Оглавление

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Получить рекуррентную формулу для заданных интегралов. Вычислить I_0 и I_1. По рекуррентной формуле найти

$$а)\ I_n = \int\limits_0^{\infty} x^n e^{-\alpha^2 x^2} dx; \qquad б)\ I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx;$$

$$в)\ I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx; \qquad г)\ I_n = \int\limits_0^{1} \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

2. Вывести формулу для дифференцирования функции

$$F(x) = \int\limits_{u(x)}^{v(x)} f\,(t)\, dt, \text{ где } u(x) \leqslant v(x).$$

3. Показать, что для функции $f(x,y) = x^2y^2/(x^2y^2 + (x+y)^2)$ существуют оба повторных предела: при $x \to 0$, затем $y \to 0$, и при $y \to 0$, затем $x \to 0$, но не существует предела, когда $M\,(x,y) \to O\,(0,0)$.

4. Показать, что функция $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2),\ f\,(0,0) = 0$, непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности, но не является непрерывной по их совокупности.

5. Показать, что функция $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ имеет обе частные производные в точке $O(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

6. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x,y) = \partial^2 F/\partial x \partial y$ по прямоугольнику со сторонами, параллельными осям координат.

7. Предполагая функцию $f(x,y)$ непрерывной, найти предел

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} f(x,y)\ dxdy.$$

8. Предполагая функцию $f(x,y)$ непрерывной, найти производную $F'(t)$ функции

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant t^2} f(x,y)\ dxdy \quad (t > 0).$$

Проверить результат на примере $f(x,y) = x^2 + y^2$.

9. Предполагая функцию $f(x,y,z)$ непрерывной, найти предел

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} f(x,y,z)\ d\sigma.$$

Проверить результат на примере $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+1$.

10. Предполагая функцию $f(x,y,z)$ непрерывной, найти предел

$$\lim_{R\to 0}\frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f(x,y,z)\ dxdydz.$$

Проверить результат на примере $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+1$.

11. Найти производную $F'(t)$ функции

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\ dxdydz.$$

Проверить результат на примере $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

12. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Доказать, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$ точками $x_0=a$, x_1, $x_2,\ldots,$ $x_n=b$ можно так подобрать точки $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, чтобы соответствующая интегральная сумма в точности равнялась определенному интегралу от $f(x)$ по отрезку $[a,b]$.

13. Вывести формулу приближенного интегрирования для интеграла $\int\limits_a^b f\,(x)\,dx$, разбивая отрезок $[a,b]$ на три равные части точками $x_0=a$, x_1, x_2, $x_3=b$ и заменяя $f(x)$ кубическим многочленом, проходящим через узловые точки $(x_i,f(x_i))$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Найти неопределенный интеграл. По усмотрению преподавателя выполняется либо одно из заданий (а или б), либо оба задания.

N	а	б
1	$\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}\,dx$	$\int \frac{x^4+2x-1}{x^2(x-1)(x^2-x+1)}\,dx$
2	$\int \frac{\cos x+1}{3+5\sin x}\,dx$	$\int \frac{x^4+3x^3-19x^2+29x-10}{x(x-1)^2(x^2-2x+5)}\,dx$
3	$\int \frac{dx}{x(\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x})}$	$\int \frac{x^4-16x^2+10x+8}{x(x-2)^2(x^2+2x+2)}\,dx$
4	$\int x^2\ln\left(x^2+2x+5\right)\,dx$	$\int \frac{-x^4+5x^3-7x^2+11x-16}{(x-1)(x+1)^2(x^2-4x+5)}\,dx$
5	$\int \frac{dx}{e^x(e^{2x}+2e^x+10)}$	$\int \frac{-x^4-2x^3+8x^2+16x-1}{(x+1)(x-1)^2(x^2+4x+5)}\,dx$
6	$\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^3}\,dx$	$\int \frac{2x^4+2x^3-7x^2-8x-6}{x^2(x+3)(x^2+x+1)}\,dx$
7	$\int \frac{\cos x-1}{4-5\sin x}\,dx$	$\int \frac{3x^4-10x^3-48x+20}{(x+1)(x-2)^2(x^2+2x+10)}\,dx$
8	$\int \frac{dx}{x(\sqrt[4]{x^3}+6\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x})}$	$\int \frac{2x^3+16x^2+29x+25}{(1-x)(x+2)^2(x^2+2x+5)}\,dx$
9	$\int \ln\left(x^2-4x+5\right)\,dx$	$\int \frac{-x^4+4x^3-5x^2-6x+3}{x(x-1)^2(x^2+x+3)}\,dx$
10	$\int \frac{dx}{e^{3x}-2e^{2x}+2e^x}$	$\int \frac{-x^4+4x^3+3x^2+4}{x^2(x-2)(x^2+x+2)}\,dx$
11	$\int \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg} x\,dx$	$\int \frac{-2x^4+2x^3+8x^2-6x+6}{(x+1)(x-1)^2(x^2-x+2)}\,dx$
12	$\int \frac{\sin x}{4+5\sin x}\,dx$	$\int \frac{-3x^4-10x^3-13x^2+2x+18}{(x+2)(x+1)^2(x^2+2x+6)}\,dx$
13	$\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$	$\int \frac{-2x^4-5x^3+x^2+23x-49}{(x-1)(x+3)^2(x^2-2x+2)}\,dx$
14	$\int (x-1)\ln\left(x^2+6x+10\right)dx$	$\int \frac{2x^3+9x^2-33x+27-x^4}{(x-1)(x-2)^2(x^2-2x+3)}\,dx$

15	$\int \frac{dx}{e^{3x} - 4e^{2x} + 5e^{x}}$	$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 16}{x^2 (x+2)(x^2 - 2x + 4)}\, dx$
16	$\int \left(x + \frac{1}{x^3}\right) \operatorname{arctg} 2x\, dx$	$\int \frac{4x^4 - 19x^3 + 2x^2 + 13x + 48}{(x+3)(x-3)^2 (x^2 + x + 2)}\, dx$
17	$\int \frac{\sin x}{3 - 5\sin x}\, dx$	$\int \frac{-x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3}{(x+3)(x+1)^2 (x^2 + x + 3)}\, dx$
18	$\int \frac{dx}{x - 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}}$	$\int \frac{x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 6x - 6}{(x-1)^2 (x^2 + x + 2)}\, dx$
19	$\int \ln\left(4x^2 + 4x + 5\right) dx$	$\int \frac{-2x^5 + 10x^4 - 21x^3 + 31x^2 - 26x + 8}{(x-2)^2 (x^2 - x + 2)}\, dx$
20	$\int \frac{dx}{e^{3x} + 4e^{2x} + 5e^{x}}$	$\int \frac{x^5 + 8x^4 + 29x^3 + 56x^2 + 54x + 17}{(x+2)^2 (x^2 + 2x + 3)}\, dx$
21	$\int \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^3}\, dx$	$\int \frac{-x^5 - 2x^4 + 13x^2 + 23x + 14}{(x+1)^2 (x^2 + 2x + 4)}\, dx$
22	$\int \frac{\cos x + 2}{1 + 2\cos x}\, dx$	$\int \frac{2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 2}{(x-1)^2 (x^2 + x + 2)}\, dx$
23	$\int \frac{dx}{x(\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x})}$	$\int \frac{2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 32x + 8}{(x+1)^2 (x^2 - x + 4)}\, dx$
24	$\int x \ln\left(4x^2 - 4x + 5\right) dx$	$\int \frac{-x^5 + 7x^4 - 22x^3 + 46x^2 - 56x + 36}{(x-2)^2 (x^2 - 2x + 3)}\, dx$
25	$\int \frac{dx}{e^{x} (e^{2x} - 6e^{x} + 10)}$	$\int \frac{3x^5 + 20x^4 + 52x^3 + 60x^2 + 17x - 15}{(x+2)^2 (x^2 + 3x + 3)}\, dx$
26	$\int \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) \operatorname{arctg} x\, dx$	$\int \frac{-3x^5 + 8x^4 - 14x^3 + 22x^2 - 16x + 9}{(x-1)^2 (x^2 - x + 2)}\, dx$
27	$\int \frac{\cos x + 2}{3 - 5\sin x}\, dx$	$\int \frac{3x^5 - 12x^4 - 29x^3 + 39x^2 + 324x - 26}{(x-4)^2 (x^2 + 4x + 6)}\, dx$
28	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}$	$\int \frac{-2x^5 + 17x^4 - 57x^3 + 110x^2 - 139x + 91}{(x-3)^2 (x^2 - 2x + 5)}\, dx$
29	$\int x^2 \ln\left(x^2 - 2x + 10\right) dx$	$\int \frac{x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 30x + 6}{(x+3)^2 (x^2 + x + 1)}\, dx$
30	$\int \frac{dx}{e^{x} (e^{2x} + 6e^{x} + 13)}$	$\int \frac{2x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 31x^2 + 126x + 40}{(x+4)^2 (x^2 - 3x + 4)}\, dx$

ЗАДАЧА 2. Вычислить определенный интеграл. Выполняется (по усмотрению преподавателя) либо задание а, либо задание б.

а			
1	$\int\limits_0^2 (x-1)^2\sqrt{4-x^2}\,dx$	2	$\int\limits_0^2 (x^2+2)\sqrt{2x-x^2}\,dx$
3	$\int\limits_1^3 x^2\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$	4	$\int\limits_0^2 (2+x^2)\sqrt{4x-x^2}\,dx$
5	$\int\limits_0^2 (x+1)^2\sqrt{6x-x^2}\,dx$	6	$\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4x+8)^5}}$
7	$\int\limits_1^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-2x+2)^5}}$	8	$\int\limits_3^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-6x+10)^5}}$
9	$\int\limits_{-2}^2 (2x+1)\sqrt{(4-x^2)^3}\,dx$	10	$\int\limits_1^6 (x-1)^4\sqrt{24-x^2+2x}\,dx$
11	$\int\limits_{-2}^6 (x-2)^2\sqrt{12-x^2+4x}\,dx$	12	$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{(4-x^2)^3}\,dx$
13	$\int\limits_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-6x+10)^3}}$	14	$\int\limits_{-1}^0 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+2x+2)^5}}$
15	$\int\limits_{-2}^0 \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{(x^2+4x+8)^5}}$	16	$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{2+\sin^2 x+6\sin x\cos x}$
17	$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin x\cos x+1}$	18	$\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{x^2+2x-3}\,dx}{(x+1)^4}$
19	$\int\limits_5^8 \frac{\sqrt{x^2-4x-5}\,dx}{(x-2)^4}$	20	$\int\limits_4^7 \frac{\sqrt{x^2-2x-8}\,dx}{(x-1)^3}$
21	$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$	22	$\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$
23	$\int\limits_1^3 \frac{(x-1)^5\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$	24	$\int\limits_2^3 \frac{(x-2)^3\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

а			
25	$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \dfrac{(2x+1)^3\ dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$	26	$\int\limits_{5}^{7} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+5}\,dx}{(x-3)^3}$
27	$\int\limits_{0}^{\pi/4} \dfrac{dx}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+1}$	28	$\int\limits_{2\sqrt{3}}^{6} \dfrac{x^3\ dx}{\sqrt{x^2-9}}$
29	$\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$	30	$\int\limits_{3/2}^{2} \dfrac{x\ dx}{\sqrt{(4x^2-12x+10)^5}}$

б			
1, 16	$\int\limits_{2}^{3} \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{(4x-x^2)^5}}\ dx$	9, 24	$\int\limits_{-2}^{4} \sqrt{(x^2-2x+10)^3}\ dx$
2, 17	$\int\limits_{1}^{2} \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{(3+2x-x^2)^5}}\ dx$	10, 25	$\int\limits_{6}^{8} x^2\sqrt{x^2-6x}\ dx$
3, 18	$\int\limits_{2}^{3} \dfrac{x^3}{\sqrt{(3-2x-x^2)^5}}\ dx$	11, 26	$\int\limits_{5}^{6} \dfrac{dx}{(x-1)^2\sqrt{(x^2-2x-8)^5}}$
4, 19	$\int\limits_{1}^{1.5} \dfrac{(x+2)^3}{\sqrt{(2x-x^2)^5}}\ dx$	12, 27	$\int\limits_{-2}^{0} \dfrac{\left(x^2+1\right)\ dx}{\sqrt{(x^2+4x+8)^3}}$
5, 20	$\int\limits_{3}^{4.5} \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{(6x-x^2)^5}}\ dx$	13, 28	$\int\limits_{2}^{4} \dfrac{(x-2)^2\ dx}{\sqrt{(x^2+4x-5)^5}}$
6, 21	$\int\limits_{0}^{4} \sqrt{(x^2-4x+8)^3}dx$	14, 29	$\int\limits_{3}^{4} (2x-1)^2\sqrt{x^2-6x+10}\,dx$
7, 22	$\int\limits_{2}^{3} (x-2)^2\sqrt{x^2-4x+5}\,dx$	15, 30	$\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x^2+2x+5)^5}}$
8, 23	$\int\limits_{0}^{1} (2x-1)^2\sqrt{4x^2-4x+2}\,dx$		

ЗАДАЧА 3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл и вычислить его, если он сходится.

1. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$ 2. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 3. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}dx$

4. $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-4x}\cos 3x\,dx$ 5. $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ 6. $\displaystyle\int\limits_0^\infty x\sin x\,dx$

7. $\displaystyle\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$ 8. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ 9. $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

10. $\displaystyle\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 11. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{x^5}}$ 12. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[5]{x^3}}$

13. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{x^3+1}$ 14. $\displaystyle\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx$ 15. $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$

16. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^2}$ 17. $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-2x}\sin 5x\,dx$ 18. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}$

19. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ 20. $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{x-1}$ 21. $\displaystyle\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx$

22. $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos 2x\,dx$ 23. $\displaystyle\int\limits_0^\infty x^2e^{-3x}dx$ 24. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

25. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ 26. $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln x\ dx$ 27. $\displaystyle\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$

28. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$ 29. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 30. $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-2x}\sin x\,dx$

ЗАДАЧА 4. Изменить в повторном интеграле

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

порядок интегрирования. Сделать чертеж области интегрирования.

N	a	b	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	N	a	b	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
1	0	3	$1-x^2/9$	$\sqrt{9-x^2}$	2	0	2	$-\sqrt{4-x^2}$	$2-x$
3	0	3	$-\sqrt{3x-x^2}$	0	4	1	2	$x^2/4$	$\sqrt{5-x^2}$
5	0	4	$\sqrt{4x-x^2}$	$\sqrt{4x}$	6	1	4	$\sqrt{x}$	$6-x$
7	0	3	$-\sqrt{25-x^2}$	$3-x$	8	0	$5/2$	$4x^2$	$30-2x$
9	0	1	$-2x$	$\sqrt{4+x^2}$	10	-1	1	$4x$	$5-x^2$
11	0	6	$-x-1$	$\sqrt{36-x^2}$	12	-2	0	$-\sqrt{4-x^2}$	$4-x^2$
13	2	5	x^2-2x-8	$2+x$	14	-4	2	x^2+2x-7	$3-x$
15	1	9	$\sqrt{x}$	$\sqrt{9x}$	16	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$x^2/2$	$\sqrt{3-x^2}$
17	0	2	$\sqrt{2x-x^2}$	2	18	0	2	$-\sqrt{4-x^2}$	$2x$
19	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$\sqrt{4x-x^2}$	20	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x^2/3$	3
21	0	2	0	$\sqrt{16-x^2}$	22	1	6	1	$\sqrt{x+3}$
23	0	$\frac{3}{7}$	$2x^2$	x	24	-1	1	$3x$	$3(x+1)/2$
25	0	3	0	$2-x^2/9$	26	-2	2	$2x^2$	9
27	0	4	$x+1$	$10-x$	28	-2	2	0	$\sqrt{4-x^2}$
29	0	4	$3x^2$	$12x$	30	1	2	0	$\sqrt{4x-x^2}$

ЗАДАЧА 5. Вычислить объем тела с помощью тройного интеграла, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам.

1. $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 \leqslant 0 \\ 4y \leqslant x^2 + z^2 + 4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0 \\ z \leqslant 16 - x^2 - y^2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \\ x^2 + z^2 \leqslant z \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4 \leqslant z \leqslant 6 \\ x^2 + y^2 \leqslant 4z \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant 4y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16 \\ y^2 + z^2 \leqslant 6x \end{cases}$ 8. $\begin{cases} y \geqslant -4 \\ x^2 + z^2 + y \leqslant 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant y^2 \\ x^2 + z^2 \leqslant 2 - y \end{cases}$ 10. $\begin{cases} y^2 + z^2 \leqslant 4x \\ y^2 + z^2 + 5x \leqslant 9 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2y \geqslant x^2 + z^2 \\ y^2 \leqslant 4(x^2 + z^2) \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9,\ z \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y^2 + z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 5 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4z \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + z^2 \geqslant 4y \geqslant 0 \\ x^2 + z^2 \leqslant 9 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x + y + z \leqslant 4 \\ z \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x \geqslant 9(y^2 + z^2) \\ 3x \leqslant 3 - y^2 - z^2 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 7z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 8 \end{cases}$

19. $\begin{cases} y \leqslant z \leqslant 4y,\ y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 3z \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \leqslant 5 - x^2 - z^2 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6 - y - z \\ y^2 + z^2 \leqslant 16 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \\ y^2 + z^2 \leqslant x^2 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 3 \leqslant y \leqslant 4 \\ y \leqslant 8 - x^2 - z^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} y^2 + z^2 \leqslant 3,\ x \geqslant 0 \\ x^2 \leqslant y^2 + z^2 + 1 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x^2 + z^2 \geqslant 16,\ y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2 \\ y \leqslant x^2 + z^2 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 5(x^2 + y^2) \\ x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} y \geqslant (x^2 + z^2)/4 - 1 \\ y \leqslant 2 - (x^2 + z^2)/2 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \\ z \leqslant 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$

ЗАДАЧА 6. Вычислить циркуляцию плоского векторного поля

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

двумя способами: непосредственно и по формуле Грина.

N	L	$P(x,y)$	$Q(x,y)$
1	ΔABC $A(2,1)$ $B(2,3)$ $C(4,3)$	x^2+y^2	$2(x+y)^2$
2	$x^2/9+y^2/4=1$	$xy+x+y$	$xy+2x-2y$
3	$x^2+y^2=4y$	$xy+3$	$xy-2x+3y$
4	$x^2+y^2=16$	$-xy^2$	$2x^2y$
5	$x^2+y^2/16=1$	$2x+2y$	$-2x+2y$
6	$y=\sin x,\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$	y^2	xy
7	$x^2/9+y^2=4$	x^2y^2	x^2+4
8	$y=4x^2,\ y=4$	xy^2	$x-y$
9	$y=5x^2,\ y=10x$	$(x+y)^2$	$(x-y)^2$
10	ΔABC $A(0,1)$ $B(2,5)$ $C(0,5)$	$3xy^2$	x^3+4x^2
11	$x=4y^2,\ x=16$	y^2+xy	x^2+xy
12	$x^2+y^2=25$	y^2+x^2	x^2+y^3
13	$y=x^2,\ y=8x$	$4xy$	$5x^2$
14	$x=9y^2,\ x=3y$	xy	$2x^2+3y^2$
15	$x^2+y^2=16$	$2x+3y^2$	$3x-2y^2$
16	$x^2/25+y^2/4=1$	$5y+x^2$	$-3x$
17	$4y=x^2+4,\ y=3x-4$	$x+2y$	$x-2y$
18	ΔABC $A(0,0)$ $B(2,3)$ $C(0,3)$	$4xy$	x^2+y^2
19	$\|x\|+\|y\|=4$	$2(x+y)^2$	$-2(x-y)^2$
20	$x^2+y^2=36$	$x+y^2$	$x^3/3$
21	$x^2/16+y^2/9=1$	$x+y$	x^2-y^2
22	$y=x^2,\ y=4x-3$	x^2+4xy	$4xy+y^2$
23	ΔABC $A(3,3)$ $B(5,5)$ $C(3,5)$	x^2+y^2	$(x+y)^2$
24	$y=\sqrt{x},\ 4y=x+3$	x^2-5y	x^2+5y
25	ΔABC $A(2,1)$ $B(1,4)$ $C(2,4)$	$\dfrac{y^2+2}{y}$	$\dfrac{2y^2-x}{y^2}$
26	$y=4\sqrt{x},\ y=4x$	xy^2	$4x^2y$
27	$x^2+y^2=4$	$x+2y$	$y-2x$
28	ΔABC $A(3,4)$ $B(5,6)$ $C(3,6)$	$-x^2-y^2$	$(x+y)^2$
29	$x^2+y^2=9$	$x+y^2$	$x-y^2$
30	$x^2/4+y^2/25=1$	$y+x^2$	$-x$

ЗАДАЧА 7. Ниже $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mathbf{c}$ -постоянный вектор.

1. Найти $\operatorname{rot}(\mathbf{c}f(|\mathbf{r}|))$.
2. Найти $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{r}f(|\mathbf{r}|)]$.
3. Доказать, что $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$.
4. Найти $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$.
5. Найти угол φ между градиентами поля $u = x/(x^2+y^2+z^2)$ в точках $A(1,-2,2)$ и $B(3,1,0)$.
6. Доказать, что $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u\operatorname{rot}\mathbf{a} - [\mathbf{a}, \operatorname{grad} u]$.
7. Найти $\operatorname{div}\left(\mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{a})\right)$.
8. Найти $\operatorname{grad} u$, где $u = |[\mathbf{c}, \mathbf{r}]|$.
9. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = \left(-\frac{\omega}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\omega}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, z\right)$.
10. Найти $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.
11. Найти $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$.
12. Найти угол φ между градиентами поля $u = y/(x^2+y^2+z^2)$ в точках $A(1,2,2)$ и $B(3,2,0)$.
13. Доказать, что $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u) + u\operatorname{div}\mathbf{a}$.
14. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = [\operatorname{grad} u, \mathbf{b}]$, $u = y^2 - 2xz + z^2$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
15. Найти производную поля $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ в точке $M_0(0,1,2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M(3,1,6)$.
16. Найти $\operatorname{rot}(f(|\mathbf{r}|)\mathbf{r})$.
17. Найти $\operatorname{div}[\mathbf{b}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{b} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$.
18. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = (y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k})/|\mathbf{r}|$.
19. Найти угол φ между градиентами поля $u = z/(x^2+y^2+z^2)$ в точках $A(2,1,1)$ и $B(-3,-2,1)$.
20. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = [\operatorname{grad} u, \mathbf{b}]$, $u = x^2 - 2yz + y^3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
21. Найти $\operatorname{div}[\mathbf{b}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{b} = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{k}$.
22. Найти $\operatorname{div}(f(|\mathbf{r}|)\mathbf{r})$.
23. Найти производную поля $u = xy + yz - 2y + 4z$ в точке $M_0(-1,2,-3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M(-4,2,1)$.
24. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = (z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k})/|\mathbf{r}|$.
25. Найти производную поля $u = y^2z - 2xyz + z^2$ в точке $M_0(3,1,1)$ по направлению вектора $\mathbf{a}$, если $\mathbf{a}$ образует с координатными осями острые углы α, β, γ, $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$.
26. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = [\operatorname{grad} u, \mathbf{b}]$, $u = xyz - 2y + z^3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
27. Найти $\operatorname{div}[\mathbf{b}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{b} = xy\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.
28. Найти угол φ между градиентами поля $u = (z-x)/(x^2+y^2+z^2)$ в точках $A(-2,1,3)$ и $B(3,4,-2)$.

ЗАДАЧА 8. Вычислить площадь части поверхности σ, заключенную внутри цилиндрической поверхности *Ц*.

N	σ	*Ц*
1	$x = 2yz$	$y^2 + z^2 = 4$
2	$y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$	$x^2 + y^2 = 4$
3	$x = 3 - y - z$	$y^2 + z^2 = 2z$
4	$y^2 = x^2 + z^2$	$x^2 + z^2 = 4x$
5	$y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0$	$x^2 + y^2 = 1$
6	$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \leqslant 0$	$x^2 + y^2 = 2x$
7	$x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x \geqslant 0$	$y^2 + z^2 = 9$
8	$x^2 = y^2 + z^2,\ x \leqslant 0$	$y^2 + z^2 = 1$
9	$2z = xy$	$x^2 + y^2 = 4$
10	$2z = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 2$
11	$y^2 = 2xz$	$0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2$
12	$z = 9 - x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 5$
13	$x = \sqrt{y^2 + z^2}$	$y^2 + z^2 = 4z$
14	$z = \sqrt{y^2 - x^2}$	$x^2 + y^2 = 8$
15	$2x = y^2 - z^2$	$y^2 + z^2 = 1$
16	$2y = x^2 + z^2$	$\left(x^2 + z^2\right)^2 = 2xz$
17	$8 - z = (x^2 + y^2)^{3/2}$	$x^2 + y^2 = 4$
18	$y = x^2 + z^2$	$4\left(x^2 + z^2\right)^2 = x^2 - z^2$
19	$x^2 + y^2 = z^2$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 9xy$
20	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$\left(y^2 + z^2\right)^2 = 2yz$
21	$z = \sqrt{x^2 - y^2}$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$
22	$z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$	$x^2 + y^2 = 4y$
23	$4z = x^2 + y^2$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$
24	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	$y^2 + z^2 = 2y$
25	$x^2 + y^2 + z^2 = 36,\ z \leqslant 0$	$x^2 + y^2 = 16$
26	$x^2 = y^2 - z^2$	$y^2 + z^2 = 2z$
27	$4z = x^2 + y^2,\ z \leqslant 1$	$y^2 = 3x^2$
28	$z = 6 - 2x + 3y$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 25xy$
29	$y^2 + z^2 = 3,\ z \geqslant 0$	$x + y = 0,\ x - y = 0$
30	$2z = x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 1$

ЗАДАЧА 9. Найти поток векторного поля **a** через замкнутую поверхность σ двумя способами: 1) непосредственно, вычисляя потоки через все гладкие куски поверхности σ; 2) по теореме Остроградского-Гаусса.

N	$\mathbf{a}$	σ
1	$x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$	$2z = 9 - x^2 - y^2,\ \ z = 0$
2	$x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$z^2 = x^2 + y^2,\ z = 4$
3	$xz\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geqslant 0$
4	$(1 - y)x\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$(2 - z)^2 = x^2 + y^2,\ z = 0$
5	$xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$	$3z = 9 - x^2 - y^2,\ z = 0$
6	$3x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ \ y \geqslant 0$
7	$2\mathbf{i} - 3y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$4z = x^2 + y^2,\ z = 9$
8	$x^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x \geqslant 0$
9	$yz(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + 2x\mathbf{k}$	$y = 1 - x^2 - z^2,\ y = 0$
10	$\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$	$5 - z = x^2 + y^2,\ z = -4$
11	$x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$	$y^2 = 4(x^2 + z^2),\ y = 6$
12	$xz\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geqslant 0$
13	$z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$	$x^2 = y^2 + z^2,\ x = 7$
14	$2x\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	$9z = x^2 + y^2,\ z = 1$
15	$x^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$	$3z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 1$
16	$\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x(3 + z)\mathbf{k}$	$(2 - x)^2 = y^2 + z^2,\ x = 5$
17	$y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \leqslant 0$
18	$x^2\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$y = x^2 + z^2,\ y = 8$
19	$yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$y^2 = x^2 + z^2,\ y = -2$
20	$3xy\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$	$z = 9(x^2 + y^2),\ z = 36$
21	$x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$4z = 16 - x^2 - y^2,\ z = 3$
22	$xyz\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ \ y \leqslant 0$
23	$-x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$	$x^2 = y^2 + z^2,\ x = -4$
24	$x\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$	$3y - 2 = x^2 + z^2,\ y = 6$
25	$xz\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	$z^2 = 4(x^2 + y^2),\ z = 4$
26	$z\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$	$y = 1 - x^2 - z^2,\ \ y = -3$
27	$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \leqslant 0$
28	$x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$	$z = 25 - x^2 - y^2,\ z = 9$
29	$x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$2z = 2 - x^2 - y^2,\ z = 0$
30	$x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$z = x^2 + y^2,\ z = 4$

ЗАДАЧА 10. Найти циркуляцию векторного поля **a** по контуру Γ двумя способами: 1) непосредственно, вычисляя линейный интеграл векторного поля по контуру Γ; 2) по теореме Стокса.

N	$\mathbf{a}$	Γ
1	$z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 9 - z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
2	$3z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 4,\ x + y + z = 2$
3	$yz\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$	$z^2 = 2 - x - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
4	$y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$	$x + y + z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
5	$yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1,\ y = z$
6	$xy(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - z\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1 - z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
7	$z\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 1,\ x = y + 1$
8	$z\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - y\mathbf{k}$	$x + y + 2z = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
9	$y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 9,\ y = z + 1$
10	$z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - y\mathbf{k}$	$2x + 3y + z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
11	$zy\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$x^2 = 1 - y - z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
12	$z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 4,\ x + y + z = 3$
13	$y^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$x + 2y + z = 3,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
14	$z\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$	$y^2 = 2 - x - z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
15	$2z\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 9,\ x + y + z = 12$
16	$3z\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1,\ z = y - 1$
17	$xz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$2x + y + 3z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
18	$y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 4 - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
19	$yz\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 4,\ z = x + 2$
20	$xz\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$	$y^2 + z^2 = 16,\ x + y + z = 4$
21	$y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
22	$2z\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - x\mathbf{k}$	$x = y^2 + z^2,\ x = 9$
23	$4y\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 1,\ x = y$
24	$3x\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} - y\mathbf{k}$	$x + 2y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
25	$2xy\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 4 - z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
26	$-z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
27	$y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z = y$
28	$2z\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 9 - z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
29	$y\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 4,\ z = y + 2$
30	$xy(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$x + 2y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти неопределенный интеграл

$$\int (x+2)\ln\left(x^2+x+4\right)dx.$$

Решение: Положим $u=\ln\left(x^2+x+4\right)$, $dv=(x+2)\,dx$, тогда

$$du=\frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+4},\ v=\frac{1}{2}\,(x+2)^2\,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int (x+2)\ln\left(x^2+x+4\right)dx=\frac{1}{2}\,(x+2)^2\ln\left(x^2+x+4\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(x+2)^2\,(2x+1)}{x^2+x+4}dx. \qquad (1)$$

Подынтегральная функция в правой части равенства (1) является неправильной рациональной дробью. Представим ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{(x+2)^2\,(2x+1)}{x^2+x+4}=\frac{2x^3+9x^2+12x+4}{x^2+x+4}=2x+7-\frac{3x+24}{x^2+x+4}.$$

Тогда

$$\int\frac{(x+2)^2\,(2x+1)}{x^2+x+4}dx=\int\left(2x+7-\frac{3x+24}{x^2+x+4}\right)dx=$$

$$=x^2+7x-\int\frac{3\,(2x+1)+45}{2\,(x^2+x+4)}dx=$$

$$=x^2+7x-\frac{3}{2}\int\frac{\left(x^2+x+4\right)'}{(x^2+x+4)}dx-\frac{45}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=$$

$$=x^2+7x-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+4\right)-\frac{45}{2}\frac{2}{\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+C=$$

$$=x^2+7x-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+4\right)-3\sqrt{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)+C. \qquad (2)$$

С учетом (2) равенство (1) преобразуется к виду:

$$\int (x+2)\ln\left(x^2+x+4\right)dx = \frac{1}{2}(x+2)^2\ln\left(x^2+x+4\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+7x\right) +$$

$$+\frac{3}{4}\ln\left(x^2+x+4\right) + \frac{3\sqrt{15}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) - \frac{C}{2}.$$

Полагая $C_1 = -C/2$, окончательно получим:

$$\int (x+2)\ln\left(x^2+x+4\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{11}{4}\right)\ln\left(x^2+x+4\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+7x\right) + \frac{3\sqrt{15}}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C_1.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^4-13x^2+6x-15}{(x+2)(x-1)^2\left(x^2+x+5\right)}dx.$$

Решение: Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Ее разложение в сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{x^4-13x^2+6x-15}{(x+2)(x-1)^2\left(x^2+x+5\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+5}. \quad (3)$$

Сложим дроби в правой части равенства (3), приводя их к общему знаменателю $Q(x) = (x-1)^2(x+2)\left(x^2+x+5\right)$. Тогда из равенства числителей полученных дробей следует равенство многочленов

$$A(x-1)(x+2)\left(x^2+x+5\right) + B(x+2)\left(x^2+x+5\right) +$$

$$+C(x-1)^2\left(x^2+x+5\right) + (Dx+E)(x-1)^2(x+2) = x^4-13x^2+6x-15. \quad (4)$$

Найдем неопределенные коэффициенты A, B, C, D, E, комбинируя метод частных значений и метод сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x в равенстве (4). Полагая в (4) последовательно $x = 1$, $x = -2$, получим $21B = -21$, $63C = -63$, т.е.

$$B = -1,\ C = -1. \quad (5)$$

Приравнивая в (4) коэффициенты при x^4, x^1, x^0 получим соответственно равенства:

$$A+C+D=1,$$

$$3A+7B-9C+2D-3E=6, \tag{6}$$

$$-10A+10B+5C+2E=-15.$$

С учетом (5) из системы уравнений (6) получим:

$$A=0,\ D=2,\ E=0.$$

Тогда

$$\int \frac{x^4-13x^2+6x-15}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+5)}dx =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+x+5} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{x-1} - \ln|x+2| + \int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+5} - \int \frac{dx}{x^2+x+5} =$$

$$= \frac{1}{x-1} - \ln|x+2| + \int \frac{\left(x^2+x+5\right)'dx}{x^2+x+5} - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}} =$$

$$= \frac{1}{x-1} - \ln|x+2| + \ln\left(x^2+x+5\right) - \frac{2}{\sqrt{19}}\ \operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C.$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^4 \frac{(x-1)^3\,dx}{\sqrt{(12+4x-x^2)^5}}.$$

Решение: Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$12+4x-x^2 = 16-\left(x^2-4x+4\right) = 16-(x-2)^2.$$

Далее выполним замену переменной: $x-2=4\sin t$. Тогда

$$\int_2^4 \frac{(x-1)^3\,dx}{\sqrt{(12+4x-x^2)^5}} = \int_2^4 \frac{(x-1)^3\,dx}{\sqrt{\left(16-(x-2)^2\right)^5}} =$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{(4\sin t+1)^3\,4\cos t dt}{\sqrt{\left(16-16\sin^2 t\right)^5}} = \frac{4}{4^5}\int_0^{\pi/6} \frac{(4\sin t+1)^3\cos t dt}{\cos^5 t} =$$

$$= \frac{1}{4^4}\int_0^{\pi/6} \frac{\left(4^3\sin^3 t + 3\cdot 4^2\sin^2 t + 3\cdot 4\sin t + 1\right)dt}{\cos^4 t} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^3 t dt}{\cos^4 t} + \frac{3}{4^2}\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t dt}{\cos^4 t} + \frac{3}{4^3}\int_0^{\pi/6} \frac{\sin t dt}{\cos^4 t} + \frac{1}{4^4}\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos^4 t}. \quad (7)$$

Вычислим последовательно получившиеся интегралы:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^3 t dt}{\cos^4 t} = -\int_0^{\pi/6} \frac{\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t}{\cos^4 t} = \left.\frac{1}{3\cos^3 t} - \frac{1}{\cos t}\right|_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{2^3}{3\cdot 3\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} - \frac{10}{9\sqrt{3}};$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t dt}{\cos^4 t} = \int_0^{\pi/6} \mathrm{tg}^2 t\, d\mathrm{tg} t = \left.\frac{\mathrm{tg}^3 t}{3}\right|_0^{\pi/6} = \frac{1}{9\sqrt{3}};$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin t dt}{\cos^4 t} = -\int_0^{\pi/6} \frac{d\cos t}{\cos^4 t} = \left.\frac{1}{3\cos^3 t}\right|_0^{\pi/6} = \frac{8}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3};$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos^4 t} = \int_0^{\pi/6} \left(\mathrm{tg}^2 t + 1\right) d\mathrm{tg} t = \left.\frac{\mathrm{tg}^3 t}{3} + \mathrm{tg} t\right|_0^{\pi/6} = \frac{10}{9\sqrt{3}}.$$

Подставляя значения вычисленных определенных интегралов в (7), получим:

$$\int_2^4 \frac{(x-1)^3\,dx}{\sqrt{(12+4x-x^2)^5}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{10}{9\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{3}{64}\left(\frac{8}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{256}\cdot\frac{10}{9\sqrt{3}} = \frac{58-27\sqrt{3}}{384}.$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{(x^2+1)^3}dx. \quad (8)$$

Решение: Рассмотрим интегралы более общего вида

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{\left(x^2+1\right)^{2n+1}}dx.$$

Интеграл (8) равен интегралу I_1. Используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{\left(x^2+1\right)^{2n+1}}dx = x \cdot \sqrt{\left(x^2+1\right)^{2n+1}}\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 x \cdot \frac{2n+1}{2}\sqrt{\left(x^2+1\right)^{2n-1}} \cdot 2xdx =$$

$$= 2^{n+\frac{1}{2}} - (2n+1)\int_0^1 x^2\sqrt{\left(x^2+1\right)^{2n-1}}dx =$$

$$= 2^{n+\frac{1}{2}} - (2n+1)\int_0^1 \left(\sqrt{\left(x^2+1\right)^{2n+1}} - \sqrt{\left(x^2+1\right)^{2n-1}}\right)dx =$$

$$= 2^{n+\frac{1}{2}} - (2n+1)\, I_n + (2n+1)\, I_{n-1}.$$

Откуда следует рекуррентное соотношение:

$$I_n = \frac{2^{n+\frac{1}{2}} + (2n+1)\, I_{n-1}}{2n+2}. \tag{9}$$

Вычислим интеграл I_{-1}:

$$I_{-1} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Используя рекуррентное соотношение (9), найдем последовательно интегралы $I_0,\ I_1$:

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx = \frac{2^{\frac{1}{2}} + I_{-1}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2};$$

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{\left(x^2+1\right)^3}dx = \frac{2^{\frac{3}{2}} + 3I_0}{4} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}{4 \cdot 2}.$$

Итак,

$$\int_0^1 \sqrt{\left(x^2+1\right)^3}dx = \frac{7\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}.$$

Пример 5. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{\frac{1}{4}}^{3} dx \int_{\frac{1}{2}\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3x-x^2}} f\left(x,y\right) dy.$$

Сделать чертеж области интегрирования.

Решение. Заданный интеграл представляет собой повторный интеграл с порядком интегрирования "x, y", полученный из двойного интеграла

$$\iint_D f\left(x,y\right) dxdy,$$

в декартовых координатах x, y по области D, которая определяется системой неравенств

$$D: \quad \begin{cases} \dfrac{1}{4} \le x \le 3 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{3-x} \le y \le \sqrt{3x-x^2} \end{cases}$$

с границей на линиях $x = \frac{1}{4},\ x = 3;\ y = \frac{1}{2}\sqrt{3-x},\ y = \sqrt{3x-x^2}$.

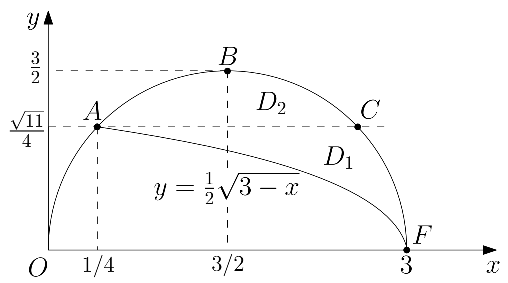

Рис. 1

Отметим, что пределы интегрирования в заданном повторном интеграле с порядком интегрирования "x, y" были получены в результате следующих действий.

1) Сначала была найдена проекция области D на ось Ox. Это – отрезок $\frac{1}{4} \le x \le 3$.

2) Затем, для каждого значения $x \in \left[\frac{1}{4};\ 3\right]$ было найдено значение $y_1\left(x\right)$ переменной y, отвечающее точке входа в область D по вертикальной прямой $x = const$ (в направлении оси Oy), и значение $y_2\left(x\right)$, отвечающее точке выхода (по той же прямой $x = const$) из области D. В нашем случае $y_1\left(x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3-x}$ и $y_2\left(x\right) = \sqrt{3x-x^2}$.

1. Выполним действия, позволяющие сделать чертеж области D.

Уравнения $x=\frac{1}{4}$, $x=3$ – вертикальные прямые на плоскости Oxy.

Уравнение $y=\frac{1}{2}\sqrt{3-x}$ – половина параболы с вершиной на оси x в точке $x=3$.

Чтобы получить график линии $y=\sqrt{3x-x^2}$ проведем следующие преобразования:

$$y=\sqrt{3x-x^2};\;\; y^2=3x-x^2;\;\; x^2-3x+y^2=0\,;$$

$$\left(x^2-2x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)+y^2=\frac{9}{4}\,;\;\; \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}\;.$$

Последнее равенство определяет окружность радиуса $\frac{3}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{3}{2};\;0\right)$.

Т.к. $y=\sqrt{3x-x^2}\geq 0$, выводим: $y=\sqrt{3x-x^2}$ – половина найденной окружности, расположенная над осью Ox.

Линии $y=\frac{1}{2}\sqrt{3-x}$, $y=\sqrt{3x-x^2}$ пересекаются в точках $A\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$, $F\,(3;\;0)$. Этот факт устанавливается так:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3-x}=\sqrt{3x-x^2}\,,\quad \frac{1}{4}\,(3-x)=x\,(3-x)\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{4},\;\; x=3.$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3-x}\right)_{x=\frac{1}{4}}=\left(\sqrt{3x-x^2}\right)_{x=\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{4},$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3-x}\right)_{x=3}=\left(\sqrt{3x-x^2}\right)_{x=3}=0\,.$$

Следовательно, участки границы области D, заданные уравнениями $x=\frac{1}{4}$, $x=3$ вырождаются в точки A и F соответственно.

График области D приведен на рисунке 1. На нем дополнительно отмечены точки B, C, где $B\left(\frac{3}{2};\;\frac{3}{2}\right)$ – самая верхняя точка области D, а точка C расположена на одном горизонтальном уровне с точкой A.

2. Перейдем к изменению порядка интегрирования "x,y" на порядок "y,x".

Для этого выполним действия, соответствующие действиям, изложенным выше в 1), 2), с учетом того, что переменные x,y меняются местами.

2.1 Найдем проекцию области D на ось y.

Это будет отрезок: $y_F\leq y\leq y_B$, где $y_F=0$ – значение ординаты точки F и $y_B=\frac{3}{2}$ – значение ординаты точки B. Следовательно, $0\leq y\leq\frac{3}{2}$.

2.2. Теперь для каждого значения $y\in\left[0;\;\frac{3}{2}\right]$, двигаясь по горизонтальной прямой $y=const$ в направлении оси Ox, найдем значение $x_1\,(y)$

переменной x, отвечающее точке входа в область D, и значение $x_2(y)$ переменной x, отвечающее точке выхода из области D.

Из графика области D видно, что при $y \in \left[0;\ \frac{\sqrt{11}}{4}\right]$, точки входа в область D лежат на линии $y = \frac{1}{2}\sqrt{3-x}$. На ней $y^2 = \frac{1}{4}(3-x)$; $x = 3-4y^2 \quad \Rightarrow \quad x_1(y) = 3-4y^2$, а точки выхода из области D лежат на участке FC линии $y = \sqrt{3x-x^2}$. Значение $x_2(y)$ определяется так:

$$y = \sqrt{3x-x^2} \;\Rightarrow\; \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; x-\frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}\,;$$

во всех точках участка FC координата x удовлетворяет неравенству $x > \frac{3}{2}$; следовательно, $x - \frac{3}{2} = +\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}$, и значит, $x_2(y) = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-y^2}$.

Когда $y \in \left[\frac{\sqrt{11}}{4};\ \frac{3}{2}\right]$, точки входа в область D лежат на участке AB линии $y = \sqrt{3x-x^2}$, а точки выхода из области D располагаются на участке CB той же линии. Из уравнения $y = \sqrt{3x-x^2}$ ранее получили

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}.$$

Для всех точек участка AB $x \le \frac{3}{2}$. Поэтому, $x - \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}$. Следовательно, $x_1(y) = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}-y^2}$. На участке CB $x \ge \frac{3}{2}$. Следовательно, $x - \frac{3}{2} = +\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}$, $x_2(y) = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-y^2}$.

Проведенные расчеты и выводы показали, что при изменении порядка интегрирования в заданном повторном интеграле нужно разрезать область D горизонтальной линией AC на области D_1 и D_2, которые определяются следующими системами неравенств

$$D_1: \quad \begin{cases} 0 \le y \le \frac{\sqrt{11}}{4} \\ 3-4y^2 \le x \le \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-y^2} \end{cases},$$

$$D_2: \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{11}}{4} \le y \le \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}-y^2} \le x \le \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-y^2} \end{cases}.$$

В итоге приходим к такому ответу.

$$\int_{\frac{1}{4}}^{3} dx \int_{\frac{1}{2}\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3x-x^2}} f(x,y)\,dy =$$

$$= \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{11}}{4}} dy \int_{3-4y^2}^{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{\sqrt{11}}{4}}^{\frac{3}{2}} dy \int_{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}}^{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Пример 6. Найти с помощью тройного интеграла объем тела G, заданного системой неравенств

$$G: \begin{cases} x^2+y^2 \le z^2 \le 3\left(x^2+y^2\right) \\ x^2+y^2-z^2-4z \le 0 \end{cases}.$$

Решение:

1. Сначала найдем геометрический образ тела G и построим его график.

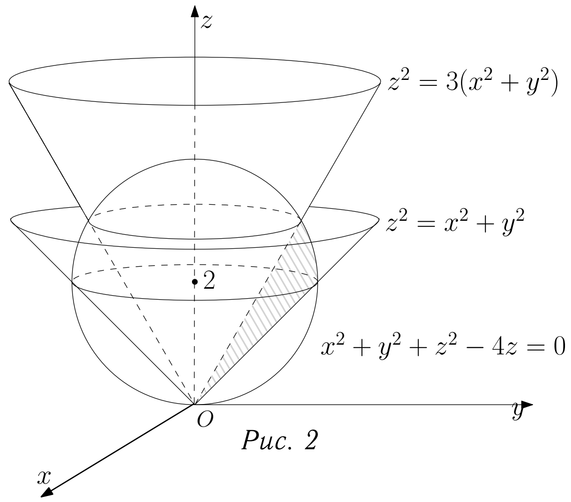

Рис. 2

Рассмотрим его граничные поверхности.

1.1. $z^2 = 3\left(x^2+y^2\right)$ – конус K_1 с вершиной в начале координат (точка O). Это – поверхность вращения вокруг оси Oz (т.к. переменные x, yвходят в уравнение только в виде сочетания x^2+y^2). Конус K_1 пересекает плоскость Oyz ($x=0$) по прямым $z=\pm\sqrt{3}y$, составляющими с осью Oz угол $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ (30°).

1.2. $x^2+y^2 = z^2$ – конус K_2 с вершиной в начале координат, является поверхностью вращения вокруг оси Oz, пересекает плоскость Oyz ($x=0$) по прямым $z=\pm y$, составляющими с осью Oz угол $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ (45°).

1.3. $x^2+y^2+z^2-4z=0 \Rightarrow x^2+y^2+(z-2)^2 = 2^2$ – сфера S радиуса 2 с центром точке $(0;\ 0;\ 2)$.

Неравенство $x^2+y^2 \le z^2 \le 3\left(x^2+y^2\right)$ определяет множество точек (x,y,z) между конусами K_1 и K_2.

Неравенство $x^2+y^2+z^2-4z \leq 0$ задаёт шар $\bar{S}$, ограниченный сферой S. Следовательно, тело G – множество точек, лежащих в шаре $\bar{S}$ между конусами K_1 и K_2 (рис. 2).

2. Наличие в границах тела G сферы и конусов дает подсказку на применение сферической системы координат φ, θ, r. Указанные переменные имеет следующий геометрический смысл:

- φ – угол в плоскости Oxy, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси Ox до радиус-вектора $\overline{OM_*}$ точки $M_*(x, y, 0)$ – проекции точки $M(x, y, z)$ на плоскость Oxy,
- θ – угол, отсчитываемый от положительного направления оси Oz до радиус-вектора $\overline{OM}$,
- $r = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – расстояние от начала координат до точки M.

Переменные φ, θ, r лежат в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r < +\infty$.

Выражения координат x, y, z в сферических координатах φ, θ, r имеют вид

$$x = x(\varphi, \theta, r) = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = y(\varphi, \theta, r) = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = z(\varphi, \theta, r) = r\cos\theta.$$

2.1. Найдем тройной интеграл в сферических координатах φ, θ, r, с помощью которого вычислим объем V тела G.

В декартовых координатах объем тела вычисляется по формуле

$$V = \iiint_G dxdydz.$$

Согласно правилам замены переменных в тройном интеграле $dxdydz = |J|\,d\varphi d\theta dr$, где

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\,\sin\varphi \\ 0 & -r\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta$$

– якобиан преобразования,

$|J| = r^2\sin\theta$ – модуль якобиана преобразования.

Следовательно, объем в сферических координатах φ, θ, r вычисляется по формуле

$$V = \iiint_G r^2\sin\theta\,d\varphi d\theta dr.$$

Полученный тройной интеграл сводится к повторному интегралу

$$\iiint_G r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta dr = \int_\bullet^\bullet d\varphi \int_\bullet^\bullet d\theta \int_\bullet^\bullet r^2 \sin\theta dr,$$

в котором «точки» нужно заменить пределами интегрирования, отвечающими телу G.

2.2. Займемся поиском пределов интегрирования в указанном повторном интеграле и его вычислением.

Найдем уравнения граничных поверхностей тела G в координатах φ, θ, r.

Из уравнения конуса K_1 получаем:

$$z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right) \quad \Rightarrow \quad (r\cos\theta)^2 = 3\left[(r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2\right] \quad \Rightarrow$$

$$\cos^2\theta = 3\sin^2\theta \quad \Rightarrow tg^2\theta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad tg\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

Из полученных двух уравнений нужная нам граница конуса K_1 имеет уравнение: $\theta = \frac{\pi}{6}$ (другое уравнение: $\theta = \frac{5\pi}{6}$ определяет ту часть конуса K_1, которая лежит в области $z \le 0$ пространства $Oxyz$).

Из уравнения конуса K_2 аналогичным образом получим уравнение: $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Из уравнения сферы S выводим

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 4r\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 4\cos\theta.$$

Тело G является телом вращения вокруг оси Oz. Согласно графику тела G и найденным уравнениям его граничных поверхностей в сферических координатах, это тело в координатах φ, θ, r задается системой неравенств

$$G: \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le 4\cos\theta \end{cases},$$

определяющих искомые пределы интегрирования в повторном интеграле.

Следовательно,

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r^2 \sin\theta dr.$$

Проведем вычисления.

Вычислим внутренний интеграл (по координате r) при постоянных значениях φ, θ.

$$\int_0^{4\cos\theta} r^2\sin\theta dr = \sin\theta\int_0^{4\cos\theta} r^2 dr = \sin\theta\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{4\cos\theta}\right) = \frac{64}{3}\sin\theta\cos^3\theta.$$

Теперь вычислим средний интеграл (по координате θ) от полученной функции при постоянном значении угла φ.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{64}{3}\sin\theta\,\cos^3\theta d\theta = -\frac{64}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\, d\left(\cos\theta\right) = -\frac{64}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cos^4\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= -\frac{16}{3}\left(\cos^4\frac{\pi}{4} - \cos^4\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{16}{3}\left(\cos^4\frac{\pi}{4} - \cos^4\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{16}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right] = -\frac{16}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{16}\right) = -\frac{16}{3}\left(-\frac{5}{16}\right) = \frac{5}{3}.$$

Остается вычислить внешний интеграл (по углу φ) от полученного выражения.

$$\int_0^{2\pi}\frac{5}{3}d\varphi = \frac{5}{3}\,\varphi|_0^{2\pi} = \frac{10}{3}\pi.$$

Ответ: $V = \frac{10}{3}\pi$.

Пример 7. Найти объем V тела G, заданного системой неравенств

$$G: \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y \le 0 \\ 0 \le z \le 4 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}.$$

1. Сначала выясним геометрию тела G и построим его график.

Рассмотрим граничные поверхности тела.

1.1. $x^2+y^2-2y=0$. Это уравнение не содержит координаты z. Следовательно, оно задает цилиндр, параллельный оси Oz. После выделения полного квадрата по y уравнение перепишется в виде $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Отсюда выводим: цилиндр пересекает плоскость Oxy по окружности радиуса 1 с центром в точке ($x = 0$; $y = 1$).

1.2. $z = 0$ – плоскость Oxy.

1.3. $z = 4 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ – поверхность вращения вокруг оси Oz. Это – параболоид с вершиной на оси Oz в точке $z = 4$. Он располагается в области $z \le 4$ и пересекает координатную плоскость Oxy по окружности $0 = 4-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \quad \Rightarrow x^2+y^2 = 8$, которая содержит внутри себя окружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Следовательно, параболоид пересекает цилиндр по некоторой пространственной кривой, лежащей выше плоскости Oxy.

Неравенство $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$ задает множество точек (x, y, z) внутри цилиндра, а неравенство $0 \leq z \leq 4 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ – множество точек над плоскостью Oxy, ограниченное сверху параболоидом. Пересечение указанных множеств дает тело в виде цилиндра с круговым основанием $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ на плоскости Oxy. Сверху этот цилиндр ограничен «параболической шапочкой» (рис. 3).

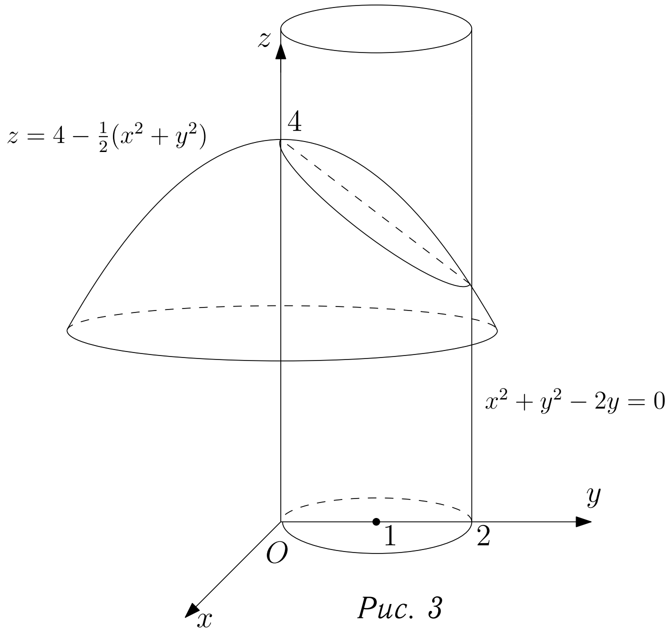

Рис. 3

2. Наличие цилиндрической поверхности в границе тела G дает подсказку на применение цилиндрических координат φ, r, z при вычислении объема тела G, где φ – угол в плоскости Oxy, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси Ox до радиус-вектора $\overline{OM_*}$ точки $M_*\,(x, y,\, 0)$ – проекции точки $M\,(x, y, z)$ на плоскость Oxy, $r = \left|\overline{OM_*}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$- расстояние от начала координат до точки M_*.

Переменные φ, r, z лежат в пределах: $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq +\infty, \quad -\infty \leq z < +\infty$.

Выражения координат x, y, z в цилиндрических координатах φ, r, z имеют вид

$$x = x\,(\varphi, r, z) = r\cos\varphi, \qquad y = y\,(\varphi, r, z) = r\sin\theta, \qquad z = z\,(\varphi, r, z) = z.$$

2.1. Найдем тройной интеграл в цилиндрических координатах φ, r, z с помощью которого вычислим объем V тела G.

В декартовых координатах объем тела вычисляется по формуле

$$V = \iiint_G dxdydz.$$

Согласно правилам замены переменных в тройном интеграле $dxdydz = |J|\,d\varphi drdz$, где $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -r$ – якобиан преобразования, $|J| = r$ – модуль якобиана преобразования.

Следовательно, объем в цилиндрических координатах φ, r, z вычисляется по формуле

$$V = \iiint_G r\,d\varphi drdz.$$

Полученный тройной интеграл сводится к повторному интегралу

$$\iiint_G rd\varphi drdz = \int_\bullet^\bullet d\varphi \int_\bullet^\bullet dr \int_\bullet^\bullet rdz,$$

в котором «точки» нужно заменить пределами интегрирования, отвечающими телу G.

2.2. Займемся поиском пределов интегрирования в указанном повторном интеграле и его вычислением.

Найдем уравнения граничных поверхностей тела G в координатах φ, r, z. Из уравнения цилиндра получаем: $x^2+y^2-2y = 0 \quad \Rightarrow \quad (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 - 2r\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - r\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sin\varphi$.

Из уравнения параболоида выводим: $z = 4 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \quad \Rightarrow \quad z = 4 - \frac{1}{2}r^2$.

Перейдем к нахождению пределов интегрирования.

Проекцией тела G на плоскость Oxy является круг: $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$, касающийся сверху в начале координат оси Ox. Для него $0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq \sin\varphi$.

Переменная z во всех точках тела G лежит в пределах $0 \leq z \leq 4-\frac{1}{2}r^2$. Следовательно, в цилиндрических координатах тело задается системой неравенств

$$G: \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \sin\varphi \\ 0 \leq z \leq 4 - \frac{1}{2}r^2 \end{cases},$$

определяющих искомые пределы интегрирования в повторном интеграле.

$$\iiint_G rd\varphi drdz = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin\varphi} dr \int_0^{4-\frac{1}{2}r^2} rdz.$$

Проведем вычисления.

Вычислим внутренний интеграл (по координате z) при постоянных значениях φ, r:

$$\int_0^{4-\frac{1}{2}r^2} r dz = r\int_0^{4-\frac{1}{2}r^2} dz = r\cdot(z)\Big|_0^{4-\frac{1}{2}r^2} = r\left(4-\frac{1}{2}r^2\right) = 4r-\frac{1}{2}r^3.$$

Теперь вычислим средний интеграл (по координате r) от полученной функции при постоянном значении угла φ:

$$\int_0^{\sin\varphi}\left(4r-\frac{1}{2}r^3\right)dr = \left(2r^2-\frac{1}{8}r^4\right)\Bigg|_0^{\sin\varphi} = 2\sin^2\varphi-\frac{1}{8}\sin^4\varphi.$$

Остается вычислить внешний интеграл (по углу φ) от полученного выражения:

$$\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\varphi-\frac{1}{8}\sin^4\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi \\ \sin^4\varphi = \frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi)^2 = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right) = \\ = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\right) = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi\right)\right]d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{61}{64}-\frac{15}{16}\cos 2\varphi-\frac{1}{64}\cos 4\varphi\right]d\varphi =$$

$$= \left(\frac{61}{64}\varphi-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{61}{64}\pi.$$

Ответ: $V=\frac{61}{64}\pi$.

Пример 8. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+2yz\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность σ : $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ в направлении внешней нормали двумя способами:

1) непосредственно, вычисляя потоки через все гладкие части поверхности σ;

2) по теореме Остроградского-Гаусса.

Решение:

Пусть в пространственной области D, где задано векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = P(x,y,z)\,\mathbf{i}+Q(x,y,z)\,\mathbf{j}+R(x,y,z)\,\mathbf{k},\ M(x,y,z)\in D,$$

расположена ориентированная поверхность G, и $\mathbf{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ – единичный вектор нормали, задающий ее ориентацию. Здесь α,β,γ

– углы, которые образует вектор $\mathbf{n}$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соответственно, а величины $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами.

Потоком векторного поля $\mathbf{a}$ через поверхность G называется поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ по поверхности G:

$$\Pi = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma.$$

Если поверхность G задана уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, то

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy,$$

$$\Pi = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)} dxdy.$$

Если поверхность G задана уравнением $x = f(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, то

$$\Pi = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{|\cos\alpha|}\right|_{x=f(y,z)} dydz.$$

Если поверхность G задана уравнением $y = f(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$, то

$$\Pi = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{|\cos\beta|}\right|_{y=f(x,z)} dxdz.$$

Приступим к решению задачи примера 8.

1) Разобьем поверхность σ на четыре гладкие части, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$, нормали к которым обозначим соответственно $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, $\mathbf{n}_4$ (рис. 4). Вычислим последовательно потоки через каждую из этих поверхностей.

Поверхность σ_1 представляется уравнением

$$\sigma_1 : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ (x, y) \in D_{xy}, \ D_{xy} : x^2 + y^2 \le 1, \ x \ge 0, \ y \ge 0.$$

Тогда

$$\mathbf{n}_1 = -\frac{\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)}{\sqrt{2}}, \ \cos\gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1)}{|\cos\gamma_1|}\right|_{z=\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2yz\Big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

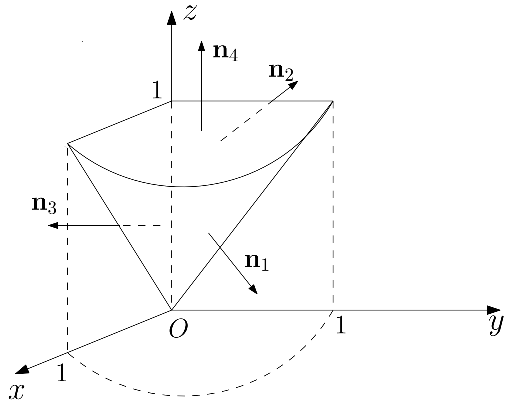

Рис. 4

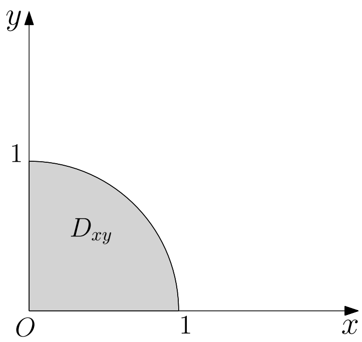

Рис. 5

Знак нормали $\mathbf{n}_1$ выбран с учетом того, что угол между $\mathbf{n}_1$ и ортом $\mathbf{k}$ является тупым. Для потока через поверхность σ_1 получим:

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_1)\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1)}{|\cos\gamma_1|}\right|_{z=f(x,y)} dxdy = -2 \iint_{D_{xy}} \frac{y^3 dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= -2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^3 \sin^3\varphi}{\rho} \rho d\rho = -2 \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}.$$

При вычислении двойного интеграла по области D_{xy} (рис. 5) использовались полярные координаты.

Вычислим поток векторного поля a через поверхность σ_2, которая представляется уравнением:

$$\sigma_2 : \ x = 0, \ (y, z) \in D_{yz}, \ D_{yz} : \ 0 \le y \le 1, y \le z \le 1.$$

Область D_{yz} изображена на рис. 6. В этом случае для вектора нормали $\mathbf{n}_2$ и направляющего косинуса $\cos\alpha_2$ имеем следующие значения:

$$\mathbf{n}_2 = (-1; 0; 0)\,, \ \cos\alpha_2 = -1.$$

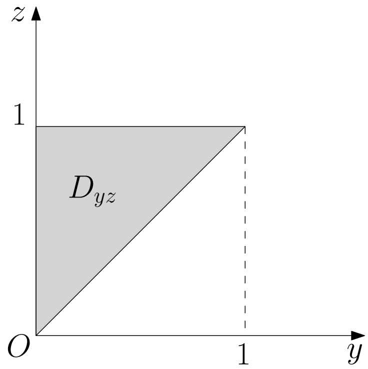

Рис. 6

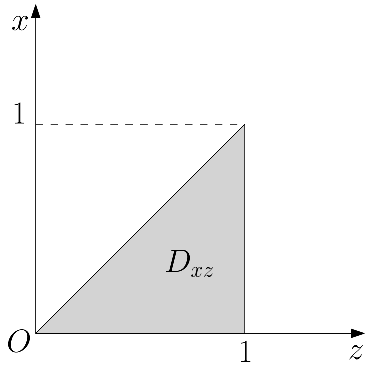

Рис. 7

Тогда $(\mathbf{a},\mathbf{n}_2)|_{x=0} = -xy|_{x=0} = 0$. Следовательно,

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (\mathbf{a},\mathbf{n}_2)\, d\sigma = 0.$$

Поверхность σ_3 представляется уравнением:

$$\sigma_3 :\ y = 0,\ (x,z) \in D_{xz},\ D_{xz} :\ 0 \le z \le 1, 0 \le x \le z.$$

Для вектора нормали $\mathbf{n}_3$ и направляющего косинуса $\cos\beta_3$ имеем следующие значения:

$$\mathbf{n}_3 = (0;-1;0)\,,\ \cos\beta_3 = -1.$$

Следовательно, $(\mathbf{a},\mathbf{n}_3) = -x^2,\ \left.\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{n}_3)}{|\cos\beta_3|}\right|_{y=0} = -x^2.$

Вычислим поток через поверхность σ_3:

$$\Pi_3 = \iint_{\sigma_3} (\mathbf{a},\mathbf{n}_3)\, d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left.\frac{(\mathbf{a},\mathbf{n}_3)}{|\cos\beta_3|}\right|_{y=0} dxdz = -\iint_{D_{xy}} x^2 dxdz =$$

$$= -\int_0^1 dz \int_0^z x^2 dx = -\int_0^1 \frac{z^3}{3} dz = -\frac{1}{12}.$$

Вычислим поток векторного поля $\mathbf{a}$ через поверхность σ_4, которая представляется уравнением:

$$\sigma_4 :\ z = 1,\ (x,y) \in D_{xy}\,.$$

Область D_{xy} изображена на рис. 5. В этом случае для вектора нормали $\mathbf{n}_4$ и направляющего косинуса $\cos\gamma_4$ имеем следующие значения:

$$\mathbf{n}_4 = (0;0;1)\,,\ \cos\gamma_4 = 1.$$

Тогда $(\mathbf{a},\mathbf{n}_4)|_{z=1} = 2yz|_{z=1} = 2y$. Следовательно,

$$\Pi_4 = \iint_{\sigma_4} (\mathbf{a},\mathbf{n}_4)\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(\mathbf{a},\mathbf{n}_4)}{|\cos\gamma_4|}\right|_{z=1} dxdy = \iint_{D_{xy}} 2ydxdy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 2\rho\sin\varphi\rho d\rho = 2\int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Поток векторного поля $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность σ равен сумме потоков через поверхности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = -\frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}.$$

2) Каждому дифференцируемому векторному полю $\mathbf{a} = P\,(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q\,(x, y, z)\,\mathbf{j} + R\,(x, y, z)\,\mathbf{k}$ можно поставить в соответствие скалярное поле, называемое дивергенцией векторного поля $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса тройной интеграл от дивергенции векторного поля $\mathbf{a}$ по области V равен потоку векторного поля $\mathbf{a}$ через границу Σ этой области в направлении внешней нормали, т.е.

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{a} dv = \oint_\Sigma (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma.$$

Второй способ вычисления потока векторного поля $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность σ состоит в вычислении тройного интеграла от дивергенции векторного поля $\mathbf{a}$ по пространственной области, ограниченной этой поверхностью. Для заданных векторного поля $\mathbf{a}$ и поверхности σ получим:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = y + 0 + 2y = 3y;$$

$$\Pi = \oint_\sigma (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iiint_V 3y dv = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 3y dz =$$

$$= \iint_{D_{xy}} 3y \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 3\rho \sin\varphi\,(1 - \rho)\,\rho d\rho =$$

$$= 3 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 \left(\rho^2 - \rho^3\right) d\rho = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 1/4.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН УПРАЖНЕНИЙ

1–3. Неопределенный интеграл. Вычисление интегралов следующих типов:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^\alpha}dx,\ \alpha=1/2,1;\ \int \frac{P_n(x)}{R_n(x)}dx;\ \int R(x,x^{m/n},x^{p/q})dx;$$

$$\int P_n(x)\left\{\begin{array}{l}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{array}\right\}dx;\quad \int P_n(x)\left\{\begin{array}{l}\ln ax\\ \operatorname{arctg} ax\\ \ldots\end{array}\right\}dx;$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx;\quad \int \sin^p x,\cos^q x dx;\quad \int \sin ax\left\{\begin{array}{l}\sin bx\\ \cos bx\end{array}\right\}dx.$$

4. Определенный интеграл.
5. Приложения определенного интеграла.
6. Контрольная работа.
7. Разбор ошибок контрольной работы. Несобственные интегралы.
8,9. Двойной интеграл.
10. Тройной интеграл (сферические координаты по усмотрению преподавателя).
11. Скалярные и векторные поля.
12. Криволинейный интеграл. Циркуляция.
13. Поток векторного поля.
14. Теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса.
15,16. Прием типового расчета.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определение первообразной, теорема о множестве всех первообразных. Неопределенный интеграл. Свойство линейности.
2. Неопределенный интеграл. Теорема о замене переменной. Формула интегрирования по частям.
3. Общая схема интегрирования рациональных функций.
4. Интегрирование простейших дробей.
5. Интегрирование тригонометрических функций.
6. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.
7. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Тригонометрические подстановки.
8. Определенный интеграл: определение, геометрический и механический смысл. Достаточное условие существования.

9. Определенный интеграл: определение, свойства линейности и аддитивности.
10. Определенный интеграл: определение. Теоремы об интегрировании неравенств и об оценке.
11. Определенный интеграл: определение, теорема о среднем, ее геометрический смысл.
12. Теорема о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом.
13. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных и полярных координатах с помощью определенного интеграла.
15. Определение длины кривой. Вычисление длины кусочно-гладкой кривой.
16. Вычисление объема тела по площадям его плоских сечений. Объем тела вращения.
17. Вычисление площади поверхности вращения.
18. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.
19. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.
20. Несобственные интегралы: признак сравнения.
21. Определение двойного интеграла, его геометрический и механический смысл. Достаточное условие существования.
22. Двойной интеграл: свойства линейности и аддитивности; переход от двойного интеграла к повторному.
23. Двойной интеграл: интегрирование неравенств, оценка интеграла, теорема о среднем.
24. Якобиан преобразования плоскости. Теорема о замене переменных в двойном интеграле.
25. Двойной интеграл в полярных координатах.
26. Геометрические и механические приложения двойного интеграла.
27. Определение тройного интеграла. Переход от тройного интеграла к повторному.
28. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
29. Определение криволинейного интеграла по длине дуги, его геометрический и механический смысл.
30. Криволинейный интеграл по длине дуги: способы вычисления.
31. Определение и свойства криволинейного интеграла по координатам, способы его вычисления.
32. Вычисление работы силового поля. Физический смысл интеграла по координатам.

33. Теорема Грина.
34. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от выбора пути интегрирования на плоскости.
35. Вычисление площади гладкой поверхности.
36. Определение интеграла первого рода по поверхности. Формулы для его вычисления.
37. Производная по направлению и градиент скалярного поля. Геометрический смысл градиента, его свойства.
38. Определение и свойства интегралов второго рода по поверхности, способы вычисления.
39. Теорема Гаусса-Остроградского. Физический смысл дивергенции.
40. Задача о вычислении количества жидкости, протекающей за единицу времени через данную поверхность.
41. Теорема Стокса, физический смысл ротора. Формула Грина как частный случай теоремы Стокса.
42. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора пути интегрирования в пространстве.
43. Определение и свойства потенциального поля.

Вопросы могут быть уточнены и дополнены лектором.