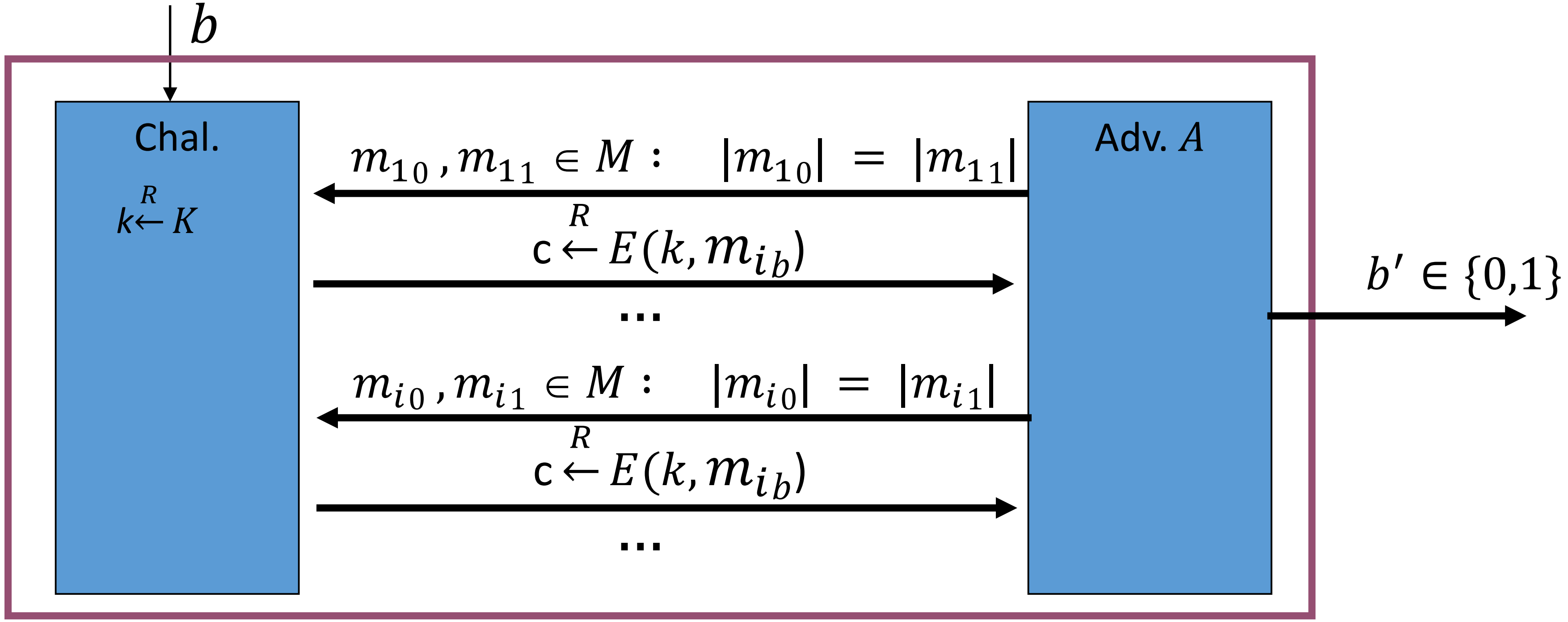
Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы nonce CPA, det-CPA

Макаров Артём

МИФИ 2019

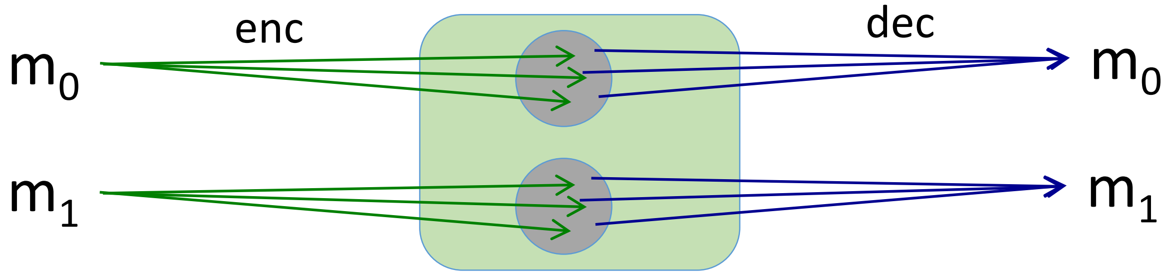
CPA

- Шифр называется CPA стойким, если для любого противника A величина $CPA_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \epsilon, \epsilon$ – пренебрежимо малая величина.
- Детерминированный шифр не может быть CPA стойким



Вероятностное шифрование

- Как показано ранее, для CPA стойкости необходима «рандомизация» шифртекстов
- Подход 1 – рандомизация функции зашифрования



  - Зашифрование одного и того же сообщения даст разные шифртексты
  - Необходим внешний источник энтропии
  - Шифртексты всегда длиннее открытых текстов, так как необходимо также передать энтропию, необходимую для восстановления открытого текста

Вероятностное шифрование

- Подход 2 – использование уникальных, неповторяющихся величин (nonce)
- $m \rightarrow E(k,*,n) \rightarrow c \rightarrow D(k,*,m) \rightarrow m$
- Nonce должна быть уникально для каждого сообщения, пара (nonce, key) не должна повторяться при жизни ключа.
- В качестве nonce можно использовать счётчик или случайные величины
- Nonce может не пересылаться в явном виде, обе стороны могут синхронно обновлять его.
- Не любое использование nonce даёт стойкие схемы!

CBC vs CTR

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}_{ctr}] \leq \frac{4Q^2 l}{N} + 2 * PRF_{adv}[B, F]$$

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}_{cbc}] \leq \frac{2Q^2 l^2}{N} + 2 * BC_{adv}[B, \mathrm{E}]$$

- CTR режим имеет большую стойкость для фиксированных параметров и блочного шифра
- CTR может использоваться в параллельном режиме, так как зашифрование блоков производит независимо
- Для коротких сообщений CRT может иметь длины шифртекстов значительно короче, чем CBC, так как нет необходимости в дополнении до длины блока.
- CTR использует только функцию зашифрования блочного шифра.
- **IV должны быть случайными!**

Nonce based encryption

- Для всех рассмотренных ранее схем CPA шифрования длина результирующего шифртекста была больше длины открытых тестов из за добавления вектора инициализации.
- Длина вектора инициализации не зависит от длины сообщения
- Для больших сообщений не является проблемой (добавление 16 байт к мегабайту несущественно)
- Может являться проблемой для небольших шифтекстов, сравнимых с длинной блока (добавление 16 байт к сообщению длинны меньше 16 байт)
- Возможно ли уйти от случайных векторов инициализации?

Nonce based encryption

- Первый подход – хранить некоторое состояние на стороне получателя и отправителя, которое явно или не явно синхронизируется перед процедурой шифрования. Затем обновлять эти значения после приёма-отправления сообщений.
  - Необходима полная синхронизация, при рассинхронизации – необходимо заново проводить процедуру синхронизации

- Второй подход – использование nonce. Вместо использования внутренних состояний использовать уникальные неповторяющиеся величины (nonce).

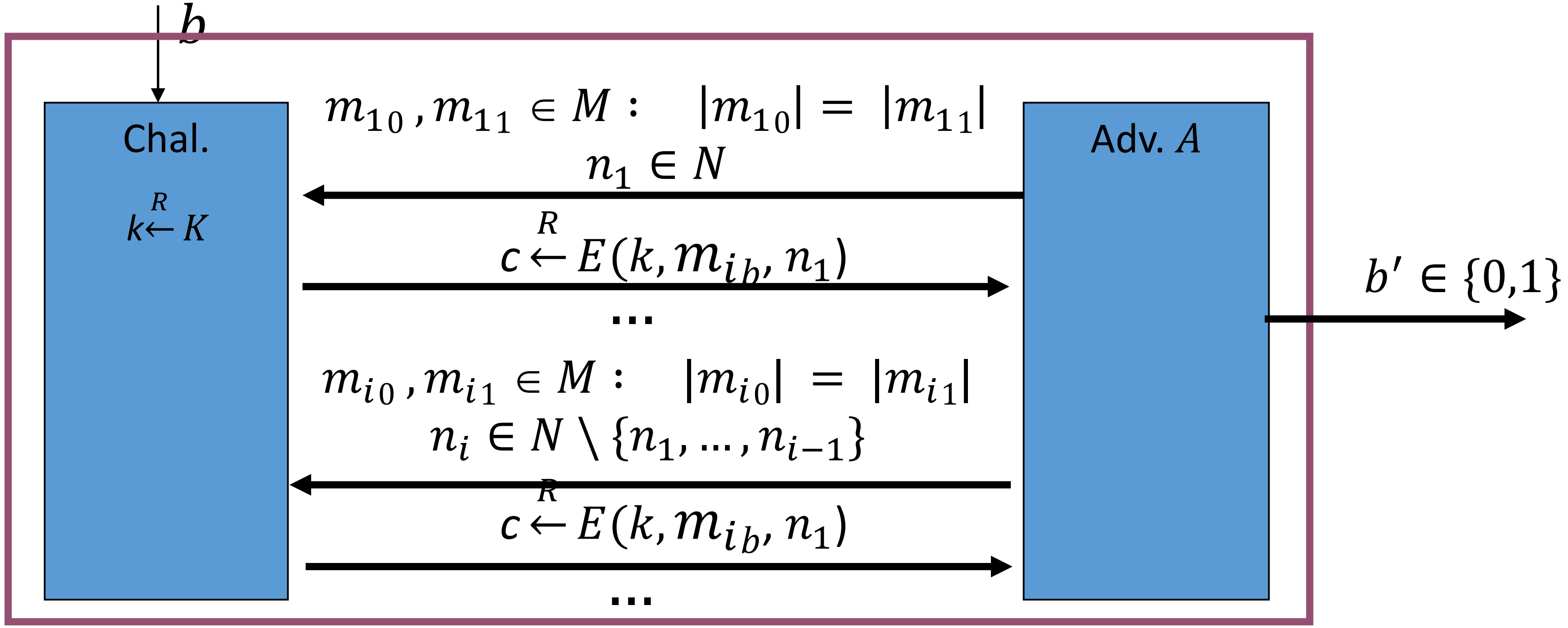
Nonce based encryption

Для $k \in K, m \in M, c \in C, n \in N$ шифром на основе nonce называется пара алгоритмов $\mathrm{E} = (E, D)$ на (K, M, C, N):

- Зашифрование $c = E(k, m, n)$
- Расшифрование $m = D(k, c, n)$
- Корректность $D(k, (E(k, m, n), n) = m$

Nonce based CPA

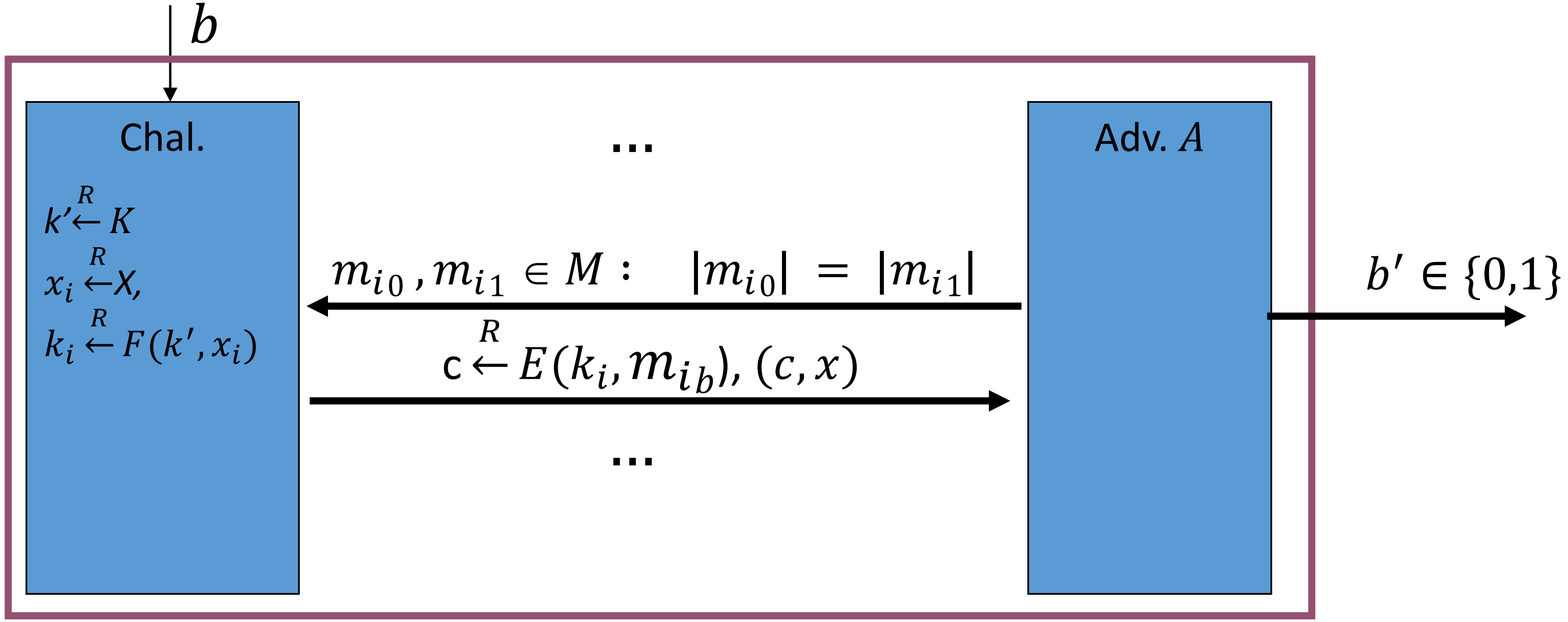
- Шифр на основе nonce называется nCPA стойким, если для любого противника A величина $nCPA_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \epsilon, \epsilon$ – пренебрежимо малая величина.
- Заметим, что противник полностью выбирает nonce. Единственное требование – **уникальность**.



Построение CPA шифров из семантически стойких шифров

- Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – семантически стойкий шифр на (K, M, C). Попробуем построить CPA стойкий шифр E' на $(K', M, X \times C)$ используя PRF F на (K', X, K).
- Ключом k' для E' будет ключ для PRF F. Для шифрования сообщения m выбирается случайный вход для PRF - x. Далее вычисляется ключ для E $k \leftarrow F(k', x)$. Затем m шифруется с использование ключа k: $c \leftarrow E(k, m)$. Шифр текстом является пара $\mathrm{c}' = (c, x)$.
- $E(k', m) = [x \leftarrow^{R} X, k \leftarrow F(k', x), c \leftarrow E(k, m), \mathrm{output}\ (x, c)]$
- $D(k', c') = [k \leftarrow F(k', x), m \leftarrow D(k, c), \mathrm{output}\, m]$
- Называется – **гибридная конструкция**.

Игра на CPA стойкость гибридной конструкции



Построение CPA шифров из семантически стойких шифров

Теорема 7.1. Если F – стойкая PRF, E – семантически стойкий шифр, $N = |X|$ - суперполиномиальная, то введённый ранее шифр E' - CPA стойкий шифр. В частности для любого противника в CPA игре, делающим не более Q запросов к претенденту существует противник B_F в игре на стойкость PRF и противник B_E в игре на семантическую стойкость, причём

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq \frac{Q^2}{N} + 2 * PRF_{adv}[B_F, F] + Q * SS_{adv}[B_E, \mathrm{E}]$$

Гибридная конструкция на основе nonce

Модифицируем гибридную конструкцию, заменив случайный элемент $x \in X$ на nonce.

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – семантически стойкий шифр на (K, M, C).

Для ключа $k' \in K, m \in M, c \in C$ $x \in X$ определим $E'(k', m, x) = E(k, m), k = F(k', x)$

- $E(k', m) = [x \leftarrow X, k \leftarrow F(k', x), c \leftarrow E(k, m), \mathrm{output}\ (x, c)]$
- $D(k', c') = [k \leftarrow F(k', x), m \leftarrow D(k, c), \mathrm{output}\ m]$

Детерминированная гибридная конструкция

Теорема 8.1. Если F – стойкая PRF, E – семантически стойкий шифр, $N = |X|$ - суперполиномиальная, то введённый ранее шифр E' - CPA стойкий шифр. В частности для любого противника в nCPA игре, делающим не более Q запросов к претенденту существует противник B_F в игре на стойкость PRF и противник B_E в игре на семантическую стойкость, причём

$$nCPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq 2 * PRF_{adv}[B_F, F] + Q * SS_{adv}[B_E, \mathrm{E}]$$

⊳Аналогично **Теореме 7.1**, без необходимости добавления слагаемого Q^2/N, т.к. коллизии не возможно из за требования уникальности nonce⊲

Рандомизированный CRT режим

Рассмотрим ещё один способ построения – на основе CTR режима.

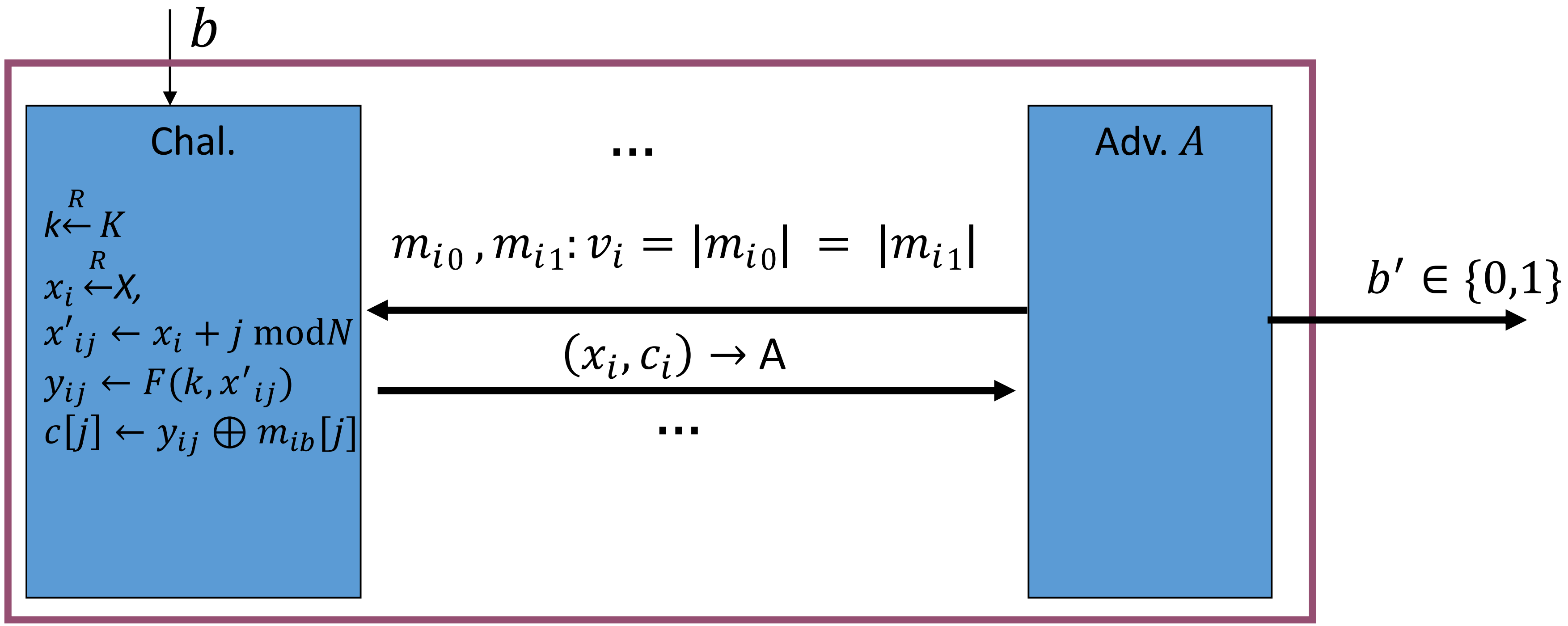
Пусть F PRF на (K, X, Y). Пусть $X = \{0, \dots N-1\}$, $Y = \{0,1\}^n$. Для полиномиально ограниченной величины $l \geq 1$ определим шифр $\mathrm{E} = (E, D)$ на $(K, Y^{\leq l}, X \times Y^{\leq l})$ следующим образом:

Для $k \in K, m \in Y^{\leq l}, v = |m| = |\mathrm{c}|$, $c' = (x, c) \in X \times Y^{\leq l}$

$E(k, m) :=$
- $x \xleftarrow{R} \mathcal{X}$
- compute $c \in \mathcal{Y}^v$ as follows:
  - for $j \leftarrow 0$ to $v - 1$ do
    - $c[j] \leftarrow F(k, x + j \bmod N) \oplus m[j]$
- output (x, c);

$D(k, c') :=$
- compute $m \in \mathcal{Y}^v$ as follows:
  - for $j \leftarrow 0$ to $v - 1$ do
    - $m[j] \leftarrow F(k, x + j \bmod N) \oplus c[j]$
- output m.

Игра на CPA стойкость рандомизированного CTR режима



Рандомизированный CRT режим

Теорема 7.2. Если F – стойкая PRF, N - суперполиномиальная, l – полиномиально ограниченная, то введённый ранее шифр E - CPA стойкий шифр. В частности для любого противника в CPA игре, делающим не более Q запросов к претенденту существует противник B в игре на стойкость PRF причём

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq \frac{4Q^2 l}{N} + 2 * PRF_{adv}[B, F]$$

Nonce based CTR

- Можно ли построить CTR режим, заменив случайный элемент на nonce?
- Нет! В отличии от гибридной конструкции, где нам была важна уникальность nonce, здесь нам важна не только уникальность «начальных состояний», но и уникальность «отрезков». (См **лемму** из **Теоремы 7.2**).
- Иными словами, если заменить $x_i \in X$ на nonce, то противник может выбрать такие $x_i \neq x_{i'}$: $\{x_i, \dots, x_i + l - 1\} \cap \{x_{i'}, \dots, x_{i'} + l - 1\} \neq \emptyset$, т.е. могут совпасть счётчики на каком то блоке для различных сообщений => имеем двухразовый блокнот.

Nonce based CTR

- Введём nonce по другому. Пусть $l|N$. Пусть $\mathrm{n} \in \{0, \dots, N\backslash l - 1\}$ –nonce, $x = nl$. Т.е. на вход PRF подаётся не nonce, а nonce умноженная на максимально допустимую длину сообщения в блоках.
- Т.е. два различных nonce n_1 и n_2 дают два входа для PRF $x_1 = n_1 l, x_2 = n_2 l$ в интервалах $\{x_1, \dots, x_1 + l - 1\}$ и $\{x_2, \dots, x_2 + l - 1\}$, которые не пересекаются.

Nonce based CTR

Теорема 8.2. Если F – стойкая PRF, N - суперполиномиальная, l – полиномиально ограниченная, то введённый ранее шифр E - CPA стойкий шифр. В частности для любого противника в nCPA игре, делающим не более Q запросов к претенденту существует противник B в игре на стойкость PRF причём

$$\mathrm{n}CPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq 2 * PRF_{adv}[B, F]$$

⊳Аналогично **Теореме 7.2**, без необходимости добавления слагаемого $\frac{4Q^2 l}{N}$, т.к. коллизии не возможно из за требования уникальности nonce⊲

CBC

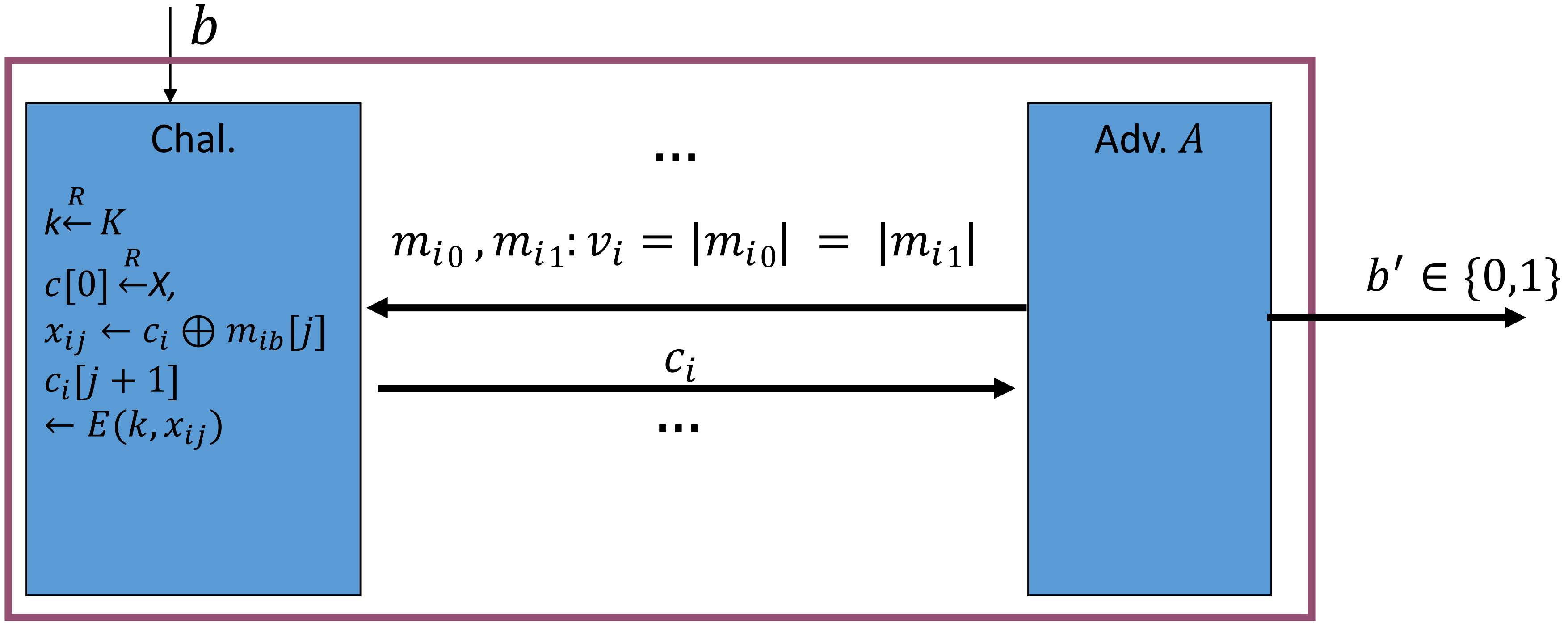
Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ блочный шифр на (K, X) где $X = \{0,1\}^n, N = |X| = 2^n$. Для полиномиально ограниченной величины $l \geq 1$ определим шифр $\mathrm{E} = (E', D')$ на $(K, X^{\leq l}, X^{\leq l+1} \backslash \mathrm{X}^0)$. Зашифрование и расшифрование определены следующим образом:

Для $k \in K, m \in M, v = |m| = |c| - 1$

$E'(k, m) :=$
- compute $c \in \mathcal{X}^{v+1}$ as follows:
  - $c[0] \xleftarrow{R} \mathcal{X}$
  - for $j \leftarrow 0$ to $v - 1$ do
    - $c[j+1] \leftarrow E(k,\ c[j] \oplus m[j])$
- output c;

$D'(k, c) :=$
- compute $m \in \mathcal{X}^v$ as follows:
  - for $j \leftarrow 0$ to $v - 1$ do
    - $m[j] \leftarrow D(k,\ c[j+1]) \oplus c[j]$
- output m.

Игра на CPA стойкость CBC



CBC

Теорема 7.3. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – семантически стойкий шифр на (K, C), $N = |X|$ - суперполиномиальная, $l \geq 1$ – полиномиально ограниченная. Тогда введенный ранее CBC шифр является CPA стойким, причём для любого противника A в игре на CPA стойкость, делающим не более Q запросов к оракулу, существует противник B в игре на стойкость блочных шифров, при чём

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq \frac{2Q^2 l^2}{N} + 2 * BC_{adv}[B, \mathrm{E}]$$

Nonce based CBC

- Можно ли построить CBC режим, заменив случайный элемент на nonce?
- Нет! Противник может сделать 2 запроса(m_{10}, m_{11}, n_1), (m_{20}, m_{21}, n_2): $m_{10} = n_1 \neq n_2 = m_{20}, m_{11} = m_{21}$. В эксперименте 0 шифртексты будут одинаковые, в эксперименте 1 – разными.

Nonce based CBC

- Идея – заменить случайный IV на псевдослучайный, полученный из nonce с помощью PRF.
- Пусть F – PRF на (K', N', X), где X – множество блоков блочного шифра $\mathrm{E} = (E, D)$, отпрядённого на (K, X).
- Ключом является элемент из множества $K \times K'$, алгоритм зашифрования и расшифрования отличаются от CBC только в получении $n[0] = F(k', n)$.

CBC

Теорема 8.3. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – семантически стойкий шифр на (K, C), $N = |X|$ - суперполиномиальная, $l \geq 1$ – полиномиально ограниченная. Тогда введенный ранее CBC шифр является CPA стойким, причём для любого противника A в игре на nCPA стойкость, делающим не более Q запросов к оракулу, существует противник B в игре на стойкость блочных шифров, и B_F в игре на стойкость PRF, при чём

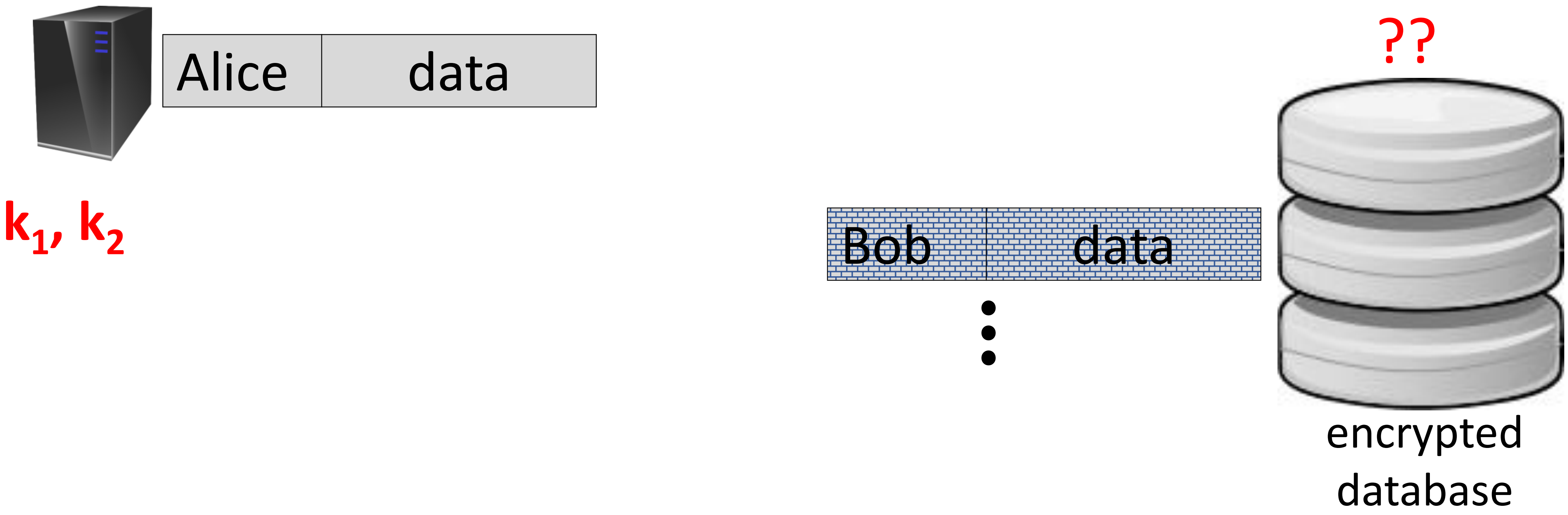
$$nCPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq \frac{2Q^2l^2}{N} + 2 * BC_{adv}[B, \mathrm{E}] + 2 * PRF[B_F, \mathrm{E}]$$

⊳Аналогично **Теореме 7.3**, но с учётом использовать не только блочного шифра, но и PRF⊲

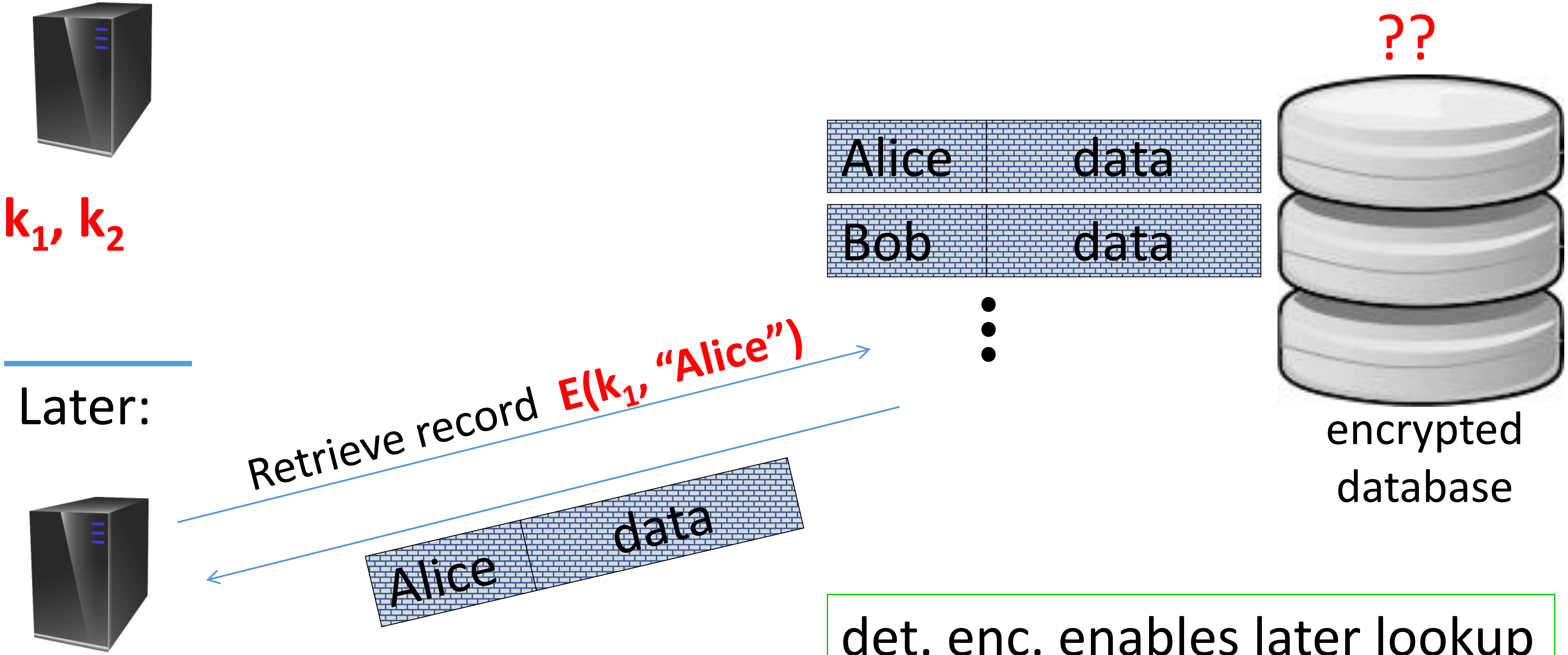
Детерминированное шифрование

- Рассмотрим пример – хранение файлов на удалённом сервере.
- Пользователь отправляет зашифрованный файл на сервер, приписывая заголовок. Сервер записывает шифртекст без расшифровки
- Для получения файла из базы данных пользователь отправляет зашифрованный (тем же ключом) заголовок и получает шифртекст, который потом расшифровывает.
- Данная схема возможна только при детерминированном шифровании

The need for det. Encryption (no nonce)



The need for det. Encryption (no nonce)



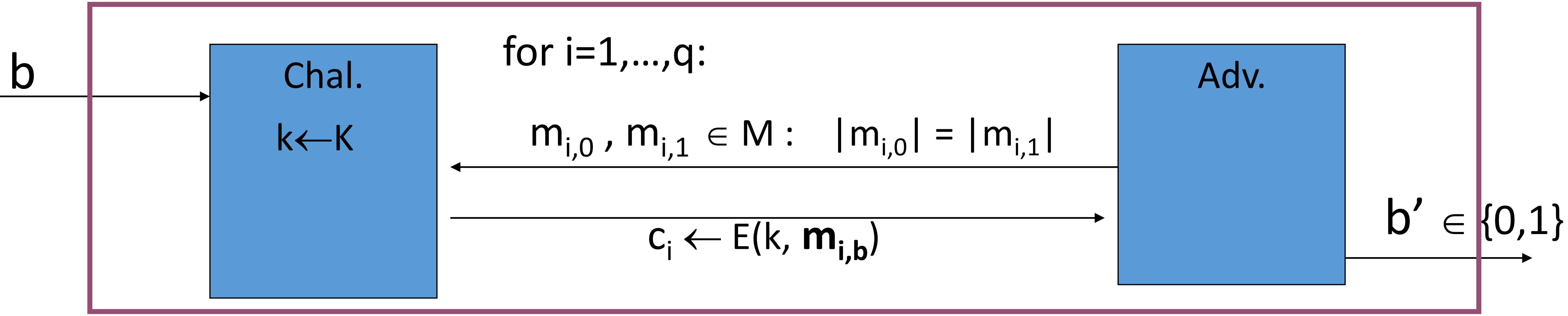
det. enc. enables later lookup

Детерминированное шифрование

- Проблема – при детерминированном шифровании противник может проверять заголовки на равенство, т.к. одинаковые заголовки дают одинаковые зашифрования заголовков.
- Аналогично для шифртекстов. Если множество шифртекстов мало (например шифруются только слова, длины не более 6 символов), и распределение неравномерное, противник может провести частотный анализ и полностью расшифровать все шифртексты.
- Нужно новое определение. Основная идея – сообщения должны быть уникальными для фиксированного ключа.
    - Уникальный идентификаторы, которые не повторяются (номер в очереди, номер передаваемого пакета, уникальный для сессии id пользователя итд)
    - Сообщения выбранные случайно из большого множества (например ключи)

Deterministic CPA security

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ шифр на (K, M, C). Введём игру на CPA стойкость, в которой противник запрашифвает только уникальные сообщения, т.е. $\mathbf{m_{1,0}, \ldots, m_{q,0}}$ **и** $\mathbf{m_{1,1}, \ldots, m_{q,1}}$ различны.

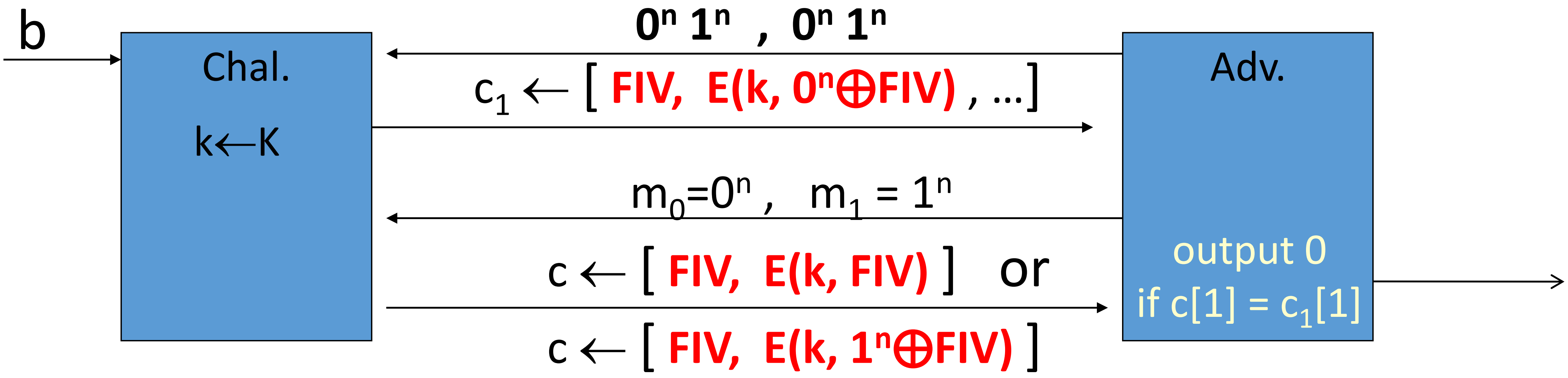


$\mathrm{E} = (E, D)$, определённый на (K, M, C), называется детерминированно CPA стойким детерминированным, если $\forall A$: A – эффективный алгоритм в игре на стойкость Deterministic CPA величина $dCPA_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.

Фиксированный IV в CBC

Фиксировванный IV в CBC не даёт det-CPA стойкость!

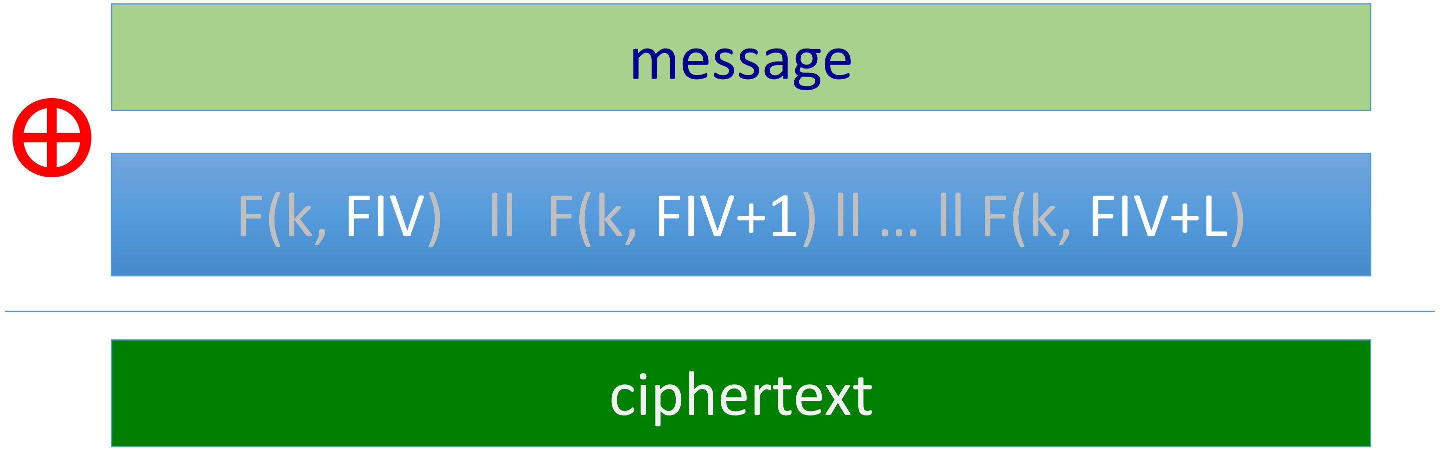
Пусть $E\colon K \times \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$ стойкая PRP в CBC

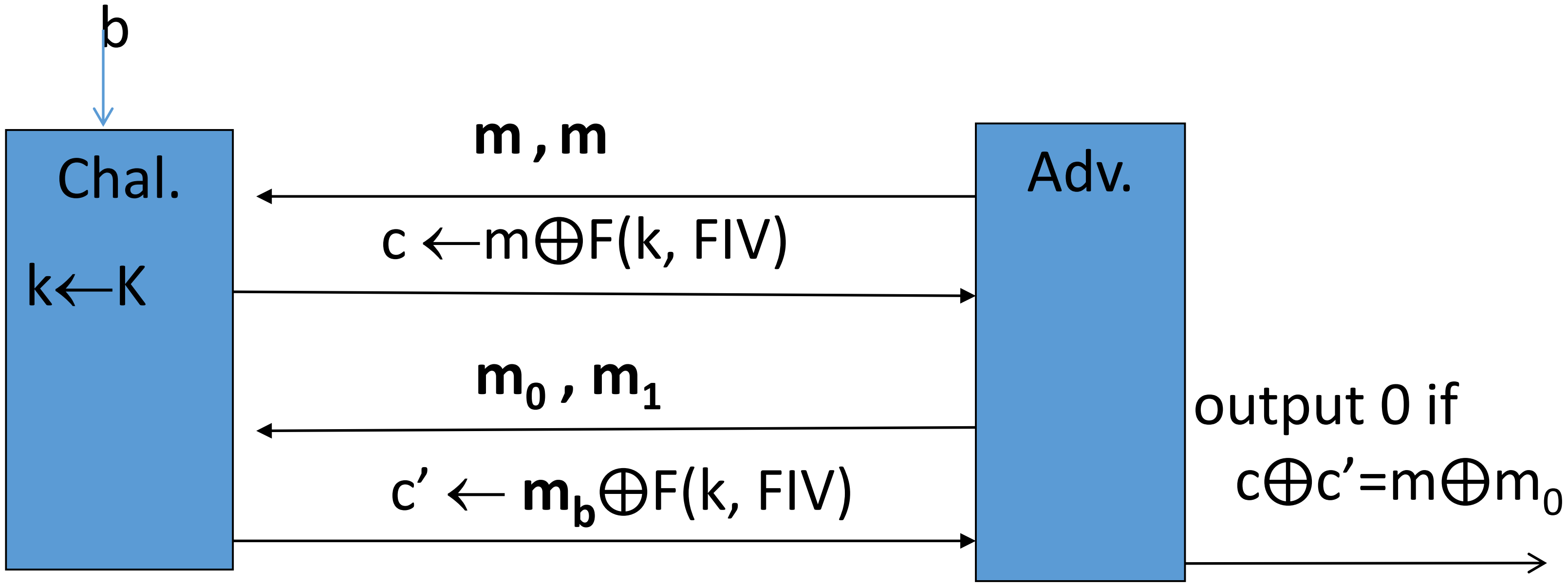


Фиксированный IV в CTR

Фиксировванный IV в CTR не даёт det-CPA стойкость!

Пусть $F\colon K \times \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$ стойкая PRF в CTR





Синтетический IV

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – CPA стойкий шифр на (K, M, C), $E = (k, m; r)$ – функция зашифрования, использующая случайный вход $r \in_R R$. Пусть F – стойкая PRF на (K', M, R). Тогда детерминированный шифр $\mathrm{E}' = (E', D')$ на $(K \times K', M, C)$:

$$E'\big((k, k'), m\big) = E\big(k, m; F(k', m)\big),$$
$$D'\big((k, k'), c\big) = D(k, c)$$

Называется детерминированным шифром, использующем синтетический IV.

NB: конструкция похожа на использование nonce в CTR и CBC, но случайность заменяется не шифрованием уникального nonce, а шифрованием уникального сообщения (сообщения уникальны для det-CPA).

Теорема 8.4. Описанный выше шифр является det-CPA стойким.

⊳без доказательства, или доказать самим⊲

Выводы

- Шифры решают задачу конфиденциальности информации при пассивном противнике (противнике не влияющем на передаваемые сообщения)
- Абсолютная стойкость – достижимая, но не удобная для построения шифров модель
- Ослабленная версия абсолютной стойкости – семантическая стойкость (одноразовая семантическая стойкость) – используется для построения и анализа шифров при однократном использовании ключа
- При шифровании нескольких сообщений используется CPA стойкость (многоразовая семантическая стойкость), позволяющая противнику получать зашифрования нескольких сообщений на одном ключе

Выводы

- Основные примитивы – псевдослучайные генераторы, поточные шифры, блочные шифры.
- Для построения семантических и CPA стойких шифров из блочных шифров используют режимы шифрования.
- При использовании режимов шифрования, требующих случайный IV, он должен быть случайным!
- Шифры не должны использоваться для обеспечения целостности или аутентичности!