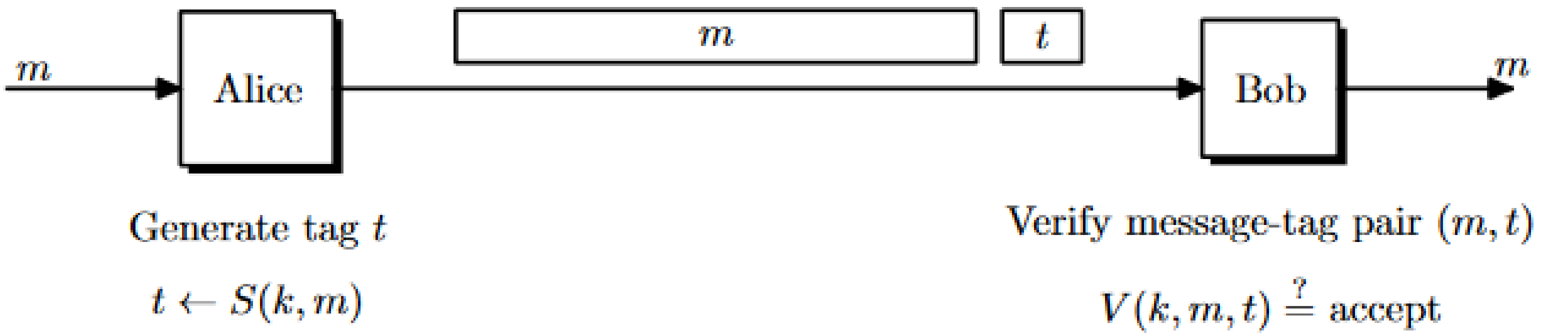
# Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы MAC: схемы

Макаров Артём

МИФИ 2019

# Целостность сообщений

- Задача – обеспечить целостность сообщений $m$ при передаче
- Обеспечиваем только **целостность**, сообщения предполагаются открытыми
- Основная идея – создать небольшую по длине величину $t$ (tag, метка) на основе сообщения, и передать данную величину вместе с сообщением: $(m, t)$. На стороне получателя величина $t'$ вычисляется для полученного сообщения $m'$ и производится сравнение $t = t'$. В случае равенства полагается, что целостность сообщения не нарушена.



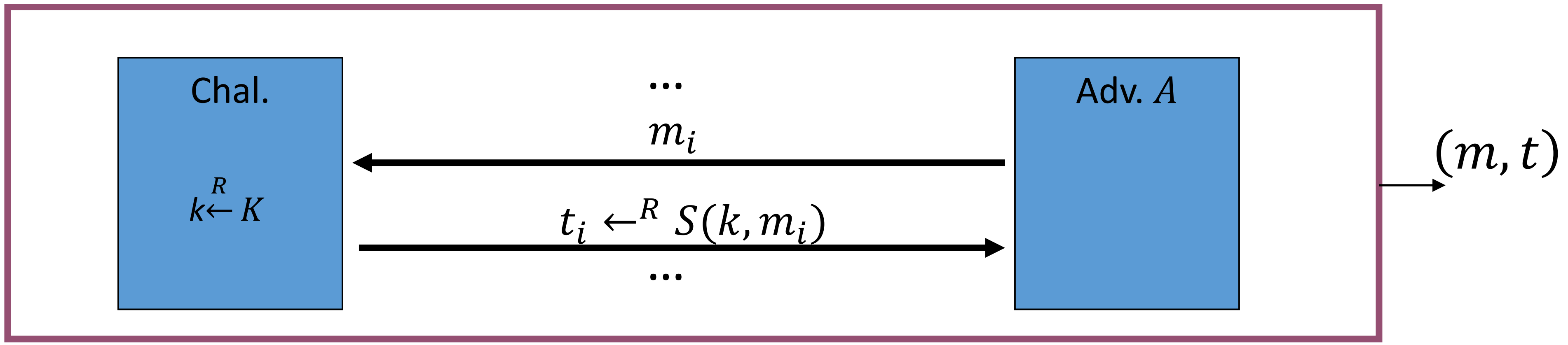
# Определение MAC

MAC на $(K, M, T)$ называется пара эффективных алгоритмов $I = (S, V)$. $S$ – алгоритм выработки MAC, $V$ – алгоритм проверки MAC. Пусть $M$ – множество сообщений, $K$ – множество ключей, $T$ – множество кодов аутентичности (меток). Тогда для $m \in M, t \in T, k \in K$

- $S: K \times M \rightarrow T$ - вероятностный алгоритм, вычисляющий $t \xleftarrow{R} S(k, m)$
- $V: K \times M \times T \rightarrow \{0,1\}$ – детерминированный алгоритм, вычисляющий результат проверки $r \leftarrow V(k, m, t)$.
- Свойство корректности - $\Pr\left[V\left(k, m, S(k, m)\right) = 1\right] = 1$

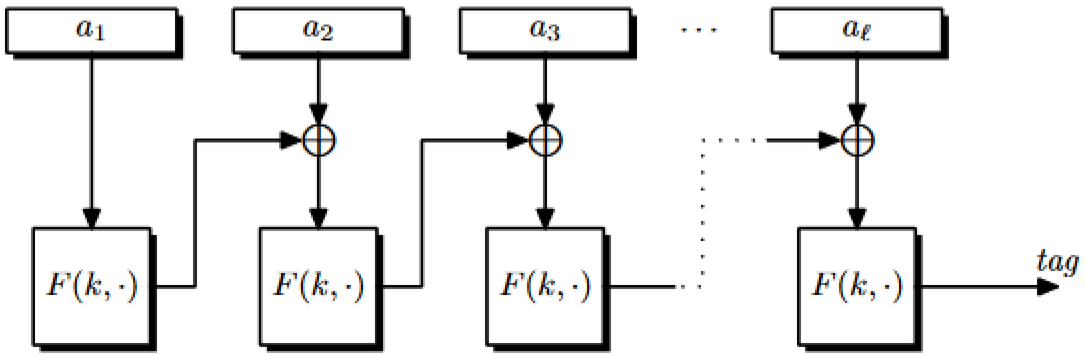
# Игра на стойкость MAC (chosen message attack)

- Противник побеждает в игре, если пара $(m, t)$ – верная пара сообщение – MAC, т.е. $V(k, m, t) = 1$.
- Преимуществом противника $A$ в игре против MAC $I = (S, V)$ называется величина $MAC_{adv}[A, I] = \Pr[V(k, m, t) = 1]$.
- MAC $I = (S, V)$ называется стойким MAC, если $\forall A\ MAC_{adv}[A, I] \leq \epsilon, \epsilon$ – пренебрежимо малая величина.



# Беспрификсные PRF

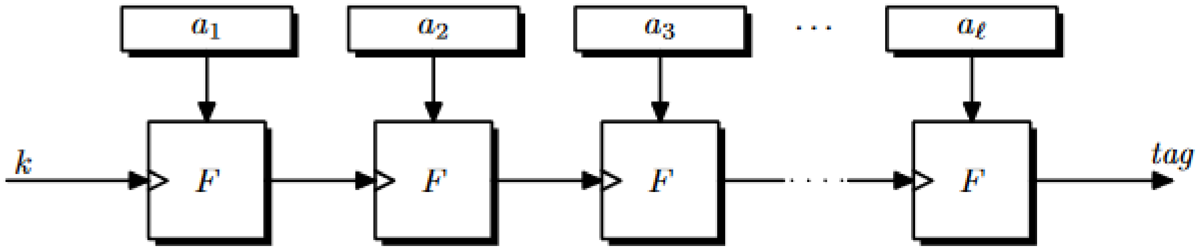
PRF $F_{CBC}(k, m)$ – цепочка CBC с использованием PRF. В качестве значение используется последний элемент цепочки.




(a) The CBC construction $F_{\text{CBC}}(k, m)$

# Беспрификсные PRF

PRF $F^*(k, m)$ – каскадная конструкция. Выход каждой итерации PRF используется к качестве ключа в следующей итерации PRF.




(b) The cascade construction $F^*(k, m)$

**Figure 6.3:** Two prefix-free secure PRFs

# Беспрификсные PRF

**Теорема 9.3.** Пусть $F$ – стойкая PRF на $(K, X, X), X = \{0,1\}^n$. Для полиномиально ограниченной величины $l$ PRF $F_{CBC}: K \times X^{\leq l} \to X$ является стойкой беспрификсной PRF, причём для любого беспрификсного противника $A$, делающего не более $Q$ запросов существует противник в игре на PRF, причём

$$PRF^{pf}[A, F_{CBC}] \leq PRF_{adv}[B, F] + (Ql)^2/2|X|$$

**Теорема 9.4**. Пусть $F$ – стойкая PRF на $(K, X, K)$. Для полиномиально ограниченной величины $l$ PRF $F^*: K \times X^{\leq l} \to K$ является стойкой беспрификсной PRF, причём для любого беспрификсного противника $A$, делающего не более $Q$ запросов существует противник в игре на PRF, причём

$$PRF^{pf}[A, F_{CBC}] \leq Ql * PRF_{adv}[B, F]$$

⊳ без доказательства⊲

# Построение стойкий PRF на основе беспификсных PRF

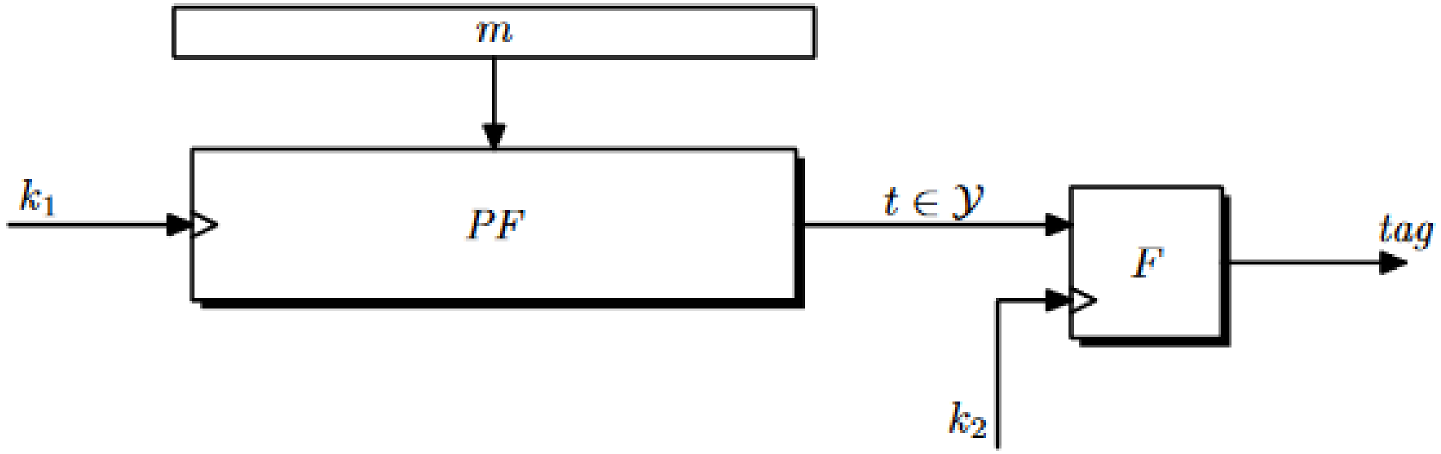
Рассмотрим 3 способа построения PRF на основе беспрификсных  PRF:

- Зашифрование выхода беспрификсной PRF: зашифрование выхода беспрификсной PRF  с использованием другой PRF
- Беспрификсное кодирование: преобразовать входные данные так, чтобы все они были беспрификсными
- Беспрификсное кодирование с рандомизацией: CMAC

# Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Пусть $PF$ – PRF:$K_1 \times X^{\leq l} \to Y$, $F$ – PRF: $K_2 \times Y \to T$.

Определим $EF\big((k_1, k_2), m\big) = F\big(k_2, PF(k_1, m)\big), k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, m \in X^{\leq l}$



# Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Пусть $PF$ – PRF на $(K, X^{\leq l}, Y)$. $PF$ является **расширяемой PRF**, если $\forall k \in K, x, y \in X^{\leq l-1}, a \in X$:

Если $PF(k, x) = PF(k, y) \Rightarrow PF(k, x||a) = PF(k, y||a)$.

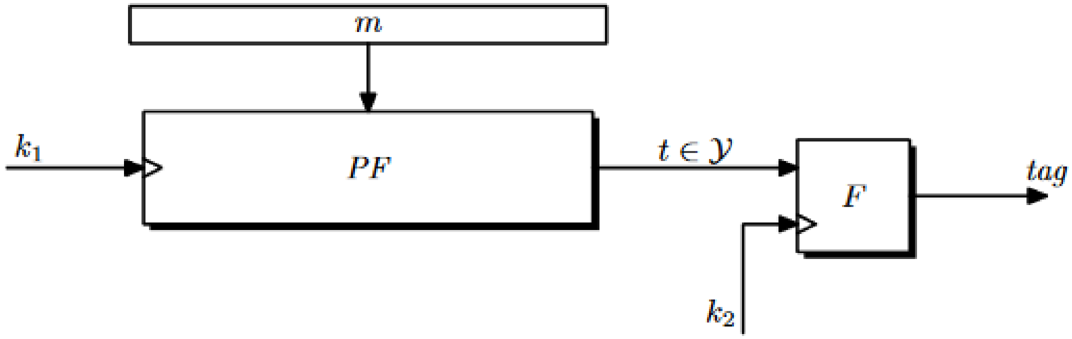
PRF CBC и каскадной конструкции являются расширяемыми.

# Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Если $PF$ функция CBC или каскадная конструкция то PRF $EF$ – стойкая PRF.

**Теорема 10.1.** Пусть $PF$ – расширяемая беспрификсная PRF на $\left(K_1, X^{\le l+1}, Y\right)$, $|Y|$ - суперполиномиальная, $l$ – полиномиально ограниченная. Пусть $F$ – стойкая PRF на $(K_2, Y, T)$. Тогда $EF$ определённая ранее – стойкая PRF на $\left(K_1 \times K_2, X^{\le l}, T\right)$:

$$PRF_{adv}[A, EF] \le PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + Q^2/2|Y|$$

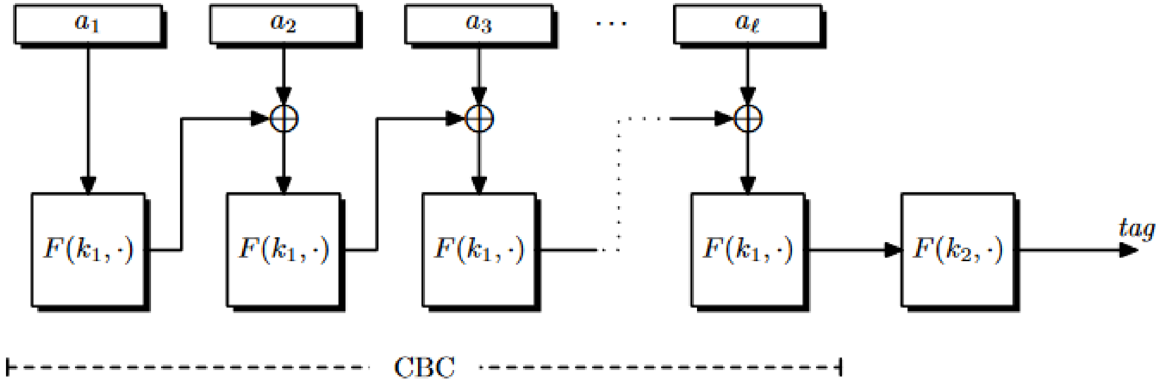


# Зашифрование выхода беспрификсной PRF

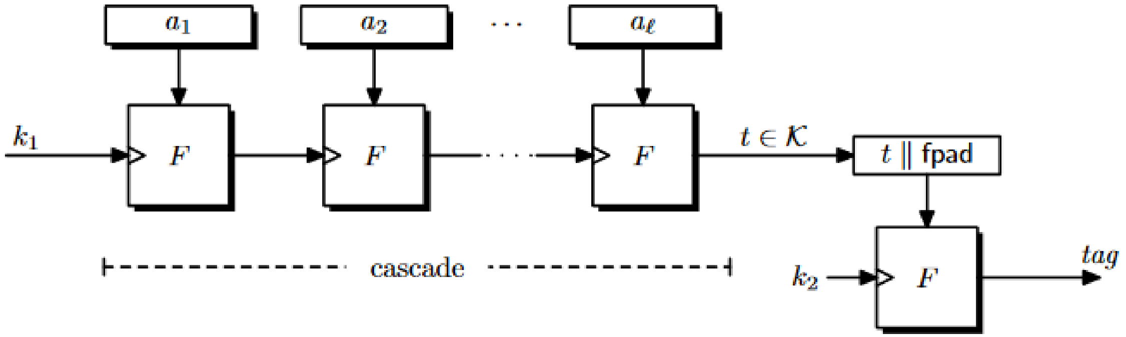
⊳ Рассмотрим идею доказательства. Самая неочевидная часть результирующей формулы $PRF_{adv}[A, EF] \leq PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + Q^2/2|Y|$ это слагаемое $Q^2/2|Y|$. Рассмотрим причину его появления.

Пусть противник запрашивает у оракула (претендента) $Q$ кодов аутентичности для $Q$ различных сообщений. Так как размер области значений $PF$ есть $|Y|$, то используя парадокс дней рождений за $Q \sim \sqrt{|Y|}$ произойдёт коллизия, и итоговое значение MAC тоже даст коллизию. Т.е. мы нашли пару $x_i, x_j$: $PF(k_1, x_i) = PF(k_1, x_j)$. Так как $PF$ расширяемая, то противник имея MAC $t$ для сообщения $x_i||a$ фактически имеет MAC для сообщения $x_j||a$. ⊲

# Зашифрование выхода беспрификсной PRF




(a) The ECBC construction ECBC$(k, m)$ (encrypted CBC)




(b) The NMAC construction NMAC$(k, m)$ (encrypted cascade)

# ECBC MAC

**Теорема 10.2.** Зашфированный CBC MAC $ECBC$, зашифрованный с использованием PRF $F$ на $(K, X, X)$ ($|X|$ - суперполиномиальная, $l$ – полиномиально ограниченная) – стойкая PRF на $\left(K^2, X^{\leq l}, X\right)$:

$$PRF_{adv}[A, ECBC] \leq PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}[B_2, F] + \frac{\left(Q(l+1)\right)^2 + Q^2}{2|X|}$$

⊳следствие **Теоремы 10.1.**⊲

# NMAC

- PRF $F$ на $(K, M, K), K = \{0,1\}^k, X = \{0,1\}^n, k \leq X$
- $g(t) = t||$fpad, fpad – фиксированное дополнение, длины $n - k$ бит (например все 0).

**Теорема 10.3.** $NMAC$, использующая PRF $F$ стойкая PRF на $\left(K^2, X^{\leq l}, K\right)$:

$$PRF_{adv}[A, NMAC] \leq \left(Q(l+1)\right) * PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}[B_2, F] + \frac{Q^2}{2|K|}$$

⊳следствие **Теоремы 10.1.**⊲

# NMAC и ECBC MAC

- Рассмотренные конструкции являются стойкими PRF и следовательно стойкими MAC
- Нет необходимости знать длину сообщения заранее, можно обновлять полученное значение MAC при получении новых блоков сообщения, не дожидаясь получения сообщения целиком
- Можно использовать для сообщений произвольной длинны, **кратной размеру блока** PRF (чаще всего – блочного шифра)

# Беспрификсное кодирование

Цель – закодировать «префиксные строки» в беспрификсные, для использования в беспрификсных PRF для получения MAC

Пусть $X_{>0}^{\leq l}$ - множество непустых строк, длины не более $l$ элементов в $X$.

Функция $pf: M \to X_{>0}^{\leq l}$ называется беспрификсным кодированием, если $pf$ – инъективна и множество элементов из образа $pf$ – беспрификсное множество.

**Теорема 10.4.** Пусть $pf$ – беспрификсное кодирование, $PF$ – беспрификсная PRF на $(K, X^{\leq l}, Y)$. Тогда PRF $F(k, m) = PF(k, pf(m))$ – стойкая PRF на $(K, M, Y)$

⊳Очевидно следует из определения беспрификсной PRF⊲

# Беспрификсное кодирование

- Метод 1. Добавление длины

$$M = X^{\leq l-1}, m = (a_1, \dots, a_v) \in M$$
$$pf(m) = (< v >, a_1, \dots, a_v) \in X_{>0}^{\leq l}$$

- Метод 2. «Остановочные биты»

$$X = \{0,1\}^{n-1}, M = X_{>0}^{\leq l}, m = (a_1, \dots, a_v) \in M$$
$$pf(m) = ((a_1||0), (a_2, ||0), \dots, (a_{v-1}||0), (a_v||1)) \in X_{>0}^{\leq l}$$

⊳Очевидна инъективность и беспрификсность образа⊲

# Беспрификсное кодирование

- Позволяет использовать беспрификсные PRF в качестве MAC
- Добавление длины сообщения увеличивает длину сообщений как входа для беспрификсной PRF, так как беспрификсное кодирование – избыточно.
- Добавление длины к сообщению не позволяет использовать MAC в поточном режиме (когда сообщение передаётся по частям), так как длина сообщения заранее не известна
- Так как в основном используются блочные шифры – добавление данных беспрификсным кодирование означает добавление лишнего блока
- Использование «остановочных битов» также увеличивает длину сообщения

# Беспрификсное кодирование с рандомизацией

Пусть $x, y \in X^{\leq l}$. Обозначим $x \sim y$ если $x$ префикс $y$ или $y$ префикс $x$.

Пусть $\epsilon$ – действительное число, $0 \leq \epsilon \leq 1$. Вероятностное $\epsilon$-префиксное кодирование это функция $prf: K \times M \to X_{>0}^{\leq l}: m_0, m_1 \in M, m_0 \neq m_1$:

$$\Pr[prf(k, m_0) \sim prf(k, m_1)] \leq \epsilon$$

Где вероятность рассматривается при случайном равновероятном выборе $k \in K$

Пример - $prf\big(k, (a_1, \dots, a_v)\big) = \big(a_1, \dots, a_v, (a_v \oplus k)\big) \in X_{>0}^{\leq l}$

# Беспрификсное кодирование с рандомизацией

Пусть $PF$ – беспрификсная PRF на $\left(K, X^{\leq l}, Y\right)$, $prf: K_1 \times M \to X_{>0}^{\leq l}$ - вероятностное $\epsilon$-префиксное кодирование.

Определим PRF $F$ на $(K \times K_1, M, Y)$:

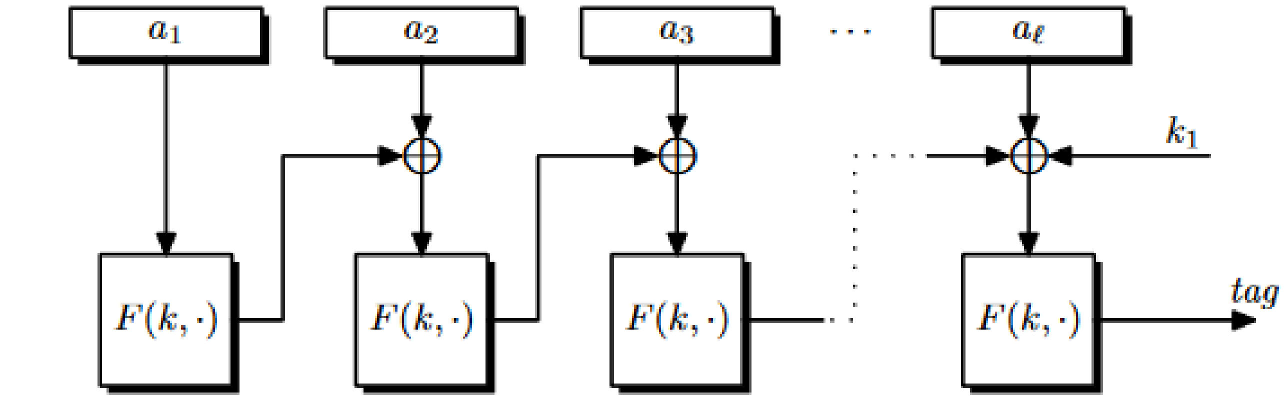
$$F\left((k_1, k_2), m\right) = PF(k, prf(k_1, m))$$

**Теорема 10.5.** Если $PF$ - беспрификсная PRF, $prf$ - вероятностное $\epsilon$-префиксное кодирование, тогда $F$ , введённая выше – стойкая PRF:

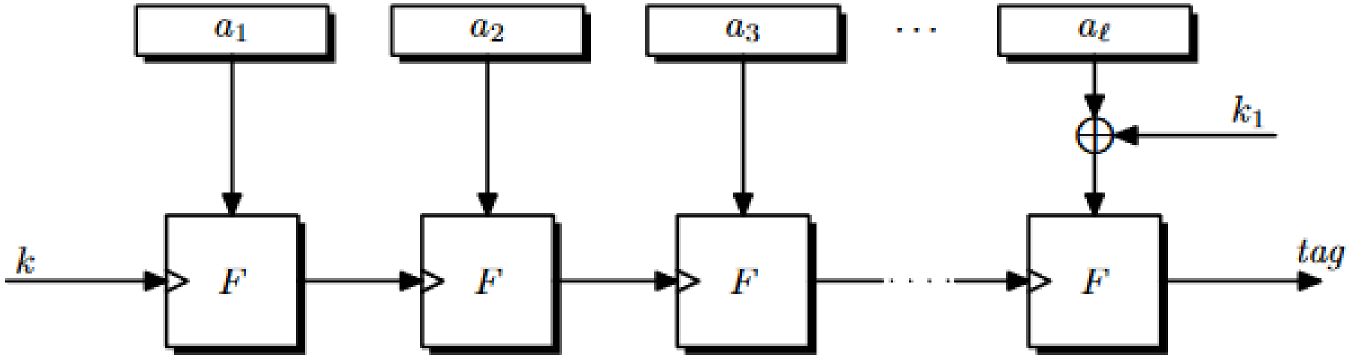
$$PRF_{adv}[A, F] \leq PRF_{adv}^{pf}[B_1, PF] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + \frac{Q^2 \epsilon}{2}$$

⊳без доказательства⊲

# Беспрификсное кодирование с рандомизацией




(a) *rpf* applied to CBC




(b) *rpf* applied to cascade

# MAC для сообщений не кратных длине блока

Все рассмотренные до этого схемы были применимы только для сообщений длины кратных длине блока PRF (блочного шифра).

Пусть $F$ – PRF на $\left(K, X^{\leq l+1}, Y\right), inj\colon \{0,1\}^{\leq nl} \rightarrow X^{\leq nl}$ - инъекция.
Определим PRF $F_{bit}$:

$$F_{bit} = F(k, inj(x))$$

**Теорема 10.6.** PRF введённая выше – стойкая PRF на $\left(K, \{0,1\}^{\leq nl}, Y\right)$

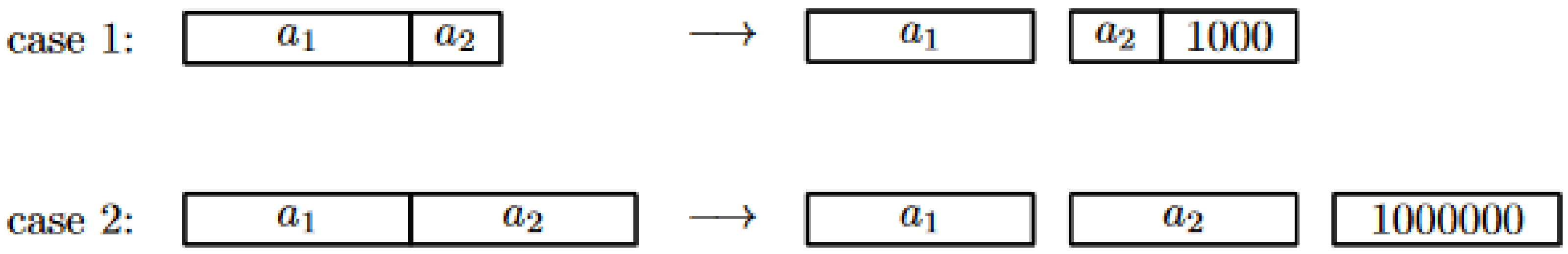
⊳очевидно⊲

# Построение инъективных функций

Пусть $X = \{0,1\}^n, inj: \{0,1\}^{\leq nl} \to X^{\leq l+1}$

$inj$:

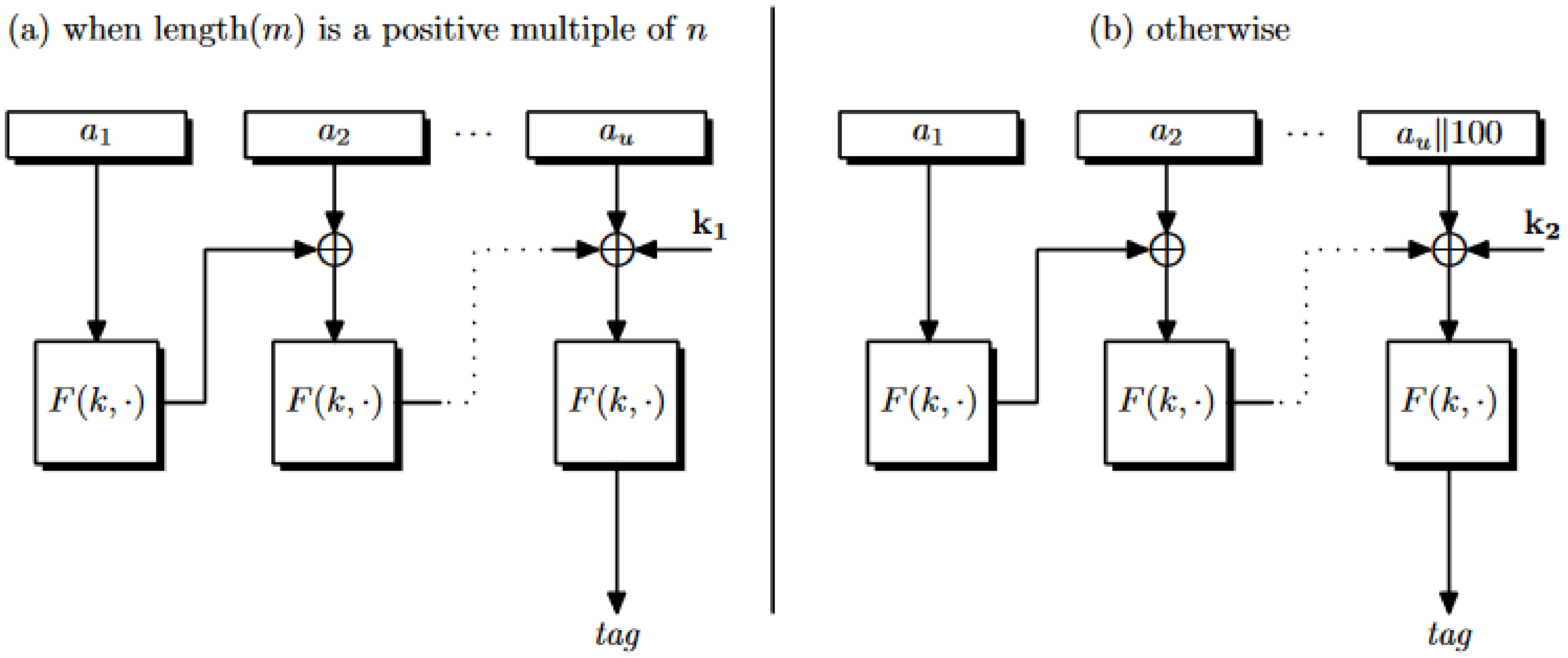
- Если входное сообщение имеет длину не кратную $n$ – добавить 10…00 до длинны кратной $n$
- Иначе – добавить $n$-блок $(1||0^{n-1})$
- Инъективна и обратима



# CMAC

- Стандарт NIST
- Один из наиболее популярных алгоритмов вычисления MAC (самый популярных после HMAC)
- Использует три различных ключа (могут быть выработаны на основе одного ключа)

# CMAC



(a) when length(m) is a positive multiple of n
a1
a2
...
au
k1
F(k, ·)
F(k, ·)
F(k, ·)
tag
(b) otherwise
a1
a2
...
au||100
k2
F(k, ·)
F(k, ·)
F(k, ·)
tag

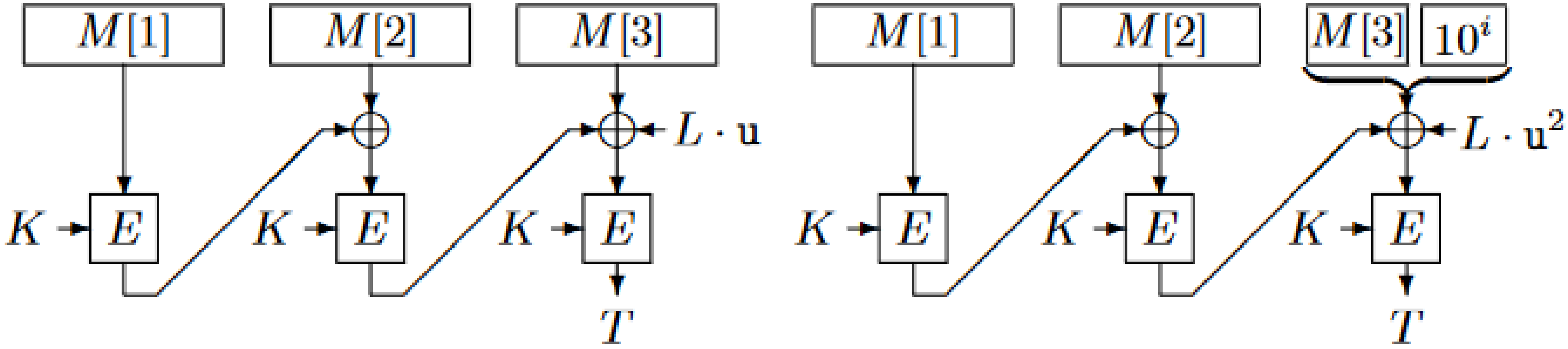
# OMAC

- В текущей вариации (OMAC) использует единственный ключ для генерации этих трех ключей для некоторой константы $R_n$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{input: key } k \in \mathcal{K} \\
 & \text{output: keys } k_0, k_1, k_2 \in \mathcal{X} \\
 & \quad k_0 \leftarrow k \\
 & \quad L \leftarrow F(k, 0^n) \\
(1) & \quad \text{if } \operatorname{msb}(L) = 0 \text{ then } k_1 \leftarrow (L \ll 1) \text{ else } k_1 \leftarrow (L \ll 1) \oplus R_n \\
(2) & \quad \text{if } \operatorname{msb}(k_1) = 0 \text{ then } k_2 \leftarrow (k_1 \ll 1) \text{ else } k_2 \leftarrow (k_1 \ll 1) \oplus R_n \\
 & \quad \text{output } k_0, k_1, k_2.
\end{array}
$$

# OMAC

- Фактически для получения трех ключей реализуется умножение в кольце многочленов на некоторую константу $u$



# Trunkated CBC MAC

Основная идея – не дать противнику возможность воспользоваться MAC для осуществления префиксной атаки.

Использование части кода аутентичности. Используется в ГОСТ 28147-98

Оптимально использовать половину исходного MAC

Основной недостаток – фактически понижаем параметр стойкости в 2 раза

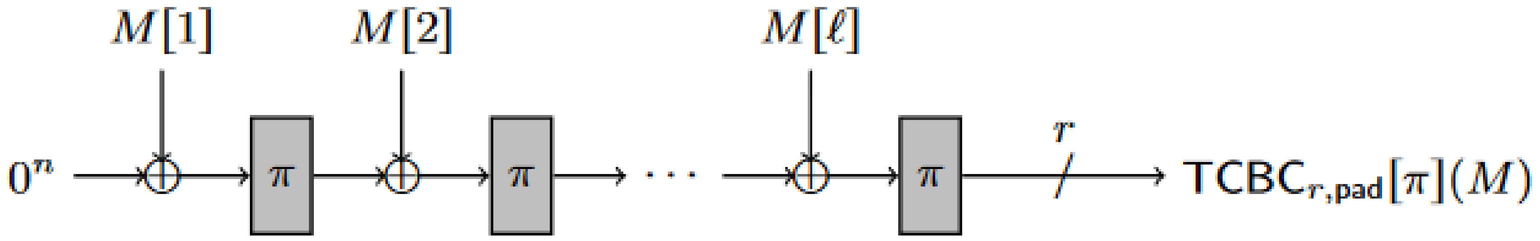



**Fig. 1. Truncated CBC.** Representation of $\mathsf{TCBC}_{r,\mathsf{pad}}[\pi]$. Here, $M[1], \ldots, M[\ell]$ are $n$-bit blocks resulting from applying the padding scheme $\mathsf{pad}$ to the input message $M \in \{0,1\}^*$.

# PMAC

PMAC – параллельный MAC

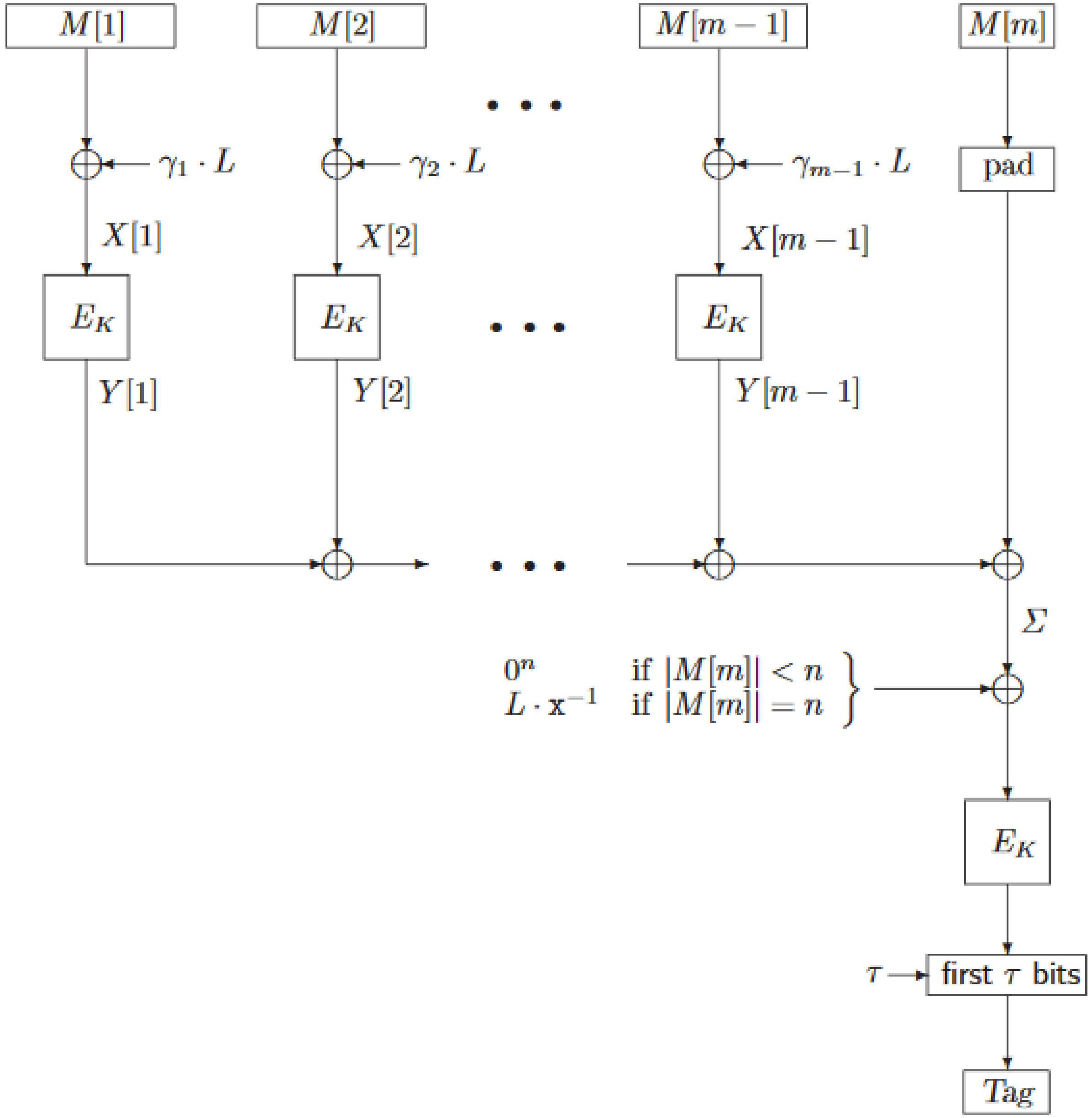
Возможность добавлять и удалять блоки из итогового значения MAC

Основная идея – использование «различных» ключей для каждого блока, полученных через умножение в кольце многочленов

Возможность вычислять MAC параллельно для всех блоков

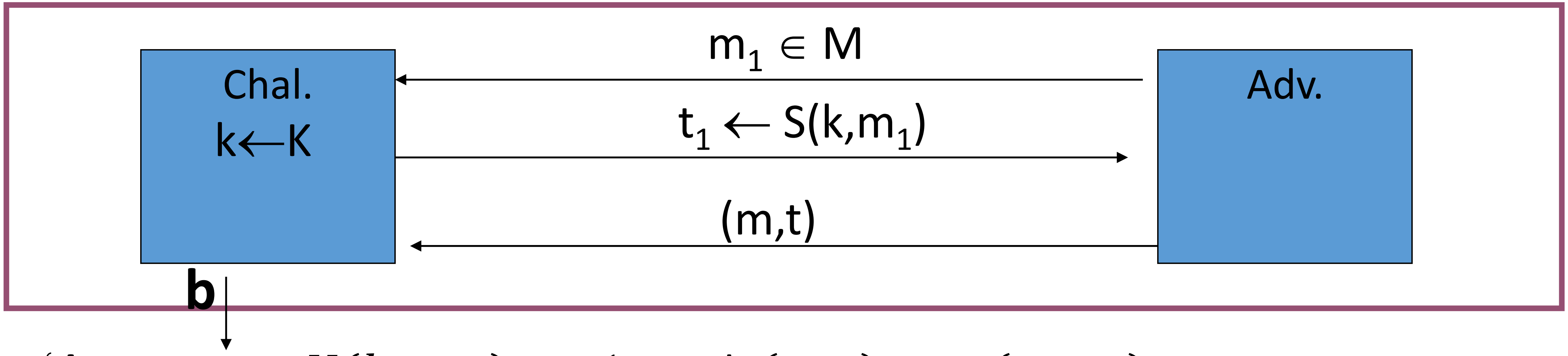
Патентован (США), разрешено бесплатное использование в образовательных и open-source проектах

# PMAC


M[1]
M[2]
M[m − 1]
M[m]
γ1 · L
γ2 · L
γm−1 · L
pad
X[1]
X[2]
X[m − 1]
EK
EK
EK
Y[1]
Y[2]
Y[m − 1]
Σ
0n if |M[m]| < n
L · x−1 if |M[m]| = n
EK
τ
first τ bits
Tag

# Одноразовый MAC
## (по аналогии с одноразовым блокнотом)

Введём игру




$$\begin{cases} \mathbf{b}=1 \quad \text{если } V(k,m,t) = 1 \text{ and } (m,t) \neq (m_1,t_1) \\ \mathbf{b}=0 \quad \text{иначе} \end{cases}$$

$I = (S,V)$ стойкий одноразовый MAC, если $Adv_{mac1}[A,I] = \Pr[b = 1] \leq \epsilon, \epsilon$ – пренебрежимо малая величина”

# Одноразовый MAC :  пример

Стойкий против любых (не только эффективных) противников

Пусть $q$ большое простое число (пример - $q = 2128 + 51$ )

$$key = (a, b) \in \{1, \dots, q\}^2$$

$$msg = ( m[1], \dots, m[L])$$

$P_{msg}(x) = x^{L+1} + m[L] * x^L + \cdots + m[1] * x$ – полином степени $L + 1$

$$S( key, msg ) = P_{msg}(a) + b \quad (mod\ q)$$

# Одноразовый MAC ⇒ Многоразовый MAC

Пусть $(H, V)$ стойкий одноразовый MAC на $(K, M, \{0,1\}^n)$ .

Пусть $F$: $KF \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ стойкая PRF.

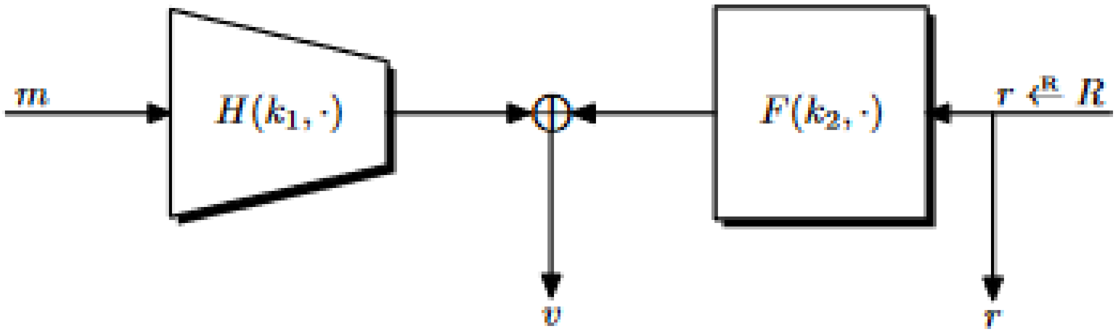
$r \xleftarrow{R} R$.

Carter-Wegman MAC:

$$S_{cw}\big((k_1, k_2), m\big) = \big(r, \overbrace{F(k_2, r)}^{\text{Медленная, Короткий вход}} \oplus \overbrace{H(k_1, m)}^{\text{Быстрая, Длинный вход}}\big) = (r, v)$$

$$V_{cw}(k, (r, v), m) = \begin{cases} 1, v = F(k_2, r) \oplus H(k_1, m) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Является недетерминированным



# Carter-Wegman MAC

Наиболее быстрые современные MAC

- VMAC
- UMAC
- Poly1305-AES

# Poly1305

Poly1305:

Пусть $m[0], m[1], \ldots, m[l-1]$ – сообщение, $q = \frac{l}{16}$ (округление сверху)

$$c_i = m[16i-16] + 2^8 m[16i-15] + \\ + 2^{16} m[16i-14] + \cdots + 2^{120} m[16i-1] + 2^{128}$$

Если 16 не делит $l$:

$$c_q = m[16q-16] + 2^8 m[16q-15] + \ \ldots + \\ +2^{8(l \bmod 16)-8} m[l-1] + 2^{8(l \bmod 16)}$$

Простыми словами – дополнить каждые 16 байт до 17, добавляя 1. Если не хватает до 16 байт – добавить 100…000 чтоб хватало.

# Poly1305

$$Poly1305_r(m, AES_k(n)) = \left[\left(\left(c_1 r^q + c_2 r^{q-1} + \cdots + c_q r^1\right) \mathrm{mod} 2^{130} - 5\right)\right.$$

```
#include <gmpxx.h>

void poly1305_gmpxx(unsigned char *out,
  const unsigned char *r,
  const unsigned char *s,
  const unsigned char *m,unsigned int l)
{
  unsigned int j;
  mpz_class rbar = 0;
  for (j = 0;j < 16;++j)
    rbar += ((mpz_class) r[j]) << (8 * j);
  mpz_class h = 0;
  mpz_class p = (((mpz_class) 1) << 130) - 5;
  while (l > 0) {
    mpz_class c = 0;
    for (j = 0;(j < 16) && (j < l);++j)
      c += ((mpz_class) m[j]) << (8 * j);
    c += ((mpz_class) 1) << (8 * j);
    m += j; l -= j;
    h = ((h + c) * rbar) % p;
  }
  for (j = 0;j < 16;++j)
    h += ((mpz_class) s[j]) << (8 * j);
  for (j = 0;j < 16;++j) {
    mpz_class c = h % 256;
    h >>= 8;
    out[j] = c.get_ui();
  }
}
```