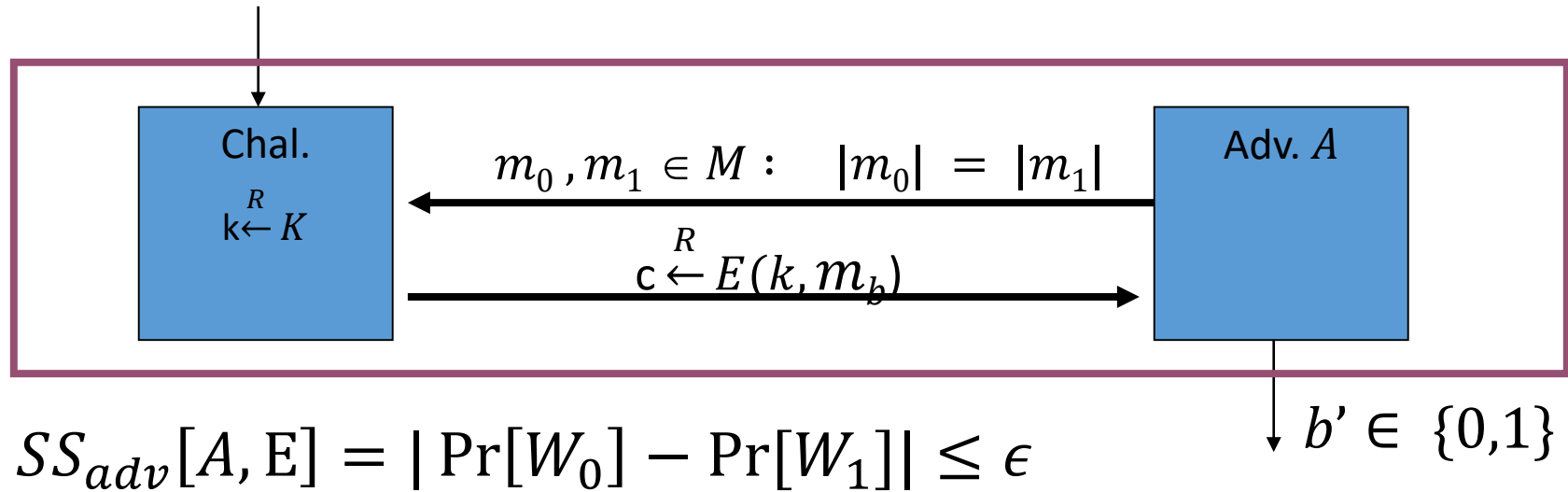


# Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы Поточные шифры

Макаров Артём  
МИФИ 2019

# Семантическая стойкость



- $\epsilon$  – пренебрежимо малая величина.
- Претендент и Противник – эффективные алгоритмы

# Пренебрежимо малые величины

Функция  $f: Z_{\geq 1} \rightarrow R$  называется **пренебрежимо малой (negligible)**, если для всех  $c \in \bar{R}_{>0}$   $\exists n_0 \in Z_{\geq 1}: \forall n \geq n_0$  справедливо неравенство:

$$|f(n)| < \frac{1}{n^c}.$$

**Теорема 2.1.** Функция  $Z_{\geq 1} \rightarrow R$  пренебрежимо малая, тогда и только тогда когда  $\forall c > 0$  справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)n^c = 0.$$

Т.е. на бесконечности функция от  $n$  убывает быстрее любого полинома от  $n$ .

# Примеры

- **Пренебрежимо малые функции:**  $2^{-n}, 2^{-\sqrt{n}}, n^{-\log n}$ .
  - Убывают быстрее любых полиномов
- **Не пренебрежимо малые функции:**  $n^2, n^{-2}, n^{-10000000}$ .
  - $f(n) = n^2: \exists c = 0, \forall n > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)n^c = n^2 * 1 \neq 0$ .
  - $f(n) = n^{-2}: \exists c = 3, \forall n > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)n^c = n^{-2} * n = n \neq 0$ .
  - $f(n) = n^{-10000000}: \exists c = 10000001, \forall n > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)n^c = n \neq 0$ .

# Супер-полиномиальные и полиномиально ограниченные функции

- Функция  $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow R$  называется **супер-полиномиальной (super-poly)**, если  $1/f$  – пренебрежимо малая.
  - Растёт быстрее любого полинома на бесконечности.
- Функция  $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow R$  называется **полиномиально-ограниченной (poly bounded)**, если  $\exists c, d \in R_{\geq 0}: \forall n \geq 0$  имеет место неравенство:
$$|f(n)| \leq n^c + d$$
  - Может быть ограничена на бесконечности сверху полиномом степени  $c$ .

# Пренебрежимо малые величины на практике

На практике величина  $\epsilon$  – скаляр (формально – функция от некоторых фиксированных ранее параметров системы). Её «малость» оценивают исходя из необходимой для системы стойкости.

Пример:

- $\epsilon$  – не пренебрежимо малая, если событие вероятно произойдёт при обработке данных порядка гигабайта,  $\epsilon \geq 1/2^{30}$
- $\epsilon$  – пренебрежимо малая, если событие вряд ли произойдёт при «жизни» ключа длины 160 бит,  $\epsilon \leq 1/2^{80}$

# Пренебрежимо малые величины на практике

При доказательстве стойкости часто получается формула преимущества, ограниченная сверху функцией от некоторых параметров. Пример:

$Adv_{SS}[A, E] \leq q/2^k$ , где  $q$  – максимально число зашифрований,  $k$  – длина ключа.

Для использования конкретной реализации нужно выбрать параметры  $q$  и  $k$  при заданном уровне стойкости.

Пусть хотим  $Adv_{SS}[A, E] \leq 1/2^{80}$ , тогда для зашифрования, при использовании ключа с длиной  $k = 128$  бит мы можем зашифровать  $q \leq \frac{1}{2^{80-k}} = 2^{48}$  сообщений, при параметре стойкости 80 бит.

# Параметры системы

Ранее, при введении понятия (вычислимого) шифра, мы описывали его без явного описания параметров.

На практике многие шифры и другие примитивы имеют так называемые **параметры системы**, влияющие на производительность и стойкость системы.

Пример – длина ключа (и максимального сообщения) в одноразовом блокноте, модуль и длина ключа в аддитивном одноразовом блокноте.



# Эффективный алгоритм

Пусть  $\lambda$  – некоторый параметр. Пусть  $p(\lambda)$  - полином над  $Z_{\geq 1}$ . Пусть  $A: A(\lambda, x): \lambda \in Z_{\geq 1}, x \in \{0,1\}^{\leq p(\lambda)}$  (т.е. длина вектора  $x$  полиномиальной ограничена на основе параметра).

Алгоритм  $A$  называется **эффективным**, если  $\exists t(\lambda): t$  – полиномиально ограниченная,  $\epsilon(\lambda): \epsilon$  – перенебрежимо малая:  $\forall \lambda \in Z_{\geq 1}, \forall x \in \{0,1\}^{\leq p(\lambda)}$  вероятность того, что время исполнения алгоритма  $A$  на входе  $(\lambda, x)$  превышает  $t(\lambda)$  не превосходит  $\epsilon(\lambda)$ .

Иными словами, алгоритм  $A$  – **эффективный**, если при заданном параметре на полиномиально ограниченном входе он выполняется за полиномиальное время.

# Пример эффективного алгоритма с параметром

Одноразовый блокнот переменной длины.  $E = (E, D)$  на  $K = \{0,1\}^L$ ,  $M = C = \{0,1\}^{\leq L}$ , где  $L = \lambda$  – фиксированный **параметр**

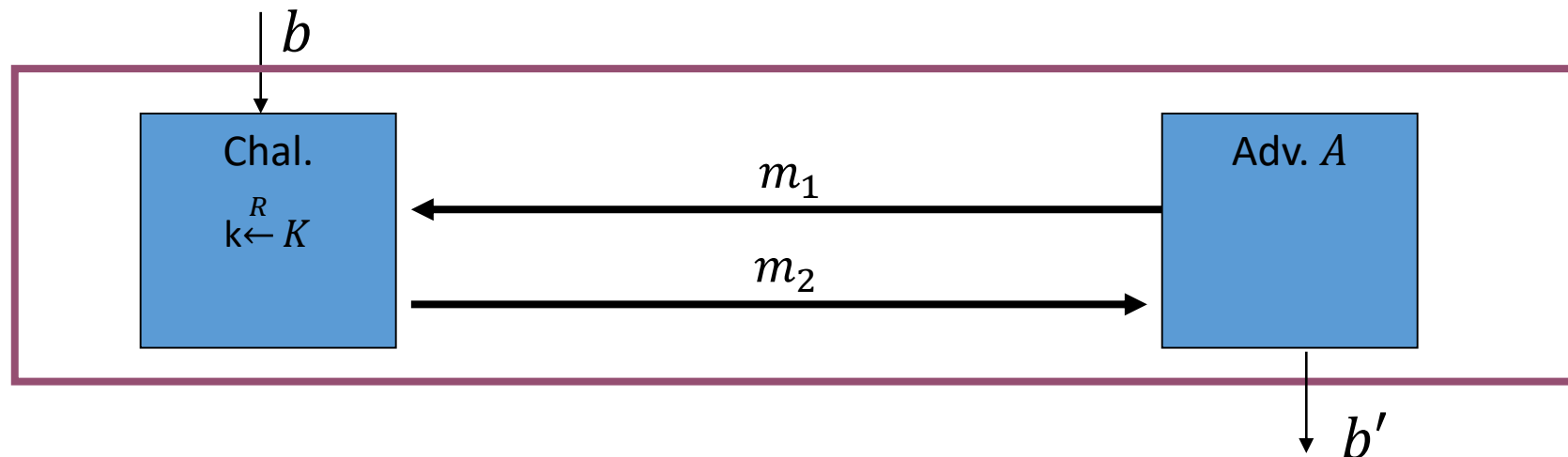
$$\begin{aligned} E(k, m) &= k[0..l-1] \oplus m \\ D(k, c) &= k[0..l-1] \oplus c \end{aligned}$$

Длина входов алгоритма  $E$ :  $in \in I = K \times M$ :  $|I| \leq 2^{2L} \Rightarrow |in| = 2L$ ,  
**полиномиально ограничена** сверху полиномом  $p(l) = p(\lambda) = 2L + 1$

Время выполнения  $E$ :  $t \leq L$ , **полиномиально ограничено** сверху  
полиномом  $p(l) = p(\lambda) = L + 1$

# Эффективность в игре

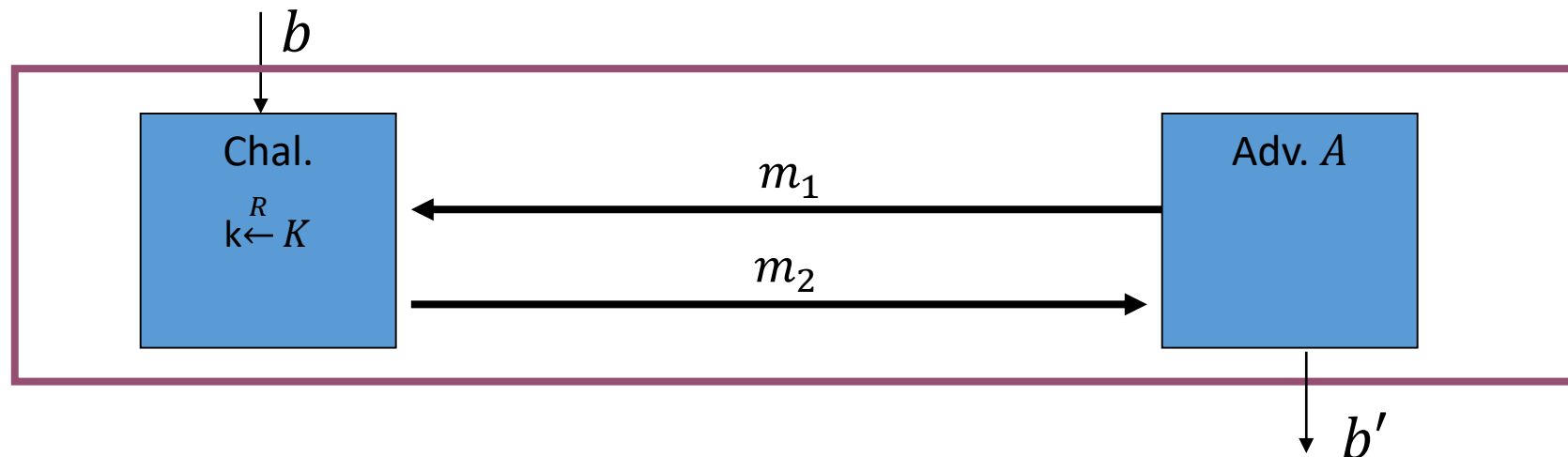
Ранее мы указывали, что в играх будем рассматривать только эффективные (вычислимые) алгоритмы, как для Претендента, так и для Противника. Иными словами, в игре должно быть полиномиально ограниченное число шагов, Противник обладает полиномиально ограниченным временем и ёмкостью. Т.е. алгоритм игры должен быть эффективным.



# Эффективность в игре

Два эксперимента игры называются **статистически неразличимыми**, если не существует эффективного алгоритма противника, способного различить эти эксперименты.

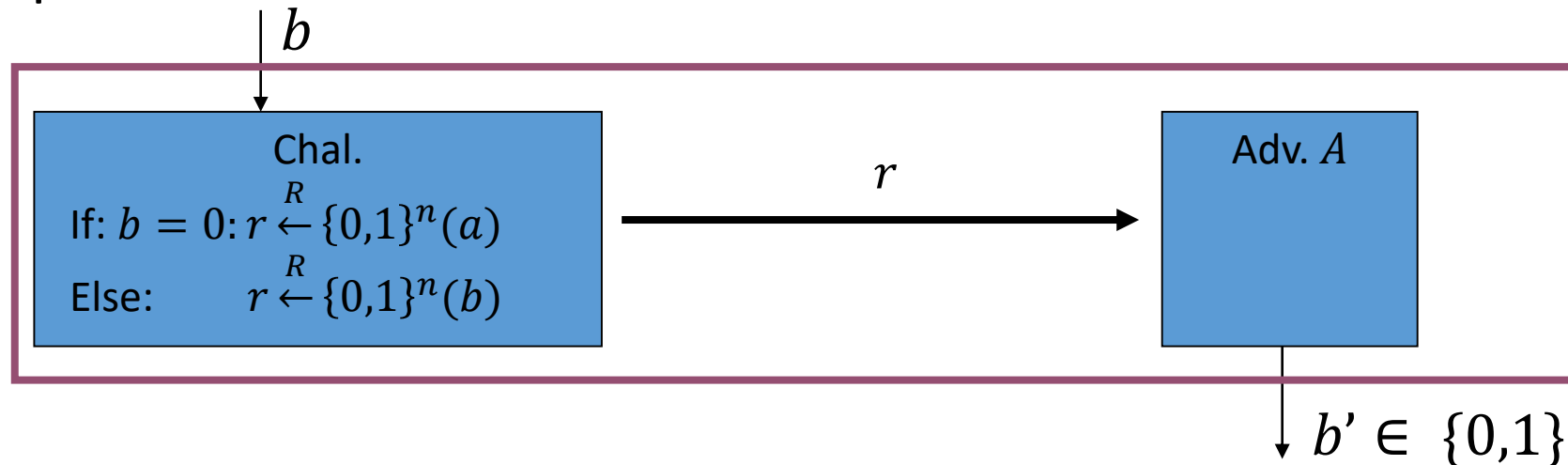
Т.е.  $\forall A \text{ } Adv_{disc} = |\Pr[b' = 1 | b = 0] - \Pr[b' = 1 | b = 1]| \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  – пренебрежимо малая величина.



# Эффективность в игре

Пусть  $a, b$  – **распределения** на  $\{0,1\}^n$ .  $a$  и  $b$  называются **статистически неразличимыми**, если не существует эффективного алгоритма противника, способного различить эти распределения в игре на распознавание. Обозначается  $a \approx_p b$ .

Т.е.  $\forall A \text{ } Adv_{disc} = |\Pr[b' = 1 | b = 0] - \Pr[b' = 1 | b = 1]| \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  – пренебрежимо малая величина.



# Параметр стойкости

**Параметром стойкости** называют двоичный логарифм, от необходимого числа операций для осуществления теоретической или практической атаки.

Пример: идеальный (нет атак, помимо перебора ключа) шифр с ключом длины  $l$ , параметр стойкости  $l$  бит (необходимо перебрать весь ключ).

Пример: Семантически стойкий шифр  $E = (E, D): \forall A \text{ } Adv_{SS}[A, E] \leq 1/2^k$ , параметр стойкости  $k$  бит.

# Оценки величин

Параметр стойкости 10 бит это много или мало? А  $2^{10}$  бит? При каком параметре стойкости принято считать систему стойкой?

Необходимый параметр стойкости зависит от приложения используемой криптосистемы.

Для систем общего назначения рекомендуемые параметры стойкости 80-256 бит.

# Оценки величин

$\sim 2^{240}$  - число элементарных частиц в обозримой вселенной

$\sim 1/2^{119}$  - шанс выиграть в лотерею, с миллионом участников 6 раз подряд

$2^{60}$  - секунд с большого взрыва ( $2^{200}$  - в планковских единицах)

$\sim 2^{42}$  - вычислительная сложность майнинга биткоина (2018 год)

$\sim 2^{30}$  - можно перебрать на домашнем компьютере за несколько часов



# Идея одноразового блокнота

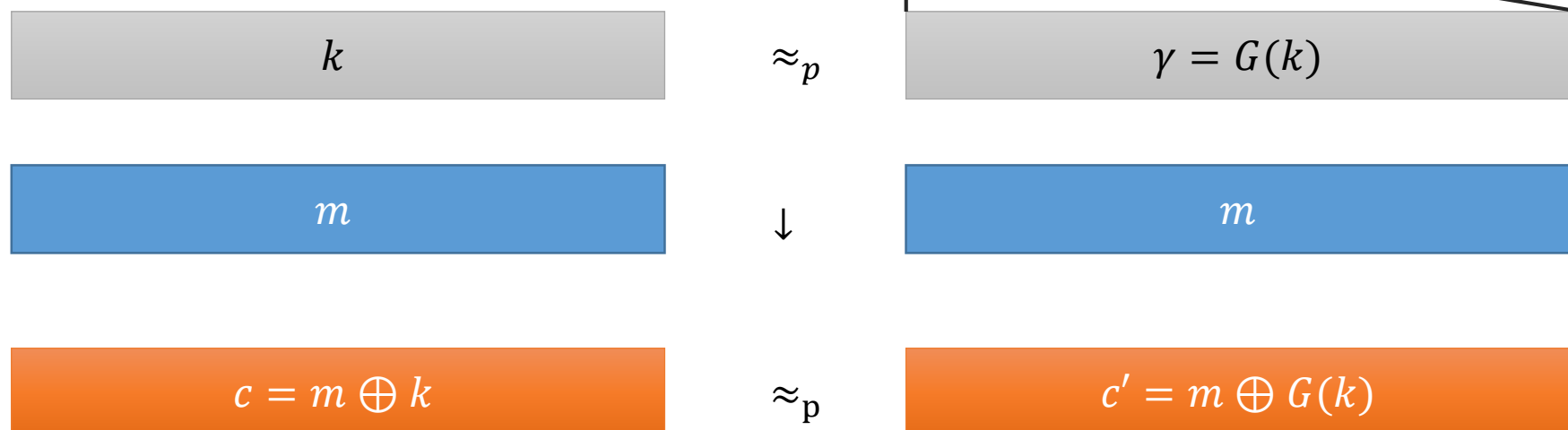
Одноразовый блокнот – сложение (побитное) случайного равновероятного вектора ключа с вектором открытого текста, для получения шифртекста.

Проблема (Теорема Шеннона) – длина (энтропия) ключа должна быть больше или равна длине сообщения.

Основная идея – заменить случайный длинный вектор ключа на «псевдослучайную» последовательность, называемую гаммой.

# Идея одноразового блокнота

Заменяем использование случайного ключа  $k$  псевдослучайной последовательностью  $\gamma$ . Если последовательность «неотличима» от случайной равновероятной, то шифртекст  $c'$  неотличим от шифртекста в одноразовом блокноте.



# Поточный шифр

Эффективно вычислимая функция  $G: S \rightarrow R$  называется **псевдослучайным генератором** на  $(S, R)$  **PRG**.

Шифр  $E = (E, D)$  с параметрами  $(l, L)$  на  $(K, M, C)$ :  $K = \{0,1\}^l, M = C = \{0,1\}^L$ , называется **поточным шифром**, если

$$E(k, m) = G(k) \oplus m,$$

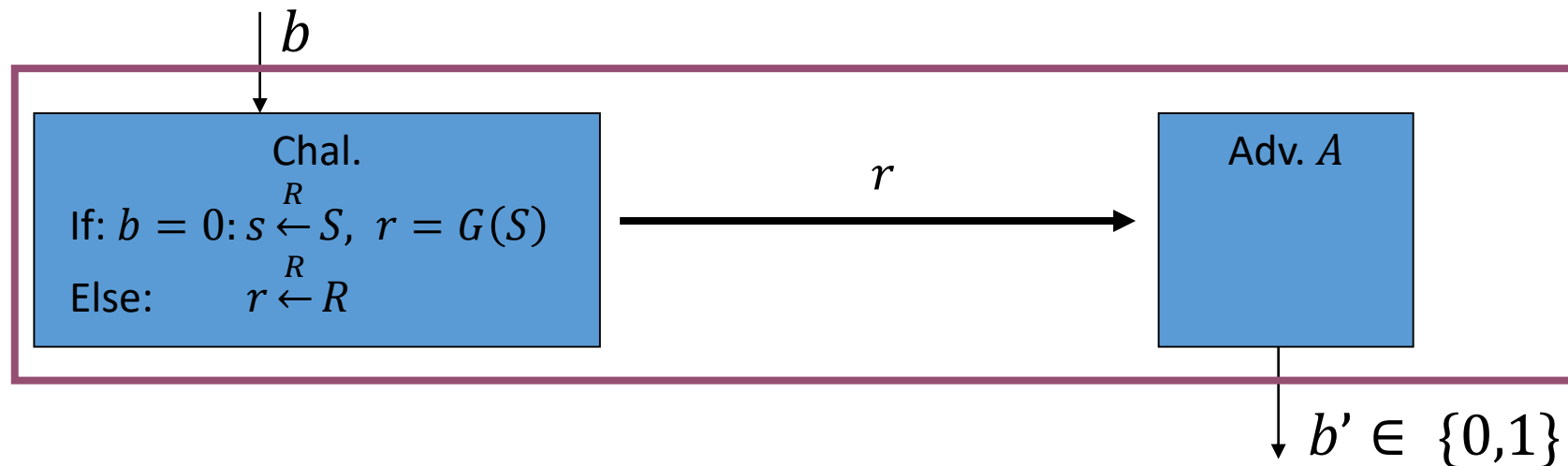
где  $G: \{0,1\}^l \rightarrow \{0,1\}^L$  - псевдослучайный генератор.

Аналогично можно ввести Поточный шифр по произвольному модулю.

Стойкость поточного шифра сводится к «качеству» псевдослучайной последовательности  $\gamma = G(k)$

# Стойкий псевдослучайный генератор

Пусть  $G$  псевдослучайный генератор на  $(S, R)$ . Рассмотрим игру с двумя экспериментами. В эксперименте 0 Претендент отправляет псевдослучайную величину  $r = G(s)$ . В эксперименте 1 – случайную величину  $r \stackrel{R}{\leftarrow} R$ . Задача Противника угадать, случайную, или псевдослучайную величину он получил.

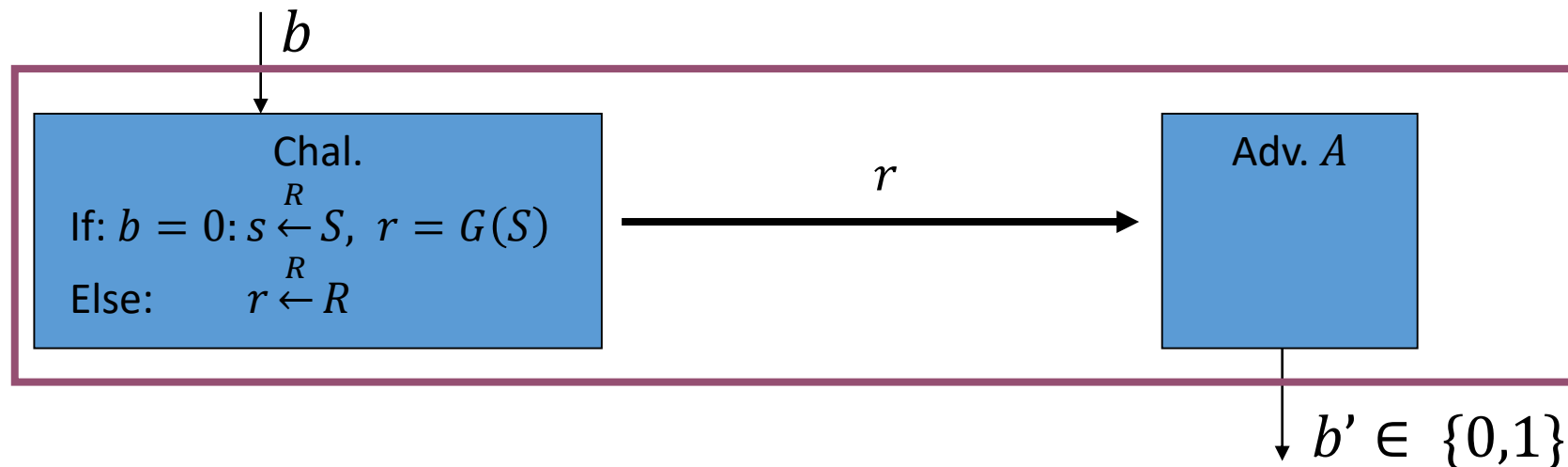


# Стойкий псевдослучайный генератор

Пусть  $W_b$  - событие того, что  $b' = 1$  в эксперименте  $b$ .

Тогда Преимуществом Противника  $A$  против алгоритма  $G$  в игре на различимость есть величина

$$Adv_{PRG}[A, G] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|.$$

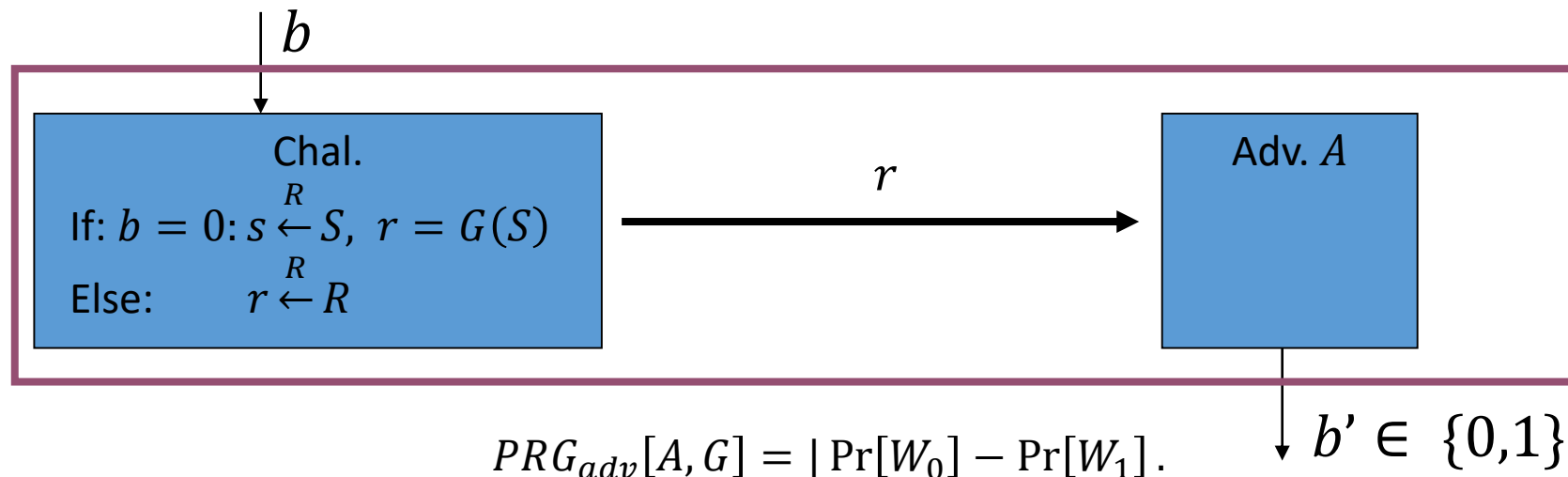


# Стойкий псевдослучайный генератор

Генератор  $G$  называют **стойким псевдослучайным генератором** (secure PRG), если для любых эффективных противников  $A$  величина  $PRG_{adv}[A, G] \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  – пренебрежимо малая величина.

Противника  $A$  часто называют **статистическим тестом**.

Если генератор  $G$  – стойкий, то последовательность  $\gamma = G(s)$  называют (эффективно) **статистически неразличимой от случайной последовательности** или **стойкой псевдослучайной последовательностью**. Обозначается  $\gamma \approx_P r$ , где  $r$  – случайная последовательность.



# Энтропия генератора

Пусть  $G$  на  $(S, \{0,1\}^n)$  - генератор.

Очевидно, что генератор может выдать не более  $|S|$  различных последовательностей.

Часто в генераторах величина  $s \in_R S$  является начальным заполнением внутреннего состояния. Тогда максимально возможная энтропия выходной последовательности  $\gamma \leftarrow G(s), s \leftarrow_R S$  равна энтропии случайной величины  $s$ , т.е.

$$H(\gamma) \leq H(s) \leq \log_2 |S|$$

Таким образом максимально возможная длина периода генератора

$$l \leq 2^{H(\gamma)} \leq |S|$$

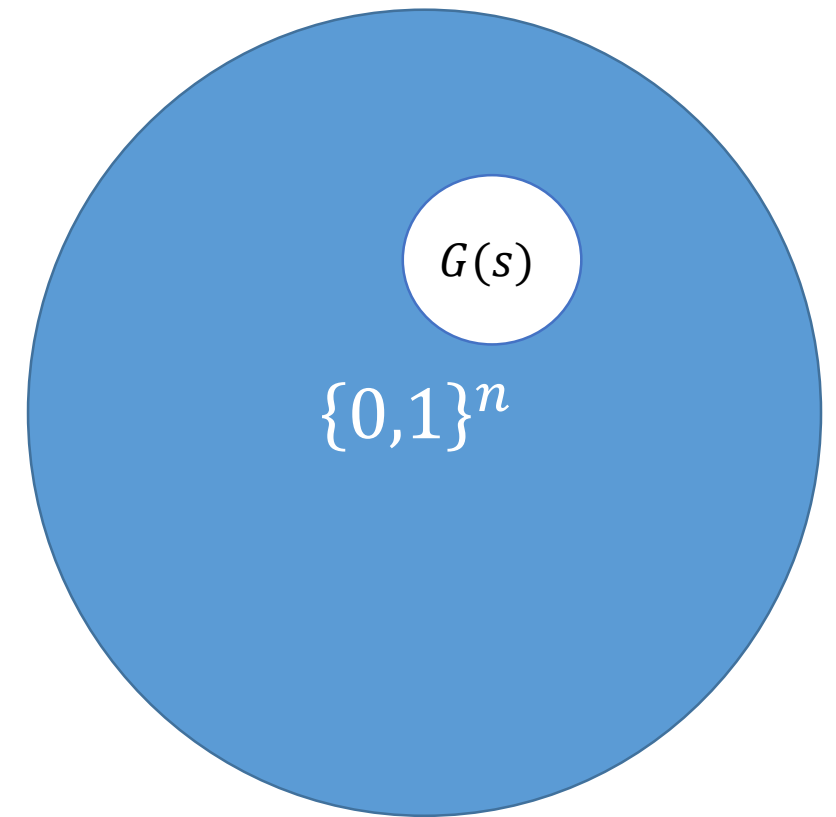
Пример: Пусть  $S = \{0,1\}^{128}$  - множество состояний и ключей, тогда максимально возможный период выходной последовательности не превышает  $2^{128}$ , энтропия 128 бит.

# Статистическая неразличимость

Пусть  $G$  на  $(S, \{0,1\}^n)$ .

Рассмотрим множество возможных значений  $R \subset \{0,1\}^n: \{r = G(s), \forall s \in S\}$ .

Тогда если  $G$  – стойкий генератор, то эффективный Противник не может определить содержится ли элемент  $r' \in \{0,1\}^n$  в  $R$ .





# Непредсказуемость генераторов

Пусть  $G$  псевдослучайный генератор на  $(S, R)$ .

- Генератор  $G$  называется **предсказуемым**, если  $\exists$  эффективный алгоритм  $A$  и  $\exists 0 \leq i \leq n - 1$ :

$$Adv_{pred} = |\Pr[A(G(k)[0..i]) = G(k)[i + 1]] - 1/2| > \epsilon$$

Где  $\epsilon$  – не пренебрежимо малая. Т.е. Существует эффективный алгоритм способный по  $i + 1$  биту предсказать  $i + 2$ .

- Генератор  $G$  называется **непредсказуемым**, если  $\forall$  эффективных алгоритмов справедливо

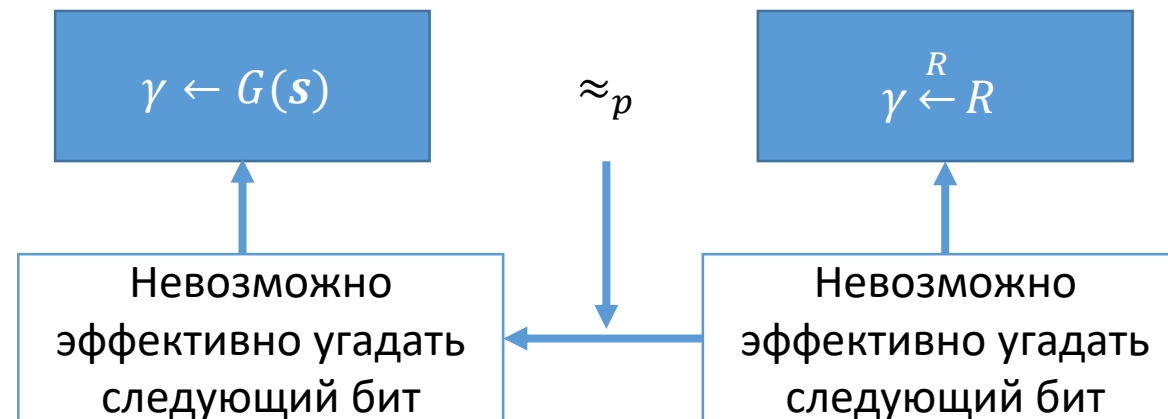
$$Adv_{pred} = |\Pr[A(G(k)[0..i]) = G(k)[i + 1]] - 1/2| \leq \epsilon,$$

для пренебрежимо малой  $\epsilon$ .

# Непредсказуемость генераторов

**Теорема 2.2.** Пусть  $G$  псевдослучайный генератор (PRG) на  $(S, R)$ .  
Если  $G$  – стойкий, то  $G$  – непредсказуемый.

▷ Если  $G$  – стойкий, то его выход вычислительно неотличим от случайной последовательности. А для случайной последовательности невозможно предсказать следующий бит.  $Pred_{adv}[A, G] = PRG_{adv}[B, G] \triangleleft$



# Непредсказуемость генераторов

**Теорема 2.3.** Yao'82 . Пусть  $G$  псевдослучайный генератор (PRG) на  $(S, R)$ .

Если  $G$  – непредсказуемый, то  $G$  – стойкий

▷ без доказательства. Идея доказательства – если мы не можем предсказать 1 следующий бит, то значит у нас нет никаких возможностей определить является ли данная величина случайной, или выходом псевдослучайного генератора ◁

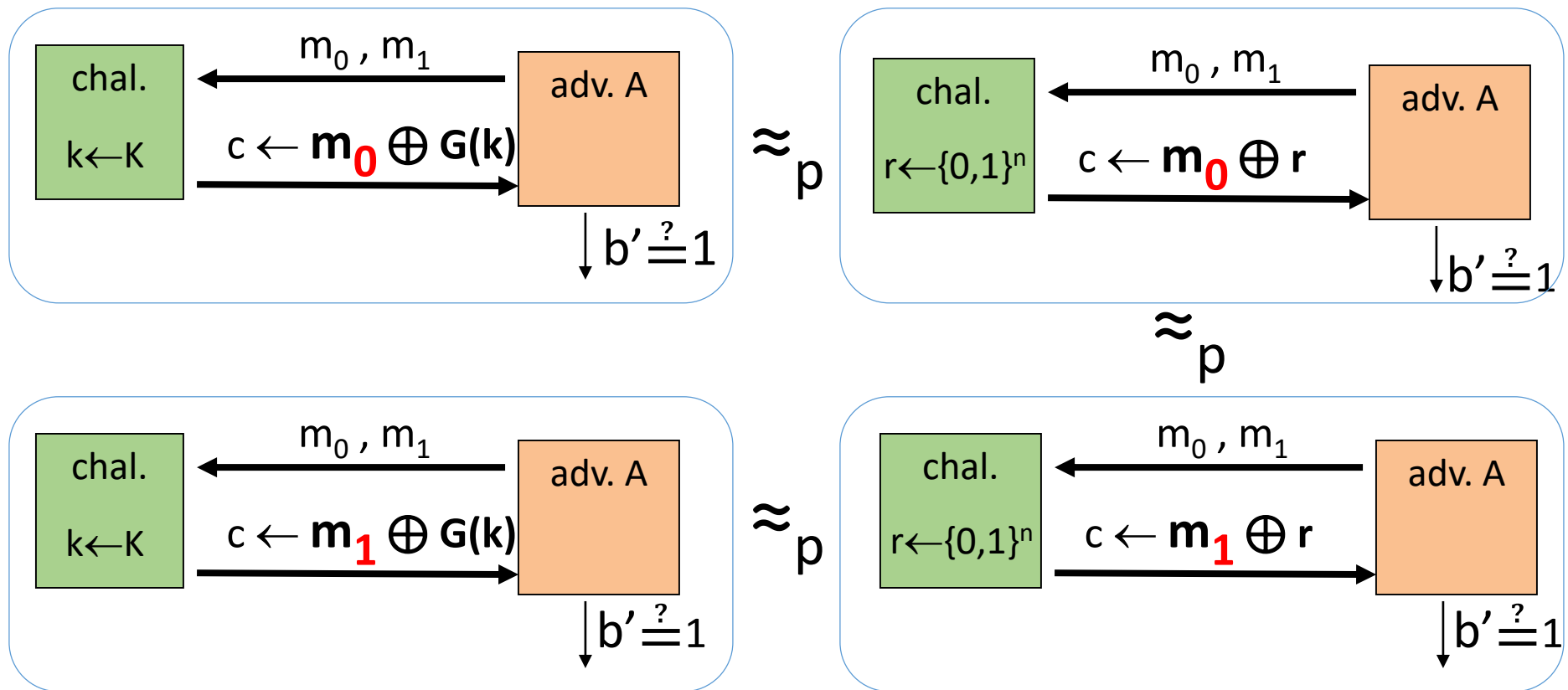
# Поточные шифры и семантическая стойкость

**Теорема 2.4.** Пусть  $G: S \rightarrow \{0,1\}^n$  стойкий генератор (PRG).

Тогда поточный шифр  $E$  определённый с использованием  $G$  семантически стойкий, т.е.  $\forall A$ :  $A$  – противник в игре на семантическую стойкость,  $\exists$  противник  $B$  в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{ss}[A, E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B, G]$$

# Идея доказательства



**Теорема 2.4.** Пусть  $G: S \rightarrow \{0,1\}^n$  стойкий генератор (PRG).

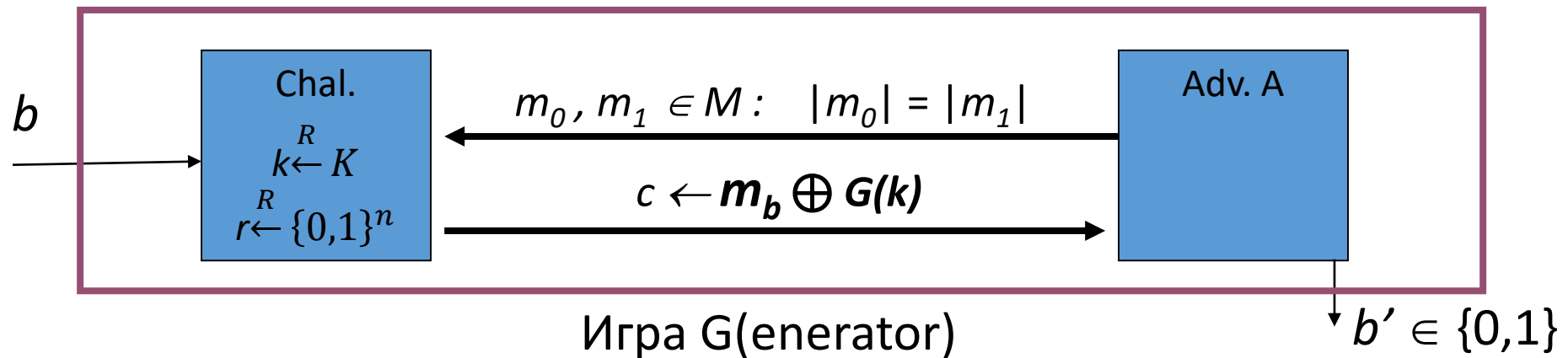
Тогда поточный шифр  $E$  определённый с использованием  $G$  семантически стойкий, т.е.  $\forall A$ :  $A$  – противник в игре на семантическую стойкость,  $\exists$  противник  $B$  в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{ss}[A, E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B, G]$$

▷ Пусть  $A$  противник в игре на семантическую стойкость.

Пусть претендент также генерирует  $r \xleftarrow{R} \{0,1\}^n$ .

Пусть  $W_b$  событие, при котором  $b' = 1$



**Теорема 2.4.** Пусть  $G: S \rightarrow \{0,1\}^n$  стойкий генератор (PRG).

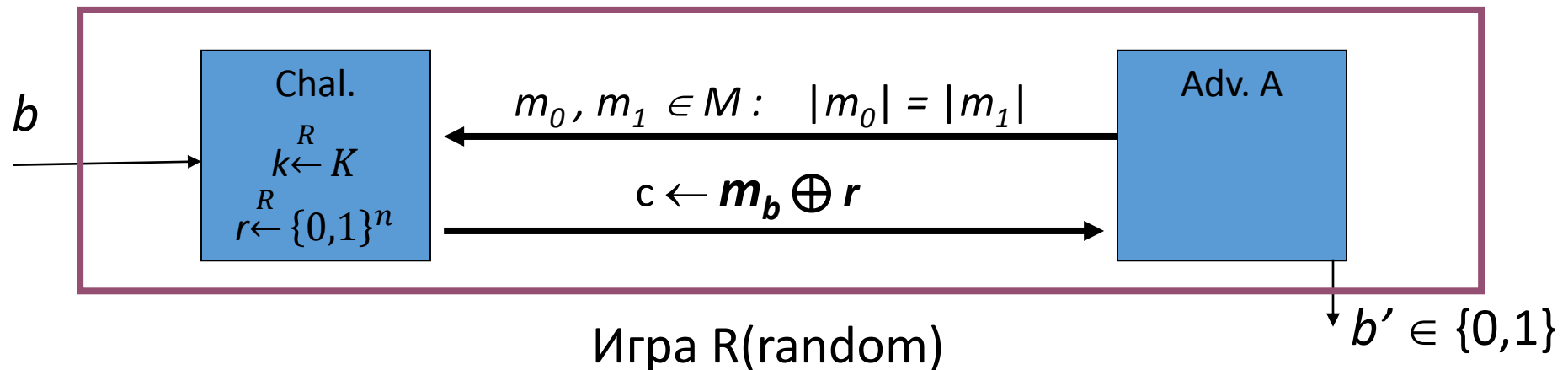
Тогда поточный шифр  $E$  определённый с использованием  $G$  семантически стойкий, т.е.  $\forall A$ :  $A$  – противник в игре на семантическую стойкость,  $\exists$  противник  $B$  в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{ss}[A, E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B, G]$$

Пусть  $A$  противник в игре на семантическую стойкость.

Пусть претендент шифрует сообщение одноразовым блокнотом (OTR).

Пусть  $R_b$  событие, при котором  $b' = 1$ .



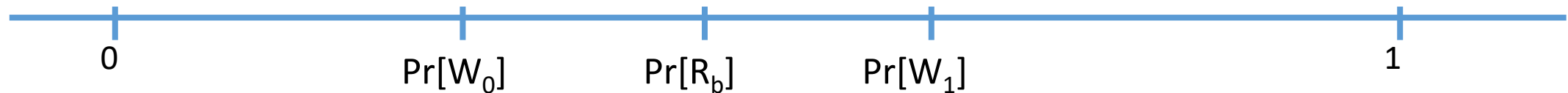
**Теорема 2.4.** Пусть  $G: S \rightarrow \{0,1\}^n$  стойкий генератор (PRG).

Тогда поточный шифр  $E$  определённый с использованием  $G$  семантически стойкий, т.е.  $\forall A$ :  $A$  – противник в игре на семантическую стойкость,  $\exists$  противник  $B$  в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{ss}[A, E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B, G]$$

**Утверждение 2.4.1.**  $Adv_{ss}[A, OTP] = 0 = |\Pr[R_0] - \Pr[R_1]|$

**Утверждение 2.4.2.**  $\exists B$ :  $Adv_{PRG}[B, G] = |\Pr[W_b] - \Pr[R_b]|$ , т.е.  $B$  – противник, которые пытается различить PRG и OTP.



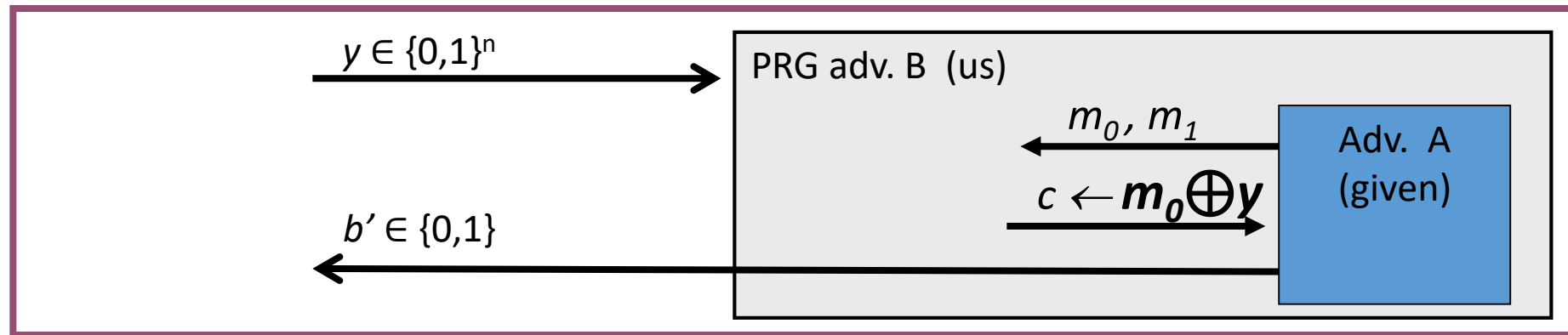
$$\Rightarrow Adv_{ss}[A, E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq 2 * Adv_{PRG}[B, G]$$



# Поточные шифры и семантическая стойкость

**Утверждение 2.4.2.**  $\exists B: Adv_{PRG}[B, G] = |\Pr[W_b] - \Pr[R_b]|$ , т.е.  $B$  – противник, которые пытается различить PRG и ОTR.

Алгоритм  $B$ :



$$Adv_{PRG}[B, G] = |\Pr[B(r) = 1] - \Pr[B(G(k)) = 1]|, \text{ где } k \stackrel{R}{\leftarrow} K, r \stackrel{R}{\leftarrow} \{0,1\}^n$$

$$\Pr[B(r) = 1] = \Pr[R_0], \quad \Pr[B(G(k)) = 1] = \Pr[W_0]$$

$$\Rightarrow Adv_{PRG}[B, G] = |\Pr[W_b] - \Pr[R_b]|.$$

# Поточные шифры и семантическая стойкость

**Теорема 2.5.** Пусть  $G: S \rightarrow \{0,1\}^n$  генератор (PRG).

Тогда если поточный шифр  $E$  определённый с использованием  $G$  семантически стойкий, то  $G$  – стойкий генератор.

▷ без доказательства ◁