Итерационные методы решения систем линейных уравнений

Итерационные методы решения систем линейных уравнений отличаются самоисправляемостью и простотой реализации на ЭВМ. Итерационные методы требуют задания начальных приближений. Сходимость итерационных методов зависит от свойств матрицы системы и выбора начальных приближений.

Рассматривается следующая система:

$$Ax = f\ , \qquad (1)$$

где $A = \lfloor a_{ij} \rfloor \quad i, j = 1,2,\ldots,m, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$.

1. Метод итераций

Перед применением метода итераций систему (1) необходимо привести к эквивалентному виду

$$x = Bx + C\,. \qquad (2)$$

Метод итераций для системы (2) имеет вид

$$x^{n+1} = Bx^n + C\,.$$

Теорема. *Если* $\|B\| < 1$*, где* $\|B\| = \max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{m} |a_{ik}|$ *то метод итераций сходится при любом начальном приближении* x^0 *со скоростью геометрической прогрессии.*

В качестве начального приближения обычно выбирается вектор свободных членов C, тогда для оценки числа итераций, необходимых для достижения заданной точности, можно использовать формулу

$$\|x^n - x\| \le \frac{\|B\|^{n+1}}{1 - \|B\|}\|C\| \qquad (3)$$

Пример. *Методом итераций решить систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}08x_4 + 2{,}15, \\ x_2 = 0{,}11x_1 + 0{,}16x_2 - 0{,}28x_3 - 0{,}06x_4 - 0{,}83, \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}12x_4 + 1{,}16, \\ x_4 = -0{,}21x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}27x_3 + 0{,}44, \end{cases}$$

предварительно оценив число необходимых для этого шагов, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Число шагов, дающих ответ с точностью до 0,001, определим из соотношения (3). Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}32 & -0{,}05 & 0{,}11 & -0{,}08 \\ 0{,}11 & 0{,}16 & -0{,}28 & -0{,}06 \\ 0{,}08 & -0{,}15 & 0 & 0{,}12 \\ -0{,}21 & 0{,}13 & -0{,}27 & 0 \end{pmatrix},$$

$\|B\| = \max\{0{,}56;\quad 0{,}61;\quad 0{,}35;\quad 0{,}61\} < 1$; значит, итерационный процесс сходится;

$$C = (2{,}15 \quad -0{,}83 \quad 1{,}16 \quad 0{,}44)^T,$$

$\|C\| = 2{,}15$. Имеем

$$\frac{0{,}61^{\kappa+1}}{0{,}39} \cdot 2{,}15 < 0{,}001;\quad 0{,}61^{k+1} < \frac{0{,}001 \cdot 0{,}39}{2{,}15};\quad (k+1) \cdot \lg 0{,}61 < -3 + \lg 0{,}39 - \lg 2{,}15;$$

$$k + 1 > \frac{3{,}7413}{0{,}2147} \approx 17{,}5;\quad k \ge 17\,.$$

В качестве нулевого приближения выбираем вектор C.

Вычисления расположим в таблице

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	2,15	-0,83	1,16	0,44
1	2,9719	-1,0775	1,5093	-0,4326
2	3,3555	-1,0721	1,5075	-0,7317
3	3,5017	-0,0106	1,5015	-0,8111
4	3,5511	-0,9277	1,4944	-0,8312
5	3,5637	-0,9563	1,4834	-0,8298
6	3,5678	-0,9566	1,4890	-0,8332
7	3,5700	-0,9575	1,4889	-0,8356
8	3,5709	-0,9573	1,4890	-0,8362
9	3,5712	-0,9571	1,4889	-0,8364
10	3,5713	-0,9570	1,4890	-0,8364

2. Метод Якоби

Метод Якоби для системы (1) в координатной форме имеет вид

$$x_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j\neq i} a_{ij}x_i^n + f_i\right), \quad i = 1,\ldots,m$$

Теорема. *Пусть A - матрица с диагональным преобладанием, то есть*

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{i\neq i} a_{ij}\ .$$

Тогда метод Якоби сходится.

Если систему (1) представить в виде (2), то можно оценить количество итераций по формуле (3).

Пример. *Методом Якоби решить систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} 2x_1 - 1{,}8x_2 + 0{,}4x_3 = 1 & (\mathrm{I}) \\ 3x_1 + 2x_2 - 1{,}1x_3 = 0 & (II) \\ x_1 - x_2 + 7{,}3x_3 = 0 & (III) \end{cases}$$

предварительно приведя матрицу системы к матрице с диагональным преобладанием и оценить число необходимых шагов для достижения точности 0,001.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк:

$$\begin{cases} 25x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = 5 & (5\mathrm{I} + 5\mathrm{II}) \\ -9{,}4x_2 + 3{,}4x_3 = 3 & (3I + 2II) \\ x_1 - x_2 + 7{,}3x_3 = 0 & (III) \end{cases}$$

Для оценки числа итераций запишем эту систему в виде (2), поделив каждое уравнение на диагональный элемент:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}04x_2 + 0{,}41x_3 - 0{,}2 \\ x_2 = 0{,}36x_3 - 0{,}32 \\ x_3 = 0{,}14x_2 - 0{,}14x_1 \end{cases}$$

Число шагов, дающих ответ с точностью до 0,001, определяется из соотношения (3). Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}04 & 0{,}41 \\ 0 & 0 & 0{,}36 \\ 0 & 0{,}14 & 0{,}14 \end{pmatrix},$$

$\|B\| = \max\{0{,}45; \quad 0{,}36; \quad 0{,}28\} = 0{,}45$;

$$C = \begin{pmatrix} -0{,}2 & -0{,}32 & -0{,}14 \end{pmatrix}^T,$$

$\|C\| = 0{,}32$. Имеем

$$\frac{0{,}45^{\kappa+1}}{0{,}55} \cdot 0{,}32 < 0{,}001; \quad 0{,}45^{k+1} < \frac{0{,}001 \cdot 0{,}55}{0{,}32}; \quad (k+1) \cdot \lg 0{,}45 < -3 + \lg 0{,}55 - \lg 0{,}32;$$

$$k > 19.$$

Нулевое приближение $x^0 = C$;

Вычислим первое приближение

$$x_i^1 = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j \neq i} a_{ij} x_i^0 + f_i \right) x_1^1 = i = 1{,}2$$

где a_{ij} - элементы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 1 & -3{,}5 \\ 0 & -9{,}4 & 3{,}4 \\ 1 & -1 & 7{,}3 \end{pmatrix},$$

а f_i - элементы вектора $f = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T$.

$$x_1^1 = -\frac{1}{25}\left((1-3{,}5)x_1^0 + f_1\right), \qquad x_1^1 = -0{,}22.$$

$$x_2^1 = \frac{1}{9{,}4}\left(3{,}4x_2^0 + f_2\right), \qquad x_2^1 = 0{,}2034.$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{7{,}3}\left((1-1)x_1^0 + f_3\right), \qquad x_3^1 = 0.$$

Для окончания вычислений нужно произвести 20 итераций.

3. Метод простой итерации

Метод простой итерации для системы (1) имеет вид

$$x^{n+1} = (E - \tau A)x^n + \tau f$$

или в канонической форме

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} - Ax^n = f,$$

где $\tau > 0$ - постоянный итерационный параметр.

Теорема. *Если A - симметричная положительно определенная матрица, тогда метод простой итерации сходится при* $0 < \tau < \dfrac{2}{\lambda_{\max}}$.

Теорема. *Если* $\|B\| < 1$, *где* $B = (E - \tau A)$, *то метод простой итерации сходится.*

Пример. *Пусть матрица A имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

тогда

$$B = \begin{pmatrix} 1-4\tau & \tau & 0 \\ \tau & 1-3\tau & -\tau \\ 0 & -2\tau & 1-6\tau \end{pmatrix};$$

$\|B\|_\infty = \max\{1-3\tau \quad 1-\tau \quad 1-4\tau\}$. (складываются модули элементов в каждой

строке)

Выберем τ так, чтобы выполнялось условие сходимости $\|B\| < 1$.

$$\tau = \frac{1}{9}.$$

Число итераций, необходимое для заданной точности, можно вычислить как в случае метода итераций.

4. Метод Зейделя

Итерационный метод Зейделя для системы (1) в координатной форме имеет вид

$$x_k^{n+1} = \frac{1}{a_{kk}}\left(f_k - \sum_{j>k} a_{kj} x_j^n - \sum_{j<k} a_{kj} x_j^{n+1} \right), \quad k = 1,\ldots,m$$

Теорема. *Если A - матрица с диагональным преобладанием, тогда метод Зейделя сходится для любого начального приближения.*

Теорема. *Если A - симметричная положительно определенная матрица, тогда метод Зейделя сходится.*

Пример. *Методом Зейделя решить с точностью 0,001 систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} 4{,}5x_1 - 1{,}8x_2 + 3{,}6x_3 = -1{,}7 & (\mathrm{I}) \\ 3{,}1x_1 + 2{,}3x_2 - 1{,}2x_3 = 3{,}6 & (II) \\ 1{,}8x_1 + 2{,}5x_2 + 4{,}6x_3 = 2{,}2 & (III) \end{cases},$$

приведя ее к виду, удобному для итераций.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 & (\mathrm{I}+\mathrm{II}) \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 & (2III + II - I) \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4 & (III - II) \end{cases}$$

Нулевое приближение $x^0 = (1{,}9 \quad 9{,}7 \quad -1{,}4)^T$.

Первое приближение

$$x_1^1 = \frac{1}{7{,}6}(1{,}9 - 0{,}5 * 2{,}7 + 2{,}4 * 1{,}4) = 0{,}5145$$

$$x_2^1 = \frac{1}{9{,}1}(9{,}7 + 4{,}4 * 1{,}4 - 2{,}2 * 0{,}5145) = 1{,}6185$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5{,}8}(-1{,}4 + 1{,}3 * 0{,}5145 - 0{,}2 * 1{,}6185) = -0{,}1819$$

и т.д.

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1\le i\le m}\left|x_i^{n+1}-x_i^n\right|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ - заданное число.

5. *Метод верхней релаксации*

Метод верхней релаксации является обобщением метода Зейделя. В координатной форме метод верхней релаксации имеет следующий вид

$$x_i^{n+1}+\omega\sum_{j<i}\frac{a_{ji}}{a_{ii}}x_j^{n+1}=(1-\omega)x_i^n-\omega\sum_{j>i}\frac{a_{ji}}{a_{ii}}x_j^n+\omega\frac{d_i}{a_{ii}},\quad i=1,\ldots,2$$

При $\omega=1$ этот метод совпадает с методом Зейделя.

Теорема. *Если A - симметричная положительно определенная матрица, тогда метод верхней релаксации сходится при $0<\omega<2$.*

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1\le i\le m}\left|x_i^{n+1}-x_i^n\right|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ - заданное число.

6. *Метод минимальных невязок*

Метод минимальных невязок определен для систем уравнений с симметричной положительно определенной матрицей A. Этот метод определяется формулой

$$x^{n+1}=x^n-\tau_{n+1}\left(Ax^n-f\right),\tag{4}$$

где параметр τ_{n+1} выбирается из условия минимума $\left\|r^{n+1}\right\|=\left\|Ax^{n+1}-f\right\|$ при заданной норме $\left\|r^n\right\|$:

$$\tau_{n+1}=\frac{\left(Ar^n,r^n\right)}{\left\|Ar^n\right\|^2},\quad r^n=Ax^n-f$$

Теорема. *Если A - симметричная положительно определенная матрица, тогда метод минимальных невязок сходится.*

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1\le i\le m}\left|x_i^{n+1}-x_i^n\right|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ - заданное число.

7. *Метод скорейшего спуска*

Если в формуле (4) итерационный параметр r^{k+1} выбирается из условия минимума $\left\|z_{k+1}\right\|_A=\left\|x^{k+1}-x\right\|_A$, где $\left\|x\right\|_A=\sqrt{(Ax,\ \ x)}$ при заданном z_k, то этот метод называется методом скорейшего спуска. Итерационные параметры вычисляются по формуле

$$r^{k+1}=\frac{(r_k,\ \ r_k)}{(Ar_k,\ \ r_k)},\qquad r_k=Ax^k-f.$$

Теорема. *Пусть A – симметричная положительно определенная матрица, тогда метод скорейшего спуска сходится.*

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1\le i\le m}\left|x_i^{n+1}-x_i^n\right|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ - заданное число.

Задачи

Методом итераций решить системы линейных уравнений, предварительно приведя их к виду, удобному для итераций и оценив число необходимых для этого шагов, $\varepsilon=\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$.

№ 1.

$$\begin{cases}-0{,}32x_1-1{,}27\,x_2+0{,}27\,x_3-0{,}18x_4=-0{,}36\\ 0{,}45\,x_1-1{,}23\,x_2+0{,}06\,x_3=0{,}88\\ 0{,}31\,x_1+0{,}08\,x_2-0{,}77\,x_3-1{,}12\,x_4=0{,}55\\ 0{,}05\,x_1-0{,}26\,x_2-0{,}34\,x_3-1{,}12\,x_4=1{,}17\end{cases}$$

№ 2.

$$\begin{cases}-0{,}79\,x_1+0{,}31\,x_2-0{,}72\,x_4=-0{,}11\\ 0{,}56\,x_1-x_2-1{,}31\,x_3+0{,}85\,x_4=-0{,}52\\ 0{,}11\,x_1-1{,}08\,x_3+0{,}78\,x_4=-0{,}85\\ 0{,}08\,x_1+0{,}09\,x_2+0{,}33\,x_3-0{,}79\,x_4=1{,}7\end{cases}$$

№ 3.

$$\begin{cases}-x_1+0{,}24\,x_2-0{,}48\,x_3+0{,}23\,x_4=0{,}39\\ -0{,}05\,x_1-x_2+0{,}44\,x_3+0{,}31\,x_4=0{,}72\\ -1{,}1\,x_1+0{,}27\,x_2-1{,}48\,x_3-0{,}32\,x_4=0{,}95\\ -0{,}88\,x_1+0{,}17\,x_2-0{,}37\,x_3-0{,}77\,x_4=0{,}86\end{cases}$$

№ 4.

$$\begin{cases}-x_1+0{,}22\,x_2-0{,}11\,x_3+0{,}31\,x_4=-2{,}7\\ -0{,}62\,x_1-0{,}78\,x_2-0{,}23\,x_3+0{,}53\,x_4=-1{,}2\\ 0{,}28\,x_1+0{,}22\,x_2-0{,}69\,x_3-1{,}51\,x_4=-1{,}03\\ 0{,}17\,x_1-0{,}21\,x_2+0{,}31\,x_3-x_4=0{,}17\end{cases}$$

Методом Якоби решить системы линейных уравнений, предварительно приведя матрицу системы к матрице с диагональным преобладанием и оценив число необходимых шагов для достижения точности 0,001.

№ 5.

$$\begin{cases}2{,}3\,x_1+1{,}1\,x_2+0{,}23\,x_3=3{,}3\\ -2x_1+1{,}3\,x_2+1{,}77\,x_3=-0{,}7\\ 2{,}5\,x_1+3{,}2\,x_2+2{,}73\,x_3=7{,}7\end{cases}$$

№ 6.

$$\begin{cases} -2{,}4x_1 + x_2 + 1{,}2x_3 = 5{,}1 \\ 0{,}93x_1 - 2{,}5x_2 + 5{,}8x_3 = 11{,}1 \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}4x_3 = 1{,}5 \end{cases}$$

№ 7.

$$\begin{cases} 1{,}3x_1 - 0{,}3x_2 + 3{,}8x_3 = 3{,}9 \\ 4{,}63x_1 - 4x_2 + 3{,}4x_3 = 9{,}9 \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 - 2{,}6x_3 = 1{,}5 \end{cases}$$

№ 8.

$$\begin{cases} 2{,}15x_1 + 2{,}3x_2 - 0{,}3x_3 = 4 \\ 0{,}25x_1 + 2{,}5x_2 - 1{,}3x_3 = 2{,}5 \\ -0{,}3x_1 + 3{,}9x_2 + 1{,}2x_3 = 4{,}5 \end{cases}$$

Методом простой итерации решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001.

№ 9.

$$\begin{cases} 2{,}8x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}4x_3 + 1{,}2x_4 = 2{,}23 \\ 0{,}42x_1 + 3{,}7x_2 - 1{,}5x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}71 \\ 0{,}05x_1 - 0{,}13x_2 + 2{,}2x_3 + 1{,}3x_4 = -0{,}54 \\ -1{,}2x_1 - 1{,}1x_2 + 2x_3 + 4{,}7x_4 = 0{,}65 \end{cases}$$

№ 10.

$$\begin{cases} 3{,}3x_1 + 1{,}2x_2 - 0{,}07x_3 + x_4 = 0{,}23 \\ 0{,}1x_1 + 2{,}7x_2 + 0{,}3x_3 - 1{,}2x_4 = 7{,}2 \\ 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 2{,}2x_3 + 0{,}5x_4 = -0{,}22 \\ 0{,}2x_1 - 0{,}3x_2 - 0{,}4x_3 + 1{,}8x_4 = -0{,}6 \end{cases}$$

№ 11.

$$\begin{cases} 3{,}4x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}2x_3 - 1{,}2x_4 = 2 \\ -0{,}7x_1 + 3{,}3x_2 - 0{,}3x_3 + 2x_4 = 1{,}9 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 2{,}6x_3 + 0{,}2x_4 = -0{,}4 \\ -0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = -6{,}5 \end{cases}$$

№ 12.

$$\begin{cases} 2{,}5x_1 - 0{,}12x_2 + 2{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = -1{,}2 \\ 1{,}2x_1 + 3x_2 + x_3 - 1{,}5x_4 = 0{,}1 \\ 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 + 2{,}5x_3 + 0{,}7x_4 = -0{,}4 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}8x_3 + 3{,}7x_4 = 0{,}6 \end{cases}$$

Методом Зейделя решить системы линейных уравнений, приведя их к виду, удобному для итераций, $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

№ 13.

$$\begin{cases} 2{,}7x_1 + 0{,}9x_2 - 1{,}5x_3 = 3{,}5 \\ 4{,}5x_1 - 2{,}8x_2 + 6{,}7x_3 = 2{,}6 \\ 5{,}1x_1 + 3{,}7x_2 - 1{,}4x_3 = -0{,}14 \end{cases}$$

№ 14.

$$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 6{,}7x_2 - 1{,}2x_3 = 5{,}2 \\ 6{,}4x_1 + 1{,}3x_2 - 2{,}7x_3 = 3{,}8 \\ 2{,}4x_1 - 4{,}5x_2 + 3{,}5x_3 = -0{,}6 \end{cases}$$

№ 15.

$$\begin{cases} 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5 \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5 \end{cases}$$

№ 16.

$$\begin{cases} 5{,}6x_1 + 2{,}7x_2 - 1{,}7x_3 = 1{,}9 \\ 3{,}4x_1 - 3{,}6x_2 - 6{,}7x_3 = -2{,}4 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 + 3{,}7x_3 = 1{,}2 \end{cases}$$

Методом верхней релаксации решить системы линейных уравнений, приведя их к виду, удобному для итераций, $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

№ 17.

$$\begin{cases} 2{,}7x_1 + 3{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}1 \\ 3{,}5x_1 - 1{,}7x_2 + 2{,}8x_3 = 1{,}7 \\ 4{,}1x_1 + 5{,}8x_2 - 1{,}7x_3 = 0{,}8 \end{cases}$$

№ 18.

$$\begin{cases} 3{,}6x_1 + 1{,}8x_2 - 4{,}7x_3 = 3{,}8 \\ 2{,}7x_1 - 3{,}6x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}4 \\ 1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 + 3{,}3x_3 = -1{,}6 \end{cases}$$

№ 19.

$$\begin{cases} 3{,}7x_1 - 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 = 2{,}4 \\ 2{,}5x_1 + 4{,}7x_2 - 7{,}8x_3 = 3{,}5 \\ 1{,}6x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = -2{,}4 \end{cases}$$

№ 20.

$$\begin{cases} 2{,}4x_1 + 3{,}7x_2 - 8{,}3x_3 = 2{,}3 \\ 1{,}8x_1 + 4{,}3x_2 + 1{,}2x_3 = -1{,}2 \\ 3{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 5{,}2x_3 = 3{,}5 \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений методом минимальных невязок и методом скорейшего спуска, $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

№ 21.

$$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 1{,}23x_3 = 0{,}16 \\ -1{,}18x_1 + 1{,}71x_2 - 0{,}52x_3 = 1{,}81 \\ 1{,}23x_1 - 0{,}52x_2 + 0{,}62x_3 = -1{,}25 \end{cases}$$

№ 22.

$$\begin{cases} 1{,}17x_1 - 0{,}65x_2 + 1{,}54x_3 = -1{,}43 \\ -0{,}65x_1 + 1{,}16x_2 - 1{,}33x_3 = 0{,}68 \\ 1{,}54x_1 - 1{,}33x_2 + 2{,}15x_3 = 1{,}87 \end{cases}$$

№ 23.

$$\begin{cases} 3{,}74x_1 + 0{,}86x_2 + 1{,}13x_3 = 1{,}13 \\ 0{,}86x_1 + 1{,}71x_2 - 0{,}49x_3 = 1{,}88 \\ 1{,}13x_1 - 0{,}49x_2 + 1{,}26x_3 = -0{,}25 \end{cases}$$

№ 24.

$$\begin{cases} 2{,}01x_1 - 0{,}53x_2 + 1{,}13x_3 = -2{,}09 \\ -0{,}53x_1 + 1{,}62x_2 - 1{,}03x_3 = 0{,}39 \\ 1{,}13x_1 - 1{,}03x_2 + 2{,}34x_3 = 2{,}13 \end{cases}$$