Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы Псевдослучайные функции

Макаров Артём

МИФИ 2020

PRP и PRF

Пусть функция $F: K \times X \to Y$ определена на (K, X, Y).

Тогда F – **псевдослучайная функция (PRF)**, если существует эффективный алгоритм, вычисляющий $F(k, m), k \in K, x \in X$.

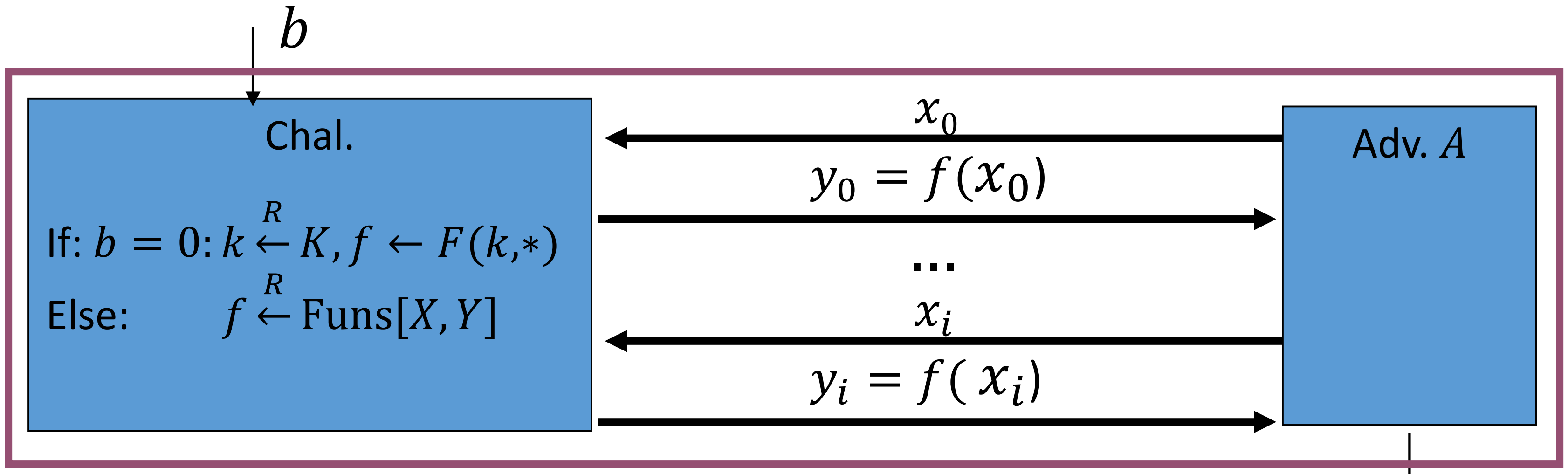
Пусть функция $E: K \times X \to X$ определена на (K, X).

Тогда E – **псевдослучайная подстановка (PRP)**, если

- Существует эффективный алгоритм вычисляющий $E(k, x). k \in K, x \in X$
- Функция $f_k = E(k,*)$ – подстановка.

Стойкая PRF

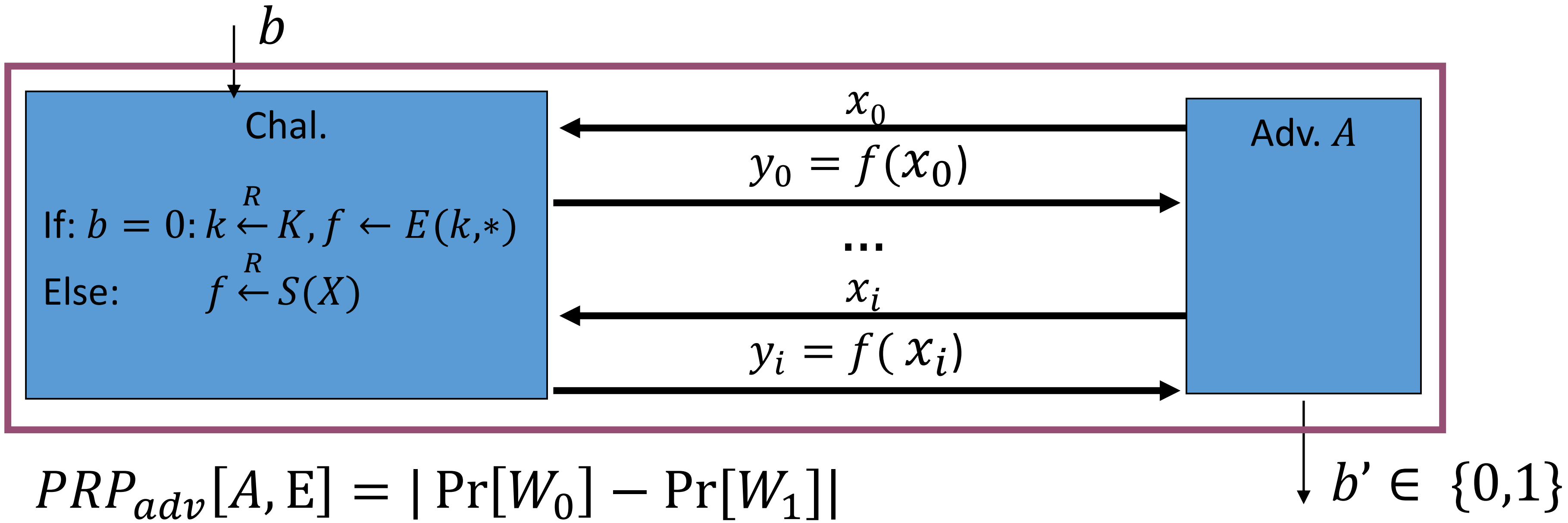
PRF F, определённая на (K, X, Y), называется стойкой PRF, если $\forall A$: A – эффективный алгоритм в игре на стойкость PRF величина $PRF_{adv}[A, F] \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.



$PRF_{adv}[A, F] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$ $\quad b' \in \{0,1\}$

Стойкая PRP

PRP E, определённая на (K, X), называется стойкой PRP, если $\forall A$: A – эффективный алгоритм в игре на стойкость PRP величина $PRP_{adv}[A, \mathrm{E}] \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.



$$PRP_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$$

Является ли PRP PRF?

- Является ли любая PRP также PRF?
  - Да, любая эффективная подстановка является эффективной функцией

- Является ли любая стойкая PRP стойкой PRF?
  - Нет!

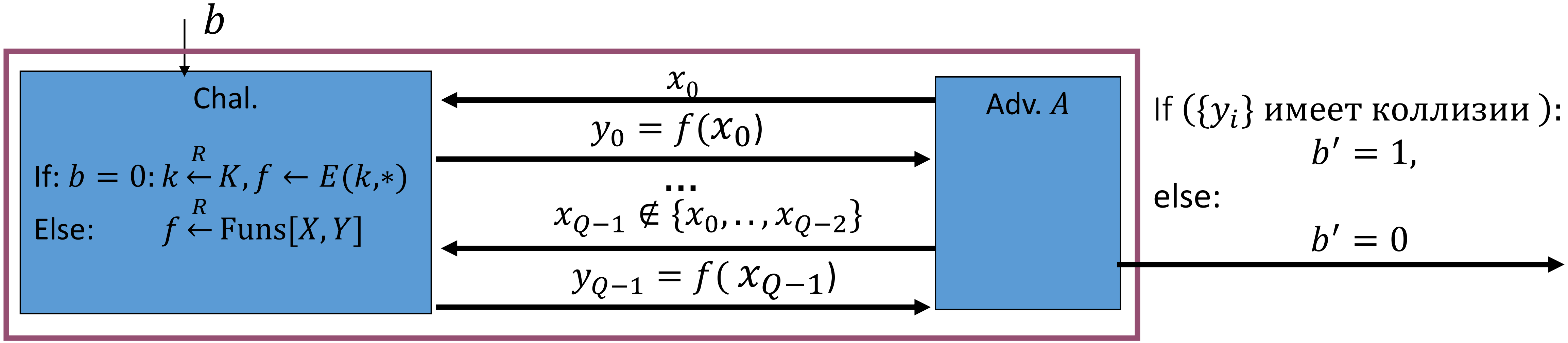
Пусть $E: K \times X \to X$ – стойкая PRP, $|X| = N$. Очевидно, что E – PRF на (K, X, X).

Является ли PRP PRF?

Вероятность случайной функции быть подстановкой

Пусть $E: K \times X \to X$ – стойкая PRP, $|X| = N$. Очевидно, что E – PRF на (K, X, X).

Рассмотрим игру на PRF. Пусть N – малая величина, такая что противник может эффективно получить полный образ произвольной функции, с областью определения в X (т.е. получить множество $\{f(x): x \in X\}$ для $f: X \to Y$.



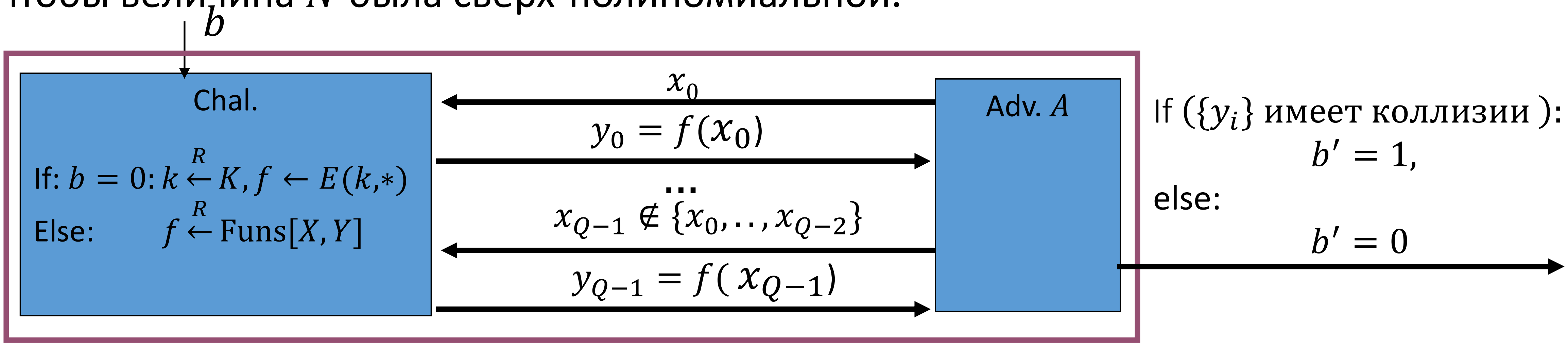
$PRF_{adv}[A, F] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| = |\ 0\ - (1 - N!/N^N)| > 1/2$

Является ли PRP PRF?

См. парадокс дней рождений

Какова «малость» N для осуществления атаки?

Пусть противник делает Q запросов к претенденту (оракулу), прежде чем выдать результат. Тогда для нахождения коллизии ему необходимо запросить $O(N^{1/2})$ различных сообщений, для осуществления атаки с преимуществом $\min\{Q(Q-1)/4N, 0.63\}$. Следовательно для стойкости PRP как PRF необходимо, чтобы величина N была сверх-полиномиальной.



$$PRF_{adv}[A,F] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| = |\, 0 - \min\{Q(Q-1)/4N, 0.63\}|$$

PRF switching Lemma

Теорема 6.1. Пусть $E: K \times X \to X$ – стойкая PRP, $|X| = N$. Пусть A – противник в игре на стойкость PRF, делающих не более Q запросов к претенденту. Тогда

$$|PRF_{adv}[A, E] - PRP_{adv}[A, E]| \leq Q^2/2N$$

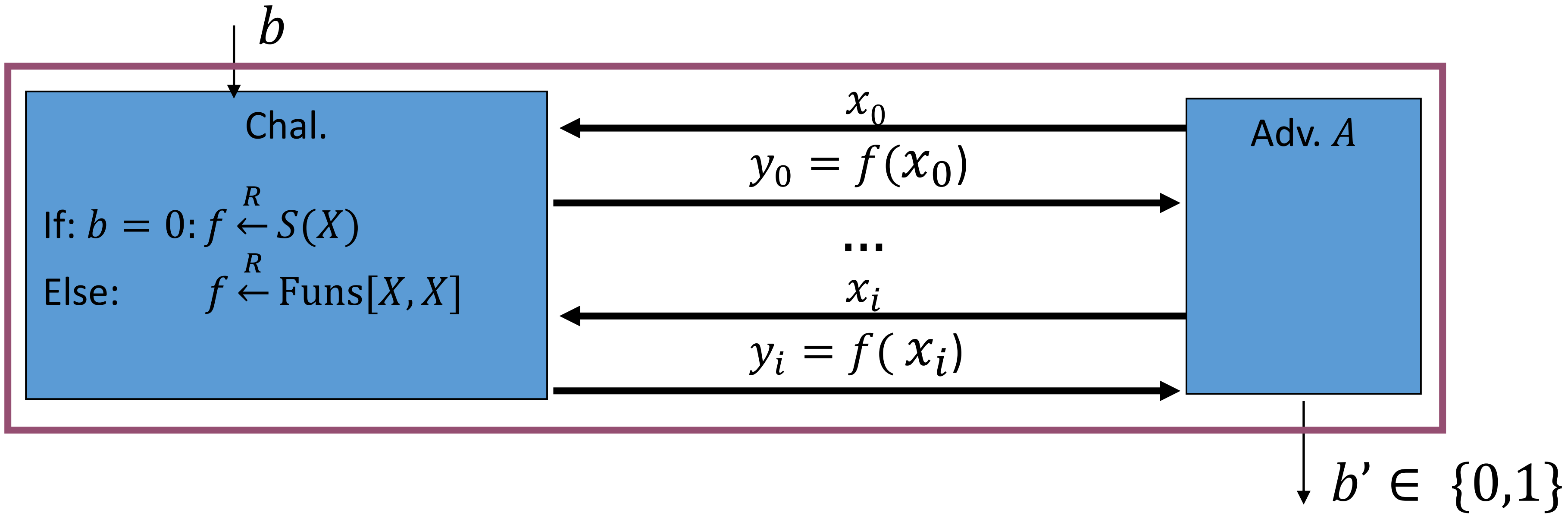
⊳ Необходима вспомогательная теорема. Сформулируем игру для неё.

Игра Подстановки против Функций

Определим игру на различимость случайной подстановки от случайной функции.

Пусть W_b вероятность того что в эксперименте b $b' = 1$.

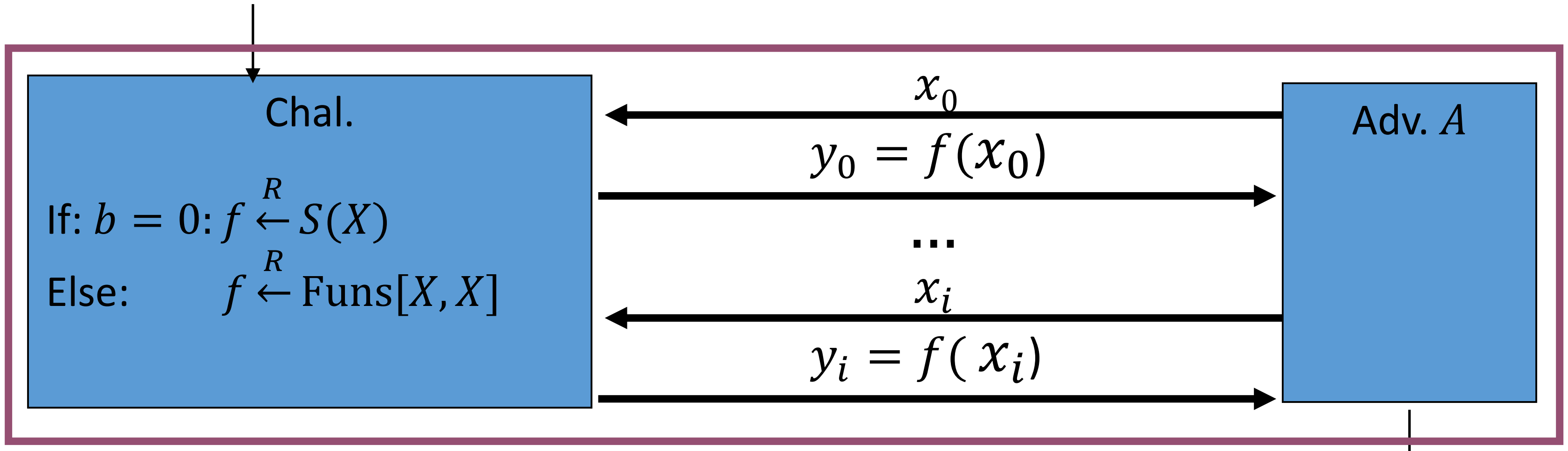
Определим $PF_{adv}[A, X] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$



PRF switching Lemma

Теорема 6.1.1. Пусть X конечное множество, $|X| = N$. Пусть A противник в игре на различимость случайных функций и случайных подстановок. Тогда

$$PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N$$



$PF_{adv}[A, X] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$ $b' \in \{0,1\}$

PRF switching Lemma

Теорема 6.1.1. Пусть X конечное множество, $|X| = N$. Пусть A противник в игре на различимость случайных функций и случайных подстановок. Тогда

$$PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N$$

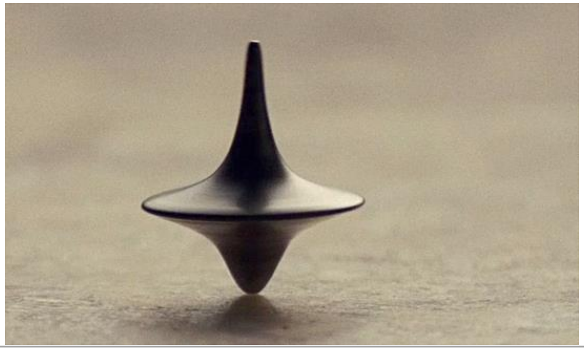
необходима ещё одна вспомогательная теорема.

Теорема 6.1.1.1. Пусть Z, W_0, W_1 события над некоторым вероятностным пространством. Пусть $W_0 \wedge !Z$ происходит тогда и только тогда когда происходит $W_1 \wedge !Z$. Тогда $|\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \Pr[Z]$

% $\Pr[W_b \wedge Z] \in [0, \Pr[Z]]$

$|\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| = |\Pr[W_0 \wedge Z] + \Pr[W_0 \wedge !Z] - \Pr[W_1 \wedge Z] -$

PRF switching Lemma



Теорема 6.1.1. Пусть X конечное множество, $|X| = N$. Пусть A противник в игре на различимость случайных функций и случайных подстановок. Тогда

$$PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N$$

Рассмотрим противника A в игре на различимость RP и RF. Пусть он отправляет Q различных запросов $x_1, \dots, x_q$.

Пусть Z событие того, что $f(x_i) = f(x_j), i \neq j$ (пара ответов оракула совпала). Если событие Z не произошло, то все величины $f(x_i)$ различны, и игры 0 и 1 идентичны. Следовательно, противник будет иметь идентичный результат в обоих играх. Следовательно можем применить Теорему 6.1.1.1. $|\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \Pr[Z] \leq Q^2/2N$.

$\Pr[f(x_i) = f(x_j)] = 1/N$, число таких пар в игре не больше $Q^2/2$. #

PRF switching Lemma

Теорема 6.1. Пусть $E: K \times X \to X$ – стойкая PRP, $|X| = N$. Пусть A – противник в игре на стойкость PRF, делающих не более Q запросов к претенденту. Тогда

$$|PRF_{adv}[A, E] - PRP_{adv}[A, E]| \le Q^2/2N$$

$$PF_{adv}[A, X] \le Q^2/2N.$$

Рассмотрим игру с тремя экспериментами.

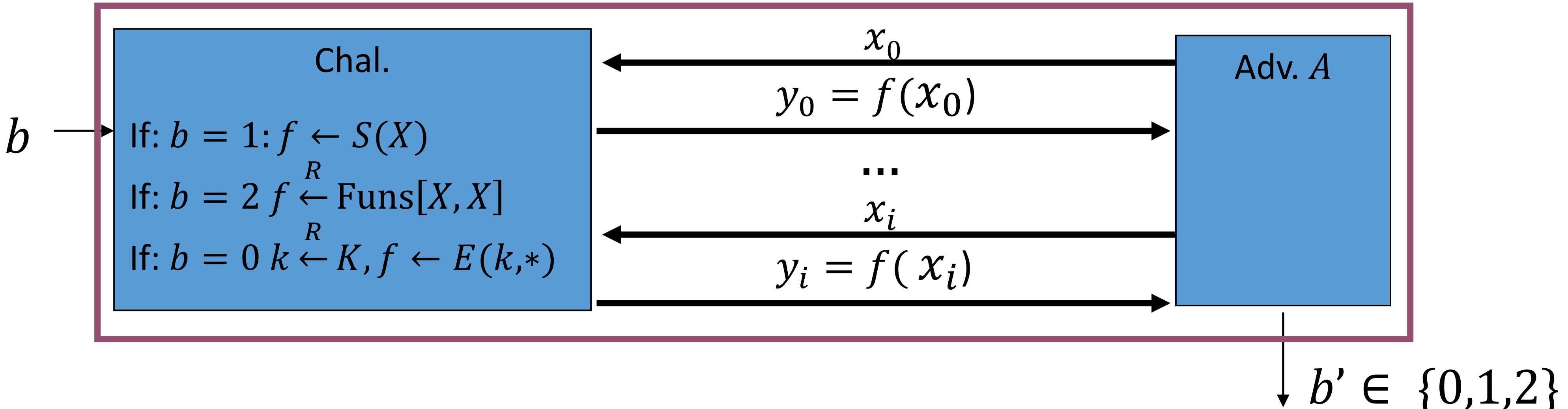
Игра на различимость RF, RP и PRP

Пусть W_b вероятность того что в эксперименте b $b' = 1$.

Обозначим p_b вероятность того, что в эксперименте $b \in \{0,1,2\}$ $b' = 1$.

$$|p_1 - p_0| = PRP_{adv}[A, E]$$
$$|p_2 - p_0| = PRF_{adv}[A, E]$$
$$|p_2 - p_1| = PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N$$

$$|PRF_{adv}[A, E] - PRP_{adv}[A, E]| = \big||p_1 - p_0| - |p_2 - p_0|\big| \leq |p_2 - p_1| \leq Q^2/2N \lhd$$



Построение PRG из PRF

Пусть F PRF на (K, X, Y), $l \geq 1$ полиномиально ограничена, $x_1, \dots, x_l$ различные элементы из X: $|X| \geq L$. Определим PRG G с пространством ключей K, пространством выходов Y^l для $k \in K$ следующим образом:

$$G(k) = (F(k, x_1), \dots, F(k, x_l))$$

Теорема 6.2. Если F стойкая PRF, то G стойкая PRG, причём $\forall A$ в игре на стойкость PRG $\exists B$ в игре на стойкость PRF, такой что

$$PRG_{adv}[A, G] = PRF_{adv}[B, F]$$

⊳ Построим противника B. B получает от A запросы $x_1, \dots, x_l$, отправляет претенденту, получая ответы $y_1, \dots, y_l$, которые прозрачно пересылает A. Выход b' соответствует выходу алгоритма A. ⊲

CTR, вспомним 2 теоремы

Теорема 2.4. Пусть $G: S \rightarrow \{0,1\}^n$ стойкий генератор (PRG).

Тогда поточный шифр E определённый с использованием G семантически стойкий, т.е. $\forall A$: A – противник в игре на семантическую стойкость, $\exists$ противник B в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{ss}[A, E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B, G]$$

Теорема 6.1. Пусть $E: K \times X \rightarrow X$ – стойкая PRP, $|X| = N$. Пусть A – противник в игре на стойкость PRF, делающих не более Q запросов к претенденту. Тогда

$$|PRF_{adv}[A, E] - PRP_{adv}[A, E]| \leq Q^2/2N$$

CTR

Формально опишем полученный шифр.

$\mathrm{E}' = (E', D')$ определён на $(K, X^{\leq l}, X^{\leq l})$, где l – полиномиально ограниченная, $l \leq N, N = |X|$. Пусть $x_1, \dots, x_l$ элементы из X. Обозначим $x_i = (i-1)_n$ - двоичное n битное представление числа $i-1$.

Для $k \in K, m \in X^{\leq l}, v = |m|$

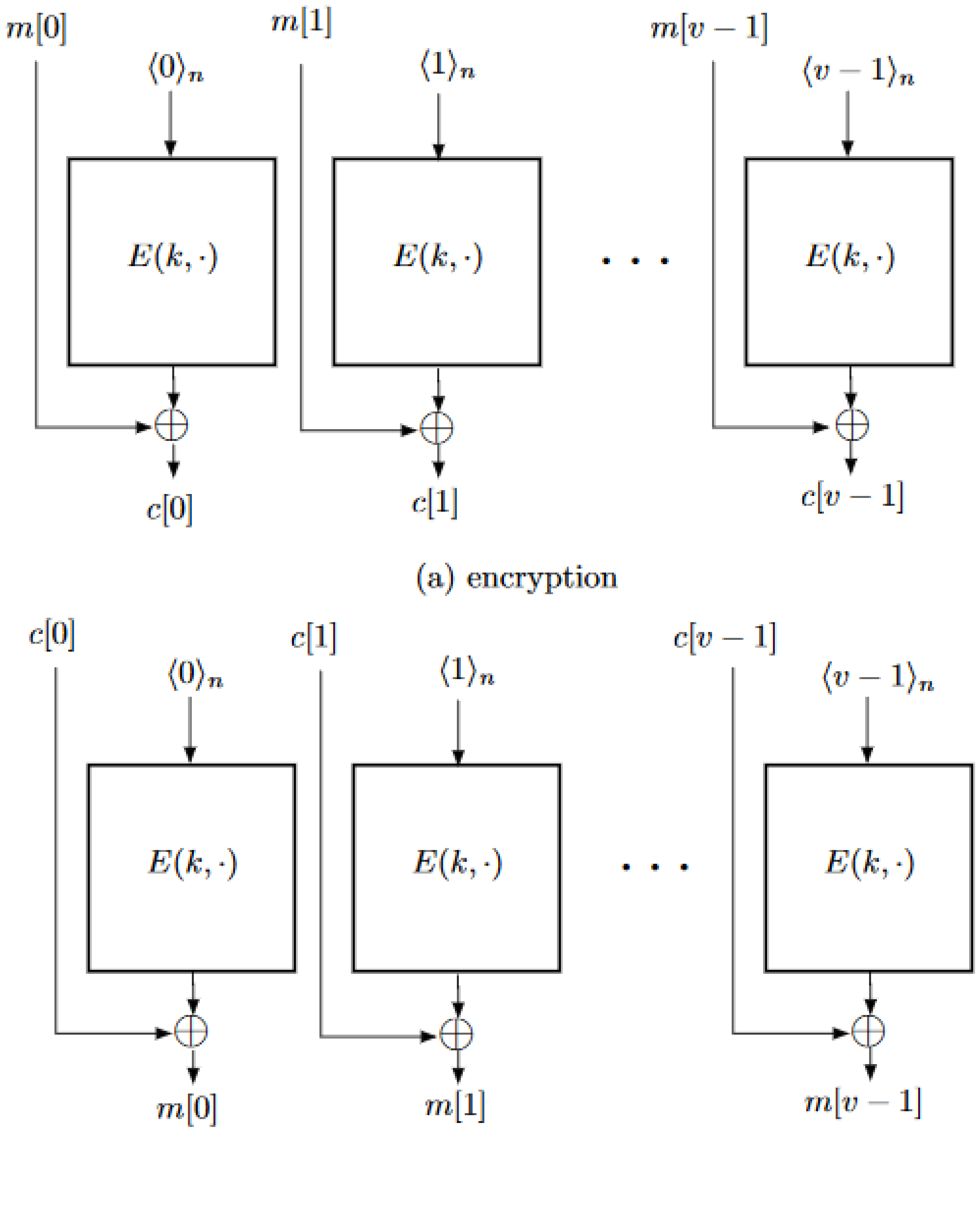
$$E'(k, m) = (E(k, (0)_n) \oplus m[0], \dots, E(k, (v-1)_n) \oplus m[v-1])$$

Для $k \in K, c \in X^{\leq l}, c = |c|$

$$D'(k, c) = (E(k, (0)_n) \oplus c[0], \dots, E(k, (v-1)_n) \oplus c[v-1])$$

Полученный шифр называется **детерминированным CTR режимом** для блочного шифра E.

CTR



(b) decryption

CTR

Теорема 6.2 позволяет построить семантически стойкий шифр с помощью стойкого блочного шифра. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ стойкий блочный шифр на $(K, X), X = \{0,1\}^n,\ N = 2^n$ - сверх-полиномиальная.

По **Теореме 6.1** функция зашифрования блочного шифра E является стойкой PRF на (K, X, X). Используя **Теорему 6.2** получаем стойкий PRG, и используя **Теорему 2.4** (стойкий генератор даёт семантически стойкий поточный шифр) получаем семантически стойкий шифр.

CTR

Теорема 6.3. Если $\mathrm{E} = (E, D)$ стойкий блочный шифр, то E' на $(K, X^{\leq l}, X^{\leq l})$ введённый ранее – семантически стойкий шифр, причём $\forall A$ – противников в игре на стойкость блочного шифра (стойкость PRP) $\exists B$ в игре на семантическую стойкость, причём

$$SS_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq 2 * PRP_{adv}[B, E] + l^2/N$$

⊳ Используя **Теорему 6.1** получаем PRF из PRP (добавляется слагаемое l^2/N) , используя **Теорему 6.3** получаем PRG из PRF, используя **Теорему 2.4** получаем семантически стойкий шифр из PRG (множитель 2) ⊲

CTR

- $SS_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq 2 * PRP_{adv}[B, E] + l^2/N$
- Стойкий для сообщений произвольной длины
- Стойкость на больших сообщениях убывает квадратично быстро (из за слагаемого l^2/N, стойкость зависит от размера блока (N).

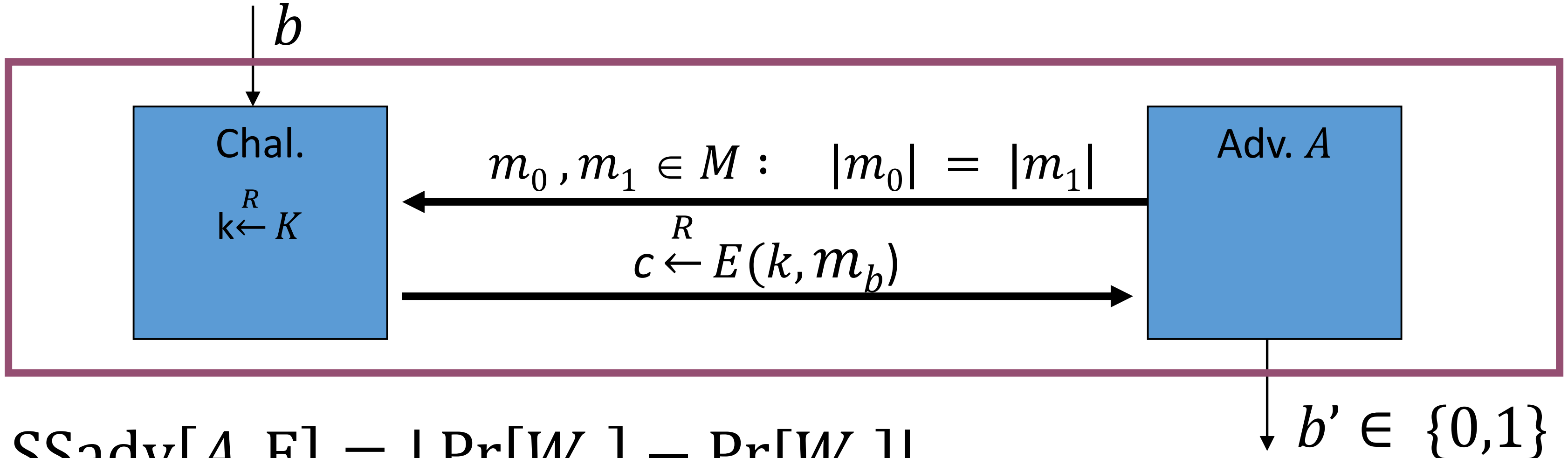
Рассмотрим атаку - m_0 - сообщение из l нулевых блоков, m_1 - сообщение из l случайных блоков. При шифровании сообщения m_0 шифртекст не будет содержать повторяющихся блоков. При шифровании m_1 вероятность получить повторяющиеся блоки $\min\{l(l-1)/4N, 0.63\}$. Т.е. можно построить алгоритм A в игре на семантическую стойкость для $l \sim N^{1/2}$.

Многоразовое использование ключей

- Семантическая стойкость – ослабленная версия абсолютной стойкости, позволяющая описывать стойкость шифров, для которых энтропия ключа меньше энтропии множества открытых текстов.
- Семантически стойкие шифры позволяют использовать короткие ключи.

Многоразовое использование ключей

До этого момента мы рассматривали ситуации, когда ключ использовался претендентом только один раз. Т.е. мы моделировали одноразовое использование ключа.



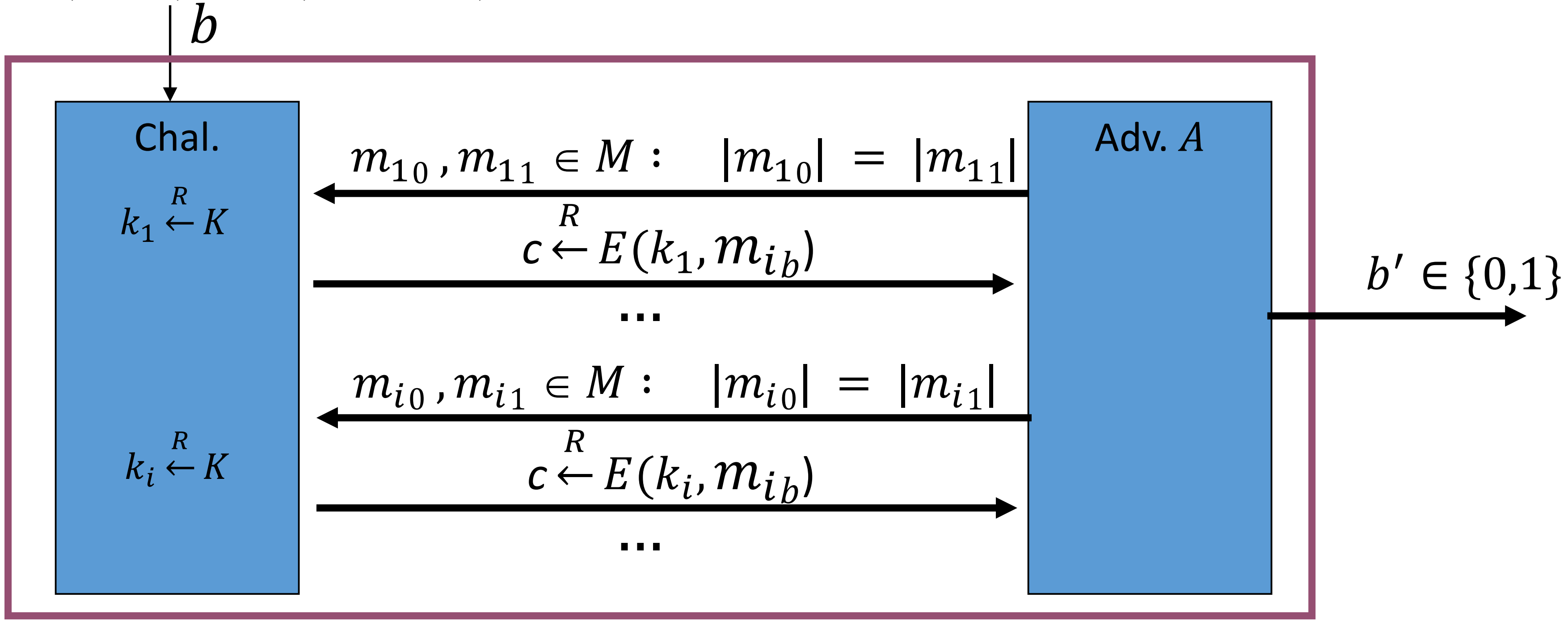
$$\mathrm{SSadv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$$

Но мы хотели бы иметь возможность использовать ключи для шифрования множества сообщений.

Использование множества ключей

- Будет ли семантически стойким шифр, если для шифрования множества сообщений будут использоваться различные случайные независимые ключи?

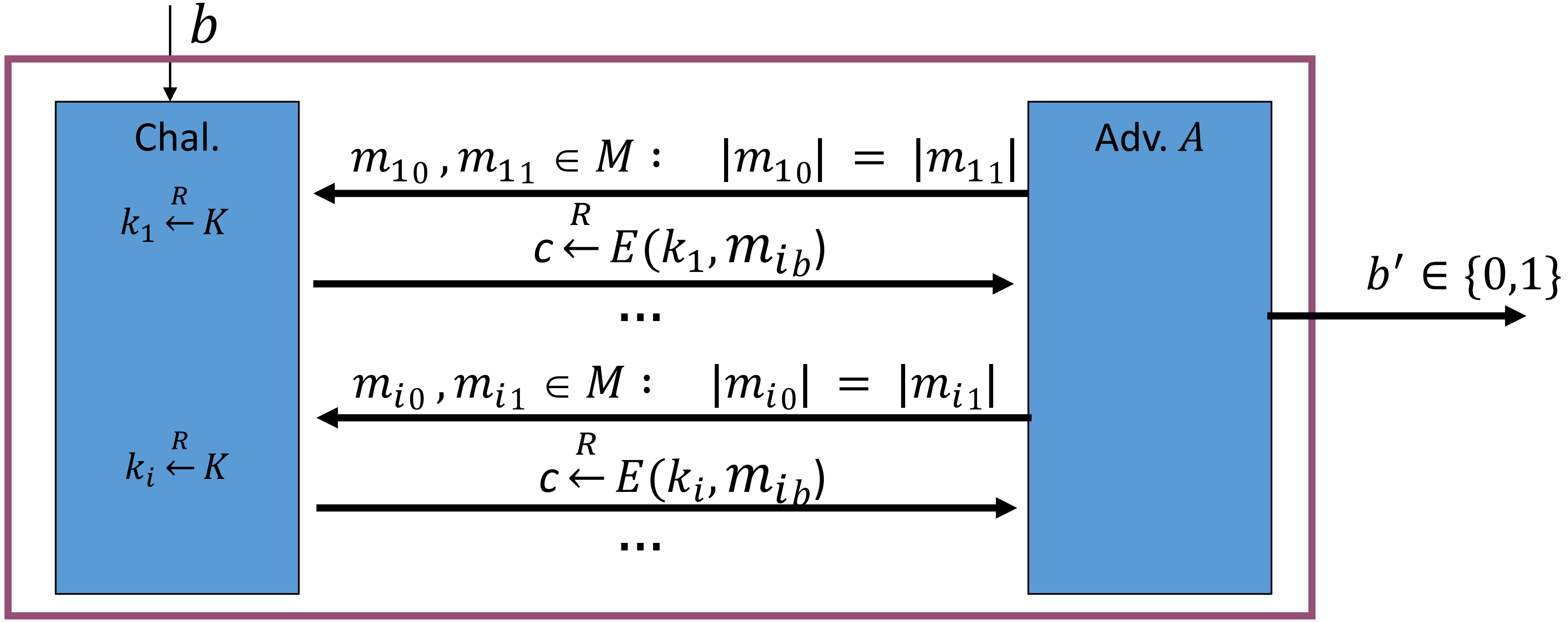
Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ на (K, M, C) шифр. Определим игру



Использование множества ключей

Пусть W_b событие того что в игре b $b' = 1$.

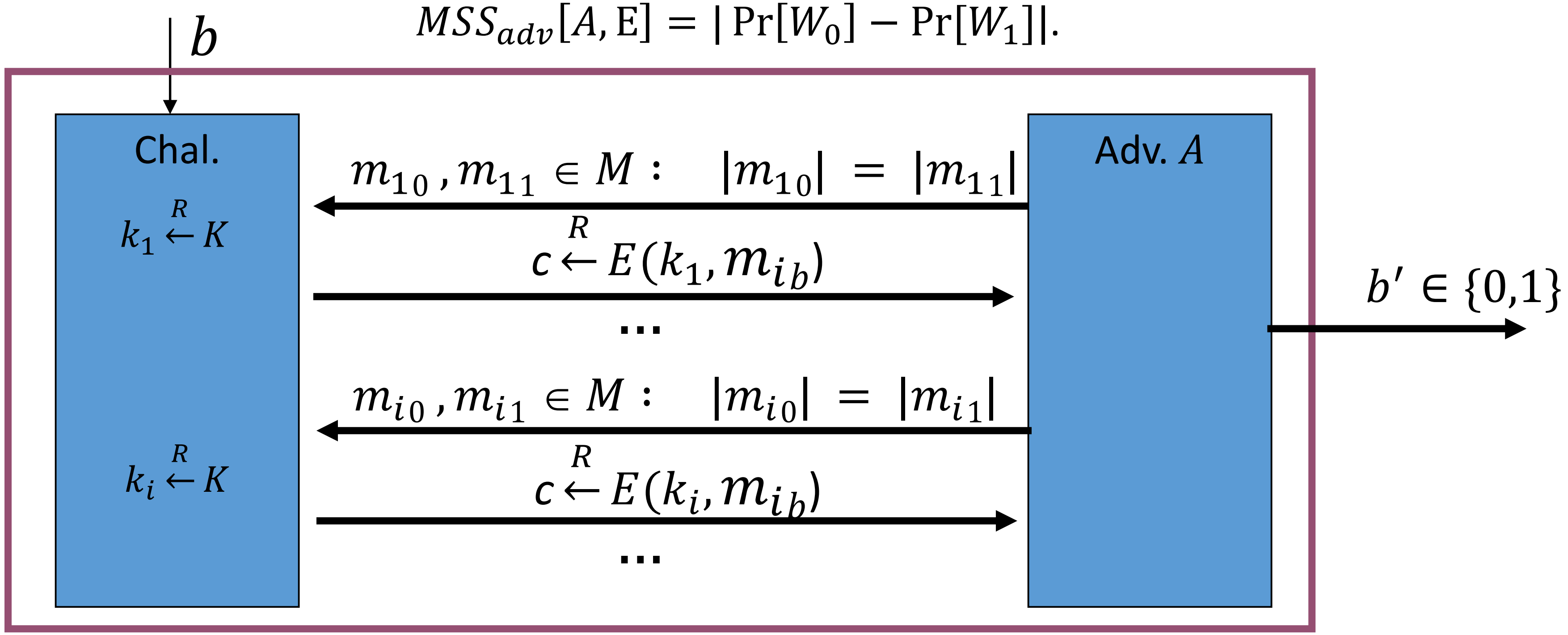
Введём $MSS_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\,\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$.



Использование множества ключей

Шифр E называется семантически стойким при использовании множества ключей, если величина $MSS_{adv}[A, \mathrm{E}] \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая.

$$MSS_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|.$$

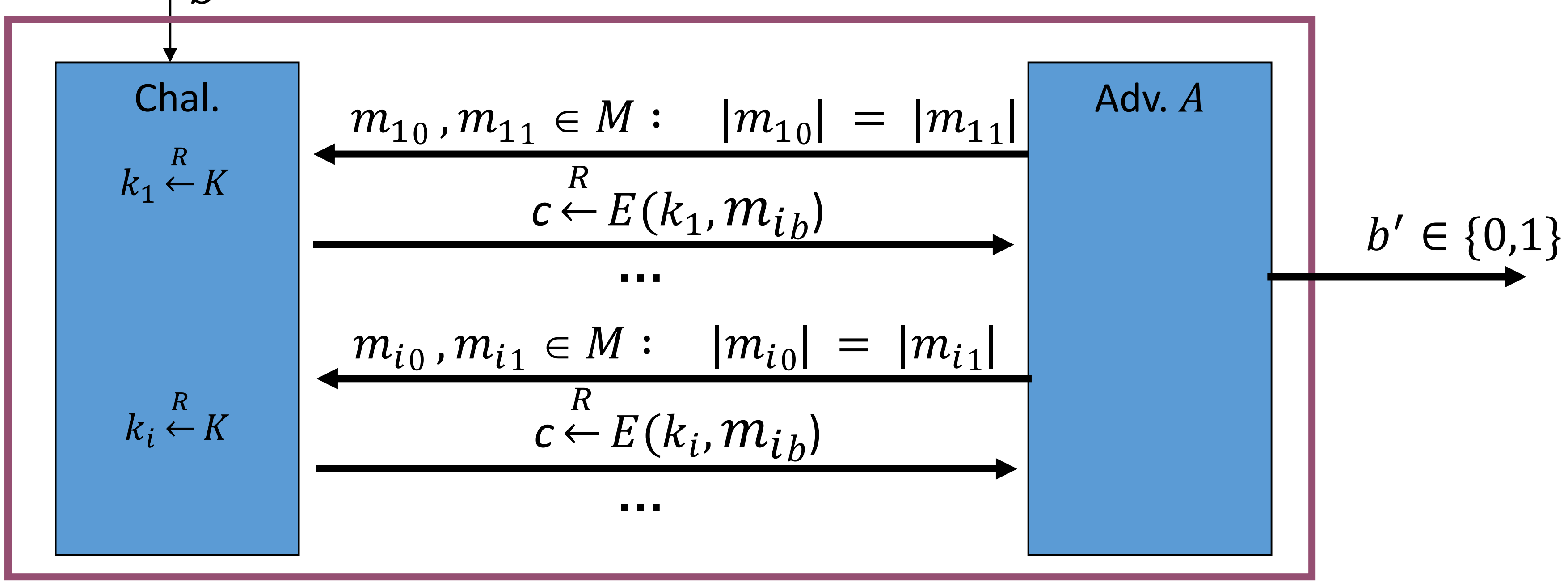


Использование множества ключей

Альтернативное определение преимущества – вероятность угадывания эксперимента противником. Обозначим $MSS^*_{adv}[A, \mathrm{E}]$.

$$MSS_{adv}[A, \mathrm{E}] = 2 * MSS^*_{adv}[A, \mathrm{E}]$$

$MSS_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|.$



Использование множества ключей

Теорема 6.4. Пусть E семантически стойкий на (K, M, C). Тогда он семантически стойкий при использовании множества ключей, причём $\forall A$ в игре на семантическую стойкость при использовании множества ключей, использующий не более Q запросов к претенденту, $\exists B$ в игре на семантическую стойкость такой что

$$MSS_{adv}[A, \mathrm{E}] = Q * SS_{adv}[B, \mathrm{E}]$$

⊳доказательство основано на использовании гибридных игр, аналогично **Теореме 3.1.** В эксперименте 0 игры MSS претендент шифрует сообщения $m_{10}, m_{20}, \ldots, m_{Q0}$. Для шифрования сообщения m_{10} используется ключ k_1. Так как шифр семантически стойкий можем заменить шифрование m_{10} на шифрование m_{11} и противник не заметит разницы. В итоге производя Q таких модификаций мы получим эксперимент 1 игры MSS⊲

Многоразовое использование ключей

- Описанная ранее семантическая стойкость с использованием множества ключей требует уникального случайного ключа для каждого нового зашифровываемого сообщения.
- Можно ли построить шифр так, чтобы на одном фиксированном ключе можно было зашифровать множество сообщений?
- Вводится понятие многоразовой семантической стойкости, т.е. семантической стойкости, при которой ключ используется более одного раза.

Многоразовое использование ключей

- Является ли одноразово семантически стойкий шифр многоразово семантически стойким?
  - Нет. Пример. При использовании поточного шифра необходима уникальность ключа $s \in S$. При повторении ключа получаем двухразовый блокнот, который не является семантически стойким, так как позволяет восстановить исходные сообщения.
- Нужно новое определение - необходим аналог семантической стойкости, но при многократном использовании ключа.

Многоразовое использование ключей

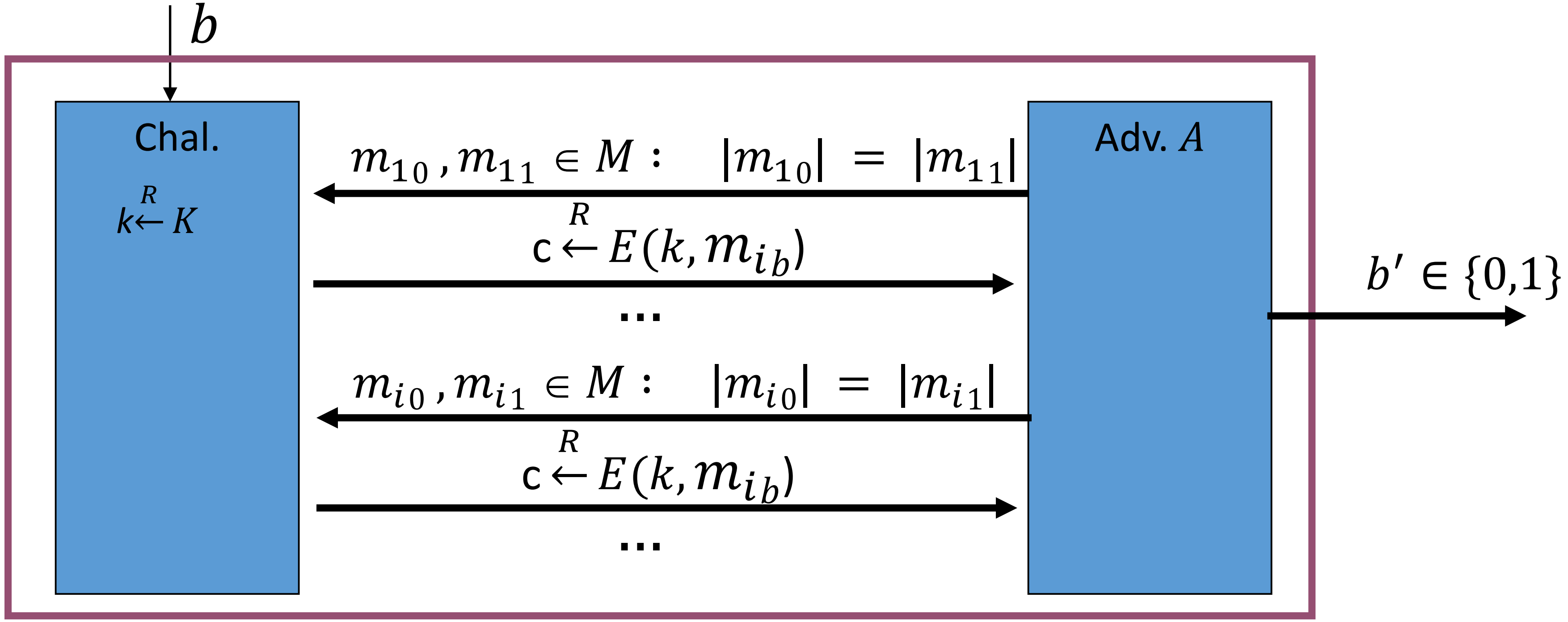
- Попробуем выдвинуть необходимые требования к шифру, семантически стойкому при многократном использовании ключей.
- Поточный поточные шифры не подходят, как видели ранее. Не подойдут и любые **детерминированные** шифры, т.е. такие, которые при фиксированном ключе на одинаковом открытом тексте дают одинаковый выход.
  - Если противник знает, что $E(k, x) = c$ и шифр детерминированный, то он может отличить сообщения $m_0 = x, m_1 \neq x$ по их шифртекстам.
- Следовательно, шифр должен быть **вероятностным**, т.е. дающим разные шифртексты на фиксированном ключе для указанного сообщения. Это **необходимое** условие.

CPA

- CPA (атака по выбранному открытому тексту, атака по парам открытый текст – шифртекст).
- Возможности противника – получить шифртексты для произвольных открытых текстов при фиксированном ключе.
- Цель противника – атака на семантическую стойкость.
- Рассмотрим игру

CPA

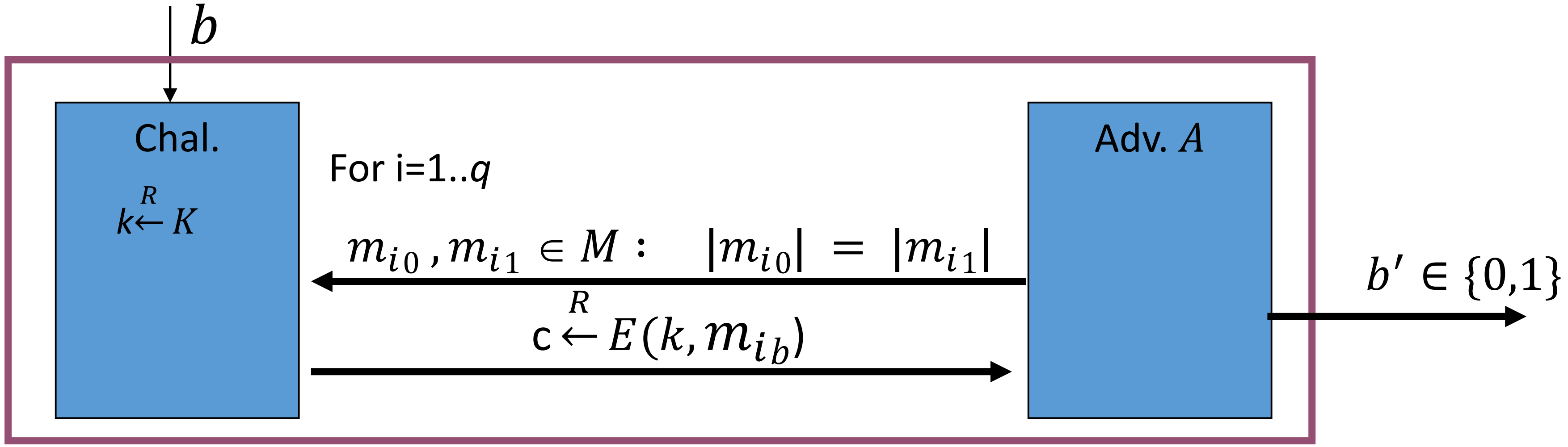
Введём игру аналогично игре при использовании множества ключей семантически стойким шифром, но фиксируя ключ. Определим $CPA_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$.



CPA

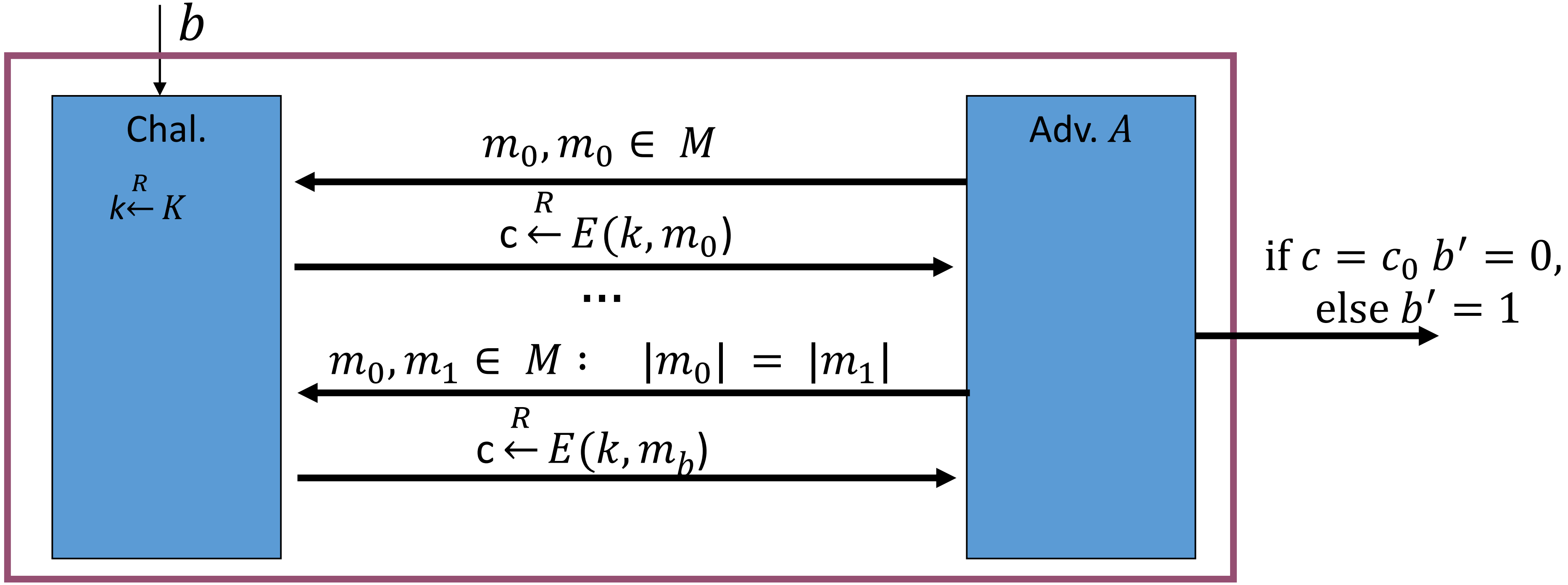
Шифр E называется стойким к атаке по выбранным открытым текстам (CPA стойким), если величина $CPA_{adv}[A, \mathrm{E}] \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая. q – параметр, определяющий максимальное количество сообщений противника.

Заметим, что противник может получить $c = E(k, m)$ отправив претенденту $m_{j0} = m_{i1} = m$.



CPA

- Детерминированные шифры не CPA стойкие

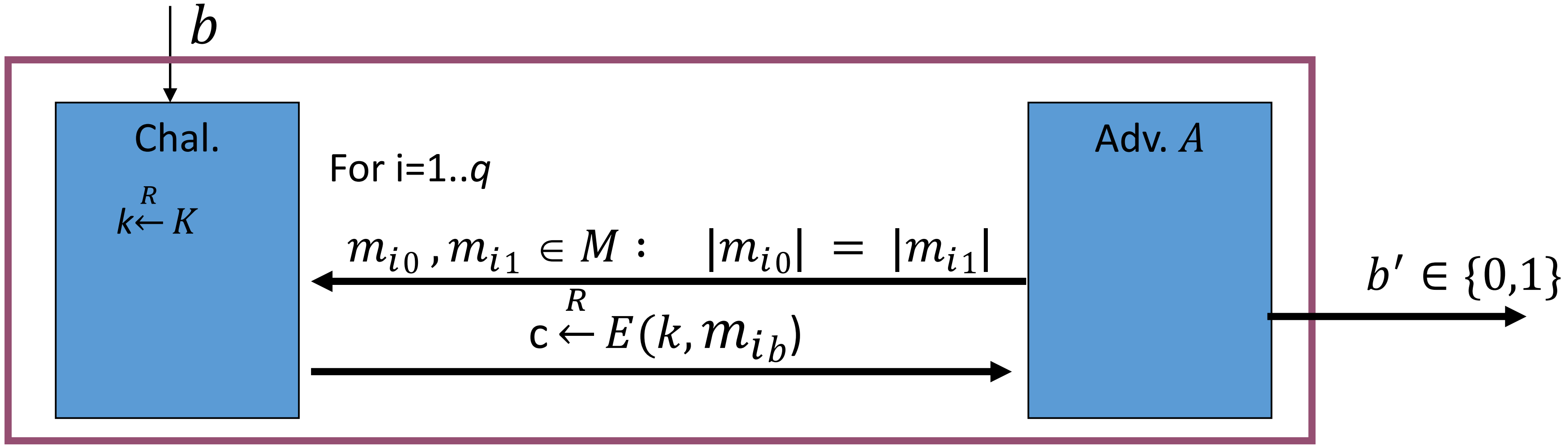


- Следовательно необходимо использовать вероятностные алгоритмы

CPA

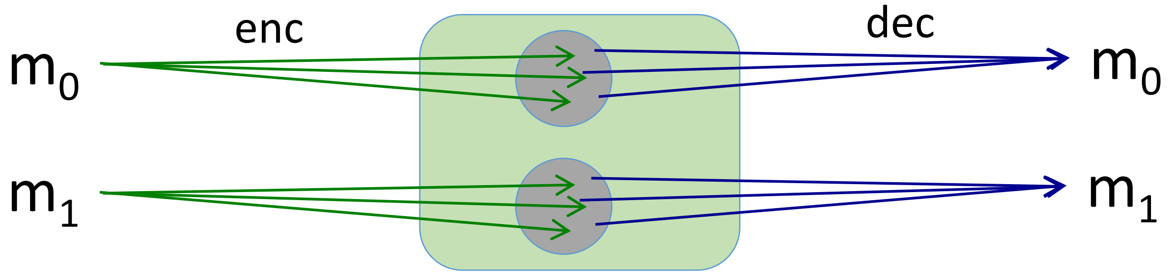
Альтернативное определение преимущества – вероятность угадывания эксперимента противником. Обозначим $CPA^{*}_{adv}[A, \mathrm{E}]$.

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}] = 2 * CPA^{*}_{adv}[A, \mathrm{E}]$$



Вероятностное шифрование

- Как показано ранее, для CPA стойкости необходима «рандомизация» шифртекстов
- Подход 1 – рандомизация функции зашифрования



  - Зашифрование одного и того же сообщения даст разные шифртексты
  - Необходим внешний источник энтропии
  - Шифртексты всегда длиннее открытых текстов, так как необходимо также передать энтропию, необходимую для восстановления открытого текста

Вероятностное шифрование

- Подход 2 – использование уникальных, неповторяющихся величин (nonce)
- $m \rightarrow E(k,*,n) \rightarrow c \rightarrow D(k,*,n) \rightarrow m$
- Nonce должна быть уникально для каждого сообщения, пара (nonce, key) не должна повторяться при жизни ключа.
- В качестве nonce можно использовать счётчик или случайные величины
- Nonce может не пересылаться в явном виде, обе стороны могут синхронно обновлять её независимо.
- Не любое использование nonce даёт стойкие схемы!