# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 1

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ 5), \quad B = (-3,\ 2), \quad C = (9,\ -7), \quad D = (4,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ 0,\ -1), \quad B = (0,\ 2,\ -3), \quad C = (2,\ 4,\ -2), \quad D = (-2,\ 6,\ 2).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (3,\ 4,\ 0), \quad L = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ и через прямую $L$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \right\}, \quad L_2 = \{4x - y - z - 4 = 0,\ 2x - y - 1 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ параллельны.
2) Найти расстояние $d(L_1,\ L_2)$ между прямыми $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \{x + z - 1 = 0,\ y - 2 = 0\}, \quad Q = \{y - z = 0\}.$$

1) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Дана точка $A$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (3,\ -5,\ 7),\quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oxy\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ -1,\ 1),\quad P_2 = (3,\ 1,\ 1),$$
$$\Sigma = \left\{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дана сфера $\Sigma$:

$$S = (5,\ 0,\ 0),\quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma_1$, вершина которой находится в точке $S$, а образующие касаются сферы $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 2

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (7,\ -3), \quad B = (3,\ 9), \quad C = (-4,\ 8), \quad D = (-7,\ -1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ 1,\ 1), \quad B = (1,\ 3,\ 1), \quad C = (1,\ 1,\ 3), \quad D = (1,\ 2,\ 3).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на прямую $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана прямая $L$:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 5), \quad P_2 = (1,\ 2,\ 5), \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+4}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$ и образующей угол $45^\circ$ с прямой $L$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (-4,\ 3,\ 3), \quad L = \{x - 2y + z - 4 = 0,\ 2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точку $P$ параллельно прямой $L$.

**Задача 5.** Даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \right\}, \quad L_2 = \{x - 3z + 4 = 0,\ y - z - 2 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ пересекаются.
2) Найти точку $P$ пересечения прямых $L_1$ и $L_2$.
3) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямые $L_1$ и $L_2$.

**Задача 6.** Дана точка $A$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (-3,\ -5,\ 9), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oyz\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1), \quad P_2 = (-1,\ -2,\ -2),$$

$$\Sigma = \{2(z+1) = 2x^2 + y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана сфера $\Sigma$:

$$\Sigma = \{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma_1$, вершина которой находится в начале координат $O$, а образующие касаются сферы $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 3

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ -2), \quad B = (7,\ 2), \quad C = (8,\ 9), \quad D = (-6,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (-1,\ 0,\ -4), \quad B = (1,\ 2,\ -3), \quad C = (1,\ 8,\ -6), \quad D = (-5,\ -3,\ 7).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 2), \quad L_1 = \left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}\right\}, \quad L_2 = \left\{\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}\right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ параллельно прямым $L_1$ и $L_2$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$ и $Q_2$:

$$P = (0,\ 2,\ 1), \quad Q_1 = \{x - 2y = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L$, которая проходит через точку $P$ параллельно плоскости $Q_1$ и образует угол $60^\circ$ с плоскостью $Q_2$.

**Задача 5.** Даны точки $P_1$, $P_2$, $P_3$ и дана прямая $L$:

$$P_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad P_2 = (1,\ 1,\ 2), \quad P_3 = (0,\ 1,\ 5),$$

$$L = \{x = 2t - 1,\ y = t + 2,\ z = -t + 1\}.$$

1) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точки $P_1$, $P_2$, $P_3$.
2) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
3) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (2,\ 3,\ -5), \quad B = (2,\ -7,\ -5), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 - BP^2 = 13\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.

2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 0), \quad P_2 = (-1,\ 3,\ 0),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.

2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.

3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дан эллипсоид $\Sigma$:

$$S = (7,\ 0,\ -1), \quad \Sigma = \left\{ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1 \right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma_1$, вершина которой находится в точке $S$, а образующие касаются эллипсоида $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 4

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (8,\ 3), \quad B = (-2,\ 8), \quad C = (-4,\ 7), \quad D = (7,\ -4).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ 2,\ 2), \quad B = (2,\ 2,\ 3), \quad C = (2,\ 3,\ 2), \quad D = (2,\ 2,\ 2).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно прямой $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана плоскость $Q$:

$$P_1 = (-1,\ -2,\ 0), \quad P_2 = (1,\ 1,\ 2), \quad Q = \{x + 2y + 2z - 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q_1$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$ перпендикулярно плоскости $Q$.

**Задача 4.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана плоскость $Q$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 4), \quad P_2 = (2,\ 2,\ 0), \quad Q = \{x + y - z = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$.
2) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
3) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (-4,\ 3,\ 0), \quad Q_1 = \{x - 2y + z = 0\}, \quad Q_2 = \{2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L$, проходящей через точку $P$ параллельно плоскостям $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (-1,\ 0,\ 0), \quad B = (1,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 4\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{12}{2 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 1),$$

$$\Sigma = \{9(x-1)^2 + 4y^2 - 36z^2 = 36\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дан вектор $\boldsymbol{a}$ и дана окружность $\Gamma$:

$$\boldsymbol{a} = (2,\ -3,\ 4), \quad \Gamma = \{x^2 + y^2 = 9,\ z = -1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma$, образующие которой параллельны вектору $\boldsymbol{a}$, а направляющей служит окружность $\Gamma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 5

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ -7), \quad B = (-7,\ 8), \quad C = (9,\ 8), \quad D = (9,\ -1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (5,\ 1,\ -2), \quad C = (2,\ -2,\ -2), \quad D = (2,\ 2,\ 8).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти уравнение прямой $L_2$, симметричной прямой $AD$ (прямая $L_1$) относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (-1,\ -1,\ 2), \quad Q_1 = \{x - 2y + z - 4 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - 2z + 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно плоскостям $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$L_1 = \{2x - y - 7 = 0,\ 2x - z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{3x - 2y + 8 = 0,\ 3x - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ скрещиваются.
2) Найти угол $\angle(L_1,\ L_2)$ между прямыми $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \left\{\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}\right\}, \quad Q = \{2x + y - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямая $L$ параллельна плоскости $Q$.
2) Найти расстояние $d(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Пусть $\Sigma$ — куб, центр которого находится в начале координат $O$, грани параллельны координатным плоскостям, а длина ребра равна 2. Дано геометрическое место точек $M$:

$$M = \{P \in \Omega \mid \text{сумма квадратов расстояний от точки } P$$

$$\text{до плоскостей граней куба } \Sigma \text{ равна } 8\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{3 - 4\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 2), \quad P_2 = (0,\ -1,\ 2),$$

$$\Sigma = \{x^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дана поверхность $\Sigma$:

$$Q = \{x + y + z = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 - y^2 = z\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 6

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (9,\ -5), \quad B = (-5,\ 2), \quad C = (-2,\ 6), \quad D = (0,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (-3,\ 2,\ 0), \quad B = (1,\ 1,\ 1), \quad C = (4,\ 4,\ 1), \quad D = (4,\ 1,\ 7).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $L_2$ прямой $AD$ (прямая $L_1$) на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-1}{6} = \frac{y-1/2}{5} = \frac{z-1}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямую $L_1$ параллельно прямой $L_2$.

**Задача 4.** Даны плоскости $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$:

$$Q_1 = \{3x - 4y = 0\}, \quad Q_2 = \{y = 0\}, \quad Q_3 = \{z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L$, проходящей через начало координат $O$ и образующей одинаковые углы с плоскостями $Q_1$, $Q_2$ и $Q_3$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (-1,\ 2,\ -3), \quad L = \{x - 2 = 0,\ y - z - 1 = 0\}.$$

1) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно прямой $L$.
2) Найти точку $P_1$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (3,\ 2,\ 1), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP = BP\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 2,\ 0), \quad P_2 = (0,\ 0,\ 2),$$

$$\Sigma = \{2(1 - z) = 2x^2 + y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дана сфера $\Sigma$:

$$Q = \{x + y - 2z - 5 = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$ и касаются сферы $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 7

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (7,\ 3), \quad B = (8,\ 1), \quad C = (5,\ -5), \quad D = (-1,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (-1,\ 1,\ -1), \quad B = (1,\ 3,\ 0), \quad C = (0,\ -1,\ 1), \quad D = (9,\ -3,\ -7).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 1), \quad Q_1 = \{2x + 2y - z - 1 = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z + 3 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ и образующей угол $60^\circ$ с плоскостями $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$, $L_2$ и дана плоскость $Q$:

$$L_1 = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}\right\}, \quad L_2 = \{3x + 2y + z - 6 = 0,\ 2x + y + z - 4 = 0\},$$

$$Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

1) Найти точку $P_1$ пересечения прямой $L_1$ и плоскости $Q$.
2) Найти точку $P_2$ пересечения прямой $L_2$ и плоскости $Q$.
3) Найти уравнение прямой $L$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (3,\ 4,\ 0), \quad L = \{2x + y - z + 4 = 0,\ x + 2y + z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точку $P$ параллельно прямой $L$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (0,\ 0,\ -4), \quad B = (0,\ 0,\ 4), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 10\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{144}{13 - 5\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.

2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (-1,\ 3,\ 4),$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4(y-1)^2 - z^2 = 0\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.

2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.

3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана прямая $L$ и дана сфера $\Sigma$:

$$L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой параллельны прямой $L$ и касаются сферы $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 8

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (8,\ 5),\quad B = (-6,\ 7),\quad C = (3,\ -2),\quad D = (5,\ -1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ 2,\ 3),\quad B = (1,\ 4,\ 3),\quad C = (1,\ 2,\ 5),\quad D = (1,\ 2,\ 3).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на прямую $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Дана точка $P$:

$$P = (2,\ 3,\ -4).$$

Найти уравнение перпендикуляра $L$, опущенного из точки $P$ на ось $Oy$.

**Задача 4.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P_1 = (-1,\ 1,\ 0),\quad P_2 = (3,\ 3,\ 3),$$

$$Q_1 = \{3x + y - z + 2 = 0\},\quad Q_2 = \{x + 3y - z + 2 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L$ пересечения плоскостей $Q_1$ и $Q_2$.
2) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$ параллельно прямой $L$.

**Задача 5.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана прямая $L$:

$$P_1 = (-1,\ -1,\ -1),\quad P_2 = (0,\ -2,\ -2),\quad L = \{x - 2z + 1 = 0,\ y + 2z - 1 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$.
2) Найти угол $\angle(L_1,\ L)$ между прямыми $L_1$ и $L$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (0,\ -5,\ 0), \quad B = (0,\ 5,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 6\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{18}{4 - 5\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.

2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 4),$$

$$\Sigma = \{9x^2 + 4(y-1)^2 - 36z^2 = 36\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.

2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.

3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $A$ и дана прямая $L$:

$$A = (2,\ -1,\ 1), \quad L = \{x = 3t + 1,\ y = -2t - 2,\ z = t + 2\}.$$

Найти уравнение круговой цилиндрической поверхности $\Sigma$, проходящей через точку $A$, если осью этой поверхности является прямая $L$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 9

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (5,\ -3), \quad B = (-1,\ 5), \quad C = (8,\ 5), \quad D = (8,\ 1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (0,\ -1,\ 2), \quad B = (1,\ 1,\ 4), \quad C = (3,\ -1,\ 5), \quad D = (2,\ 1,\ -4).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Дана плоскость $Q$:

$$Q = \{2x + y - \sqrt{5}\, z = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q_1$, проходящей через ось $Oz$ и образующей угол $60^\circ$ с плоскостью $Q$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (1,\ 2,\ 8), \quad L = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти проекцию $P_1$ точки $P$ на прямую $L$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (1,\ 2,\ 4), \quad Q_1 = \{2x - y + 3z - 6 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - z + 3 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L$ пересечения плоскостей $Q_1$ и $Q_2$.
2) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ и через прямую $L$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (0,\ -2,\ 0), \quad B = (0,\ 2,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 5\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - 2\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ -4,\ 0), \quad P_2 = (3,\ -3,\ 2),$$

$$\Sigma = \{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дан эллипсоид $\Sigma$:

$$S = (1,\ 2,\ 3), \quad \Sigma = \{2x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma_1$, вершина которой находится в точке $S$, а образующие касаются эллипсоида $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 10

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ -8), \quad B = (5,\ 3), \quad C = (-4,\ 6), \quad D = (-6,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (2,\ -1,\ -1), \quad B = (-1,\ -1,\ 2), \quad C = (-1,\ 2,\ -1), \quad D = (-1,\ -1,\ -1).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно прямой $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (2,\ 0,\ -3), \quad Q_1 = \{3x - y + 2z - 7 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 3y - 2z - 3 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L$ пересечения плоскостей $Q_1$ и $Q_2$.
2) Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точку $P$ параллельно прямой $L$

**Задача 4.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \{3x - y + 1 = 0,\ 3x + 2z - 2 = 0\}, \quad Q = \{2x + y + z - 4 = 0\}.$$

Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 5.** Дана точка $P$, дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$P = (1,\ 5,\ 10), \quad L = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}\right\}, \quad Q = \{x + 2y + 3z - 29 = 0\}.$$

1) Найти точку $P_1$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
2) Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точки $P$ и $P_1$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (0,\ -10,\ 0), \quad B = (0,\ 10,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 12\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{3}{2 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.

2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 3), \quad P_2 = (0,\ -3,\ 2),$$

$$\Sigma = \{36z = 4x^2 + 9(y+3)^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.

2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.

3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дан эллипсоид $\Sigma$:

$$\Sigma = \{(x-10)^2 + 3y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma_1$, вершина которой находится в начале координат $O$, а образующие касаются эллипсоида $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 11

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (7,\ 2),\quad B = (8,\ 9),\quad C = (-9,\ 2),\quad D = (5,\ 0).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (2,\ -2,\ 1),\quad B = (1,\ -1,\ -1),\quad C = (2,\ 0,\ -1),\quad D = (-4,\ 4,\ 1).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти уравнение прямой $L_2$, симметричной прямой $AD$ (прямая $L_1$) относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}\right\},\quad L_2 = \{x - 2 = 0,\ y - 2 = 0\}.$$

1) Найти уравнение плоскости $Q_1$, проходящей через прямую $L_1$ параллельно прямой $L_2$.
2) Найти уравнение плоскости $Q_2$, проходящей через прямую $L_2$ параллельно прямой $L_1$.
3) Найти расстояние $d(Q_1,\ Q_2)$ между плоскостями $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \{x - y + z - 4 = 0,\ 2x + y - 2z + 5 = 0\},\quad L_2 = \{x + y + z - 4 = 0,\ 2x + 3y - z - 6 = 0\}.$$

Найти угол $\angle(L_1,\ L_2)$ между прямыми $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (1,\ 0,\ -1),\quad L = \left\{\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}\right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно прямой $L$.

**Задача 6.** Дана точка $A$, дана плоскость $Q$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (1,\ 2,\ 3), \quad Q = \{x + y + z = 0\}, \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB, \text{ конец } B \text{ которого лежит в плоскости } Q\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{4}{3 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 2), \quad P_2 = (1,\ 2,\ 3),$$

$$\Sigma = \{2(2 - z) = x^2 + 2y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дана окружность $\Gamma$:

$$S = (3,\ 0,\ -1), \quad \Gamma = \left\{x^2 + y^2 = 9,\ z = 1\right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma$, вершина которой находится в точке $S$, а направляющей служит окружность $\Gamma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 12

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (5,\ 5), \quad B = (3,\ 7), \quad C = (-4,\ -7), \quad D = (6,\ -2).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (0,\ 5,\ 1), \quad B = (1,\ -2,\ -1), \quad C = (1,\ 1,\ 2), \quad D = (-7,\ -7,\ 8).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $L_2$ прямой $AD$ (прямая $L_1$) на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \right\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ параллельны.
2) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямые $L_1$ и $L_2$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (3,\ 0,\ 4), \quad L = \{2x - y + 1 = 0,\ 2x - z = 0\}.$$

Найти расстояние $d(P,\ L)$ от точки $P$ до прямой $L$.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \{x + 2y + 3z - 13 = 0,\ 3x + y + 4z - 19 = 0\}, \quad Q = \{5x - 3y + z = 0\}.$$

1) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (-2,\ 0,\ 0), \quad B = (2,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 16\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.

2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1), \quad P_2 = (3,\ -2,\ 1),$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4y^2 = (z-1)^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.

2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.

3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дан вектор $\boldsymbol{a}$ и дана парабола $\Gamma$:

$$\boldsymbol{a} = (0,\ -4,\ 1), \quad \Gamma = \{y = x^2,\ z = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma$, образующие которой параллельны вектору $\boldsymbol{a}$, а направляющей служит парабола $\Gamma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 13

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ -4),\quad B = (-2,\ 8),\quad C = (6,\ 2),\quad D = (6,\ 0).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ -2,\ 0),\quad B = (-2,\ 4,\ -2),\quad C = (0,\ 7,\ 4),\quad D = (5,\ 6,\ -3).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \{x - z + 2 = 0,\ y - 2z - 1 = 0\},\quad L_2 = \left\{\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}\right\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ пересекаются.
2) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямые $L_1$ и $L_2$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}\right\},\quad L_2 = \{x - z - 1 = 0,\ y + z - 1 = 0\}.$$

Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ перпендикулярны.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}\right\},\quad Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

Найти проекцию $L_1$ прямой $L$ на плоскость $Q$.

**Задача 6.** Дана точка $A$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (3,\ -5,\ 7), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB, \text{ конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oxy\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (2,\ 1,\ -1),$$
$$\Sigma = \left\{ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - (z-1)^2 = 1 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дана поверхность $\Sigma$:

$$Q = \{x + 2y + 5z = 0\}, \quad \Sigma = \{x = y^2\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 14

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (9,\ -7), \quad B = (-1,\ 3), \quad C = (0,\ 5), \quad D = (2,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ 1,\ 4), \quad B = (-1,\ 3,\ 4), \quad C = (-1,\ 1,\ 6), \quad D = (-1,\ 1,\ 4).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на прямую $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 1), \quad \boldsymbol{a}_1 = (0,\ 1,\ 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1,\ 0,\ 1).$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 2), \quad L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{-1} \right\}, \quad L_2 = \{x - z + 2 = 0,\ y - 2z - 1 = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно прямым $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Даны прямые $L_1$, $L_2$ и дана плоскость $Q$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3} \right\},$$

$$Q = \{x + y - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямая $L_1$ параллельна плоскости $Q$.
2) Доказать, что прямая $L_2$ лежит в плоскости $Q$.

**Задача 6.** Дана точка $A$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (-3,\ -5,\ 9), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oyz\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (2,\ 1,\ 8),$$
$$\Sigma = \left\{1 - z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дана сфера $\Sigma$:

$$Q = \{x + 2y - z = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$ и касаются сферы $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 15

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (5,\ 3), \quad B = (4,\ 6), \quad C = (-5,\ 9), \quad D = (1,\ -9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (0,\ 2,\ 3), \quad B = (2,\ 4,\ 4), \quad C = (1,\ 6,\ 2), \quad D = (-2,\ 10,\ 6).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (3,\ 4,\ 5), \quad L = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ и через прямую $L$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2} \right\}, \quad L_2 = \{4x - y - z - 4 = 0,\ 2x - y - 1 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ параллельны.
2) Найти расстояние $d(L_1,\ L_2)$ между прямыми $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \{x + z - 3 = 0,\ y - 2 = 0\}, \quad Q = \{y - z + 3 = 0\}.$$

1) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (2,\ 3,\ -5), \quad B = (2,\ -7,\ -5), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 - BP^2 = 13\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 3), \quad P_2 = (2,\ -1,\ 4),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана прямая $L$ и дан эллипсоид $\Sigma$:

$$L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}, \quad \Sigma = \{(x-1)^2 + 3y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой параллельны прямой $L$ и касаются эллипсоида $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 16

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ -4), \quad B = (4,\ -6), \quad C = (6,\ 8), \quad D = (5,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (2,\ 4,\ -2), \quad B = (0,\ 2,\ -3), \quad C = (1,\ 0,\ -1), \quad D = (-2,\ 6,\ 2).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана прямая $L$:

$$P_1 = (3,\ 2,\ 6), \quad P_2 = (2,\ 3,\ 6), \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$ и образующей угол $45^\circ$ с прямой $L$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (-4,\ 0,\ 3), \quad L = \{x - y + z - 4 = 0,\ 2x + y - 2z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точку $P$ параллельно прямой $L$.

**Задача 5.** Даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \right\}, \quad L_2 = \{x - 3z + 4 = 0,\ y - z - 2 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ пересекаются.
2) Найти точку $P$ пересечения прямых $L_1$ и $L_2$.
3) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямые $L_1$ и $L_2$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (-1,\ 0,\ 0), \quad B = (1,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 4\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{12}{2 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ -1,\ 1), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 1),$$

$$\Sigma = \left\{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $A$ и дана прямая $L$:

$$A = (0,\ -1,\ 2), \quad L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}.$$

Найти уравнение круговой цилиндрической поверхности $\Sigma$, проходящей через точку $A$, если осью этой поверхности является прямая $L$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2029/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 17

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (5,\ 8), \quad B = (-9,\ 8), \quad C = (-1,\ -7), \quad D = (5,\ 1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ 1,\ 3), \quad B = (1,\ 3,\ 1), \quad C = (3,\ 1,\ 1), \quad D = (1,\ 2,\ 3).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на прямую $AC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$P = (0,\ 1,\ 2), \quad L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ параллельно прямым $L_1$ и $L_2$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$ и $Q_2$:

$$P = (0,\ 2,\ 1), \quad Q_1 = \{x - 2y = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L$, которая проходит через точку $P$ параллельно плоскости $Q_1$ и образует угол $45^\circ$ с плоскостью $Q_2$.

**Задача 5.** Даны точки $P_1$, $P_2$, $P_3$ и дана прямая $L$:

$$P_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad P_2 = (1,\ 1,\ 2), \quad P_3 = (0,\ 1,\ 5),$$

$$L = \{x = 2t,\ y = t + 1,\ z = -t + 2\}.$$

1) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точки $P_1$, $P_2$, $P_3$.
2) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
3) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Пусть $\Sigma$ — куб, центр которого находится в начале координат $O$, грани параллельны координатным плоскостям, а длина ребра равна 2. Дано геометрическое место точек $M$:

$$M = \{P \in \Omega \mid \text{сумма квадратов расстояний от точки } P$$
$$\text{до плоскостей граней куба } \Sigma \text{ равна } 8\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{3 - 4\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1), \quad P_2 = (-1,\ -2,\ -2),$$
$$\Sigma = \{2(z+1) = 2x^2 + y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дан эллипсоид $\Sigma$:

$$S = (0,\ 2,\ -5), \quad \Sigma = \{3x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma_1$, вершина которой находится в точке $S$, а образующие касаются эллипсоида $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 18

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (7,\ -3), \quad B = (8,\ 4), \quad C = (-4,\ 8), \quad D = (-6,\ 6).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ 8,\ -6), \quad B = (1,\ 2,\ -3), \quad C = (-1,\ 0,\ -4), \quad D = (-5,\ -3,\ 7).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана плоскость $Q$:

$$P_1 = (-1,\ -2,\ -3), \quad P_2 = (1,\ 1,\ 2), \quad Q = \{x + y + 2z - 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q_1$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$ перпендикулярно плоскости $Q$.

**Задача 4.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана плоскость $Q$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 4), \quad P_2 = (2,\ 2,\ 0), \quad Q = \{x + y - 2z = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$.
2) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
3) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (-4,\ 3,\ -2), \quad Q_1 = \{x - 2y + z = 0\}, \quad Q_2 = \{2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L$, проходящей через точку $P$ параллельно плоскостям $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (3,\ 2,\ 1), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP = BP\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 0), \quad P_2 = (-1,\ 3,\ 0),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана прямая $L$ и дана сфера $\Sigma$:

$$L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}, \quad \Sigma = \{(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой параллельны прямой $L$ и касаются сферы $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 19

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (8,\ -1), \quad B = (7,\ 6), \quad C = (-7,\ 8), \quad D = (0,\ -9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ 2,\ 2), \quad B = (2,\ 2,\ 3), \quad C = (2,\ 3,\ 2), \quad D = (2,\ 2,\ 2).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно прямой $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (-1,\ -2,\ -3), \quad Q_1 = \{x - 2y + z - 4 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - 2z + 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно плоскостям $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$L_1 = \{2x - y - 7 = 0,\ 2x - z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{3x - 2y + 8 = 0,\ 3x - z + 1 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ скрещиваются.
2) Найти угол $\angle(L_1,\ L_2)$ между прямыми $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \left\{\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}\right\}, \quad Q = \{2x + y - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямая $L$ параллельна плоскости $Q$.
2) Найти расстояние $d(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (0,\ 0,\ -4), \quad B = (0,\ 0,\ 4), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 10\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{144}{13 - 5\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.

2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 1),$$

$$\Sigma = \{9(x-1)^2 + 4y^2 - 36z^2 = 36\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.

2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.

3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дана окружность $\Gamma$:

$$S = (0,\ 0,\ 5), \quad \Gamma = \left\{x^2 + (y-1)^2 = 4,\ z = 1\right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma$, вершина которой находится в точке $S$, а направляющей служит окружность $\Gamma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 20

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ 5), \quad B = (5,\ 4), \quad C = (8,\ -2), \quad D = (1,\ -9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (5,\ 1,\ -2), \quad C = (2,\ -2,\ -2), \quad D = (2,\ 2,\ 8).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти уравнение прямой $L_2$, симметричной прямой $AD$ (прямая $L_1$) относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}\right\}, \quad L_2 = \left\{\frac{x-1}{6} = \frac{y-1/2}{5} = \frac{z-1}{0}\right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямую $L_1$ параллельно прямой $L_2$.

**Задача 4.** Даны плоскости $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$:

$$Q_1 = \{3x - 4y = 0\}, \quad Q_2 = \{y = 0\}, \quad Q_3 = \{z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L$, проходящей через начало координат $O$ и образующей одинаковые углы с плоскостями $Q_1$, $Q_2$ и $Q_3$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (-1,\ 2,\ -3), \quad L = \{x - 2 = 0,\ y - z - 1 = 0\}.$$

1) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно прямой $L$.
2) Найти точку $P_1$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (0,\ -5,\ 0), \quad B = (0,\ 5,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 6\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{18}{4 - 5\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 2), \quad P_2 = (0,\ -1,\ 2),$$

$$\Sigma = \{x^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дан вектор $\boldsymbol{a}$ и дана парабола $\Gamma$:

$$\boldsymbol{a} = (1,\ -2,\ 3), \quad \Gamma = \{x = y^2,\ z = 0\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma$, образующие которой параллельны вектору $\boldsymbol{a}$, а направляющей служит парабола $\Gamma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 21

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (7,\ 3), \quad B = (-9,\ 3), \quad C = (3,\ -6), \quad D = (7,\ -3).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (-3,\ 2,\ 0), \quad B = (1,\ 1,\ 1), \quad C = (4,\ 4,\ 1), \quad D = (4,\ 1,\ 7).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $L_2$ прямой $AD$ (прямая $L_1$) на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 1), \quad Q_1 = \{2x + 2y - z - 1 = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z + 3 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ и образующей угол $45^\circ$ с плоскостями $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$, $L_2$ и дана плоскость $Q$:

$$L_1 = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}\right\}, \quad L_2 = \{3x + 2y + z - 6 = 0,\ 2x + y + z - 4 = 0\},$$

$$Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

1) Найти точку $P_1$ пересечения прямой $L_1$ и плоскости $Q$.
2) Найти точку $P_2$ пересечения прямой $L_2$ и плоскости $Q$.
3) Найти уравнение прямой $L$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (3,\ 4,\ 0), \quad L = \{2x + y - z + 4 = 0,\ x + 2y + z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точку $P$ параллельно прямой $L$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (0,\ -2,\ 0), \quad B = (0,\ 2,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 5\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - 2\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 2,\ 0), \quad P_2 = (0,\ 0,\ 2),$$

$$\Sigma = \{2(1 - z) = 2x^2 + y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дана поверхность $\Sigma$:

$$Q = \{x + 2y + 3z = 0\}, \quad \Sigma = \{x = y^2 + z^2\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 22

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (8,\ -7),\quad B = (-4,\ 9),\quad C = (-2,\ 8),\quad D = (2,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (-1,\ 1,\ -1),\quad B = (1,\ 3,\ 0),\quad C = (0,\ -1,\ 1),\quad D = (9,\ -3,\ -7).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$:

$$P = (2,\ 3,\ -4).$$

Найти уравнение перпендикуляра $L$, опущенного из точки $P$ на ось $Oy$.

**Задача 4.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P_1 = (-1,\ 1,\ 0),\quad P_2 = (3,\ 3,\ 3),$$

$$Q_1 = \{3x + y - z + 2 = 0\},\quad Q_2 = \{x + 3y - z + 2 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L$ пересечения плоскостей $Q_1$ и $Q_2$.
2) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$ параллельно прямой $L$.

**Задача 5.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана прямая $L$:

$$P_1 = (-1,\ -1,\ -1),\quad P_2 = (0,\ -2,\ -2),\quad L = \{x - 2z + 1 = 0,\ y + 2z - 1 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$.
2) Найти угол $\angle(L_1,\ L)$ между прямыми $L_1$ и $L$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (0,\ -10,\ 0), \quad B = (0,\ 10,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 12\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{3}{2 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (-1,\ 3,\ 4),$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4(y-1)^2 - z^2 = 0\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дана сфера $\Sigma$:

$$Q = \{2y - z = 0\}, \quad \Sigma = \{(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$ и касаются сферы $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 23

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ 8), \quad B = (-9,\ 2), \quad C = (7,\ -6), \quad D = (9,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ 2,\ 3), \quad B = (1,\ 4,\ 3), \quad C = (1,\ 2,\ 5), \quad D = (1,\ 2,\ 3).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на прямую $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Дана плоскость $Q$:

$$Q = \{2x + y - \sqrt{5}\, z = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q_1$, проходящей через ось $Oz$ и образующей угол $60^\circ$ с плоскостью $Q$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (1,\ 2,\ 8), \quad L = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти проекцию $P_1$ точки $P$ на прямую $L$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (1,\ 2,\ 4), \quad Q_1 = \{2x - y + 3z - 6 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - z + 3 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L$ пересечения плоскостей $Q_1$ и $Q_2$.
2) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ и через прямую $L$.

**Задача 6.** Дана точка $A$, дана плоскость $Q$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (1,\ 2,\ 3),\quad Q = \{x + y + z = 0\},\quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в плоскости } Q\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{4}{3 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 1,\ 0),\quad P_2 = (3,\ 1,\ 4),$$

$$\Sigma = \{9x^2 + 4(y-1)^2 - 36z^2 = 36\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана прямая $L$ и дан эллипсоид $\Sigma$:

$$L = \{x = t - 3,\ y = 2t + 3,\ z = 3t + 5\},\quad \Sigma = \{(x-1)^2 + 2y^2 + 5z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой параллельны прямой $L$ и касаются эллипсоида $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 24

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (7,\ 7), \quad B = (5,\ 9), \quad C = (3,\ -5), \quad D = (8,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (0,\ -1,\ 2), \quad B = (1,\ 1,\ 4), \quad C = (3,\ -1,\ 5), \quad D = (2,\ 1,\ -4).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны плоскости $Q_1$, $Q_2$:

$$P = (2,\ 0,\ -3), \quad Q_1 = \{3x - y + 2z - 7 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 3y - 2z - 3 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой $L$ пересечения плоскостей $Q_1$ и $Q_2$.
2) Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точку $P$ параллельно прямой $L$

**Задача 4.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \{3x - y + 1 = 0,\ 3x + 2z - 2 = 0\}, \quad Q = \{2x + y + z - 4 = 0\}.$$

Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 5.** Дана точка $P$, дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$P = (1,\ 5,\ 10), \quad L = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}\right\}, \quad Q = \{x + 2y + 3z - 29 = 0\}.$$

1) Найти точку $P_1$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
2) Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точки $P$ и $P_1$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (-2,\ 0,\ 0), \quad B = (2,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 16\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ -4,\ 0), \quad P_2 = (3,\ -3,\ 2),$$

$$\Sigma = \{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $A$ и дана прямая $L$:

$$A = (0,\ 0,\ 5), \quad L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}.$$

Найти уравнение круговой цилиндрической поверхности $\Sigma$, проходящей через точку $A$, если осью этой поверхности является прямая $L$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 25

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (2,\ -3), \quad B = (8,\ 5), \quad C = (5,\ 9), \quad D = (-3,\ 9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (2,\ -1,\ -1), \quad B = (-1,\ -1,\ 2), \quad C = (-1,\ 2,\ -1), \quad D = (-1,\ -1,\ -1).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно прямой $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \right\}, \quad L_2 = \{x - 2 = 0,\ y - 2 = 0\}.$$

1) Найти уравнение плоскости $Q_1$, проходящей через прямую $L_1$ параллельно прямой $L_2$.
2) Найти уравнение плоскости $Q_2$, проходящей через прямую $L_2$ параллельно прямой $L_1$.
3) Найти расстояние $d(Q_1,\ Q_2)$ между плоскостями $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \{x - y + z - 4 = 0,\ 2x + y - 2z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{x + y + z - 4 = 0,\ 2x + 3y - z - 6 = 0\}.$$

Найти угол $\angle(L_1,\ L_2)$ между прямыми $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (1,\ 0,\ -1), \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно прямой $L$.

**Задача 6.** Дана точка $A$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (3,\ -5,\ 7), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oxy\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 3), \quad P_2 = (0,\ -3,\ 2),$$

$$\Sigma = \{36z = 4x^2 + 9(y+3)^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дан эллипсоид $\Sigma$:

$$S = (-1,\ 2,\ -5), \quad \Sigma = \{3x^2 + 2y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma_1$, вершина которой находится в точке $S$, а образующие касаются эллипсоида $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 26

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (5,\ 7), \quad B = (2,\ -2), \quad C = (-2,\ 0), \quad D = (-3,\ 3).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (2,\ -2,\ 1), \quad B = (1,\ -1,\ -1), \quad C = (2,\ 0,\ -1), \quad D = (-4,\ 4,\ 1).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти уравнение прямой $L_2$, симметричной прямой $AD$ (прямая $L_1$) относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \right\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ параллельны.
2) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямые $L_1$ и $L_2$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (3,\ 0,\ 4), \quad L = \{2x - y + 1 = 0,\ 2x - z = 0\}.$$

Найти расстояние $d(P,\ L)$ от точки $P$ до прямой $L$.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \{x + 2y + 3z - 13 = 0,\ 3x + y + 4z - 19 = 0\}, \quad Q = \{5x - 3y + z = 0\}.$$

1) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Дана точка $A$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (-3,\ -5,\ 9), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oyz\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 2), \quad P_2 = (1,\ 2,\ 3),$$

$$\Sigma = \{2(2 - z) = x^2 + 2y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дана поверхность $\Sigma$:

$$Q = \{3x - y + z = 0\}, \quad \Sigma = \{x - y = z^2\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 27

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (3,\ -4), \quad B = (-6,\ 5), \quad C = (8,\ 7), \quad D = (7,\ 0).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (0,\ 5,\ 1), \quad B = (1,\ -2,\ -1), \quad C = (1,\ 1,\ 2), \quad D = (-7,\ -7,\ 8).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $L_2$ прямой $AD$ (прямая $L_1$) на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \{x - z + 2 = 0,\ y - 2z - 1 = 0\}, \quad L_2 = \left\{\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}\right\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ пересекаются.
2) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямые $L_1$ и $L_2$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$L_1 = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}\right\}, \quad L_2 = \{x - z - 1 = 0,\ y + z - 1 = 0\}.$$

Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ перпендикулярны.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}\right\}, \quad Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

Найти проекцию $L_1$ прямой $L$ на плоскость $Q$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (2,\ 3,\ -5), \quad B = (2,\ -7,\ -5), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 - BP^2 = 13\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1), \quad P_2 = (3,\ -2,\ 1),$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4y^2 = (z-1)^2\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дана окружность $\Gamma$:

$$S = (0,\ 1,\ 3), \quad \Gamma = \left\{x^2 + (y-1)^2 = 1,\ z = 2\right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma$, вершина которой находится в точке $S$, а направляющей служит окружность $\Gamma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 28

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (8,\ 5), \quad B = (9,\ -2), \quad C = (4,\ 8), \quad D = (6,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ -2,\ 0), \quad B = (-2,\ 4,\ -2), \quad C = (0,\ 7,\ 4), \quad D = (5,\ 6,\ -3).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на плоскость $ABC$.

**Задача 3.** Дана точка $P$ и даны векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 1), \quad \boldsymbol{a}_1 = (0,\ 1,\ 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1,\ 0,\ 1).$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и даны прямые $L_1$, $L_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 2), \quad L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{-1} \right\}, \quad L_2 = \{x - z + 2 = 0,\ y - 2z - 1 = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно прямым $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Даны прямые $L_1$, $L_2$ и дана плоскость $Q$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3} \right\},$$

$$Q = \{x + y - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямая $L_1$ параллельна плоскости $Q$.
2) Доказать, что прямая $L_2$ лежит в плоскости $Q$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (-1,\ 0,\ 0), \quad B = (1,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 4\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{12}{2 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.

2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (1,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (2,\ 1,\ -1),$$

$$\Sigma = \left\{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - (z-1)^2 = 1\right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.

2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.

3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана точка $S$ и дана окружность $\Gamma$:

$$S = (0,\ 2,\ 3), \quad \Gamma = \left\{x^2 + (y-1)^2 = 1,\ z = 2\right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности $\Sigma$, вершина которой находится в точке $S$, а направляющей служит окружность $\Gamma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 29

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (7,\ 6), \quad B = (7,\ 3), \quad C = (-5,\ -6), \quad D = (3,\ 9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (1,\ 1,\ 4), \quad B = (-1,\ 3,\ 4), \quad C = (-1,\ 1,\ 6), \quad D = (-1,\ 1,\ 4).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти проекцию $D_1$ точки $D$ на прямую $AC$ (прямая $L_1$).

**Задача 3.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (3,\ 4,\ 0), \quad L = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $P$ и через прямую $L$.

**Задача 4.** Даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \right\}, \quad L_2 = \{4x - y - z - 4 = 0,\ 2x - y - 1 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ параллельны.
2) Найти расстояние $d(L_1,\ L_2)$ между прямыми $L_1$ и $L_2$.

**Задача 5.** Дана прямая $L$ и дана плоскость $Q$:

$$L = \{x + z - 1 = 0,\ y - 2 = 0\}, \quad Q = \{y - z = 0\}.$$

1) Найти точку $P$ пересечения прямой $L$ и плоскости $Q$.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой $L$ и плоскостью $Q$.

**Задача 6.** Пусть $\Sigma$ — куб, центр которого находится в начале координат $O$, грани параллельны координатным плоскостям, а длина ребра равна 2. Дано геометрическое место точек $M$:

$$M = \{P \in \Omega \mid \text{сумма квадратов расстояний от точки } P$$
$$\text{до плоскостей граней куба } \Sigma \text{ равна } 8\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{3 - 4\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (2,\ 1,\ 8),$$
$$\Sigma = \left\{1 - z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дана поверхность $\Sigma$:

$$Q = \{x + y + z = 0\}, \quad \Sigma = \{x = z^2\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 30

**Задача 1.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (5,\ -7), \quad B = (-3,\ 9), \quad C = (-4,\ 8), \quad D = (-6,\ 4).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра $I$ и радиус $r$ этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра $O$ и радиус $R$ этой окружности.

**Задача 2.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = (0,\ 2,\ 3), \quad B = (2,\ 4,\ 4), \quad C = (1,\ 6,\ 2), \quad D = (-2,\ 10,\ 6).$$

1) Найти объем $V_{ABCD}$ пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь $S_{ABC}$ грани $ABC$.
3) Найти уравнение прямой $AB$ (прямая $L$).
4) Найти длину ребра $AB$.
5) Найти уравнение плоскости $ABC$ (плоскость $Q$).
6) Найти точку $D_1$, симметричную точке $D$ относительно плоскости $ABC$.

**Задача 3.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана прямая $L$:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 5), \quad P_2 = (1,\ 2,\ 5), \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+4}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точки $P_1$ и $P_2$ и образующей угол $45^\circ$ с прямой $L$.

**Задача 4.** Дана точка $P$ и дана прямая $L$:

$$P = (-4,\ 3,\ 3), \quad L = \{x - 2y + z - 4 = 0,\ 2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой $L_1$, проходящей через точку $P$ параллельно прямой $L$.

**Задача 5.** Даны прямые $L_1$ и $L_2$:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \right\}, \quad L_2 = \{x - 3z + 4 = 0,\ y - z - 2 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые $L_1$ и $L_2$ пересекаются.
2) Найти точку $P$ пересечения прямых $L_1$ и $L_2$.
3) Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через прямые $L_1$ и $L_2$.

**Задача 6.** Даны точки $A$, $B$ и дано геометрическое место точек $M$:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (3,\ 2,\ 1), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP = BP\}.$$

Найти уравнение ГМТ $M$.

**Задача 7.** Кривая $\Gamma$ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой $\Gamma$.
2) Написать каноническое уравнение кривой $\Gamma$.

**Задача 8.** Даны точки $P_1$, $P_2$ и дана поверхность второго порядка $\Sigma$:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 3), \quad P_2 = (2,\ -1,\ 4),$$
$$\Sigma = \left\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2\right\}.$$

1) Определить тип поверхности $\Sigma$.
2) Изобразить схематически поверхность $\Sigma$.
3) Изобразить сечения поверхности $\Sigma$ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности $\Sigma$ лежат точки $P_1$ и $P_2$.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью $\Sigma$ имеет прямая, проходящая через точки $P_1$ и $P_2$ (прямая $L$).

**Задача 9.** Дана плоскость $Q$ и дан эллипсоид $\Sigma$:

$$Q = \{x + 2y - z = 0\}, \quad \Sigma = \{(x-1)^2 + 3y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности $\Sigma_1$, образующие которой перпендикулярны плоскости $Q$ и касаются эллипсоида $\Sigma$.

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.