Численное интегрирование.

Рассмотрим вопрос о применении некоторых классов квадратурных формул к вычислению интегралов вида:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx$$

Где $f(x)$ - вещественная функция некоторого класса, заданная на любом конечном или бесконечном отрезке числовой оси $[a,b]$;
$p(x)$ - некоторая фиксированная функция, которую называют весовой.
Довольно часто приближенное значение данного интеграла ищут в виде линейной комбинации значений функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Это приближенное равенство называют квадратурной формулой, определяемой узлами x_k и коэффициентами A_k.

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

- называют остаточным членом, или остатком квадратурной формулы.

Квадратурные формулы с равностоящими узлами.

Квадратурные формулы с равностоящими узлами применяются для вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx$$

с постоянной весовой функцией и конечным отрезком интегрирования.
Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$.Введем сетку, разбивающую отрезок $[a,b]$ на N равностоящих узлов.
Где $x_i = a + i \times h$, шаг $h = (b-a)/N$ и обозначим $f_i = f(x_i), i = \overline{0,N}$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$$

Выберем на каждом сегменте серединную точку $x_{i-1/2} = x_i - 0.5h$ и обозначим $f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2})$

Квадратурная формула прямоугольников имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2}h$$

Если функции $f(x), f'(x), f''(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$,то остаточный член имеет вид:

$$R \le M_2 \frac{h^2(b-a)}{24} \quad \text{, где} \quad M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Квадратурная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{i-1} + f_i}{2} h$$

Или

$$\int_a^b f(x)dx = h(0.5 f_0 + f_1 + \ldots + f_{N-1} + 0.5 f_N)$$

Если функции $f(x), f'(x), f''(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то остаточный член представляется в виде:

$$R \le M_2 \frac{h^2(b-a)}{12} \quad \text{,где} \quad M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Выберем на каждом сегменте серединную точку $x_{i-1/2} = x_i - 0.5h$ и обозначим $f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2})$

Квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i)$$

Также можно взять удвоенный частичный отрезок, обозначив $x_i = a + 0.5hi$, $i = \overline{0,2N}$ и $f_i = f(x_i)$.

В результате получим *другой вариант формулы Симпсона:*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6N}\left(f_0 + f_{2N} + 2[f_2 + \ldots + f_{2N-2}] + 4[f_1 + \ldots + f_{2N-1}]\right)$$

При этом, если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные до четвертого порядка включительно, то остаточный член имеет вид:

$$R \le M_4 \frac{h^4(b-a)}{2880} \quad \text{, где} \quad M_4 = \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

Решая неравенство $R < \varepsilon$ относительно h для остаточных членов любой из квадратурных формул и делая вычисления с таким шагом, получаем заданную точность ε вычисления.

Пример1:

Вычислить интеграл $\int_{1,1}^{3,1} \frac{dx}{1-x}$ по квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, сравнить с точным значением интеграла и вычислить остаточный член для каждой формулы

Точное значение интеграла:

$$\int_{1,1}^{3,1} \frac{dx}{1-x} = -\ln(2.1) + \ln(0.1) = -3.044522$$

1. Квадратурная формула прямоугольников

Для вычисления интеграла введем сетку, разделяющую отрезок $[a,b]$ на n=10 частей, при этом h=0,2. Выберем на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,10}$ срединную точку $x_{i-1/2} = x_i - 0.5h$

Применяя квадратурную формулу прямоугольников получаем:

$$\int_{1,1}^{3,1} \frac{dx}{1-x} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})h \approx 0.2 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{1-1.2} + \frac{1}{1-1.4} + \frac{1}{1-1.6} + \frac{1}{1-1.8} + \\ \frac{1}{1-2} + \frac{1}{1-2.2} + \frac{1}{1-2.4} + \frac{1}{1-2.6} + \frac{1}{1-2.8} + \frac{1}{1-3} \end{pmatrix} \approx$$

$\approx -2{,}928968$

Оценим погрешность по общей формуле.

Поскольку $M_2 = \sup_{x\in[1.1,3.1]} \left| f''(x) \right| = \left| f''(1.1) \right| \approx 200$,

то $$R \le M_2 \frac{h^2(b-a)}{24} = 200 \times \frac{0.2^2(3.1-1.1)}{24} \approx 0.666666$$

При сравнении точного значения интеграла и полученного имеем разницу $\left| -3{,}044522 + 2{,}98968 \right| = 0{,}115554$. Сравнивая эту разницу с погрешностью, можно сказать, что оценка явно завышена.

2. Квадратурная формула трапеций.

Введем сетку также, как в пункте 1.

При этом h=0.2, N=10 по квадратурной формуле трапеции:

$$\int_{1.1}^{3.1}\frac{dx}{1-x}=h\left(0.5f_0+f_1+\ldots+f_{N-1}+0.5f_N\right)=$$

$$=0.2\begin{pmatrix}0.5\frac{1}{1-1.1}+\frac{1}{1-1.3}+\frac{1}{1-1.5}+\frac{1}{1-1.7}+\frac{1}{1-1.9}+\\ +\frac{1}{1-2.1}+\frac{1}{1-2.3}+\frac{1}{1-2.5}+\frac{1}{1-2.7}+\frac{1}{1-2.9}+0.5\frac{1}{1-3.1}\end{pmatrix}=$$

$$=-3{,}314130$$

При этом оценка погрешности составляет:

$$R\le M_2\,\frac{h^2(b-a)}{12}=200\times\frac{0.2^2(3.1-1.1)}{12}\approx 1.333333$$

При сравнении точного и полученного значения интеграла разность $\left|-3{,}044522+3{,}314130\right|=0{,}269608$ значительно меньше погрешности 0,66666 , что говорит о явно завышенной оценке.

3. Квадратурная формула Симпсона.

Введем сетку как в пункте 1. Пусть h=0.2, n=10.

Чтобы не использовать дробные индексы, обозначим $x_i=a+0.5h_i$, $f_i=f(x_i)$, $i=\overline{0{,}20}$ и записываем формулу Симпсона в виде:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{6}\left(f_0+f_{2n}+2\left[f_2+\ldots+f_{2n-2}\right]+4\left[f_1+\ldots+f_{2n-1}\right]\right)$$

Вычислим интеграл по квадратурной формуле Симпсона:

$$\int_{1.1}^{3.1}\frac{dx}{1-x}=\frac{0.2}{6}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{1-1.1}+\frac{1}{1-3.1}+\\ +2\begin{bmatrix}\frac{1}{1-1.3}+\frac{1}{1-1.5}+\frac{1}{1-1.7}+\frac{1}{1-1.9}+\\ +\frac{1}{1-2.1}+\frac{1}{1-2.3}+\frac{1}{1-2.5}+\frac{1}{1-2.7}+\frac{1}{1-2.9}\end{bmatrix}+\\ +4\begin{bmatrix}\frac{1}{1-1.2}+\frac{1}{1-1.4}+\frac{1}{1-1.6}+\frac{1}{1-1.8}+\\ +\frac{1}{1-2.0}+\frac{1}{1-2.2}+\frac{1}{1-2.4}+\frac{1}{1-2.6}+\frac{1}{1-2.8}\end{bmatrix}\end{pmatrix}=-3.04593$$

Оценка погрешности этой формулы:

$$M_4 = \sup_{x\in[1.1,3.1]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \left| f^{(4)}(1.1) \right| = 2400000$$

$$R \le M_4 \frac{h^4(b-a)}{2880} = 2400000 \times \frac{0.1^4(3.1-1.1)}{2880} \approx 0.166666$$

Сравнение точного значения интеграла с полученным дает разность $\left|-3{,}044522 + 3{,}04593\right| = 0{,}001408$. Эта разность меньше погрешности. Можно сказать, что в данном случае оценка также завышена.

Пример2:

Выбрать шаг интегрирования для вычисления интеграла $\int_{1.1}^{3.1} \frac{dx}{1-x}$ с точностью 0,01 пользуясь квадратурными формулами прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Оценку погрешности для каждой квадратурной формулы будем брать из примера 1 соответственно.

Квадратурная формула прямоугольников.

Вычислим, при каком шаге h погрешность будет составлять 0,01:

$$M_2 \frac{(b-a)h^2}{24} \le 0.01, \qquad h = \sqrt{0.01 \times \frac{24}{M_2(b-a)}} \approx 0.025$$

При шаге $h \approx 0.025$ отрезок $[1.1{,}3.1]$ разбивается на N=80 равностоящих узлов.

Квадратурная формула трапеций.

Вычислим, при каком шаге h погрешность составит 0,01:

$$M_2 \frac{(b-a)h^2}{12} \le 0.01, \qquad h = \sqrt{0.01 \times \frac{12}{M_2(b-a)}} \approx 0.017$$

При шаге $h \approx 0.017$,отрезок $[1.1{,}3.1]$ разбивается на N=118 равностоящих узлов.

Квадратурная формула Симпсона.

Вычислим, при каком шаге h погрешность составит 0,01:

$$M_4 \frac{(b-a)h^2}{2880} \le 0.01 \qquad h = \sqrt[4]{0.01 \times \frac{2880}{M_4(b-a)}} \approx 0.05$$

При шаге $h = 0.05$, отрезок $[1.1{,}3.1]$ разбивается на N=40 равностоящих узлов.

Как и следовало ожидать, наименьшее количество равностоящих узлов N=40 получается при вычислении интеграла по квадратурной формуле Симпсона.

Апостериорная оценка погрешности методом Рунге. Автоматический выбор шага интегрирования.

Пусть $I_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx I_{h,i}$ - квадратурная формула, примененная на частичном отрезке и имеющая порядок m, то есть $I_i - I_{h,i} = O(h^m)$. Для формул прямоугольников и трапеций m = 3, а для формулы Симпсона m = 5. Проведем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ все вычисления дважды, один раз с шагом h_i, другой раз с шагом $0.5h_i$. Тогда справедлива оценка:

$$I_i - I_{h/2,i} \approx \frac{I_{h/2,i} - I_{h,i}}{2^m - 1}$$

Если для заданного ε правая часть не превосходит $\frac{\varepsilon \times h_i}{b-a}, i = 1,2,\dots,N$, то получим:

$$\left|I - I_{h/2}\right| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{N} h_i = \varepsilon$$

то есть будет достигнута заданная точность ε.

Если же на каком-то из частичных отрезков эта оценка не будет выполняться, то шаг на этом отрезке надо измельчить еще в два раза и снова оценить погрешность. Заметим, что для некоторых функций такое измельчение может продолжаться слишком долго. Поэтому в соответствующей программе следует предусмотреть ограничение сверху на число измельчений, а также возможность увеличения ε.

Задачи:

1. Вычислить приближенное значение интеграла с помощью формулы а) прямоугольников, б) трапеций, в) Симпсона. Величину шага выбрать заранее, сделав вручную оценку погрешности через вторую (случаи а,б) или четвертую (случай в) производные. Сравним с точным значением интеграла

1.(а) $\int\limits_{-1}^{1} |x| dx$ 2.(б) $\int\limits_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{2x^2+1}$ 3.(в) $\int\limits_{1.6}^{2.4} (x+1)\sin x dx$

4.(а) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx$ 5.(б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx$ 6.(в) $\int_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{x^2+1}$

7.(а) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{2+x^3}$ 8.(б) $\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 9.(в) $\int_{0.6}^{1.6} x^2 \cos x dx$

10.(а) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$ 11.(б) $\int_{1.4}^{3} \lg x dx$ 12.(в) $\int_{0.18}^{0.98} \frac{dx}{x+2}$

13.(а) $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{x+2}$ 14.(б) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3}$ 15.(в) $\int_{0,5}^{1,2} \frac{dx}{x+1}$

16.(а) $\int_{0}^{2} \sin x dx$ 17.(б) $\int_{1.5}^{2.5} \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$ 18.(в) $\int_{2}^{4} tgx dx$

19.(а) $\int_{-0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 20.(б) $\int_{1}^{2.6} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$ 21.(в) $\int_{0.2}^{2} \frac{0.5+x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

22.(а) $\int_{0.2}^{2.4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} dx$ 23.(б) $\int_{0.6}^{1.8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1.7}}$ 24.(в) $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.3}}$