ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1 Отделение корней

Отделить корень уравнения

$$f(x)=0 \qquad (8.1)$$

значит найти такой отрезок области определения функции $f(x)$, который содержит только один корень этого уравнения.

Для отделения корней уравнения (8.1) можно использовать следующий критерий: если на отрезке [a,b] функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, а её значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на этом отрезке существует и при том только один корень данного уравнения. Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на отрезке [a,b] является сохранение знака производной. При отделении корней стараются определить отрезок как можно меньшей длины.

Отделение корней уравнения (8.1) можно выполнить также графически. Найти корень уравнения (8.1) значит найти абсциссу точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс. Если построить график функции $f(x)$ затруднительно, то уравнение (8.1) следует представить в эквивалентном виде

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (8.2)$$

с таким расчетом, чтобы графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ строились проще. Корни же уравнения (8.2) определяются как абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Замечание. Известно, что все корни алгебраического уравнения

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

расположены в кольце

$$\frac{|a_n|}{b + |a_n|} \le |z| \le 1 + \frac{c}{|a_0|} ,$$

где $b = \max\{|a_n|,|a_1|,\ldots,|a_{n-1}|\}$, $c = \max\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|\}$.

8.2 Метод деления отрезка пополам

Простейшим алгоритмом уточнения корня на отрезке [a,b], если $f(x)$ непрерывная функция и $f(a)f(b) < 0$ является *метод деления отрезка пополам*. Очевидно, что середина отрезка служит приближением к корню уравнения (8.1) с точностью $\varepsilon = (b-a)/2$. В средней точке отрезка [a,b] определяется знак функции $f(x)$, затем выбирается та половина отрезка, на концах которой функция принимает значения разных знаков, и деление повторяется. Если требуется найти корень с точностью до ε, то деление отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше $\varepsilon/2$. Тогда середина последнего даст значение корня с требуемой точностью.

8.3 Метод простой итерации

Он состоит в том, что уравнение (8.1) заменяется эквивалентным уравнением вида

$$x = s(x) \qquad (8.3)$$

и итерации образуются по правилу

$$x_{n+1} = s(x_n),\ n = 0,1,\ldots,$$

причём задаётся начальное приближение x_0. Для сходимости большое значение имеет выбор функции $s(x)$.

Метод простой итерации сходится при надлежащем выборе начального приближения x_0, если

$$|s'(x)| < 1$$

в некоторой окрестности корня. Более точно:

Теорема. *Если* $|s'(x)| \le q < 1$ *при* $x \in [a-r, a+r]$, *причём* $|s(a) - a| \le (1-q)r$, *то уравнение (8.2) имеет единственное решение* x_* *и метод простой итерации сходится к* x_* *при любом начальном приближении* $x_0 \in [a-r, a+r]$.

Для метода простой итерации можно пользоваться следующей оценкой погрешности

$$|x_k - x_*| \le \frac{q^k}{1 - q}\, |s(x_0) - x_0|,\ k = 1,2,\ldots.$$

Где x_* - истинное значение корня, $|s'(x)| \le q < 1$ для $x \in [a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Если функцию $s(x)$ в уравнении (8.3) берём в виде

$$s(x) = x + \tau f(x),\ \tau = const,$$

то получаем так называемый *метод релаксации***.** Параметр τ выбирается таким образом, чтобы выполнялась оценка (8.4). Если в некоторой окрестности корня выполняются условия

$$f'(x) < 0,\ 0 < m_1 < |f'(x)| < M_1,$$

то метод релаксации сходится при $\tau \in (0, 2/M_1)$. Наиболее быстрая скорость сходимости достигается пр оптимальном значении параметра $\tau_0 = 2/(M_1 + m_1)$. При этом значении для погрешности справедлива оценка

$$|x_n - x_*| \le \rho_0^n\, |x_0 - x_*|,$$

где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi},\ \xi = \frac{m_1}{M_1}$$

Пример. Решим уравнение

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0.5*10^{-4}$.

По графику находим, что уравнение имеет три корня, расположенных на отрезках [-3;-2] , [-1;0] и [0;1]. Найдём корень на отрезке [-3;-2]. Поделим уравнение на x^2 и приведём к виду

$$x = 1/x^2 - 3 \qquad (8.5)$$

Положим $s(x) = 1/x^2 - 3$ и возьмём $x_0 = -2.5$. На отрезке [-3;-2] (r = 0.5) выполняются условия теоремы:

$$\max |s'(x)| = q = 1/4,\ \ |s(x_0) - x_0| = 0.34 < (1-q)r = 0.375.$$

Найдём число итераций, необходимых для достижения заданной точности:

$$\frac{|s(x_0) - x_0|}{1 - q} q^n \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge 6$$

После шести итераций получаем приближенное значение корня –2.87938.

На отрезках [-1;0] и [0;1] представление (8.5) не годится для нахождения корней, поскольку производная функции $s(x)$ больше 1 на этих отрезках. Для нахождения корней здесь удобно использовать представления

$$x = \pm 1/\sqrt{x+3}.$$

8.4 Метод Ньютона и метод секущих

Метод Ньютона в случае простого вещественного корня имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\; k = 1,2,\ldots. \qquad (8.6)$$

в случае корня кратности ρ

$$f'(x_k)\frac{x_{k+1} - x_k}{p} + f(x_k) = 0\,.$$

Оценка погрешности следующая:

$$|x_k - x_*| \le q^{2^k} |x_0 - x_*|,\; k = 1,2,\ldots.$$

Где

$$q = \frac{M_{p+1}|x_0 - x_*|}{m_p p(p + 1)} < 1.$$

Можно пользоваться оценкой погрешности как в методе простой итерации, учитывая, что метод Ньютона

$$sx) = x - p\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Модифицированный метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)},\; k = 0, 1, \ldots.$$

применяют в том случае, когда хотят избежать многократного вычисления производной $f'(x_k)$.

В методе Ньютона требуется вычислять производную функции, что не всегда удобно. Можно заменить производную первой разделённой разностью, найденной по двум последним итерациям. Тогда вместо метода Ньютона (8.6) получим *метод секущих*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Для начала процесса требуется знать значения x_0 и x_1.

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ.

1. Отделить вещественные корни аналитически или графически.
2. Уточнить корни делением отрезка пополам (если это возможно) с точностью до 0.1.
3. Уточнить корни заданным методом с заданной точностью. Для метода Ньютона и метода простой итерации число итераций, необходимое для достижения заданной точности, выбрать заранее, сделав вручную оценку погрешности. Для остальных методов итерации прекращаются после того, как разность двух последовательных приближений становится меньше заданной точности.
4. Проверить результаты подстановкой найденных значений в уравнение.

ВАРИАНТЫ

1. Найти все корни уравнения

$$1000000\, x^4 - 3000\, x^3 + 1000002\, x^2 - 3000\, x + 2 = 0$$

с точностью 0.0001 методом а) Ньютона б) секущих.

2. Найти все корни уравнения

$$x^4 - 10001.01\, x^3 - 9800.01\, x^2 - 999901\, x + 10000 = 0$$

с точностью 0.001 а) методом Ньютона б) Модифицированным методом Ньютона.

3. Найти все корни уравнения

$$\sin(1/x) = x$$

на отрезке [0.1 ; 0.5] с точностью 0.001 методом Ньютона.

4. Найти все корни уравнения

$$\operatorname{arctg}(3x) = x$$

методом простой итерации с точностью до 0.001 сделав предварительную оценку погрешности.

5. Найти корень уравнения

$$x^4 - 20\, x^3 + 101\, x^2 - 20\, x + 1 = 0$$

на отрезке [-1,1] с точностью 0.0001 методом Ньютона с параметрами p=1 и p=2. Сравнить количества итераций необходимые для достижения заданной точности.

6. Найти корень уравнения

$$x\, e^x = 1$$

с точностью 0.0001 методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона. Итерации производить пока разность между соседними итерациями не станет меньше заданной точности. Сравнить необходимые количества итераций.

7. Найти все корни уравнения

$$x^5 - 3x^2 + 1 = 0$$

методом парабол с точностью 0.0005.

8. Найти вещественные корни уравнения

$$x^2 = \sin x + 1$$

методом парабол с точностью 0.001.

9. Выяснить, к какому из корней 0, 1,-1 уравнения

$$x^3 - x = 0$$

сходится метод Ньютона, если начинать с произвольного начального приближения. Какие начальные приближения дают расходимость метода?

10. Найти все корни уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом простой итерации с точностью 0. 0005.

11. Найти все корни уравнения

$$x^4 - 10000.01x^3 + 101x^2 - 10000.01x + 100 = 0$$

с точностью до 0.001 а) методом Ньютона б) модифицированным методом Ньютона.

12. Найти корень уравнения

$$\arccos(x/2) = x^2$$

на отрезке [0,2] а) методом Ньютона б) модифицированным методом Ньютона.

13. Найти все корни уравнения

$$x^4 - 0.015x^3 + 0.3x^2 + x - 1 = 0$$

с точностью 0.00001 методом а) Ньютона б) секущих.

14. Найти корень уравнения

$$x^3 - \sin(2x) = 1$$

методом парабол с точностью 0.001.

15. Найти все корни уравнения

$$x^3 - 1777x^2 + 777 = 0$$

на отрезке [-1,1] методом парабол с точностью до 0.0001

16. Найти все корни уравнения

$$5555x^4 - 555x^3 - 55x^2 - 5x = 0$$

с точностью 0.00001 методом а) Ньютона б) секущих.

17. Найти корень уравнения

$$\operatorname{arctg}(7x) = 0.2$$

на отрезке [-1,1] а) методом Ньютона б) модифицированным методом Ньютона.

18 . Найти корень уравнения

$$\sin(x^4) = 1 - 2x$$

методом парабол с точностью 0.0001.

19 . Найти корень уравнения

$$x^2 e^{2x} = 1$$

с точностью 0.001 методом Ньютона. Итерации производить пока разность между соседними итерациями не станет меньше заданной точности. Сравнить необходимые количества итераций.

20. Найти все корни уравнения

$$x^3 - 45x^2 + 43 = 0$$

на отрезке [-2,1] а) модифицированным методом Ньютона б) методом секущих.

21 . Найти корень уравнения

$$\arcsin(x) + e^x = 2$$

методом простой итерации с точностью до 0.001 сделав предварительную оценку погрешности.

22. Найти все корни уравнения

$$54x^4 + x^2 - 0.0000001 = 0$$

с точностью 0.00001 методом а) Ньютона б) секущих.

23. Найти все корни уравнения

$$\operatorname{tg}(x/3) - x^3 = 0$$

методом парабол с точностью 0.001.

24. Найти все корни уравнения

$$12x^4 + 11x^3 - 10x^2 - 999 = 0$$

на отрезке [-3.5,3] с точностью 0.0001 методом Ньютона с параметрами p=1 и p=2. Сравнить количества итераций необходимые для достижения заданной точности.

25 . Найти корень уравнения

$x^4e^{4x} = 444$

с точностью 0.0001 методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона. Итерации производить пока разность между соседними итерациями не станет меньше заданной точности. Сравнить необходимые количества итераций.

ОТВЕТЫ:1) 0,0100; 0,0200 **2)** 0,688; 10000 **3)** 0,107; 0,155; 0,361 **4)** –1,32; 0; 1,32 **5)** 0,0917; 0,1125 **6)** 0 **7)** –0,5611; 0,5992; 1,348 **8)** –0,637; 1,41 **9)** –1; 0; 1 **10)** -2,879; -0,6527; 0,5321 **11)** 0,231; 10000 **12)** 1,01817183 **13)** –1,1468; 0,66935; 1 **14)** 1,191 **15)** -0,6611; 0,6614 **16)** –0,09811;0,19695 **17)** 0,028959 **18)** 0,4746 **19)** 0,987 **20)** –0,9672; 0,9884; 44,98 **21)** 0,4369 **22)** +/- 0,0003 **23)** +/- 0,581; 0 **24)** -3,36; 2,875 **25)** 1,2784.