Лабораторная работа №5

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ.

1. Постановка задачи.

Пусть $x \in [a,b]$ и заданы точки x_k, $k = 0,1,\ldots,n$ (*узлы интерполирования*), в которых известны значения функции $f(x)$. Задача интерполирования состоит в том, чтобы построить многочлен:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

степени *n*, значения которого в заданных точках x_k, совпадают со значениями функции $f(x)$ в этих точках. Такой полином существует и единственен.

Интерполяционный многочлен $L_n(x)$ степени не выше *n* по системе алгебраических многочленов *1, x, x², …, xⁿ* можно задать по формуле Лагранжа:

(☼) $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x) f(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$,где $$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k),$$

$$\omega'(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_j).$$

Обозначая $$A_k = \frac{1}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

получим "барицентрический" вид многочлена Лагранжа:

$$L_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k f(x_k)}{x - x_k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}}$$

2. Интерполяционная формула Ньютона.

Формула Ньютона является разностным аналогом формулы Тейлора и имеет вид:**(1.1)**

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,\ldots,x_n),$$

где $f(x_i,x_j)=\dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$, i,j=0,1,…,n,

i≠j –разделенные разности первого порядка,

$$f(x_i,x_j,x_k)=\frac{f(x_j,x_k)-f(x_i,x_j)}{x_k-x_i},\qquad \text{i,j,k=0,1,…,n,}$$

i≠j≠k – разделенные разности второго порядка,

$$f(x_j,x_{j+1},\ldots,x_{j+k})=\frac{f(x_{j+1},x_{j+2},\ldots,x_{j+k})-f(x_j,x_{j+1},\ldots,x_{j+k-1})}{x_{j+k}-x_j}$$

– разделенные разности **k**-го порядка.

При выводе формулы Ньютона не накладывается ограничений на порядок узлов $\mathbf{x_0,x_1,\ldots,x_n}$, поэтому множество интерполяционных формул можно получить из **(1.1)** перенумерацией узлов.

3. Погрешность интерполирования.

Заменяя функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$, мы допускаем погрешность:

$$r_n(x)=f(x)-L_n(x),$$

которая называется *погрешностью интерполирования* или *остаточным членом интерполяционной формулы.* Если функция $f(x)$ имеет непрерывную **(n+1)-ю** производную, то имеет место следующая оценка остаточного члена:

$$\textbf{(1.3)}\qquad |r_n(x)|\le\frac{M_{n+1}|\omega(x)|}{(n+1)!},$$

где $\omega(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k),\qquad M_{n+1}=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$

Погрешность интерполирования можно представить также через разделенную разность следующим образом:

$$r_n(x)=\omega(x)f(x,x_0,\ldots,x_n).$$

4. Минимизация остаточного члена интерполирования.

Из формулы **(1.3)** следует, что для данной функции $f(x)$ погрешность интерполирования зависит от выбора узлов $x_0,x_1,\ldots,x_n$ на отрезке *[a,b]*. Величину $|\omega(x)|$ можно минимизировать за счет выбора узлов интерполирования $x_i\in[a,b]$, *i=0,1,…,n.*

Такими оптимальными узлами для отрезка *[1,-1]* являются корни многочлена Чебышева первого рода:

$$T_{n+1}(x)=\frac{\cos((n+1)\arccos x)}{2^n},$$

которые вычисляются по формуле:

$$x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},\quad k=0,1,\ldots,n.$$

В случае произвольного отрезка *[a,b]* из этого равенства получим формулу для оптимальных узлов:

$$x_k=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},\qquad k=0,1,\ldots,n.$$

При этом оценка **(1.3)** примет вид:

$$\max_{x\in[a,b]}|\omega(x)|=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}},\quad \text{и}\quad |r_n(x)|\le\frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}.$$

5. Интерполирование по равноотстоящим узлам.

Приведем некоторые интерполяционные формулы для случая равноотстоящих узлов.

Пусть на отрезке *[a,b]* задана равномерная сетка $x_k=x_0+kn$, *k=0,1,…,n* и значения функции $f(x_k)=f_k$, *h>0.*

Пусть $x=x_0+th$ -- точка интерполирования. Тогда, используя **(1.1),** получаем *первую интерполяционную формулу Ньютона:*

$$P_n(x)=P_n(x_0+th)=f_0+\frac{t}{1!}\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0,$$

где $\Delta^0 f_i=f_i,\qquad \Delta^{n+1}f_i=\Delta^n f_{i+1}-\Delta^n f_i,\qquad$ *i=0,1,…,k-n* конечные разности.

Положив $x = x_n + th$, получаем *вторую интерполяционную формулу Ньютона:*

$$P_n(x) = P_n(x_n + th) = f_n + \frac{t}{1!}\Delta f_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n f_0$$

Для двух последних интерполяционных формул оценка погрешности интерполирования имеет вид:

$$|r_n(x)| \le \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!}|t(t-1)\ldots(t-n)|,$$

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|.$$

При малых значениях h и при условии непрерывности $f^{n+1}(x)$ можно приближенно считать:

$$M_{n+1} \approx \frac{\Delta^{n+1} f}{h^{n+1}}, \quad \text{где} \quad \Delta^{n+1} f = \max_{0 \le m \le n} \left| \Delta^{n+1} f_m \right|.$$

Тогда оценка остаточных членов первой и второй интерполяционных формул Ньютона имеет вид:

$$\textbf{(1.4)} \qquad |r_n(x)| \approx \frac{|t(t-1)\ldots(t-n)|}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f.$$

Формула **(1.4)** удобна тем, что позволяет делать оценку ошибки интерполирования без исследования *(n+1)-й* производной функции $f(x)$. На окончательную погрешность интерполирования, разумеется, влияет и вычислительная погрешность, поэтому при вычислении интерполяционных многочленов желательно сводить число арифметических операций к минимуму.

6. Примеры:

1) Построить многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках следующие значения:

Х	0	1	2	5
У	2	3	12	147

Вычислить в точке х=3 приближенное значение функции.

Решение: Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega(x)f(x_k)}{(x-x_k)\omega'(x_k)},$$

где $$\omega(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k),$$

$$\omega'(x)=\prod_{k,i=0}^{n}(x_k-x_i), \quad k\neq i$$ получим:

$$P_3(x)=\frac{2x(x-1)(x-2)(x-5)}{-10x}+\frac{3x(x-1)(x-2)(x-5)}{4(x-1)}+$$
$$+\frac{12x(x-1)(x-2)(x-5)}{-6(x-2)}+\frac{147x(x-1)(x-2)(x-5)}{60(x-5)}=x^3+x^2-x+2$$

$$f(3)\approx P_3(3)=35$$

2) С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа ln 100,5 по известным значениям ln 100, ln 101, ln 102, ln 103, ln 104 ?

Решение: Согласно формуле для остатка $r_4(x)=\frac{M_5}{5!}$.

Поскольку $(\ln x)^{(5)}=\frac{24}{x^5}$, то $M_5=\ln^{(5)}(100)=\frac{24}{100^5}$,

Вычисляя:
ω(x)=(100.5-100)(100.5-101)(100.5-102)(100.5-103)(100.5-104)= =3.28125 . Подставляя это в формулу для остатка, получаем:

$$M_5(100,5)=\frac{24\cdot 3.28125}{100^5\cdot 5!}<0,7\cdot 10^{-10}.$$

Поэтому: $|\ln 100,5-L_n(100,5)|\leq 0,7\cdot 10^{-10}$

3) Найти сумму конечного ряда нечетных чисел *S(p)=1+3+5+…+(2p-1)*
Решение: Известно, что *S(p)* является некоторым многочленом относительно *p*. Применим интерполяционную формулу Ньютона. Составим таблицу разделенных разностей для *S(p)*, а именно

$$S(p,p+1)=\frac{S(p+1)-S(p)}{(p+1)-p},$$

$$S(p,p+1,p+2)=\frac{S(p+1,p+2)-S(p,p+1)}{(p+2)-p},$$

$$S(p,p+1,\ldots,p+n+1)=\frac{S(p+1,p+2,\ldots,p+n+1)-S(p,p+1,\ldots,p+n)}{(p+n+1)-p}$$

Таблицу составляем до тех пор, пока не получим разделенные разности, равные нулю.

P	S(p)	S(p,p+1)	S(p,p+1,p+2)	S(p,p+1,p+2,p+3)
1	1	3	1	0
2	4	5	1	0
3	9	7	1	
4	16	9		
5	25			

Поскольку разделенные разности третьего порядка равны нулю,то *S(p)* является многочленом второй степени. Подставим подчеркнутые члены в формулу интерполяционного многочлена Ньютона, имеем:
$S(p)=1+3(p-1)+1(p-1)(p-2)=p^2$

7. **Контрольные задания:**
Найти многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках заданные значения:

Вариант-1: Вариант-2: Вариант-3:

X	Y		x	y		x	Y
1,45	3,14		0	2		0	1,45
1,36	4,15		1	3		1,5	3,14
1,14	5,65		5	147		6,8	4,11

Дана таблица значений функции f(x):

X	2,0	2,3	2,5	3,0	3,5	3,8	4,0
f(x)	5,848	6,127	6,300	6,694	7,047	7,243	7,368

Пользуясь формулой Лагранжа, найти значения функции в указанных точках:

Вариант-4: 2,22;
Вариант-5: 2,41;
Вариант-6: 2,78;
Вариант-7: 3,34;
Вариант-8: 3,75;
Вариант-9: 3,88.

Используя “барицентрический” вид многочлена Лагранжа, найти значения функций, заданных таблицами, в указанных точках:

Вариант-10:

X	14	17	31	35
F(x)	68,7	64,0	44,0	39,1

Найти f(20).

Вариант-11:

X	93,0	96,2	100,0	104,2	108,7
f(x)	11,38	12,80	14,70	17,07	19,91

Найти f(102).

Вариант-12:

X	0	2	3	6	7	9
F(x)	658503	704969	729000	804357	830584	884736

Найти f(5).

Построить интерполяционные многочлены Ньютона для функции $f(x) = \lg x - \frac{x-1}{x}$ по следующим узлам:

Вариант-13: x=1, 2, 4, 8, 10;
Вариант-14: x=2, 4, 8, 10;
Вариант-15: x=4, 8, 10;
Вариант-16: x=2, 4, 8.
(Для всех этих случаев вычислить приближенное значение **lg5,25.** Получить оценку погрешности остаточного члена.)

По данным таблицам значений функций определить значение аргумента **x,** соответствующее указанным значениям **y,** пользуясь многочленом Ньютона**:**

Вариант-17: y=0

X	1	2	2,5	3
У	-6	-1	5,625	16

Вариант-18: $y=20$

X	4	6	8	10
Y	11	27	50	83

Просуммировать конечные ряды:

Вариант-19: $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2$;

Вариант-20: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$;

Вариант-21: $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$;

Вариант-22: $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$.

Дана таблица значений функции y=shx.

X	Shx		x	Shx
1,0	1,17520		1,5	2,12928
1,1	1,33565		1,6	2,37557
1,2	1,50946		1,7	2,64563
1,3	1,69838		1,8	2,94217
1,4	1,90430			

Найти приближенные значения **shx** для следующих значений аргумента:

Вариант-23: 1,01; 1,02; 1,03; 1,11; 1,12; 1,13;
(*использовать первую интерполяционную формулу Ньютона*)

Вариант-24: 1,75; 1,76; 1,78; 1,79.
(*использовать вторую интерполяционную формулу Ньютона*)