Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы Абсолютная и Семантическая стойкость

Макаров Артём

МИФИ 2021

Структура курса

- Лекции: 16 недель

- Сдача разделов: 3 блока
  - Для каждого блока жёсткий дедлайн (без переносов)
  - https://github.com/CryptoCourse/CryptoLectures/wiki/Список-домашних-работ-и-лекций
  - https://github.com/CryptoCourse/CryptoLabs/wiki/список-лабораторных-работ
  - **Штраф за пропуск дедлайна: -5/100 к итоговой оценке за семестр за каждый дедлайн в неделю**
- Для сдачи каждого блока:
  - Сдача лабораторных работ для данного блока
  - Сдача домашних работ
  - Сдача теории по лабораторным и домашним

Связь

https://vk.com/zmacr
vk.com
(∀вопросы)

https://discord.gg/Vb38A6H
Discord
(сдача лаб и дз)

https://t.me/f1589
t.me
(∀вопросы)

Лабораторные работы

- Образ Linux машины с развёрнутой REST API службой.
- Задача – продемонстрировать атаку на криптосистему систему с уязвимостью.
- Допустимые языки программирования: C++, C#, Python, Java, другие?
- Подробнее на лабораторной работе.

Сдача теории

- Сдаётся в формате вопрос – ответ
  - Задаётся набор различных вопросов по пройденному материалу
  - Если на какой то вопрос ответ не получен, или получен не верный ответ – даётся время подумать или поискать ответ
  - Количество попыток – не ограничено внутри блока

- Несправедливости:
  - Разное количество вопросов разным людям
  - Максимальное количество вопросов – не ограничено
  - Возможность не сдать теорию, даже если в гугле были найдены все ответы

Материалы прошлого года

- Курс обновляется в момент чтения. Материалы прошлого года доступны, но еженедельно обновляются.
- Доверять и использовать нужно только текущие материалы, т.е. материалы всех прошедших в семестре лекций и лабораторных заданий текущего блока.
- Не рекомендуется выполнять задания «наперёд», так как материал может измениться

Материалы прошлого года

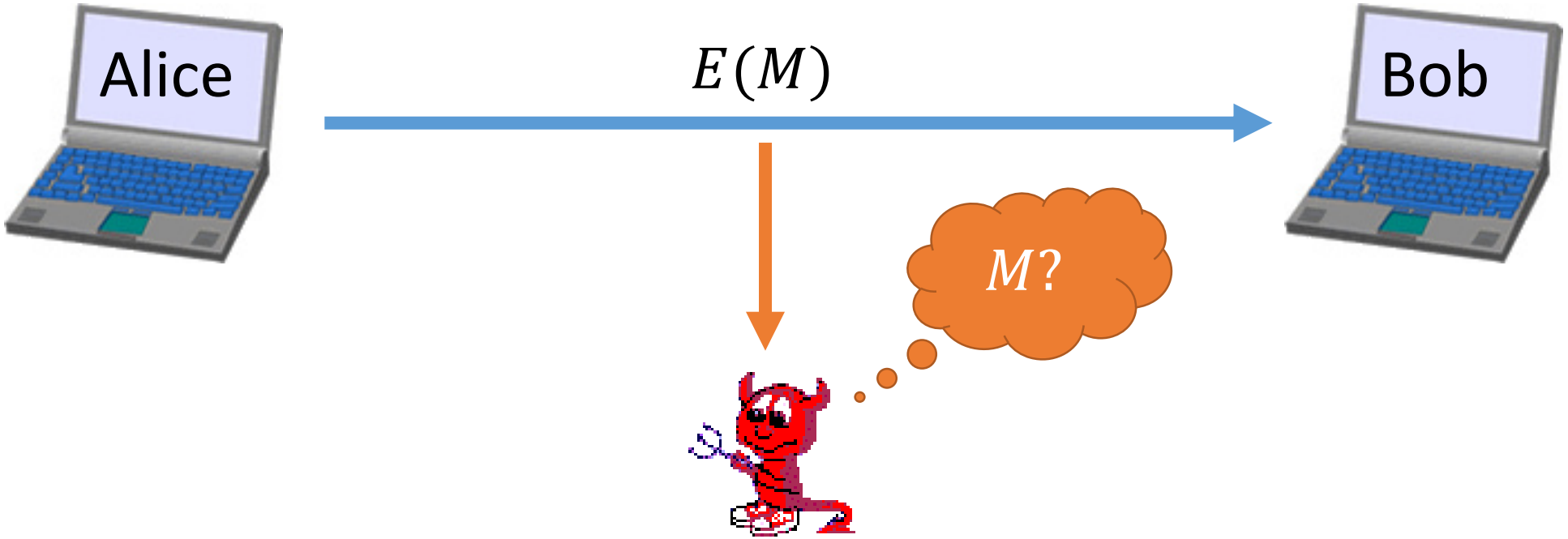
Название	Описание	Блок	Сроки сдачи
Атака при многократном использовании одноразового блокнота	link	1	07.09.19 - 21.09.19(06:00)
Атака на аутентичность при использовании поточных шифров	link	1	07.09.19 - 21.09.19(06:00)
X Атака на аутентичность блочного шифра в режиме CBC	meh	2	20.09.18 - 01.11.18(06:00)

Лекция	Описание	Блок	Сроки сдачи домашней работы
1	Абсолютная и семантическая стойкость (лекция, задание)	1	14.09.19
2	Поточные шифры (лекция, задание)	1	XXXX
3	Практические аспекты (лекция)	1	null

Обратная связь и пожелания по курсу

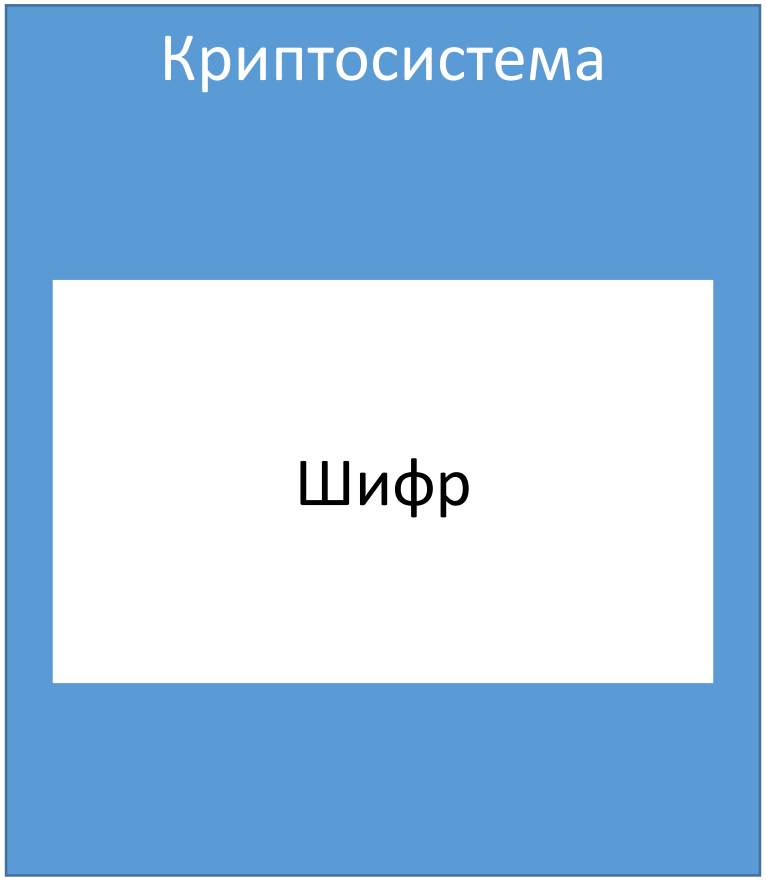
Историческая задача криптографической защите информации

- Передача зашифрованного сообщения по открытому каналу
- При перехвате зашифрованного сообщения открытый текст должен остаться неизвестным для злоумышленника



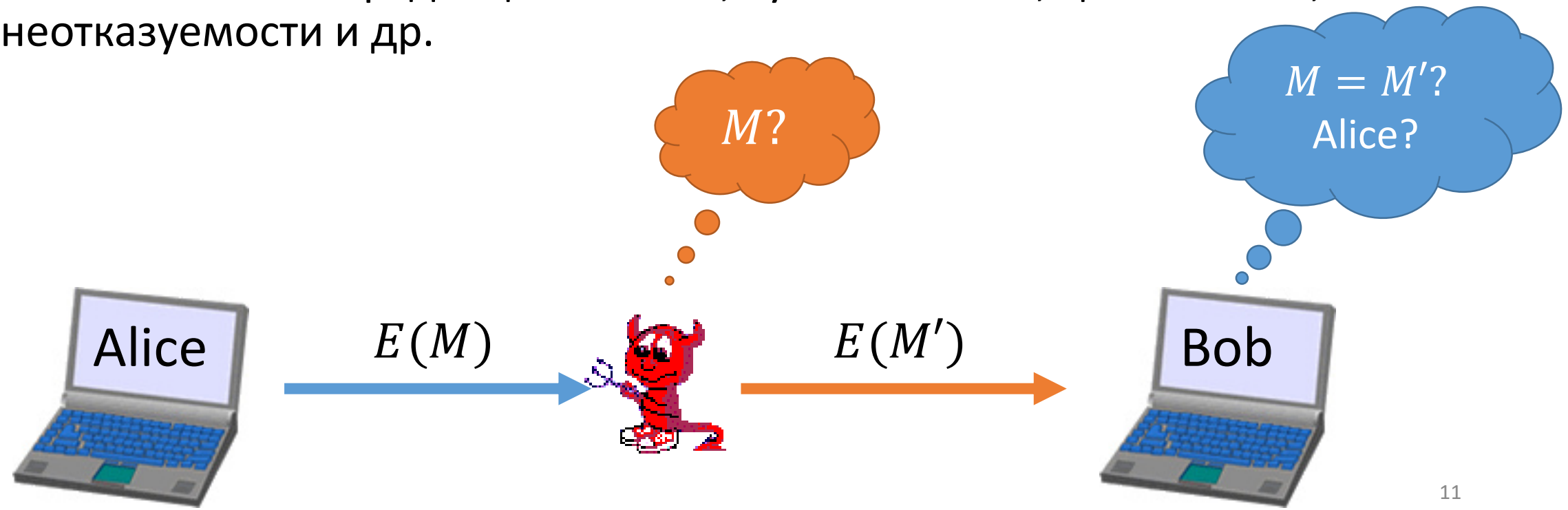
Способы построения и анализа криптосистем

- **Досистемный подход**– построение и анализ криптосистем, которые выглядят «сложными» для создателя;
- Предположении о стойкости исходит «из очевидной сложности взлома» для создателя схемы
- Примеры – шифр Цезаря, шифр простой замены, шифр Вижинера



Современная задача криптографической защиты информации

- Передача сообщения по открытому каналу
- Возможен активный злоумышленник
- Обеспечение конфиденциальности, аутентичности, целостности, неотказуемости и др.



Способы построения и анализа криптосистем

- **Системный подход**– построение и анализ криптосистем на основе криптографических примитивов
- Возможно наличие не только средств обеспечения секретности, но и аутентичности, целостности и других
- Предположении о стойкости исходит из анализа системы в целом, через сведение стойкости в сложности вычислительно сложной задачи
- При замене части системы необходимо произвести анализ заново

Способы построения и анализа криптосистем

- **Современный подход**– построение и анализ криптосистем на основе абстрактных моделей криптографических примитивов
- Вместо анализа частных свойств примитивов и их взаимодействия производится анализ самой конструкции, вне зависимости от используемых примитивов и их стойкости
- Предположении о стойкости исходит из анализа системы в предположении об априорной стойкости примитивов
- При замене части системы нет необходимости проводить повторных анализ

Сведение стойкости (Security Reduction)

Наиболее распространённый способ доказательства практической стойкости криптографического примитива является сведение атаки на него к вычислительно сложной задаче. Иными словами показывается, что произвести атаку на примитив так же сложно как решить вычислительно сложную задачу.

Сведение стойкости (Security Reduction)

Доказательство стойкости криптосистемы показывается сведением её к стойкости криптографических примитив. При современном подходе описание системы использует только абстрактные модели примитивов (PRF, PRP, и другие).

Сведение стойкости (Security Reduction)

Пусть A – стойкая система. Показать что система B стойкая. ($A \to B$). (Показать сведение стойкости системы B к стойкости системы A.

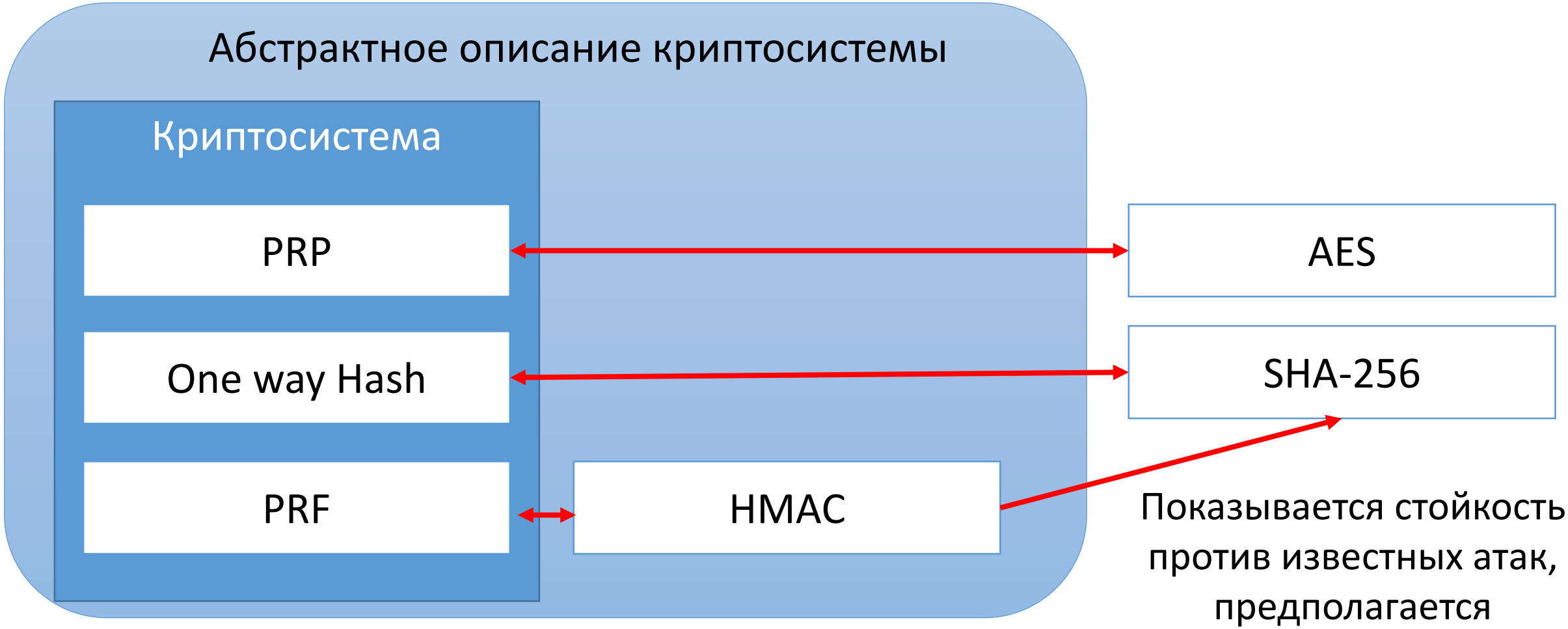
▻От противного. Пусть существует атака на систему B. Попробуем использовать эту атаку для построения атаки на систему A.

(Строим атаку на систему A).

Следовательно, из предположения нестойкости системы B (предположения о наличии атаки) мы построили атаку на систему A, $\bar{B} \to \bar{A}$.

Но система A – стойкая, следовательно предположение не верно и B – стойкая. ◅

Сведение стойкости (Security Reduction)



Показывается теоретическая стойкость, при предположении о стойкости абстрактных примитивов.

Показывается стойкость против известных атак, предполагается теоретическая стойкость.

Сведение стойкости криптографический примитивов

- Для симметричных криптосистем стойкость сводится к задаче 3SAT:
  - Пусть дана булевая функция от N переменных
  - Найти вектор решений, при котором значение булевой функции равно 1.
  - NP полная задача

- Для асимметричных криптосистем стойкость может сводится:
  - Задача дискретного логарифмирования в конечных группах
  - Задача факторизации больших целых чисел
  - Задача нахождения кратчайшего вектора решётки
  - Задача декодирования линейных кодов
  - Задача решения многомерных квадратичных многочленов
  - Др.

Шифр Шеннона

Шифр Шеннона - пара функций $\mathrm{E} = (E, D)$, таких что:

- (1) Функция E (**функция зашифрования**) принимает на вход ключ k и сообщение m (называемой открытым текстом, PT) и даёт на выходе шифртекст c (CT), такой что

$$c = E(k, m).$$

Говорят, что c есть **зашифрование** m на ключе k.

- (2) Функция D (**функция расшифрования**) принимает на вход ключ k и шифртекст c и даёт на выходе сообщение m, такое что

$$m = D(k, c)$$

Говорят, что m это **расшифрование** c на ключе k.

Шифр Шеннона

- (3) Функция D обращает функцию E (**свойство корректности**):

$$\forall k, \forall m\ D\big(k, E(k, m)\big) = m.$$

Пусть K – **множество ключей**, M **– множество сообщений**, C **– множество шифртекстов**.

Тогда шифром Шеннона, определённым над (K, M, C) называют пару функций $\mathrm{E} = (E, D)$:

$$E\colon K \times M \to C,$$
$$D\colon K \times C \to M,$$

для которых выполняются свойства (1) – (3).

Нотация

$v \in V_n = \{0,1\}^n$ - двоичный вектор длины n ($|v| = n$)

0^n- двоичный вектор $(000 \ldots 00) \in V_n$

1^n - двоичный вектор $(111 \ldots 11) \in V_n$

$0^k 1^l$- двоичный вектор $\underbrace{(000 \ldots 00}_{k}\underbrace{111 \ldots 11)}_{l} \in V_{k+l}$

$v' \in \{0,1\}^* = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{0,1\}^k$ - двоичный вектор произвольной длины

$v'' \in \{0,1\}^{\leq L} = \bigcup_{k=0}^{L}\{0,1\}^k$ - двоичный вектор, длины не больше L

Нотация

$v \in V_n = \{0,1\}^n$ - двоичный вектор длины n ($|v| = n$)

Пусть $a \in V_n: a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, $b \in V_n: b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$

$ab = (a||b) \in V_{2n}: (a||b) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ – конкатенация векторов a и b

$v[q]$ - q-я координата вектора v, $q < n$

$v[q, q+1, \dots w] \in V_{w-q+1}$- подвектор, полученный из координат вектора v, $q < w < n$.

Нотация

$x \in_R X$ - $x \in X$, выбранный случайно равновероятно (если не указано явно иное распределение)

$x \leftarrow_R X$ – выбор случайного равновероятного $x \in X$ (если не указано явно иное распределение)

$\Pr[W]$ – вероятность события W

О.Т. (Р.Т.) – Откртый текст (Plain Text)

Ш.Т (С.Т.) – Шифртекст (Cipher Text)

Пример: Одноразовый блокнот

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – **шифр Шеннона**, для которого $K = M = C = \{0,1\}^L$, где L – фиксированный параметр.

Для ключа $k \in K$ и сообщения $m \in M$ функция **зашифрования** определена как:

$$E(k, m) = k \oplus m.$$

Для ключа $k \in K$ и шифртекста $c \in C$ функция **расшифрования** определена как:

$$D(k, c) = k \oplus c.$$

$\oplus$ - побитное сложение по модулю 2 (XOR).

Корректность: $D\big(k, E(k, m)\big) = D(k, k \oplus m) = k \oplus (k \oplus m) = (k \oplus k) \oplus m = 0^L \oplus m = m$.

Пример: Одноразовый блокнот переменной длины

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – **шифр Шеннона**, для которого $K = \{0,1\}^L, M = C = \{0,1\}^{\leq L}$, где L – фиксированный параметр.

Для ключа $k \in K$ и сообщения $m \in M$: $|m| = l$ функция **зашифрования** определена как:

$$E(k, m) = k[0..l-1] \oplus m.$$

Для ключа $k \in K$ и шифртекста $c \in C$: $|c| = l$ функция **расшифрования** определена как:

$$D(k, c) = k[0..l-1] \oplus c.$$

$\oplus$ - побитное сложение по модулю 2 (XOR).

Корректность: $D\big(k, E(k, m)\big) = D(k, k \oplus m) = k \oplus (k \oplus m) = (k \oplus k) \oplus m = 0^L \oplus m = m$.

Пример: Шифр подстановки

Пусть Σ – конечный алфавит. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – **шифр Шеннона**. для которого $M = C = \Sigma^L$, где L – фиксированный параметр. $K = S(\Sigma)$ – множество всех подстановок над Σ.

Для ключа $k \in K$ и сообщения $m \in M$: $|m| = L$ функция **зашифрования** определена как:

$$E(k, m) = (k(m[0]), k(m[1]), \dots, k(m[L-1])).$$

Для ключа $k \in K$ и шифртекста $c \in C$: $|c| = l$ функция **расшифрования** определена как:

$$D(k, c) = (k^{-1}(c[0]), k^{-1}(c[1]), \dots, k^{-1}(c[L-1])).$$

Корректность: $D\big(k, E(k, m)\big) =$

$$(k^{-1}(k(m[0])), \dots, k^{-1}(k(m[L-1])) = (m[0], \dots, m[L-1]) = m$$

Пример: Аддитивный одноразовый блокнот

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – **шифр Шеннона**, для которого $K = M = C = \{0, \dots, n-1\}^L$, где n – фиксированный параметр.

Для ключа $k \in K$ и сообщения $m \in M$ функция **зашифрования** определена как:

$$E(k, m) = (m + k) \bmod n, \text{покоординатно}$$

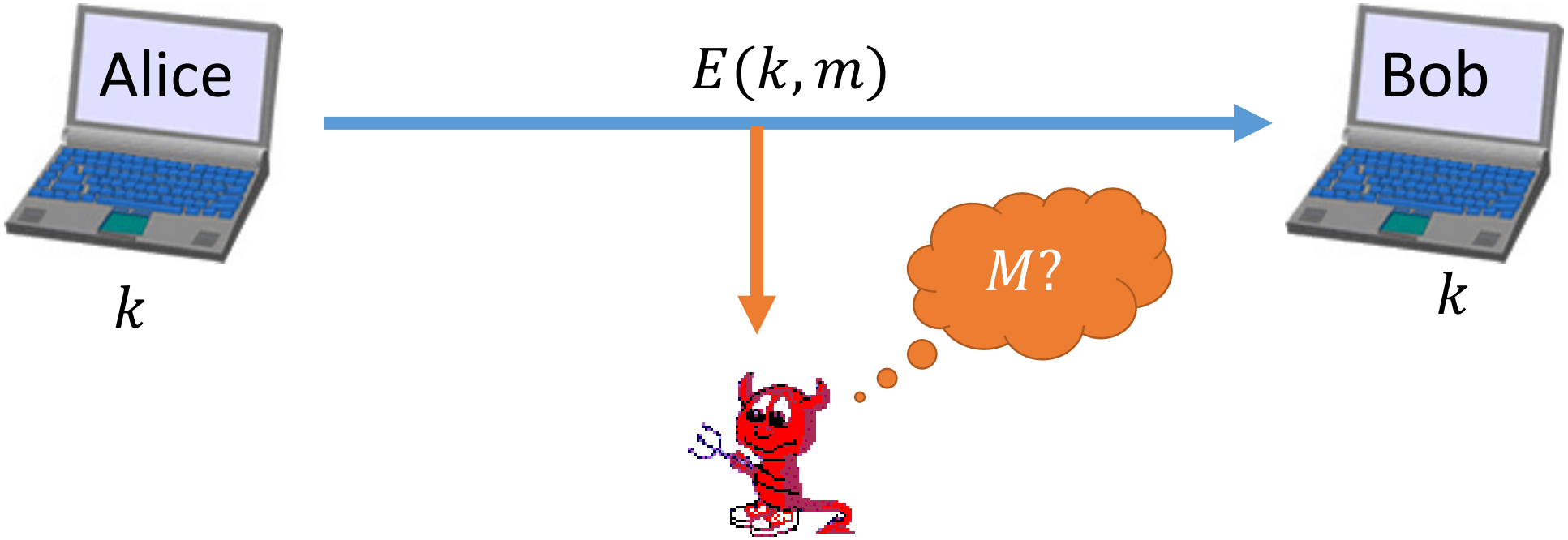
Для ключа $k \in K$ и шифртекста $c \in C$ функция **расшифрования** определена как:

$$D(k, c) = (c - k) \bmod n, \text{покоординатно}$$

Корректность: $D\big(k, E(k, m)\big) = D(k, m + k) = (m + k) - k = m$.

Цель шифра Шеннона

- Цель шифра Шеннона – обеспечение **секретности** передаваемых сообщений по открытому каналу
- Для обеспечения секретности необходим общий секретный ключ $k \in K$, неизвестный для злоумышленника



Понятие стойкости

Очевидный вопрос – что понимать под стойкостью шифра?

Стойкость – метрика качества шифра.

- Попытка 1: размер ключа
  - Чем больше ключ, тем сложнее перебрать все возможные варианты. Длина ключа как параметр стойкости.
  - Но возможны и другие атаки, кроме перебора, например частотный анализ
  - Пример – шифр подстановки, $|\Sigma| = 27$, $K = S(\Sigma)$: $|K| \sim 10^{28}$, но возможна полиномиальная частотная атака

Понятие стойкости

- Попытка 2: малая вероятность расшифрования
  - Чем меньше вероятность расшифрования для злоумышленника, тем более стойкий шифр. Вероятность расшифрования как параметр стойкости.
  - Но тогда шифр определённый на коротких сообщениях, например 1 бит, менее стойкий чем шифр, определённый на длинных сообщениях, так как велика возможность «угадать» сообщение.
  - Иными словами, невозможно обеспечить стойкость при шифровании однобитного сообщения

Понятие стойкости

- Попытка 3: **равная** вероятность расшифрования
  - При данном шифртексте вероятность расшифрованы его в любой открытый текст **одинакова**
  - Пример нестойкого шифра: $M = \{0,1\}^n$, $\mathrm{E} = (E, D)$ – шифр Шеннона над (K, M, C):

$$K_0 \subset K : E(k_0, \mathrm{m}_0) = \mathrm{c}\,,$$
$$K_1 \subset K : E(k_1, \mathrm{m}_1) = c,$$
$$|K_0| > |K_1|$$
$$m_0, m_1 \in M : m_0 \neq m_1; (k_0, k_1) \in (K_0 \times K_1)$$

Вероятность расшифровать C как m_0 ($|K_0| = 800, |K_1| = 600$):

$$\frac{|K_0|}{|K_0| + |K_1|} \approx 57\% > 50\%$$

Абсолютная стойкость

Определение 1.1. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – шифр шеннона над (K, M, C). Рассмотрим вероятностный эксперимент, в котором случайная величина $\boldsymbol{k}$ равномерна распределена на K ($\boldsymbol{k} \in_R K$).

Если $\forall m_0, m_1 \in M$ и $c \in C$ имеем:

$$\Pr[E(\boldsymbol{k}, m_0) = c] = \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_1) = c]$$

То шифр E называется **абсолютно стойким шифром Шеннона**.

Абсолютная стойкость защищает против **любых** (не только эффективных) противников.

Эквивалентные определения абсолютной стойкости

Теорема 1.1. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ **-** шифр Шеннона над (K, M, C). Тогда следующие определения эквивалентны:

- (1) E – абсолютно стойкий
- (2) $\forall c \in C\ \exists N_c(c)\colon \forall m \in M\ |\{k \in K\colon E(k,m) = c\}| = N_c$
- (3) Если $\boldsymbol{k} \in_R K$ тогда все случайные величины $E(\boldsymbol{k}, m)$ имеют одинаковое распределение

$\triangleright\ (2) <=> (3)$ Переформулируем (2): для каждого $c \in C$ существует число $P_c(c)$, такое что $\forall m \in M\ \Pr[E(\boldsymbol{k}, m) = c] = P_c$, $\boldsymbol{k} \in_R K$. $P_c = \frac{N_c}{|K|}$. $\triangleleft$

Эквивалентные определения абсолютной стойкости

Теорема 1.1. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ **-** шифр Шеннона над (K, M, C). Тогда следующие определения эквивалентны:

- (1) E – абсолютно стойкий
- (2) $\forall c \in C\ \exists N_c(c): \forall m \in M\ |\{k \in K: E(k, m) = c\}| = N_c$
- (3) Если $\boldsymbol{k} \in_R K$ тогда все случайные величины $E(\boldsymbol{k}, m)$ имеют одинаковое распределение

$\triangleright\ (1) \Rightarrow (2)$ Пусть $c \in C$ фиксированный шифртекст. Выберем произвольное сообщение $m_0 \in M$. Пусть $P_c = \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_0) = c]$. $(1) \Rightarrow \forall m \in M\ \Pr[E(\boldsymbol{k}, m) = c] = \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_0) = c] = P_c$. $\triangleleft$

Эквивалентные определения абсолютной стойкости

Теорема 1.1. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ - шифр Шеннона над (K, M, C). Тогда следующие определения эквивалентны:

- (1) E – абсолютно стойкий
- (2) $\forall c \in C\ \exists N_c(c): \forall m \in M\ |\{k \in K: E(k, m) = c\}| = N_c$
- (3) Если $\boldsymbol{k} \in_R K$ тогда все случайные величины $E(\boldsymbol{k}, m)$ имеют одинаковое распределение

$\triangleright$ (2) $\Rightarrow$ (1). Фиксируем $m_0, m_1 \in M, c \in C$ (2) $\Rightarrow \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_0) = c] = P_c = \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_1) = c]$. $\triangleleft$

Одноразовый блокнот – абсолютно стойкий шифр

Теорема 1.2. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ - одноразовый блокнот при $K = M = C = \{0,1\}^L$ для параметра L. Тогда E – абсолютно стойкий шифр.

▻ Для фиксированного сообщения $m \in M$, шифртекста $c \in C$ и ключа $k \in K$, уникального для сообщения m : $k = m \oplus c$ имеем определение (2) из **Теоремы 1.1** ◅

Одноразовый блокнот переменной длины – не абсолютно стойкий шифр

Теорема 1.3. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ - одноразовый блокнот переменной длины при $K = \{0,1\}^L, M = C = \{0,1\}^{\leq L}$ для параметра L. Тогда E – **не** абсолютно стойкий шифр.

▻ Пусть $m_0 \in M: |m_0| = 1, m_1 \in M: |m_1| > 1, c \in C: |c| = 1$

$$a = \Pr[E(k, m_0) = c] = 0.5$$
$$\mathrm{b} = \Pr[E(k, m_1) = c] = 0$$
$$a \neq b.$$

(Шифртекст длинны 1 не может иметь откртый текст длины > 1)

Иными словами не выполняется **Определение 1.1**. (Абсолютная стойкость). ◅

Предикат

Пусть имеется некоторый элемент $s \in S$.

Пусть мы хотим получить некоторую информацию обладая s. Пусть функция $F(s)$ – есть функция «получения» некоторой информации из s.

Предикатом на множестве S назовём булеву функцию $\phi: S \to \{0,1\}$.

Тогда вычисление предиката $F(s) = \phi(s)$ есть минимальная функция «получения» информации из s (функция получения информации, с выходом 1 бит).

Альтернативная трактовка предиката – бинарная различимость элементов множества.

Эквивалентные определения абсолютной стойкости

Теорема 1.4. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ - шифр Шеннона на (K, M, C). Рассмотрим вероятностный эксперимент для равномерно распределённой $\boldsymbol{k} \in_R K$.

Тогда E – абсолютно стойкий тогда и только тогда, когда для произвольного предиката $\phi: C \to \{0,1\}$ и $\forall m_0, m_1 \in M$

$$\Pr[\phi(E(\boldsymbol{k}, m_0) = 1] = \Pr\left[\phi\left(E(\boldsymbol{k}, m_1)\right) = 1\right]$$

▻Пусть $S = \{c \in C: \phi(c) = 1\}$. Так как E – абсолютно стойкий имеем

$$\Pr[\phi(E(\boldsymbol{k}, m_0)) = 1] = \sum_{c \in S} \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_0) = c] =$$

$$\sum_{c \in S} \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_1) = c] = \Pr[\phi(E(\boldsymbol{k}, m_1)) = 1]$$

Эквивалентные определения абсолютной стойкости

Теорема 1.4. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ - шифр Шеннона на (K, M, C). Рассмотрим вероятностный эксперимент для равномерно распределённой $\boldsymbol{k} \in_R K$.

Тогда E – абсолютно стойкий тогда и только тогда, когда для произвольного предиката $\phi: C \to \{0,1\}$ и $\forall m_0, m_1 \in M$

$$\Pr[\phi(E(\boldsymbol{k}, m_0) = 1] = \Pr\left[\phi\left(E(\boldsymbol{k}, m_1)\right) = 1\right]$$

Пусть E – **не** абсолютно стойкий. То есть $\exists c_0 \in C$:

$$\Pr[E(\boldsymbol{k}, m_0) = c_0] \neq \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_1) = c_0].$$

Пусть $\phi: \phi(c_0) = 1, \phi(c') = 0, \forall c' \neq c_0$

$$\Pr[\phi(E(\boldsymbol{k}, m_0) = 1] = \Pr[E(\boldsymbol{k}, m_0) = c_0] \neq$$
$$\Pr[E(\boldsymbol{k}, m_1) = c_0] = \Pr[\phi(E(\boldsymbol{k}, m_1) = 1]$$

◁

Эквивалентные определения абсолютной стойкости

Теорема 1.4. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ - шифр Шеннона на (K, M, C). Рассмотрим вероятностный эксперимент для равномерно распределённой $\boldsymbol{k} \in_R K$.

Тогда E – абсолютно стойкий тогда и только тогда, когда для произвольного предиката $\phi: C \to \{0,1\}$ и $\forall m_0, m_1 \in M$

$$\Pr[\phi(E(\boldsymbol{k}, m_0) = 1] = \Pr\left[\phi\left(E(\boldsymbol{k}, m_1)\right) = 1\right]$$

Иными словами: при использовании произвольного предиката на шифртекстах абсолютно стойкого шифра злоумышленник не получает информации об открытом тексте.

Эквивалентные определения абсолютной стойкости

Теорема 1.5. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ - шифр Шеннона на (K, M, C). Рассмотрим вероятностный эксперимент для $\boldsymbol{k} \in_R K$, $\boldsymbol{m} \in_R M$. $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{k}$ – независимы. Введём случайную величину $\boldsymbol{c} = E(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m})$ Тогда:

- Если E – абсолютно стойкий, тогда $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{m}$ независимы:
- Если $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{m}$ независимы, и каждое сообщение из M выберется с вероятностью, отличной от 0, то E – абсолютно стойкий.

Иными словами, для абсолютно стойкого шифра верно равенство:

$$\Pr[\boldsymbol{m} = m | \boldsymbol{c} = c] = \Pr[\boldsymbol{m} = m]$$

То есть наличие шифртекста не даёт злоумышленнику никаких преимуществ.

Энтропия

Мера неопределённости в поведении сигнала, количество информации передаваемое сигналом, величина измерения – бит.

$H(\boldsymbol{x}) = -\Pr[\boldsymbol{x}] \log_2 \Pr[\boldsymbol{x}]$ - энтропия **случайной величины $\boldsymbol{x}$**.

Пусть $\boldsymbol{x} \in_R \{0,1\}^n$, тогда $H(\boldsymbol{x}) \leq n$. $H(\boldsymbol{x}) = n$ если $\boldsymbol{x}$ – равномерно распределённая

$H(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y} = x) = -\sum_{y \in Y} \Pr[\boldsymbol{x} = x|\boldsymbol{y} = y] \log_2 \Pr[\boldsymbol{x} = x|\boldsymbol{y} = y]$ - условная энтропия случайной величины $\boldsymbol{x}$. $H(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \leq H(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = H(\boldsymbol{x})$, если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ независимы.

Энтропия

Эквивалентные определения

Теорема 1.6. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ - шифр Шеннона на (K, M, C). Пусть $\boldsymbol{m} \in_R M, \boldsymbol{c} \in_R C$. Тогда шифр E – абсолютно стойкий, если $H(\boldsymbol{m}) = H(\boldsymbol{m}|\boldsymbol{c})$

Иными словами шифртекст не даёт никакой информации об открытом тексте.

Принцип действия абсолютно стойкого шифра – «применить» энтропию (неопределённость) равномерно распределённого ключа к сообщению для получения равномерно распределённого шифртекста.

Плохие новости

Теорема 1.7 (Шеннона). Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ шифр Шеннона на (K, M, C). Если E – абсолютно стойкий, то

- $|K| \geq |M|$
- $H(\boldsymbol{k}) \geq H(\boldsymbol{m}), \boldsymbol{k} \in_R K, \boldsymbol{m} \in_R M$

Простое объяснение – невозможно получить равномерно распределённую случайную величину длины m, используя детерминированный алгоритм над равномерно распределённой случайной величиной длины $n < m$.

Иными словами, для шифрования 1 Gb данных **любым** абсолютно стойким шифром потребуется ключ размера как минимум 1 Gb.

Семантическая стойкость

Продолжение следует…