слагаемое внутри скобок проще, чем дифференцировать исходную функцию.

### Пример 5

Найти производную функции

$$y = \frac{(1+x^2)^{2x} \cdot \sin^2 x}{\sqrt{1+\ln x}}.$$

### Решение

$$\text{Имеем} \quad \ln y = 2x \ln(1+x^2) + \ln \sin^2 x - \frac{1}{2} \ln(1+\ln x);$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \ln(1+x^2) + \frac{4x^2}{1+x^2} + 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2(1+\ln x)} \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда находится производная  $y'$ .

### Задача 6

В этой задаче требуется найти производную функции, заданной параметрически. Пусть функция  $y(x)$  задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$$

Для ее производной справедлива следующая формула:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (3)$$

### Пример 6

Найти производную функции  $y(x)$ , заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin^4 t; \\ y = \cos^4 t. \end{cases}$$

### Решение

Имеем:

$$x'_t = 4 \sin^3 t \cdot \cos t; \quad y'_t = -4 \cos^3 t \cdot \sin t.$$

По формуле (3) находим:

$$y'_x = \frac{-4 \cos^3 t \cdot \sin t}{4 \sin^3 t \cdot \cos t} = -\operatorname{ctg}^2 t.$$

### Задача 7

Найти производную функции, заданной неявно. Пусть уравнение

$$F(x, y) = 0$$

определяет неявным образом некоторую дифференцируемую функцию  $y(x)$ . Для ее производной справедлива формула:

$$y'(x) = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (4)$$

Здесь  $F'_x$  и  $F'_y$  производные функции  $F(x, y)$  по переменной  $x$  и  $y$  соответственно (при дифференцировании по  $x$  переменная  $y$  считается постоянной и наоборот).

### Пример 7

Найти производную  $y'(x)$  неявной функции  $y(x)$  определенной уравнением:

$$x^2y - \sin(x - y^3) - 5 = 0.$$

### Решение

Имеем:

$$F(x, y) = x^2y - \sin(x - y^3) - 5;$$

$$F'_x = 2xy - \cos(x - y^3); \quad F'_y = x^2 - \cos(x - y^3) \cdot (-3y^2)$$

и по формуле (5) находим:

$$y' = - \frac{2xy - \cos(x - y^3)}{x^2 + 3y^2 \cos(x - y^3)}.$$

Производную  $y'$  можно найти, не прибегая к формуле (4).

### Пример 8

Найти производную  $y'$  функции, заданной неявно уравнением:

$$x^2y^3 - xy + \sin y = 0.$$

### Решение

Функция  $y(x)$  определяется исходным уравнением, поэтому, если подставить ее вместо  $y$  в левую часть равенства, получим тождество

$$x^2y^3(x) - xy(x) + \sin y(x) \equiv 0. \quad (5)$$

Продифференцируем левую часть равенства (5) по правилу дифференцирования сложной функции:

$$2xy^3(x) + 3x^2y^2(x) \cdot y'(x) - y(x) - xy'(x) + \cos y(x) \cdot y'(x) \equiv 0.$$

Отсюда легко находим  $y'$ :

$$y' = \frac{y - 2xy^3}{3x^2y^2 - x + \cos y}.$$

Дифференцируя равенство еще раз, можно найти  $y''$  и т.д.

### Задачи 8, 9

Вычислить предел по правилу Лопиталя. Правило Лопиталя используется при вычислении пределов, содержащих неопределенности типов  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ , а также неопределенностей, сводящиеся к указанным типам.

### Пример 9

Найти предел  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^2}{\ln^2(1+x)}$ .

### Решение

Неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ . Используем правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^2)'}{(\ln^2(1+x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{(1+x)}{2 \ln(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+x)}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)}. \end{aligned}$$

Снова имеем неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ . Повторно применяем правило Лопиталя:

$$A = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)'}{(\ln(1+x))'} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 2.$$

### Пример 10

Найти предел  $A = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-2}}$ .

### Решение

Неопределенность типа  $\frac{\infty}{\infty}$ . Применяем правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x^2}{2} = 0.$$

### Пример 11

Найти предел  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ .

### Решение

Неопределенность типа  $\infty - \infty$ . Преобразуем к неопределенности типа  $\frac{0}{0}$  и применим дважды правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

### Пример 12

Найти предел  $A = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{1+x}{x} \right)$ .

**Решение**

Неопределенность типа  $0 \cdot \infty$ . Преобразуем к неопределенности типа  $\frac{0}{0}$  и применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x^{-1})}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + x^{-1})^{-1} \cdot (-x^{-2})}{(-x^{-2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{-1}} = 1. \end{aligned}$$

**Пример 13**

Найти предел  $A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$ .

**Решение**

Неопределенность типа  $1^\infty$ . Преобразуем к неопределенности типа  $\frac{0}{0}$  и применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x)/x} = e^B; \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}; \\ B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{1} = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1. \end{aligned}$$

**Задача 10**

Разложить функцию по формуле Тейлора. Если  $x_0 \neq 0$ , полезно сделать замену  $x - x_0 = t$  и далее воспользоваться разложениями основных элементарных функций.

**Пример 14**

Разложить по формуле Тейлора функцию  $y = \frac{5x - 8}{3x + 12}$  в окрестности точки  $x_0 = 2$  до  $o((x - 2)^4)$ .

**Решение**

Делаем замену  $x - 2 = t$ ;  $x = 2 + t$ :

$$y = \frac{10 + 5t - 8}{6 + 3t + 12} = \frac{2 + 5t}{18} \cdot \frac{1}{1 + t/6}.$$

Используем стандартное разложение:

$$\begin{aligned} &= \frac{2 + 5t}{18} \left( 1 - \frac{t}{6} + \frac{t^2}{6^2} - \frac{t^3}{6^3} + \frac{t^4}{6^4} + o(t^4) \right) = \\ &= \frac{1}{9} + \frac{7}{27}t - \frac{7}{162}t^2 + \frac{7}{972}t^3 - \frac{7}{5832}t^4 + o(t^4). \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно находим:

$$y = \frac{1}{9} + \frac{7}{27}(x - 2) - \frac{7}{162}(x - 2)^2 + \frac{7}{972}(x - 2)^3 - \frac{7}{5832}(x - 2)^4 +$$



$$+o((x-2)^4).$$

### Пример 15

Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = (2x^2 - 3x) \cdot \ln(7x + 8)$$

в окрестности точки  $x_0 = -1$  до  $o((x+1)^4)$ .

### Решение

Делаем замену  $x + 1 = t$ ;  $x = t - 1$ :

$$y = [2(t^2 - 2t + 1) - 3t + 3] \cdot \ln(1 + 7t) = (2t^2 - 7t + 5) \cdot \ln(1 + 7t).$$

Используем разложение для логарифма:

$$\begin{aligned} y &= (2t^2 - 7t + 5) \cdot \left[ 7t - \frac{7^2 t^2}{2} + \frac{7^3 t^3}{3} - \frac{7^4 t^4}{4} + o(t^4) \right] = \\ &= 35t - \frac{7^3}{2} t^2 + \frac{7^3 \cdot 601}{6} t^3 - \frac{7^4 \cdot 607}{12} t^4 + o(t^4); \end{aligned}$$

Возвращаемся к переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} y &= 35(x+1) - \frac{7^3}{2}(x+1)^2 + \frac{7^3 \cdot 601}{6}(x+1)^3 - \frac{7^4 \cdot 607}{12}(x+1)^4 + \\ &+ o((x+1)^4). \end{aligned}$$

### Задачи 12, 13, 14, 15

Построить графики элементарных функций.

### Пример 16

Построить график функции  $y = \frac{x^3 + 3x^2 + 15x + 18}{x^2 + 5x + 6}$ .

### Решение

Область определения:  $x \neq -2$ ;  $x \neq -3$  (нули знаменателя).

Функция имеет вид  $y = P(x)/Q(x)$ . Так как  $P(-2) = -8 \neq 0$ ,  $P(-3) = -27 \neq 0$ , то прямые  $x = -2$  и  $x = -3$  являются вертикальными асимптотами. При этом значение функции стремится к  $-\infty$  когда  $x$  стремится к  $-2$  справа или к  $-3$  слева (это легко определяется по знакам числителя и знаменателя в окрестности указанных точек). Аналогично, значение функции стремится к  $+\infty$  когда  $x$  стремится к  $-2$  слева и к  $-3$  справа.

Поделив ("уголком") числитель на знаменатель, выделим целую часть дроби:

$$y = x - 2 + \frac{19x + 30}{x^2 + 5x + 6} \quad (6)$$

Отсюда видно, что прямая  $y = x - 2$  является наклонной асимптотой (так как при  $x \rightarrow \infty$  дробная часть функции в формуле (6) стремится к

нулю. Наклонную асимптоту можно найти и по стандартным формулам. Из формулы (6) следует, что график функции пересекает наклонную асимптоту в единственной точке:  $x = -30/19 \approx -1,58$ . Строим эскиз графика.

Положение экстремумов и точки перегиба уточним с помощью производных. Имеем:

$$y' = \frac{x^2(x^2 + 10x + 18)}{(x^2 + 6x + 6)^2}; \quad y'' = \frac{x(38x^2 + 180x + 216)}{(x^2 + 5x + 6)^3}.$$

Из выражений для производных следует, что  $x = 0$  - точка перегиба, в точке  $x = -5 + \sqrt{7} \approx -2,35$  функция достигает минимума (который, как легко вычислить, положителен), в точке  $x = -5 - \sqrt{7} \approx -7,64$  функция достигает максимума. Уточненный график функции представлен на рис.1.

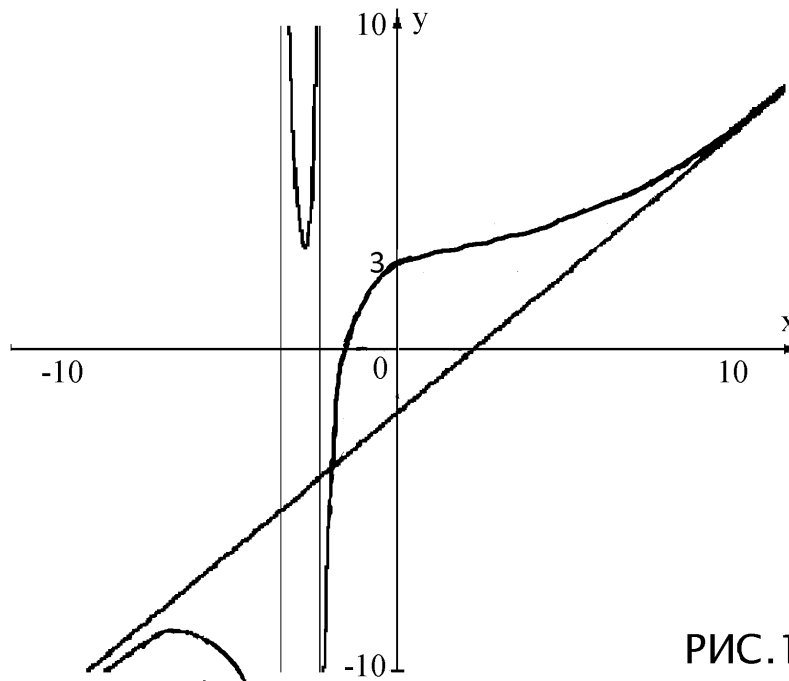


РИС.1

### Пример 17

Построить график функции  $y = x^3 \cdot \sqrt[5]{(x+2)^2}$ .

#### Решение

Функция обращается в нуль в двух точках:  $x = -2$ ;  $x = 0$ . При  $x > 0$  функция положительна и монотонно растет. При больших положительных значениях  $x$  имеем:

$$y \approx x^3 \cdot x^{2/5} = x^{17/5}.$$

При  $x < 0$  значения функции отрицательны. Отсюда, в частности, следует, что на интервале  $(-2; 0)$  функция достигает минимума (который

уточним с помощью производной). При больших отрицательных значениях  $x$  имеем

$$y \approx -|x|^{17/5}.$$

Делаем эскиз графика функции.

Далее, вычисляя производные:

$$y' = \frac{x^2}{5} \cdot (x+2)^{-3/5} \cdot (17x+30),$$

$$y'' = \frac{x}{5} \cdot (x+2)^{-8/5} \cdot (204x^2/5 + 144x + 120),$$

определяем положение экстремумов и точек перегиба. Из этих формул следует, что в точке  $x = -30/17$  функция достигает минимума;  $x = 0$  и  $x = 5 \left( -144 \pm \sqrt{1152} \right) / 408$  - точки перегиба. В точке  $x = -2$  производная функции  $y'(x)$  обращается в бесконечность - касательная к графику в данной точке вертикальна.

Уточненный график функции приведен на рис. 2.

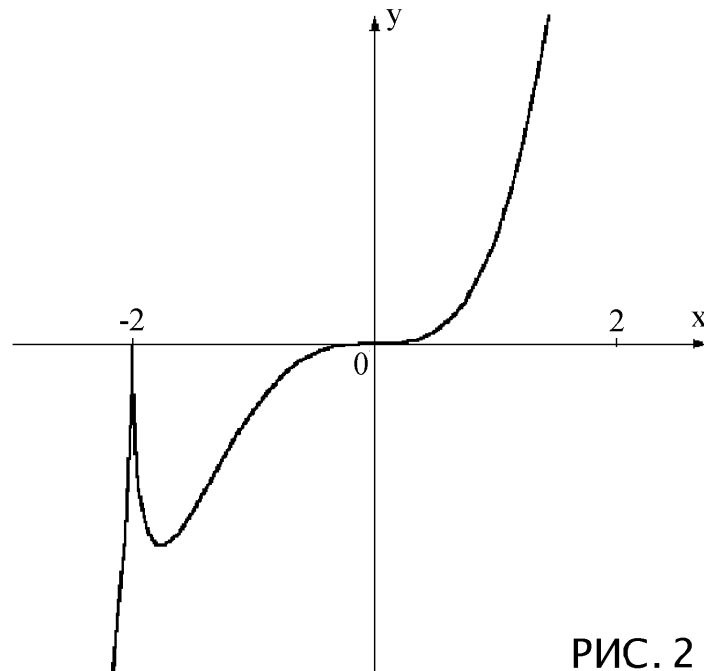


РИС. 2

### Пример 18

Построить график функции:  $y = \frac{e^{x-3}}{2x+7}$ .

**Решение**

Прямая  $x = -7/2$  - вертикальная асимптота. Используя правило Лопиталя, имеем:

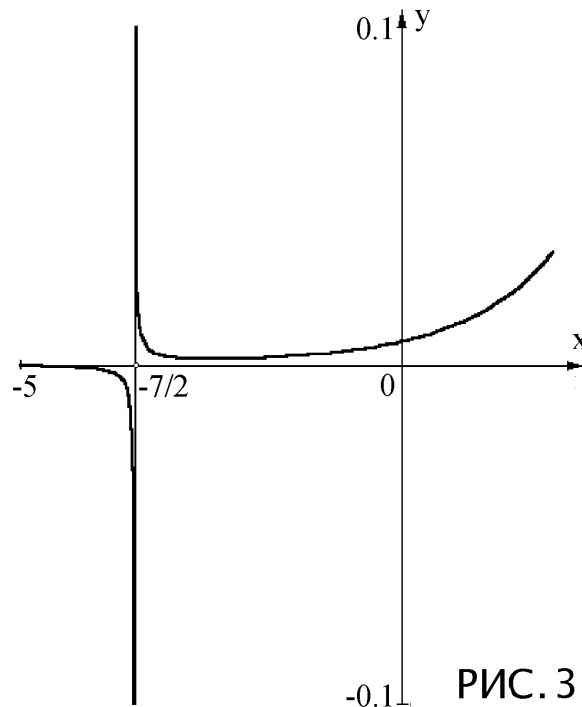
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x+7} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{2x+7} = 0.$$

Функция имеет положительный знак при  $x > -7/2$  и отрицательна при  $x < -7/2$ . Этих данных достаточно, чтобы нарисовать эскиз графика.

Вычислим производные и уточним положение экстремумов и точек перегиба:

$$y' = \frac{2x+5}{(2x+7)^2} \cdot e^{x-3}; \quad y'' = \frac{(4x^2+20x+29)}{(2x+7)^3} \cdot e^{x-3}.$$

Вторая производная нулей не имеет и меняет знак при переходе через вертикальную асимптоту. Точка  $x = -5/2$  - минимум. График функции приведен на рис.3.

**РИС. 3****Пример 19**

Построить линию, заданную уравнением в полярных координатах:

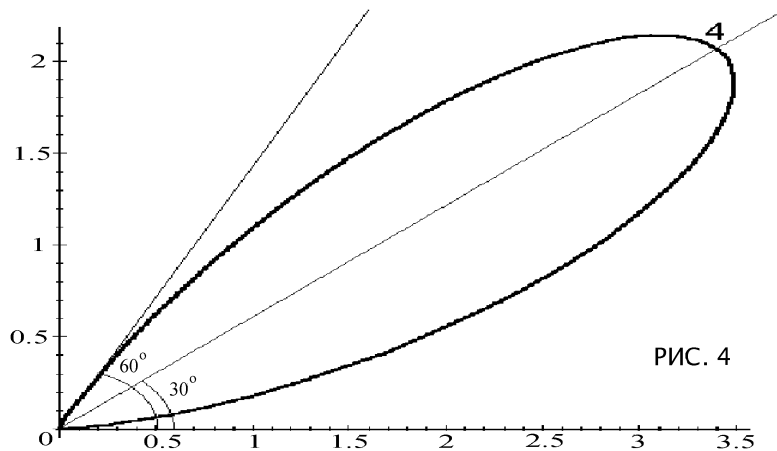
$$\rho = 4 \sin^2 3\varphi.$$

**Решение**

Используя свойства тригонометрических функций, имеем

$$\rho = 2(1 - \cos 6\varphi).$$

Следовательно, период функции равен  $2\pi/6 = 60^\circ$ . При возрастании угла от  $0^\circ$  до  $30^\circ$  значения функции возрастают от 0 до 4. При дальнейшем увеличении угла до  $60^\circ$  значения функции убывают до 0. На рис. 4 приведен график одного лепестка. Всего таких лепестков будет 6 (на рисунке они не указаны):

**Задачи 16,17**

Вычислить приближенное значение функции. При решении этих задач следует использовать приближенную формулу

$$y(x_1) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) \quad (7)$$

В некоторых вариантах указанных задач потребуются приближенные значения следующих логарифмов:  $\ln 3 \approx 1,099$ ;  $\ln 4 \approx 1,386$ ;  $\ln 5 \approx 1,609$ ;  $\ln 6 \approx 1,792$ .

**Пример 20**

Вычислить приближенно  $\sqrt[7]{130}$ .

**Решение**

Положим  $y(x) = \sqrt[7]{x}$ ;  $x_0 = 128$ ;  $x_1 = 130$ . Имеем  $y(x_0) = \sqrt[7]{128} = 2$ ;  $y'(x) = (x^{-6/7})/7$ ;  $y'(x_0) = (128^{-6/7})/7 = 1/448$ . Наконец, по формуле (7) находим:

$$y(x_1) = \sqrt[7]{130} \approx 2 + \frac{1}{448} \cdot (130 - 128) = 2 + \frac{1}{224} \approx 2,004.$$

**Пример 21**

Вычислить приближенно  $\operatorname{ctg} 48^\circ$ .

**Решение**

Рассмотрим функцию  $y(x) = \operatorname{ctg} x$ . Перейдем к безразмерной переменной – от градусов к радианам. Выберем, соответственно,  $x_0 = 45^\circ = \pi/4$ ;  $x_1 = 48^\circ = 48\pi/180$ . Найдем значения функции и ее производной:

$$y(x_0) = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} \right) = 1; \quad y'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad y'(x_0) = -\frac{1}{\sin^2 \pi/4} = -2.$$

Используя формулу для приближенных вычислений, получим:

$$\operatorname{ctg} 48^\circ = \operatorname{ctg} \frac{48\pi}{180} \approx 1 - 2 \left( \frac{48\pi}{180} - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\pi}{30} \approx 0,9.$$

**Задачи 18, 19**

Вычислить частные производные. Эти задачи являются стандартными. При нахождении частной производной  $\partial z / \partial x$  следует считать переменную  $y$  константой; аналогично при нахождении  $\partial z / \partial y$  следует считать переменную  $x$  константой. Смешанные производные второго порядка определяются как повторные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

При некоторых предположениях относительно функции  $z(x, y)$  можно утверждать, что результат не зависит от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

**Пример 22**

Для функции  $z = \ln \left( 1 + \frac{x^2}{y^3} \right)$  вычислить смешанные производные  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и убедиться, что они равны.

**Решение**

Вычисляем первые производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2/y^3} \cdot \frac{2x}{y^3} = \frac{2x}{x^2 + y^3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + x^2/y^3} \cdot \frac{-3x^2}{y^4} = \frac{-3x^2}{y(x^2 + y^3)}.$$

Дифференцируя первое равенство по  $y$ , а второе – по  $x$ , находим смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2x}{(x^2 + y^3)^2} \cdot 3y^2 = -\frac{6xy^2}{(x^2 + y^3)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{6x}{y(x^2 + y^3)} + \frac{3x^2}{y(x^2 + y^3)^2} \cdot 2x = \frac{-6xy^2}{(x^2 + y^3)^2}.$$

Убеждаемся, что равенство (8) выполнено.

### Задача 20

Найти и исследовать точки экстремума функции нескольких переменных. Сначала из условия равенства нулю первых производных ищутся стационарные точки. Затем в этих точках вычисляем вторые производные и составляем из них матрицу. Находим угловые миноры; достаточным условием максимума является выполнение условий  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 < 0$ , минимума -  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ .

### Пример 23

Найти и исследовать точки экстремума функции  $u(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - yz - y$ .

### Решение

Найдем стационарные точки из условия

$$\begin{cases} \partial u / \partial x = 10x - 2y + 2z = 0 \\ \partial u / \partial y = 2y - 2x - z - 1 = 0 \\ \partial u / \partial z = 2z + 2x - y = 0 \end{cases}$$

Решая получившуюся систему уравнений, получим координаты стационарной точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $x_0 = 1/11$ ,  $y_0 = 8/11$ ,  $z_0 = 3/11$ . В  $M_0$  выполнено необходимое условие экстремума. Проверим выполнение достаточного условия экстремума. Применим критерий Сильвестра. Вычислим в  $M_0$  вторые производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -1,$$

и составим из них матрицу  $A = \|a_{ij}\|$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы  $A$

$$\Delta_1 = a_{11} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_3 = \det A = 22.$$

Т.к.  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ , то в точке  $M_0$  функция  $u(x, y, z)$  имеет локальный минимум.

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. С помощью определения предела последовательности показать, что данная последовательность  $u_n$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет своим пределом число  $A$ . Найти целое значение  $N$ , начиная с которого  $|u_n - A| < \varepsilon$ .

№	$u_n$	$A$	$\varepsilon$	№	$u_n$	$A$	$\varepsilon$
1	$\frac{7n-1}{n+1}$	7	$10^{-2}$	16	$\frac{2n}{1+n^2}$	0	$10^{-1}$
2	$\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$	$\frac{4}{3}$	$10^{-2}$	17	$\frac{3n^3}{n^3-2}$	3	$10^{-2}$
3	$\frac{9-n^3}{1+2n^3}$	$-\frac{1}{2}$	$10^{-2}$	18	$\frac{4+2n}{1-3n}$	$-\frac{2}{3}$	$10^{-2}$
4	$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	0	$10^{-3}$	19	$\frac{5n+15}{6+n}$	5	$10^{-2}$
5	$1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$	1	$10^{-2}$	20	$\frac{3-n^2}{1+2n^2}$	$-\frac{1}{2}$	$10^{-2}$
6	$\frac{4n-3}{2n+1}$	2	$10^{-3}$	21	$\frac{7-n}{n+3}$	-1	$10^{-2}$
7	$\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$	$-\frac{1}{2}$	$10^{-2}$	22	$\frac{3n^2+4}{2-n^2}$	-3	$10^{-2}$
8	$\frac{2n+(-1)^n}{n}$	2	$10^{-2}$	23	$-\frac{5+4n^3}{3+2n^3}$	-2	$10^{-2}$
9	$-\frac{5n}{n+1}$	-5	$10^{-2}$	24	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$	0	$10^{-3}$
10	$\frac{1}{\ln(n+1)}$	0	$\frac{1}{3}$	25	$3 - \frac{(-1)^n}{n+5}$	3	$10^{-2}$
11	$\frac{n+1}{1-2n}$	$-\frac{1}{2}$	$10^{-2}$	26	$\frac{9n+7}{2n-3}$	$\frac{9}{2}$	$10^{-2}$
12	$\frac{2n+1}{3n-5}$	$\frac{2}{3}$	$10^{-2}$	27	$\frac{1+n^2}{4+2n^2}$	$\frac{1}{2}$	$10^{-2}$
13	$\frac{1-2n^2}{n^2+3}$	-2	$10^{-2}$	28	$\frac{-5n+(-1)^n}{2n+3}$	$-\frac{5}{2}$	$10^{-2}$
14	$\frac{3n^2}{2-n^2}$	-3	$10^{-2}$	29	$\frac{2}{\ln(3n+4)}$	0	$\frac{1}{4}$
15	$\frac{n}{3n-1}$	$\frac{1}{3}$	$10^{-2}$	30	$\left(-\frac{2}{7}\right)^n$	0	$10^{-3}$



ЗАДАЧА 2. Вычислить предел.

1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2}$	2	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\sin 2x - 2 \sin x}$	4	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{tg} x - \sin 4x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$	6	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2 \sin x}{x^3}$	8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 1}{2x + 3} \right)^x$
9	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\pi/4 - x}$	10	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (2 - \sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$
11	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\cos x - \sin x) \operatorname{tg} 2x$	12	$\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{1/x}$
13	$\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\pi/4 + x}$	14	$\lim_{x \rightarrow 0} (2 \cos x - 1)^{\operatorname{ctg}^2 x}$
15	$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - 2 \sin x}{1 - 2 \cos 2x}$	16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 2}{3x + 1} \right)^x$
17	$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin x - \cos 2x}{\pi/6 - x}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}$
19	$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$	20	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{1/x^3}$
21	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \sin x) \operatorname{tg}^2 x$	22	$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{1/\sin x}$
23	$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sqrt{3} - 2 \sin x}{\pi/3 - x}$	24	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 2} \right)^{x^2}$
25	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{(1 - \sqrt{2} \sin x)^2}$	26	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (2 - \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{x - \pi/4}}$
27	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x)$	28	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 2x - 1} \right)^x$
29	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + 2x}{1 + \sin x} \right)^{2/x}$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

ЗАДАЧА 3. Вычислить производную  $y'(x)$ .

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\ln \left( \cos \left( \frac{x-1}{x} \right) \right)$	16	$\arcsin \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right)$
2	$x \sin \left( \ln x - \frac{\pi}{4} \right)$	17	$\operatorname{arctg} (e^x + e^{-x})$
3	$\operatorname{arctg} \left( \ln \left( \frac{1}{x} \right) \right)$	18	$\arcsin \sqrt{x-1}$
4	$\frac{x}{\ln^2 x}$	19	$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{2}}$
5	$\ln (\ln (3-2x^3))$	20	$\operatorname{tg}^2 \sqrt{3x}$
6	$2 \operatorname{ctg} (1/x)$	21	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln (\cos x)$
7	$\sqrt{e^{\sin^2 x}}$	22	$\ln(\sin x) + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}$
8	$\sqrt{\cos^2 x - 2 \sin^2 x}$	23	$\frac{2}{3}(\ln x - 5)\sqrt{1 + \ln x}$
9	$\sqrt{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$	24	$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$
10	$\frac{\cos^3 x}{15}(3 \cos^2 x - 5)$	25	$\ln^3(2x + \sqrt{3})$
11	$\frac{x^2}{\ln x}$	26	$\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$
12	$\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$	27	$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$
13	$\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + \ln x)^4}$	28	$\ln(\sin x) + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x$
14	$\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} x)$	29	$\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}$
15	$e^{\operatorname{tg}^2(3x)}$	30	$\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}}$

ЗАДАЧА 4. Вычислить производную  $y'(x)$ .

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}$	16	$\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}(x^2-3)$
2	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{3}(x^2-2)$	17	$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}}$
3	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}(2x^2-1)$	18	$\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{5 \operatorname{tg} x + 4}{3} \right)$
4	$\operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + x - 1} \right)$	19	$\frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}}$
5	$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left( \sqrt{3}x + \sqrt{3x^2-2} \right)$	20	$\ln \sqrt[3]{\frac{x+2}{\cos^2 x}}$
6	$\frac{2}{35}(1+x)^{5/2}(5x-2)$	21	$\ln \sqrt{\frac{1+x}{\operatorname{tg} x}}$
7	$(1+2x^2)^{5/2} \cdot \frac{5x^2-1}{70}$	22	$\operatorname{arctg}^2 \frac{1}{\sqrt{2x}}$
8	$\frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}}$	23	$\ln \sqrt[4]{\frac{1+4x}{\sin^3 x}}$
9	$\ln \left( x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right)$	24	$\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{x}}$
10	$\frac{2}{15}(3x-4)(2+x)^{3/2}$	25	$\ln 5(1+3 \operatorname{tg} x)$
11	$\frac{4}{3} \left( \sqrt[4]{x^3} - \ln \left( 1 + \sqrt[4]{x^3} \right) \right)$	26	$\ln \left( \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3} \right)$
12	$\ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$	27	$\frac{2(10+3x)}{9\sqrt{5+3x}}$
13	$\frac{3x-9}{10} \sqrt[3]{(x+2)^2}$	28	$\frac{4}{21}(3e^x-4)(e^x+1)^{3/4}$
14	$\frac{20x+32}{45}(x-2)\sqrt[4]{x-2}$	29	$2\sqrt{x+1}(\ln(x+1)-2)$
15	$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}$	30	$\frac{1}{24} \ln \frac{x^3}{x^3+8}$

ЗАДАЧА 5. Вычислить логарифмическую производную  $y'(x)$ .

№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$	11	$(\operatorname{arctg} x)^x$	21	$x^{1/x}$
2	$x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$	12	$(\sin 3x)^x$	22	$\sqrt{\cos x} \cdot 2\sqrt{\cos x}$
3	$\frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}$	13	$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$	23	$(\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$
4	$x^{\cos x}$	14	$\frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$	24	$(\sin x)^{\ln x}$
5	$(\sin x)^{1/x}$	15	$\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$	25	$(1+x^2)^{\arccos x}$
6	$x^{\operatorname{tg} x}$	16	$(\operatorname{tg} x)^{e^x}$	26	$\sqrt[4]{x^3}\sqrt[3]{x^2(x+1)}$
7	$(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$	17	$(\ln \sin 3x)^x$	27	$\frac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}}$
8	$(\arcsin x)^{x^2}$	18	$(1+x^3)^{x^3}$	28	$(x^2+1)^{\sqrt{x}}$
9	$(1+x^2)^{x^2}$	19	$(\cos x)^{\sin x}$	29	$x^6(x^2+1)^{10}(x^3+1)$
10	$(\cos x)^x$	20	$x\sqrt{x}$	30	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$

ЗАДАЧА 6. Вычислить производную  $y'(x)$  функции, заданной параметрически.

№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$
1	$\begin{cases} x = \frac{2 \sin t}{1 + 3 \cos t} \\ y = \frac{5 \cos t}{1 + 3 \cos t} \end{cases}$	11	$\begin{cases} x = \frac{1}{t^2 - 1} \\ y = \frac{t^2 + 1}{t + 2} \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = \frac{6t}{1 + t^3} \\ y = \frac{6t^2}{1 + t^3} \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$

№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$
3	$\begin{cases} x = e^{-t^2} \\ y = \operatorname{arctg}(2t + 1) \end{cases}$	13	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = \frac{t^3 + 2}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^3}{t^2 + 1} \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = 4 \operatorname{tg}^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ y = 2 \sin t + 3 \cos t \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = t^2 e^{-t} \\ y = t^2 e^{-2t} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$	15	$\begin{cases} x = 2 \cos^2 t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = 2 \left(t + \frac{1}{t}\right) \\ y = t + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = 5(\cos t + t \sin t) \\ y = 5(\sin t - t \cos t) \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = \frac{6t}{1+t^2} \\ y = \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) + \cos t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 - \ln t^2 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \frac{t}{t+1} \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = \frac{t^3}{t+1} \\ y = \frac{t^2}{t+1} \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 5 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$

ЗАДАЧА 7. Вычислить производную  $y'(x)$  функции, заданной неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ .

№	$F(x, y)$	№	$F(x, y)$
1	$\ln x + e^{-y/x} + 5$	16	$x - \sqrt[3]{y^3 + x} - 4$
2	$x^{2/3} + y^{2/3} - 10$	17	$y^3 - \frac{x - y}{x + y} - 6$
3	$y - \sqrt{4x - x^2 + 10y - 4} + 3$	18	$ye^x - 1 - e^y + 9$
4	$e^x - e^y + x - y - 6$	19	$y^2 - x - \ln \frac{y}{x} - 4$
5	$x - \sqrt[3]{2x^2y^2 + 5x + y - 5} + 9$	20	$x + y - 3\sqrt[3]{x - y} + 11$
6	$\frac{3}{\sqrt{xy}} - \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} - 8 = 0$	21	$y - \sqrt[3]{x + 10y - 6 + \frac{4y + 5}{x}}$
7	$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 2$	22	$x - \sqrt{2y^3 - \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x}} - 3$
8	$e^x - e^y - xy$	23	$x - \sqrt{1 + 2xy + y^2 - 8y^3} + 3$
9	$y - \sqrt{2x - x^2 - 5xy - y}$	24	$\frac{x}{y} - \frac{\sin x}{\sin y} + 3$
10	$2 \cos^2(x + y) + xy - 9$	25	$\sqrt{x + y} - y\sqrt{x - y} - 7$
11	$3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \sqrt{x^2 + y^2} + 5$	26	$\ln(x + y) - \frac{8}{\sqrt{x + y^2}}$
12	$\ln 5y + \frac{x}{y} + 7$	27	$\sin(y - x^2) - \ln(y^2 - x)$
13	$x - \operatorname{arctg}(x + y) + 1$	28	$e^x + e^y - 2^{xy} - 2$
14	$y - \sqrt[3]{\frac{2y - 1}{x}} + 12$	29	$xy^2 + y^2 \ln x - 4$
15	$e^x \sin y - e^{-y} \cos x$	30	$x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x$

ЗАДАЧА 8. Найти предел, используя правило Лопиталя.

1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\ln x} - \ln(x + e - 1)}{\operatorname{arctg} 2(x - 1)}$	16	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{x^2}$
2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot e^x - 1\right)}{e^{\sin(1-x)} - 1}$	17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\operatorname{tg} 3x} - 1}{2^{\sin(x/2)} - 1}$
3	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(\sqrt{1+4x} - 2)}{x - 2}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 + x^2) - \ln 3}{1 - \cos 5x}$
4	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\pi/4 - x}$	19	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} 8x} - 1}{\ln(1 + \sin x)}$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}} + \frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)$	20	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - e^{x^2}}{1 - \cos x}$
6	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\sqrt[3]{2x+2} - 1)}{\ln(\sqrt{x+1} - 1)}$	21	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{4^x - 4}$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{arctg} 5x)}{\sin 3x}$	22	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x}}{1 - 2^{\operatorname{tg} x}}$
8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1 - x}{x^2}$	23	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 - 2 \cos x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1}$
9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$	24	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - \cos x} - 1}{2 \arcsin x - 1}$
10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/\cos x} - e^{\cos x}}{\ln \cos x}$	25	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{\ln(1 + 2x^2)}$
11	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\ln(\sqrt{9+x} - \sqrt{4+x})}$	26	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sin^2(\pi/2 - x)}$
12	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{2 - x}$	27	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}$
13	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}$	28	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{tg}^2(x/5))}{\sqrt{1 + \sin^2 3x} - 1}$
14	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{e^{\sin x} - e^{\cos x}}{\pi - 4x}$	29	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{3x} - 3^{-x}}{e^{\operatorname{tg} x} - 1}$
15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{\operatorname{tg} 6x}$

ЗАДАЧА 9. Найти предел, используя правило Лопиталя.

1	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$	16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$	17	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-2)}{e^x - e^3}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$	19	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$
5	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$	20	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{x^4}$
6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x}) \sin x}{x^2}$	21	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\pi/2 - \operatorname{arctg} x)}$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$	22	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2x)^{1/\ln x}$
8	$\lim_{x \rightarrow +0} (\ln(x+e))^{1/x}$	23	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + 2x^2 - e^{2x}}{x^3}$
9	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$	24	$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg}(\pi x/2)$
10	$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{2 - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{3 - 3\sqrt[3]{x}} \right)$	25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{1/x}$
11	$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x)^{(1+x)} - x}{x^2}$	26	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{x^2}$
12	$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\cos(\pi x/2)}$	27	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} + x - 1}{x^2}$
13	$\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$	28	$\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} x)^{-1/x^2}$
14	$\lim_{x \rightarrow 1} (\operatorname{tg}(\pi x/4))^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$	29	$\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$
15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + \sin 3x - 3xe^x}{\operatorname{arctg} x - \sin x}$	30	$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$



ЗАДАЧА 10. Функцию  $y = f(x)$  разложить по формуле Тейлора в окрестности точки  $x_0$  до  $o((x - x_0)^n)$ .

№	$f(x)$	$x_0$	$n$	№	$f(x)$	$x_0$	$n$
1	$\frac{2x+3}{4x-5}$	2	4	16	$\cos^2(2x+6)$	-4	5
2	$(x+2)\ln(3x-7)$	3	4	17	$(x+2)\sqrt{3x+4}$	4	4
3	$\sin^2(2x+1)$	-1	5	18	$(x-7)e^{4x-2}$	1	5
4	$(x-2)\cos(x-3)$	2	5	19	$\frac{3x+2}{x-6}$	5	4
5	$\sqrt[3]{3x+5}$	1	4	20	$(2x-9)\ln(4x+1)$	1	4
6	$(2x+5)e^{2x+3}$	-2	4	21	$\sin^2(3x-2)$	2	5
7	$\frac{3x-4}{x-5}$	2	4	22	$(3x+4)\cos(2x-1)$	3	5
8	$(x^2+x)\ln(2x+1)$	0	5	23	$\sqrt[3]{2x-5}$	16	4
9	$\sin(4x-3)$	1	5	24	$(2x^2+5)e^{3x-2}$	1	5
10	$\cos^2(x+2)$	-1	5	25	$\frac{x^2-4}{2x+1}$	-1	4
11	$\sqrt[4]{4x+12}$	1	4	26	$(x^2+7x)\ln(4x+3)$	1	4
12	$(x+2)e^{x^2+2x}$	-1	4	27	$(x+2)\sin(x+2)$	2	5
13	$\frac{x^2-4}{2x+1}$	2	4	28	$(2x+1)\cos(3x-5)$	2	5
14	$x\ln\sqrt[3]{5-2x}$	2	4	29	$\sqrt[4]{x+12}$	4	4
15	$(2x-3)\sin(x+3)$	-2	5	30	$(-x+4)e^{x+3}$	-2	5

ЗАДАЧА 11. Вычислить предел двумя способами:

- а) используя разложение по формуле Тейлора;  
 б) с помощью правила Лопиталя.

1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$	16	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + x^2/2 - \sin x}{x^3}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - e^{-x} - 3x - 1}{x^2}$	17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1 - 2x^2 + e^{-2x}}{x^3}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \ln(1+x) - 6x - 2x^3}{e^{-x} + x - 1}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + 3x/2 - \sqrt{1+3x}}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-x} - \cos x - x}{x^2}$	19	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\ln(1+x) + e^{-x} - 1}$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \ln(x+1) - x}{x^2}$	20	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{-x} - 3x/2}{x^2}$
6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{x^4}$	21	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin 2x + 2 \ln(1-x) + x^2}$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x - 2x}{x^2}$	22	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} + \ln(1+2x) - 1 - 2x}{x^2}$
8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} + x - 1}{1 - \cos x}$	23	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + \ln(1+2x) - 2x}{x^3}$
9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3}$	24	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^2} - e^{-2x} - 2x}$
10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2/2 + \sin x + \ln(1-x)}$	25	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$
11	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - e^{-x} - x}{x^2}$	26	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{-2x} + 2 \sin x - 1}$
12	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + x + \ln(1-x)}{2x^3}$	27	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\ln(1-2x) + e^{2x} - 1}$
13	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$	28	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}$
14	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\ln(1-2x) + 2x + 2x^2}$	29	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x) + x - 1}{x^2}$
15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1-2x^2} - e^x + x}$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1 - x^2/2}{x^3}$

ЗАДАЧА 12. Построить график функции  $y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + px + q}$ .

№	$a$	$b$	$c$	$d$	$p$	$q$	№	$a$	$b$	$c$	$d$	$p$	$q$
1	1	1	0	-1	0	-1	16	2	-1	-1	6	1	-6
2	1	2	0	-2	0	-1	17	-2	1	-1	-2	-1	-1
3	1	1	0	-4	0	-4	18	3	3	-3	-6	-1	-2
4	1	1	-3	2	-3	2	19	-3	-4	-4	24	1	-6
5	1	1	-1	-2	-1	-2	20	1	1	1	-2	1	-2
6	-1	0	0	0	2	1	21	-1	2	2	-4	1	-2
7	1	-2	0	0	-2	1	22	-1	-1	-3	-2	3	2
8	-1	0	0	0	2	1	23	2	-1	3	-2	-3	2
9	1	-1	0	0	2	1	24	2	1	-4	3	-4	3
10	1	3	3	1	-2	1	25	-2	-1	2	3	-2	-3
11	-1	2	0	-6	0	-3	26	-2	-4	-8	12	2	-3
12	-2	2	0	-6	0	-3	27	-2	-3	-12	-9	4	3
13	2	-1	0	2	0	-2	28	-2	-2	10	-12	-5	6
14	-3	2	0	-6	0	-3	29	3	4	-4	-24	-1	-6
15	3	-2	0	2	0	-1	30	1	3	15	18	5	6

ЗАДАЧА 13. Построить график функции  $y(x)$ :

№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\sqrt[3]{x^2 - 1}$	2	$x\sqrt[3]{x + 3}$	3	$\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$	4	$x^2\sqrt[3]{x + 1}$
5	$\sqrt[3]{(x^2 - 2)^4}$	6	$x\sqrt[5]{x + 1}$	7	$\sqrt[3]{(x^2 - 1)^5}$	8	$x^2\sqrt[5]{x + 2}$
9	$\sqrt[4]{(x^2 - 9)^3}$	10	$x^{1/2}\sqrt{x + 1}$	11	$\sqrt[4]{(x^2 - 4)^3}$	12	$x^{1/2}\sqrt{(x+1)^3}$
13	$\sqrt[5]{(x^2 - 3)^4}$	14	$x\sqrt{x - 1}$	15	$\sqrt[5]{(x^2 - 1)^3}$	16	$x^2\sqrt{x - 2}$
17	$\sqrt[5]{(x^2 - 1)^2}$	18	$x\sqrt{1 - x}$	19	$\sqrt[5]{(x^2 - 1)^6}$	20	$\sqrt[4]{x^2 - 1}$
21	$\sqrt[6]{(x^2 - 4)^7}$	22	$\sqrt[4]{x^3(x + 1)}$	23	$\sqrt[6]{(x^2 - 9)^5}$	24	$\sqrt[4]{x(x - 2)^2}$
25	$\sqrt[7]{(x^2 - 4)^6}$	26	$(x - 1)\sqrt[3]{x^2}$	27	$\sqrt[7]{(x^2 - 9)^8}$	28	$\sqrt[3]{x^2 - 3x}$
29	$\sqrt[9]{(x^2 - 16)^5}$	30	$x(x^2 - 1)^{-1/3}$				

ЗАДАЧА 14. Построить график функции.

1	$y = (2x + 3)e^{-2x - 2}$	16	$y = e^x \cos x$
2	$y = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$	17	$y = \frac{e^{2x+2}}{2x+2}$
3	$y = xe^{-x^2}$	18	$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
4	$y = \sqrt{x^3} \ln x$	19	$y = (3 - x)e^x - 2$
5	$y = \frac{x}{\ln x}$	20	$y = \ln \frac{1+x}{1-x}$
6	$y = xe^{-x}$	21	$y = e^{1/x^2}$
7	$y = e^{1/x} - x$	22	$y = xe^{1/(2-x)}$
8	$y = x^2 - \ln  x $	23	$y = (2x + 5)e^{-2x - 4}$
9	$y = e^{1/(x^2 - 4x + 4)}$	24	$y = 2 \ln \left(1 - \frac{4}{x}\right) - 3$
10	$y = (1 + x)e^{1/x}$	25	$y = 4 \ln \frac{x}{x+2} + 1$
11	$y = e^{-x} \sin x$	26	$y = x(2 - \ln x)^2$
12	$y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1$	27	$y = x^3 e^{-x}$
13	$y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$	28	$y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$
14	$y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}$	29	$y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3$
15	$y = xe^{1/(x-1)}$	30	$y = \frac{e^{x-3}}{2x+7}$

ЗАДАЧА 15. Построить линию, заданную уравнением  $\rho = f(\varphi)$  в полярных координатах ( $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

№	$f(\varphi)$	№	$f(\varphi)$	№	$f(\varphi)$
1	$\cos(3\varphi + \pi/4)$	11	$\sqrt{\cos(\pi + \varphi)}$	21	$4(1 - \cos 4\varphi)$
2	$1 + \cos \varphi$	12	$7(1 + \sin \varphi)$	22	$2 + \cos \varphi$
3	$2 + \sin \varphi$	13	$4 \cos 2\varphi$	23	$2 \sin \varphi$
4	$4 \operatorname{tg}(\varphi/2)$	14	$\sin(\varphi/2)$	24	$\cos(\varphi/2)$
5	$2 \cos 3\varphi$	15	$2 \sin 3\varphi$	25	$5(2 - \cos \varphi)$
6	$3\sqrt{\cos 2\varphi}$	16	$3(2 - \sin \varphi)$	26	$\sqrt{\sin(-2\varphi)}$
7	$1 + \cos^2 2\varphi$	17	$2 + \sin^2 2\varphi$	27	$2 \operatorname{tg} \varphi$
8	$5(1 - \cos 2\varphi)$	18	$1 - \sin 2\varphi$	28	$3 \cos^2 2\varphi$
9	$2(1 + \sin 3\varphi)$	19	$\sqrt{4 \cos \varphi}$	29	$3 + 2 \cos \varphi$
10	$\sin^2 2\varphi$	20	$5(1 + \cos 3\varphi)$	30	$4 \sin^2 3\varphi$

ЗАДАЧИ 16,17. Вычислить приближенно указанные величины.

№	Задача16	Задача17	№	Задача16	Задача17
1	$\sqrt{10}$	$\log_6 37$	16	$\operatorname{ctg} 46^\circ$	$\sqrt[4]{257}$
2	$\log_3 10$	$\operatorname{tg} 44^\circ$	17	$\sqrt{99}$	$5^{2.1}$
3	$\operatorname{tg} 46^\circ$	$\sqrt{37}$	18	$4^{1.8}$	$\operatorname{arcctg} 0.9$
4	$\sqrt[3]{28}$	$3^{3.2}$	19	$\operatorname{arcctg} 0.1$	$\sqrt[4]{255}$
5	$3^{2.1}$	$\operatorname{arctg} 0.9$	20	$\sqrt[3]{63}$	$\sin 27^\circ$
6	$\operatorname{arctg} 0.1$	$\sqrt{35}$	21	$\operatorname{ctg} 47^\circ$	$\log_4 257$
7	$\sqrt[4]{82}$	$\sin 29^\circ$	22	$\log_5 124$	$\sqrt[4]{626}$
8	$\sin 31^\circ$	$\log_6 35$	23	$\sqrt[3]{126}$	$5^{1.9}$
9	$\log_3 8$	$\sqrt{50}$	24	$4^{3.1}$	$\sin 26^\circ$
10	$\sqrt{8}$	$3^{2.8}$	25	$\operatorname{ctg} 44^\circ$	$\sqrt[4]{624}$
11	$3^{1.9}$	$\sin 28^\circ$	26	$\sqrt[3]{124}$	$5^{2.8}$
12	$\cos 61^\circ$	$\sqrt{48}$	27	$5^{3.2}$	$\log_4 255$
13	$\sqrt{17}$	$5^{2.9}$	28	$\log_6 217$	$\sqrt[4]{83}$
14	$3^{2.2}$	$\log_3 28$	29	$\sqrt[3]{29}$	$\log_5 626$
15	$\log_4 17$	$\sqrt{63}$	30	$\log_3 82$	$\cos 63^\circ$

ЗАДАЧА 18. Вычислить частные производные первого порядка.

№	$z = f(x, y)$	№	$z = f(x, y)$
1	$z = x^3 + y^3 + 3x/y$	16	$z = \ln(1 + x/y)$
2	$z = \sqrt{x^2 - y^2}$	17	$z = \cos(y + \sin x)$
3	$z = \operatorname{arctg} \left( \frac{x+y}{1-xy} \right)$	18	$z = \ln \operatorname{tg}(y/x)$
4	$z = \sin(x + \cos y)$	19	$z = xy \sin(xy)$
5	$z = x^2 \ln(x + y)$	20	$z = x^4 \cos^2 y$
6	$z = e^{x/y}$	21	$z = e^{\sin(y/x)}$
7	$z = \ln \cos(y/x)$	22	$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
8	$z = \ln \operatorname{tg}(x - y)$	23	$z = x \cos(x + y)$
9	$z = e^{(x^3 + y^2)^2}$	24	$z = e^x \cos y$
10	$z = x^3 + 4x^2y^2 - y^4$	25	$z = x^3 + 2y^2 - 2y^3x^2$
11	$z = x \sin(2x + 3y)$	26	$z = y^x$
12	$z = \cos(x^2)/y$	27	$z = \ln \operatorname{tg}(x/y)$
13	$z = \ln(x^2 + y)$	28	$z = x^3 \sin y + y^3 \cos x$
14	$z = xy + y/x$	29	$z = \operatorname{tg}(y^2/x)$
15	$z = x^2 \sin^4 y$	30	$z = y \ln(x^2 - y^2)$

ЗАДАЧА 19. Вычислить смешанные производные второго порядка и проверить, что они равны.

№	$z = f(x, y)$	№	$z = f(x, y)$
1	$z = e^{xy(x^2 + y^2)}$	16	$z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$
2	$z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	17	$z = x^2/y^2 - y/x$
3	$z = (x^2 + y^2) \cdot e^{x+y}$	18	$z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
4	$z = x \ln(x^3y^2)$	19	$z = \sqrt{2xy + y^2}$
5	$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$	20	$z = y \ln(x^2 - y^2)$
6	$z = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{1 + x^2} \right)$	21	$z = \operatorname{arctg}(y/x) + \operatorname{arctg}(x/y)$
№	$z = f(x, y)$	№	$z = f(x, y)$
7	$z = \frac{xy}{x + y}$	22	$z = e^x(\cos y + x \sin y)$
8	$z = e^x(x \sin y + y^2)$	23	$z = x^y$
9	$z = \frac{x + y}{x - y}$	24	$z = x \ln(y/x)$
10	$z = \operatorname{arctg}(x/y^2)$	25	$z = e^{x+y}(x \cos y + y \sin x)$
11	$z = \sin(x^2)/y$	26	$z = \ln(x^2 + xy + y^2)$
12	$z = x \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{y - x} \right)$	27	$z = \sin(x^2 - y^3)$
13	$z = \operatorname{tg}(x^2/y)$	28	$z = e^{3x^2 + 2y^2 - xy}$
14	$z = \operatorname{arctg} \left( \frac{x + y}{1 - xy} \right)$	29	$z = xy + x/y$
15	$z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$	30	$z = xy \sin(x - y^2)$

ЗАДАЧА 20. Найти и исследовать точки экстремума функции.

1	$u = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z - 3x + 4y$
2	$u = x^2 + 3y^2 + z^2 - xz - 2x + 3y$
3	$u = 3xy + 5xz - 8yz - 9x^2 - 6y^2 - 11z^2$
4	$u = yz - 2xy - 4x^2 - 3y^2 - z^2 - 8x$
5	$u = x^2 + y^2 + 2z^2 + yz + 2z - 3y$
6	$u = 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 + z^2 - xy + 2xz + yz - y + 2z$
7	$u = xz + yz - 2xy - 5x^2 - y^2 - 3z^2 + 6z$
8	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
9	$u = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
10	$u = \frac{1}{2}xy + xz - 2yz - x^2 - y^2 - 5z^2 - 2x + 4y$
11	$u = 2x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 - xz + 2xy + yz - 3y$
12	$u = 5x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - xz - \frac{1}{2}yz - 10x$
13	$u = 5x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - xz - yz - 4x + 2y$
14	$u = xy + xz - 2yz - 4x^2 - y^2 - 5z^2 - 2y$
15	$u = xy - 2x^2 - y^2 - z^2 - 2z + x - 4y$
16	$u = xz - x^2 - 3y^2 - z^2 + x - 6y + z$
17	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz - 4y + 2x$
18	$u = 2yz - 2xy - 3x^2 - 4y^2 - 5z^2 + 6x$
19	$u = x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy - xz - yz - 10y$
20	$u = x^2 + xy + 2y^2 + 4yz + 5z^2 - 4z$
21	$u = 2xz + 4yz - 2xy - 2x^2 - 5y^2 - 5z^2 - 4x$
22	$u = 2xy + 2xz - 5x^2 - 6y^2 - 4z^2 - 8z$
23	$u = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2yz - 8y$
24	$u = 4x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 2xz - 2yz + 10z$
25	$u = 9x^2 + 6y^2 + 11z^2 - 3xy - 5xz + 8yz$
26	$u = x^2 + 17y^2 + 3z^2 + 2xy - xz - 7yz$
27	$u = xz + 7yz - 2xy - x^2 - 17y^2 - 3z^2$
28	$u = 3xy + 5xz - 8yz - 9x^2 - 6y^2 - 11z^2$
29	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
30	$u = 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz - \frac{1}{2}yz - 10x$



**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ  
К ЭКЗАМЕНУ  
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

1. Определение предела последовательности. Подпоследовательность, частичный предел.
2. Критерий Коши. Свойства сходящихся последовательностей. Теорема о пределе промежуточной последовательности.
3. Определение предела функции. Теорема о пределе промежуточной функции. Первый замечательный предел.
4. Бесконечно малые функции. Теорема о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.
5. Теорема о пределе произведения бесконечно малой и ограниченной функций.
6. Второй замечательный предел. Раскрытие неопределенностей  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ .
7. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентность бесконечно малых. Основные эквивалентности.
8. Теорема о разности эквивалентных бесконечно малых. Теорема о замене эквивалентности в пределе отношения.
9. Непрерывность функции в точке. Теорема о непрерывности арифметических действий, о непрерывности сложной функции.
10. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
11. Точки разрыва и их классификация.
12. Производная, ее геометрический и механический смысл.
13. Теорема о связи непрерывности и дифференцируемости.
14. Арифметические действия с производными.
15. Таблица производных.
16. Производные сложной и обратной функций.

17. Дифференциал, его связь с производной, геометрический смысл, инвариантность.
18. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.
19. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл. Теорема Коши.
20. Правило Лопиталя.
21. Многочлен Тейлора, формула Тейлора.
22. Остаточный член формулы Тейлора в формах Пеано и Лагранжа.
23. Локальный экстремум функции одного переменного. Необходимое и достаточное условия экстремума.
24. Геометрический смысл второй производной. Точки перегиба.
25. Асимптоты графика функции. Существование наклонной асимптоты.
26. Частные производные функции нескольких переменных. Теорема о равенстве смешанных производных.
27. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Дифференциал.
28. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.

Вопросы к экзамену могут быть уточнены и дополнены лектором потока.