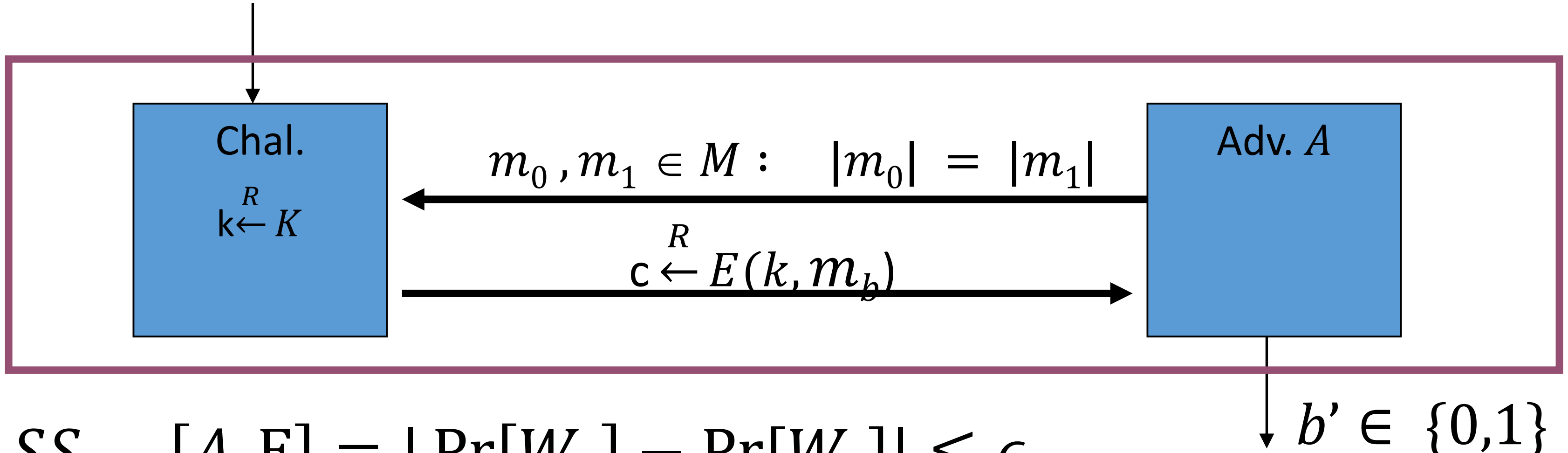
Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы Поточные шифры

Макаров Артём

МИФИ 2018

Семантическая стойкость



$$SS_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \le \epsilon$$

- ϵ – пренебрежимо малая величина.
- Претендент и Противник – эффективные алгоритмы

Пренебрежимо малые величины

Функция $f\colon Z_{\geq 1} \to R$ **называется пренебрежимо малой**, если для всех с $\in R_{>0}$ $\exists n_0 \in Z_{\geq 1}\colon \forall n \geq n_0$ справедливо неравенство:

$$|f(n)| < \frac{1}{n^{\mathrm{c}}}.$$

Теорема 2.1. Функция $Z_{\geq 1} \to R$ пренебрежимо малая, тогда и только тогда когда $\forall c > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n\to\infty} f(n)n^c = 0.$$

Т.е. на бесконечности функция от n убывает быстрее любого полинома от n .

Примеры

- **Пренебрежимо малые функции**: $2^{-n}, 2^{-\sqrt{n}}, n^{-\log n}$.
  - Убывают быстрее любых полиномов

- **Не пренебрежимо малые** функции: $n^2, n^{-2}, n^{-10000000}$.
  - $f(n) = n^2$: $\exists c = 0, \forall n > 0$: $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) n^c = n^2 * 1 \neq 0$.
  - $f(n) = n^{-2}$: $\exists c = 3, \forall n > 0$: $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) n^c = n^{-2} * n = n \neq 0$.
  - $f(n) = n^{-10000000}$: $\exists c = 10000001, \forall n > 0$: $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) n^c = n \neq 0$.

Супер-полиномиальные и полиномиально ограниченные функция

- Функция $f\colon Z_{\geq 1} \to R$ называется **супер-полиномиальной**, если $1/f$ – пренебрежимо малая.
  - Растёт быстрее любого полинома на бесконечности.

- Функция $f\colon Z_{\geq 1} \to R$ называется **полиномиально-ограниченной**, если $\exists c, d \in R_{\geq 0}\colon \forall n \geq 0$ имеет место неравенство:
$$|f(n)| \leq n^c + d$$
  - Может быть ограничена на бесконечности сверху полиномом степени c.

Пренебрежимо малые величина на практике

На практике величина ϵ – скаляр (формально – функция от некоторых фиксированных ранее параметров системы). Её «малость» оценивают исходя из необходимой для системы стойкости.

Пример:

- ϵ – не пренебрежимо малая, если событие вероятно произойдёт при обработки данных порядка гигабайта, $\epsilon \geq 1/2^{30}$
- ϵ- пренебрежимо малая, если событие вряд ли произойдёт при «жизни» ключа длины 160 бит, $\epsilon \leq 1/2^{80}$

Пренебрежимо малые величина на практике

При доказательстве стойкости часто получается формула преимущества, ограниченная сверху функцией от некоторых параметров. Пример:

$Adv_{SS}[A, \mathrm{E}] \leq q/2^k$, где q – максимально число зашифрований, k- длина ключа.

Для использования конкретной реализации нужно выбрать параметры q и k при заданном уровне стойкости.

Пусть хотим $Adv_{SS}[A, \mathrm{E}] \leq 1/2^{80}$, тогда для зашифрования, при использовании ключа с длиной $k = 128$ бит мы можем зашифровать $q \leq \frac{1}{2^{80-k}} = 2^{48}$ сообщений, при параметре стойкости 80 бит.

Параметры системы

Ранее, при введении понятия (вычислимого) шифра, мы описывали его без описания с явным описанием параметров.

На практике многие шифры и другие примитивы имеют так называемые параметры системы, влияющие на производительность и стойкость системы.

Пример – длина ключа (и максимального сообщения) в одноразовом блокноте, модуль в аддитивном одноразовом блокноте.

Эффективный алгоритм

Пусть λ – некоторый параметр. Пусть $p(\lambda)$ - полином над $Z_{\geq 1}$. Пусть A: $\mathrm{A}(\lambda, x)$: $\lambda \in Z_{\geq 1}, x \in \{0,1\}^{\leq p(\lambda)}$ (т.е. длина вектора x полиномиальной ограничена на основе параметра).

Алгоритм A называется **эффективным**, если $\exists t$: $t -$ полиномиально ограниченная, ϵ: $\epsilon -$ перенебрежимо малая: $\forall \lambda \in Z_{\geq 1}, \forall x \in \{0,1\}^{\leq p(\lambda)}$ вероятность того, что время исполнения алгоритма A на входе (λ, x) прев*ысит* $t(\lambda)$ не превосходит $\epsilon(\lambda)$.

Иными словами, алгоритм A – **эффективный**, если при заданном **параметре на полиномиально ограниченном входе он выполняется за полиномиальное время**.

Пример эффективного алгоритма с параметром

Одноразовый блокнот переменной длины. $\mathrm{E} = (E, D)$ на $K = \{0,1\}^L, M = C = \{0,1\}^{\leq L}$, где $L = \lambda$ – фиксированный параметр

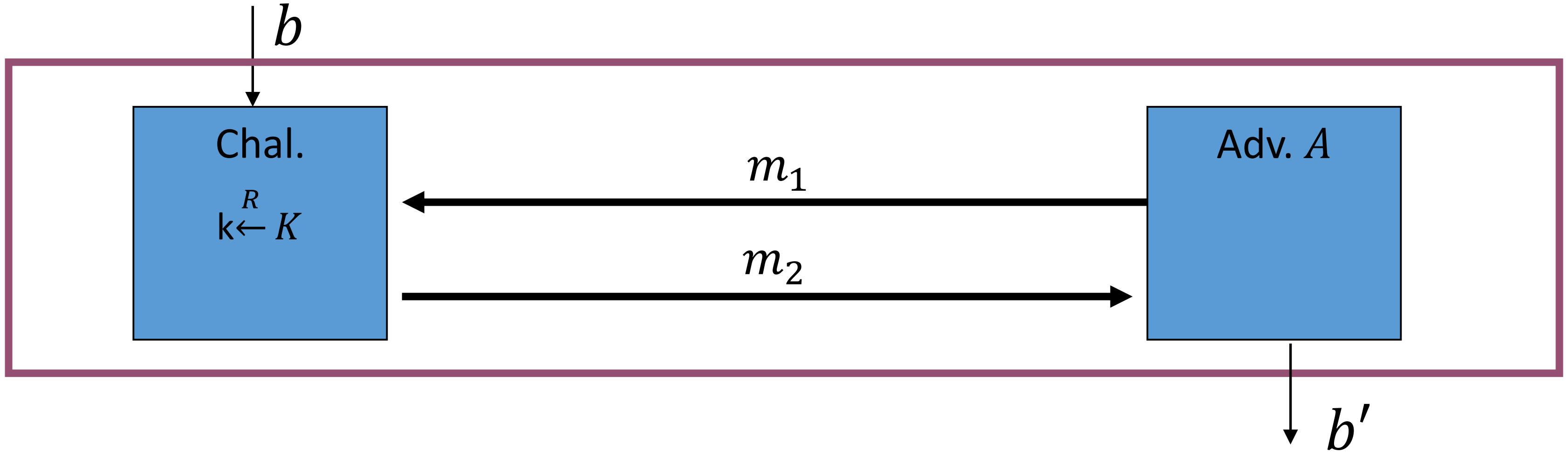
$$E(k, m) = k[0..l-1] \oplus m$$
$$D(k, c) = k[0..l-1] \oplus c$$

Длина входов алгоритма E: $in \in I = K \times M$: $|I| \leq 2^{2L} \Rightarrow |in| = 2L$, полиномиально ограниченна сверху полиномом $p(l) = p(\lambda) = 2L + 1$

Длина входов алгоритма E: $in \in I = K \times M$: $|I| = 2^{2L} \Rightarrow |in| = 2L$, полиномиально ограниченна сверху полиномом $p(l) = p(\lambda) = 2L + 1$

Эффективность в игре

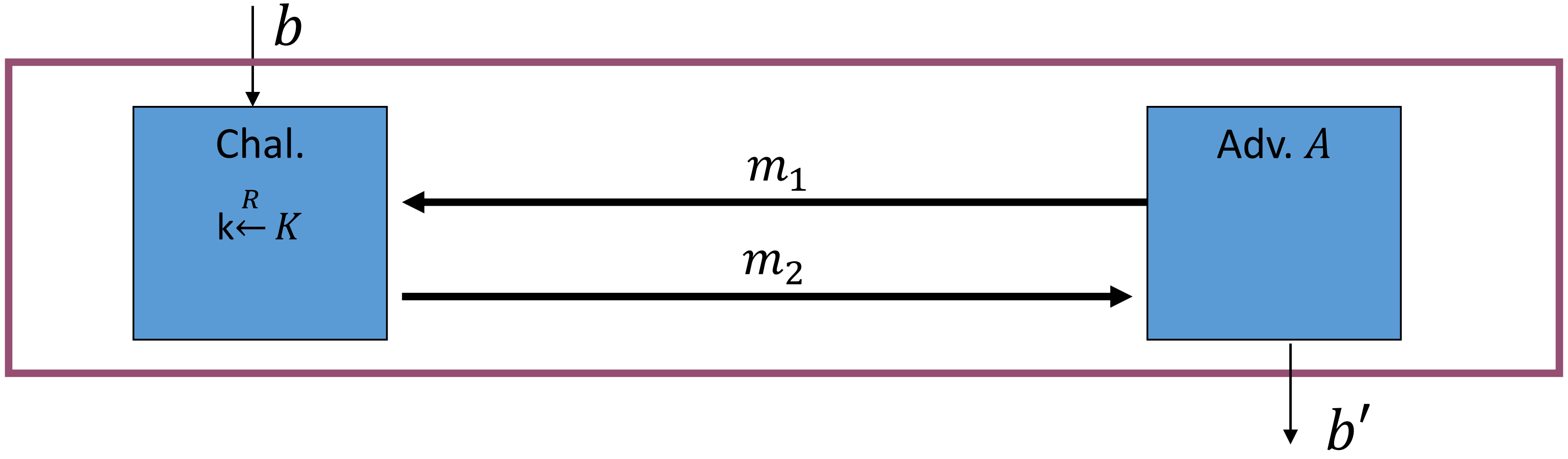
Ранее мы указывали, что в играх будем рассматривать только эффективные (вычислимые) алгоритмы, как для Претендента, так и для Противника. Иными словами, в игре должно быть полиномиально ограниченное число шагов, Противник обладает полиномиально ограниченным временем и ёмкостью. Т.е. алгоритм игры должен быть эффективным.



Эффективность в игре

Два **эксперимента** игры называются **статистически неразличимыми**, если не существует эффективного алгоритма противника, способного различить эти эксперименты.

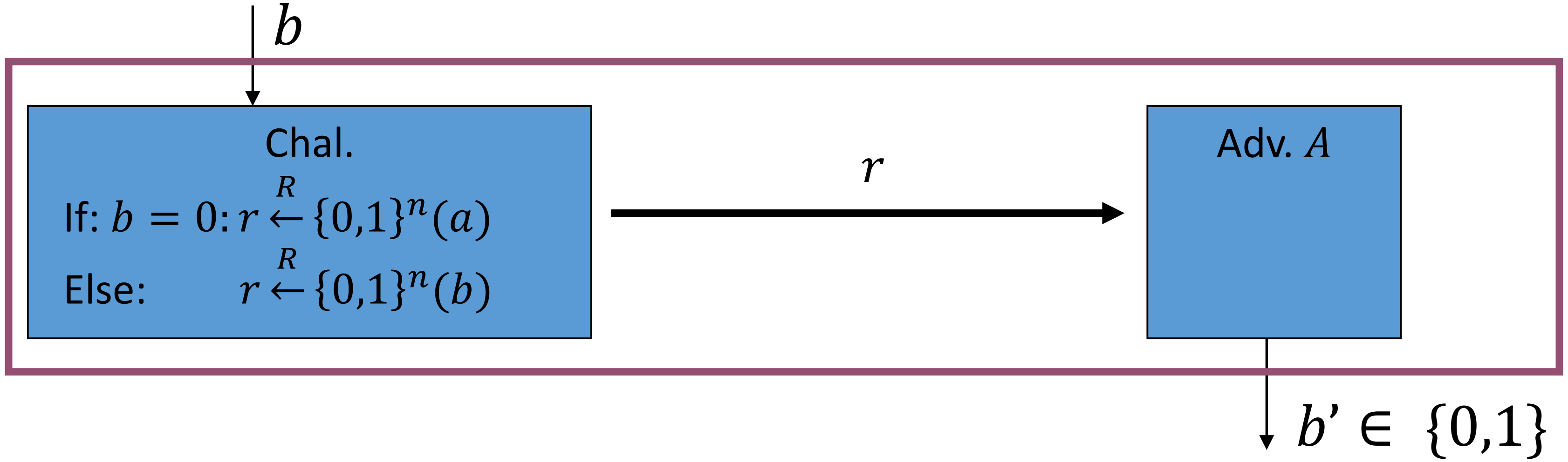
Т.е. $\forall A\ Adv_{disc} = |\Pr[b' = 1|b = 0] - \Pr[b' = 1|b = 1]| \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.



Эффективность в игре

Пусть a, b – **распределения** на $\{0,1\}^n$. a и b **называются статистически неразличимыми**, если не существует эффективного алгоритма противника, способного различить эти распределения в игре на распознание. Обозначается $a \approx_p b$.

Т.е. $\forall A\ Adv_{disc} = |\Pr[b' = 1|b = 0] - \Pr[b' = 1|b = 1]| \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.



Параметр стойкости

Параметром стойкости называют двоичный логарифм, от необходимого числа операций для осуществления теоретической или практической атаки.

Пример: идеальный (нет атак, помимо перебора ключа) шифр с ключом длины l, параметр стойкости l бит (необходимо перебрать весь ключ).

Пример: Семантически стойкий шифр $\mathrm{E} = (E, D)$: $\forall A \ Adv_{SS}[A, E] \leq 1/2^k$, параметр стойкости k бит.

Оценки величин

Параметр стойкости 10 бит это много или мало? А 2^{10} бит? При каком параметре стойкости принято считать систему стойкой?

Необходимый параметр стойкости зависит от приложения используемой криптосистемы.

Для систем общего назначения рекомендуемые параметры стойкости 80-256 бит.

Оценки величин

$\sim 2^{240}$ - число элементарных частиц в обозримой вселенной

$\sim 1/2^{119}$- шанс выиграть в лотерею, с миллионом участников 6 раз подряд

2^{60} - секунд с большого взрыва (2^{200} - в планковких единицах)

$\sim 2^{42}$ - вычислительная сложность майнинга биткоина (2018 год)

$\sim 2^{30}$ - можно перебрать на домашнем компьютере за несколько часов

Идея одноразового блокнота

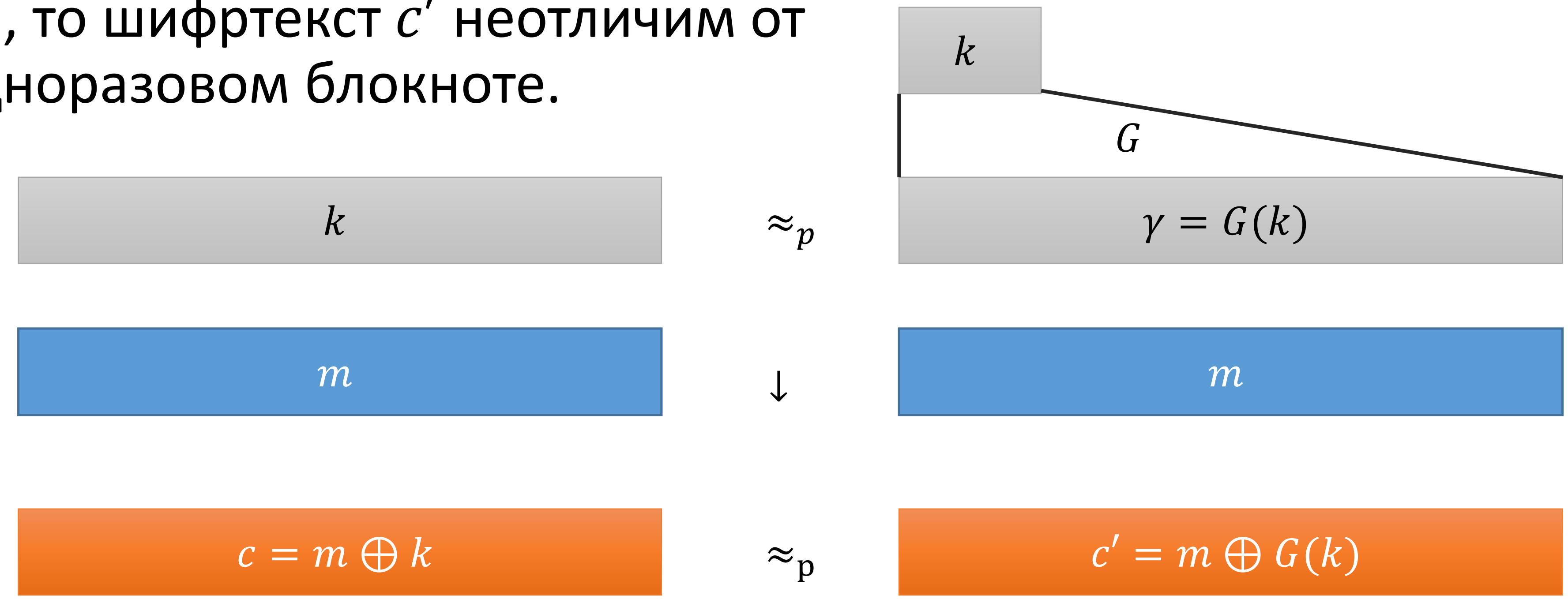
Одноразовый блокнот – сложение (побитное) случайного равновероятного вектора ключа с вектором открытого текста, для получения шифртекста.

Проблема (Теорема Шеннона) – длина ключа должна быть больше или равна длине сообщения.

Основная идея – заменить случайный длинный вектор ключа на «псевдослучайную» последовательность, называемую гаммой.

Идея одноразового блокнота

Заменяем использование случайного ключа k псевдослучайной последовательностью γ. Если последовательность «неотличима» от случайной равновероятной, то шифртекст c' неотличим от шифртекста в одноразовом блокноте.



Поточный шифр

Эффективно вычислимая функция $G: S \to R$ называется **псевдослучайным генератором** на (S, R) **PRG**.

Шифр $\mathrm{E} = (E, D)$ с параметрам (l, L) на (K, M, C): $K = \{0,1\}^l, M = C = \{0,1\}^L$, называется **поточным шифром**, если

$$E(k, m) = G(k) \oplus m,$$

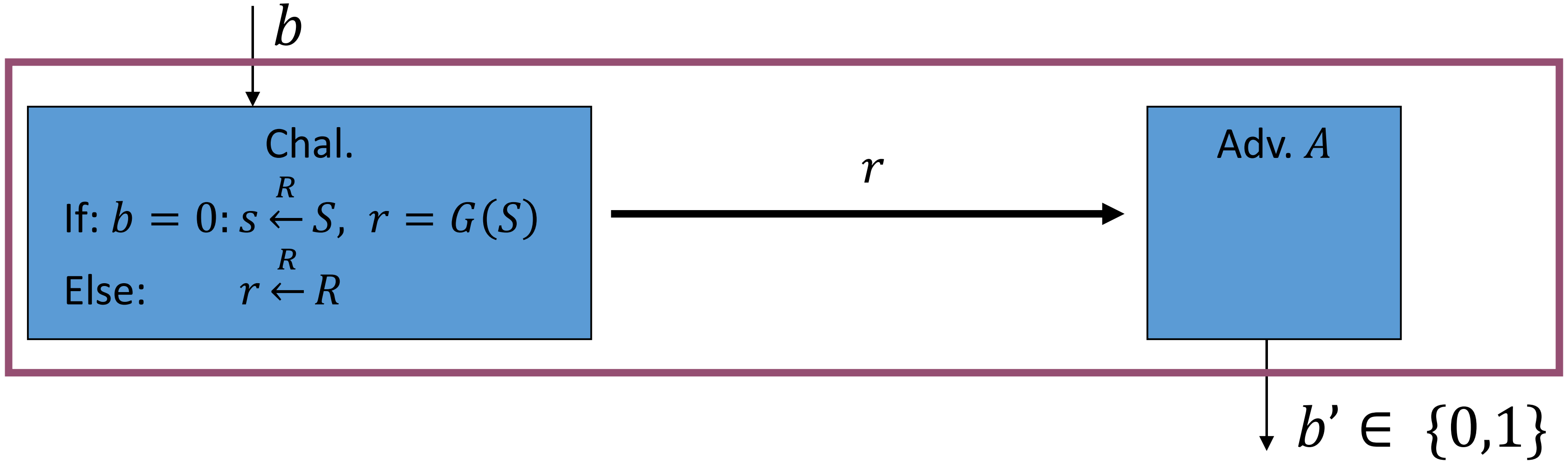
где $G: \{0,1\}^l \to \{0,1\}^L$ - псевдослучайный генератор.

Аналогично можно ввести Поточный шифр по произвольному модулю.

Стойкость поточного шифра сводится к «качеству» псевдослучайной последовательности $\gamma = G(k)$

Стойкий псевдослучайный генератор

Пусть G псевдослучайный генератор на (S, R). Рассмотрим игру с двумя экспериментами. В эксперименте 0 Претендент отправляет псевдослучайную величину $r = G(s)$. В эксперименте 1 – случайную величину $r \xleftarrow{R} R$. Задача Противника угадать, случайную, или псевдослучайную величину он получил.

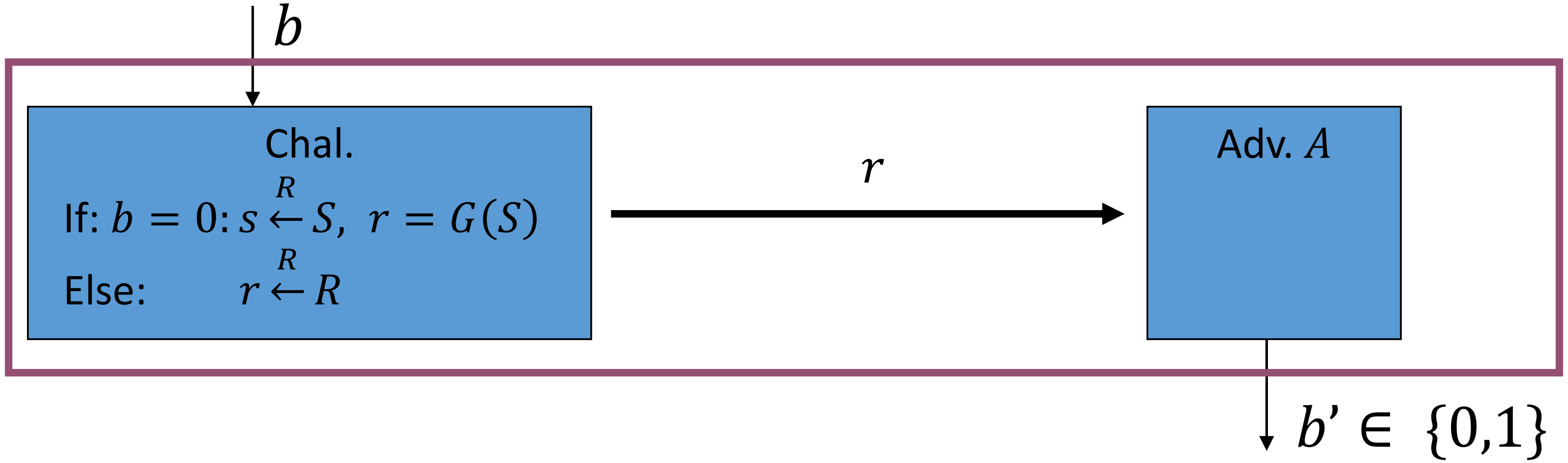


Стойкий псевдослучайный генератор

Пусть W_b - событие того, что $b' = 1$ в эксперименте b.

Тогда Преимуществом Противника A против алгоритма G в игре на различимость есть величина

$$PRG_{adv}[A, G] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|.$$

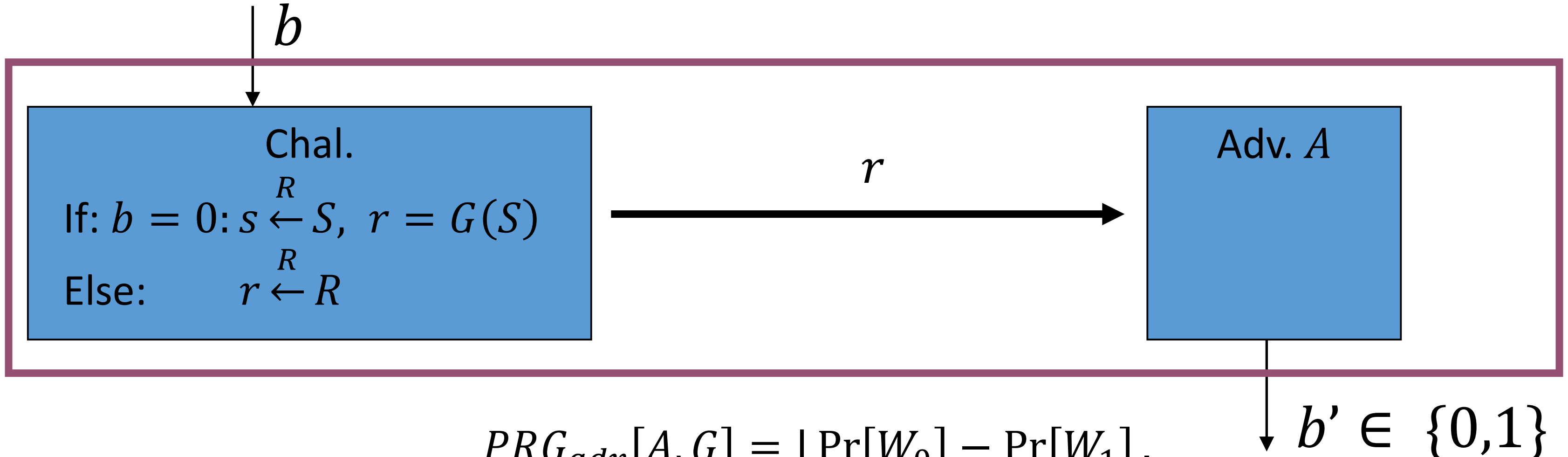


Стойкий псевдослучайный генератор

Генератор G называют **стойким псевдослучайным генератором** (secure PRG), если для любых эффективных противников A величина $PRG_{adv}[A, G] \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.

Противника A часто называют **статистическим тестом**.

Если генератор G – стойкий, то последовательность $\gamma = G(s)$ называют (эффективно) **статистически неразличимой от случайной последовательности или стойкой псевдослучайной**. Обозначается $\gamma \approx_P r$, где r – случайная последовательность.



$PRG_{adv}[A, G] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|.$

Энтропия генератора

Пусть G на $(S, \{0,1\}^n)$.

Очевидно, что генератор может выдать не более $|S|$ различных последовательностей.

Т.е. максимально возможная энтропия выходной последовательности $\boldsymbol{\gamma} \leftarrow G(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{s} \overset{R}{\leftarrow} S$ равна энтропии случайной величины $\boldsymbol{s}$, т.е.

$$H(\boldsymbol{\gamma}) \leq H(s) \leq \log_2 |S|$$

Таким образом максимально возможная длина периода генератора

$$l = 2^{H(\boldsymbol{\gamma})} = |S|$$

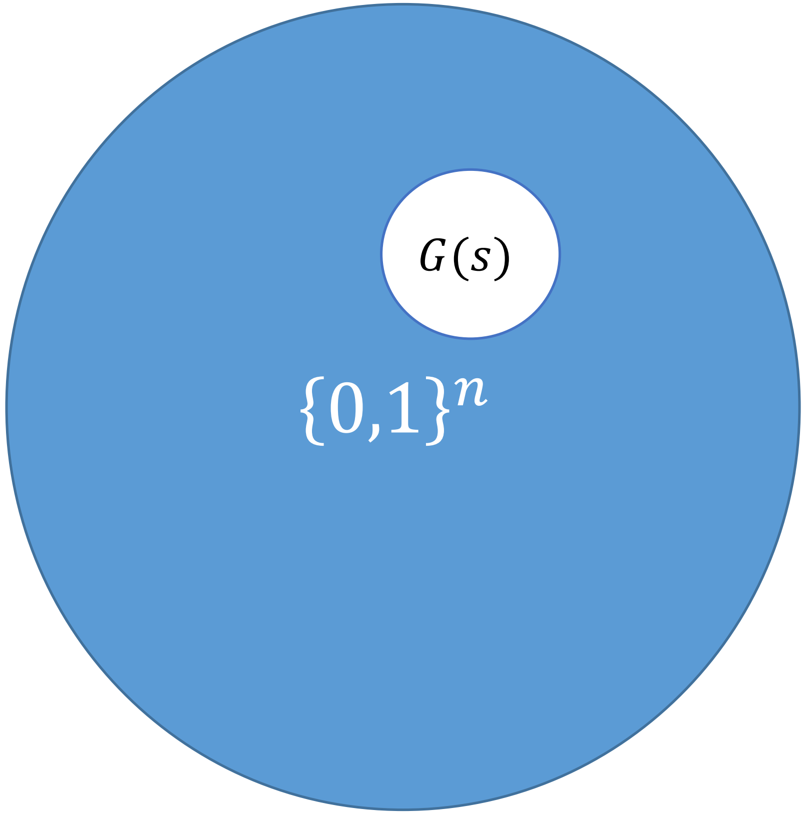
Пример: Пусть $S = \{0,1\}^{128}$, тогда максимально возможный период выходной последовательности составляет 2^{128}, энтропия 128 бит.

Статистическая неразличимость

Пусть G на $(S, \{0,1\}^n)$.

Рассмотрим множество возможных значений $R \subset \{0,1\}^n \colon \{r = G(S), \forall s \in S\}$.

Тогда если G – стойкий генератор, то эффективный Противник не может определить содержится ли элемент $r' \in \{0,1\}$ в R.



Непредсказуемость генераторов

Пусть G псевдослучайный генератор на (S, R).

- Генератор G называется **предсказуемым**, если $\exists$ эффективный алгоритм A и $\exists 0 \leq i \leq n-1$:

$$Pred_{adv} = \Pr\left[A(G(k)[0..i])\right) = G(k)[i+1]] > 1/2 + \epsilon$$

Где ϵ – не пренебрежимо малая. Т.е. Существует эффективный алгоритм способный по $i+1$ биту предсказать $i+2$.

- Генератор G называется **непредсказуемым**, если $\forall$ эффективных алгоритмов справедливо

$$Pred_{adv} = \Pr\left[A(G(k)[0..i])\right) = G(k)[i+1]] \leq 1/2 + \epsilon,$$

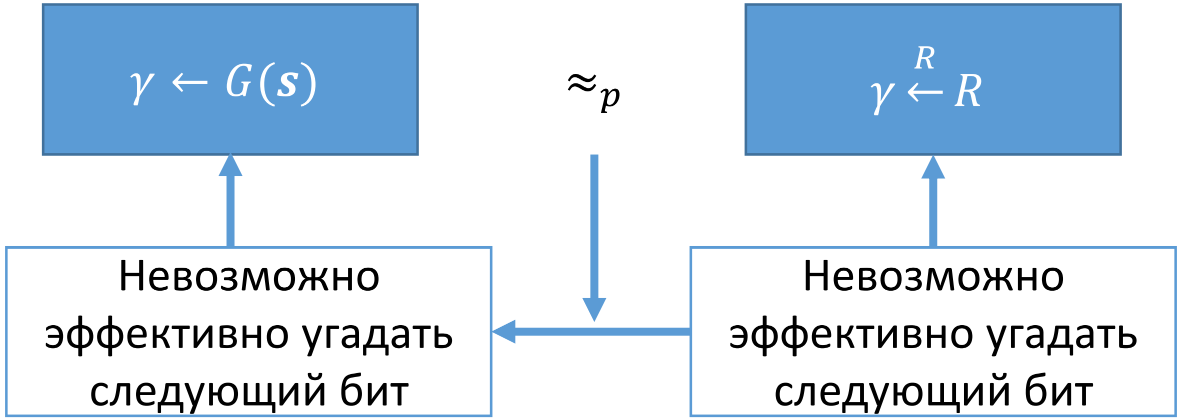
для пренебрежимо малой ϵ.

Непредсказуемость генераторов

Теорема 2.2. Пусть G псевдослучайный генератор (PRG) на (S, R).

Если G – стойкий, то G – непредсказуемый.

▻ Если G – стойкий, то его выход вычислительно неотличим от случайной последовательности. А для случайной последовательности невозможно предсказать следующий бит. $Pred_{avd}[A, G] = PRG_{adv}[B, G]$ ◅



Непредсказуемость генераторов

Теорема 2.3. Yao’82 . Пусть G псевдослучайный генератор (PRG) на (S, R).

Если G – непредсказуемый, то G – стойкий

⊳ без доказательства. Идея доказательства – если мы не можем предсказать 1 следующий бит, то значит у нас нет никакиз возможностей определить является ли данная величина случайной, или выходом псевдослучайного генератора ⊲

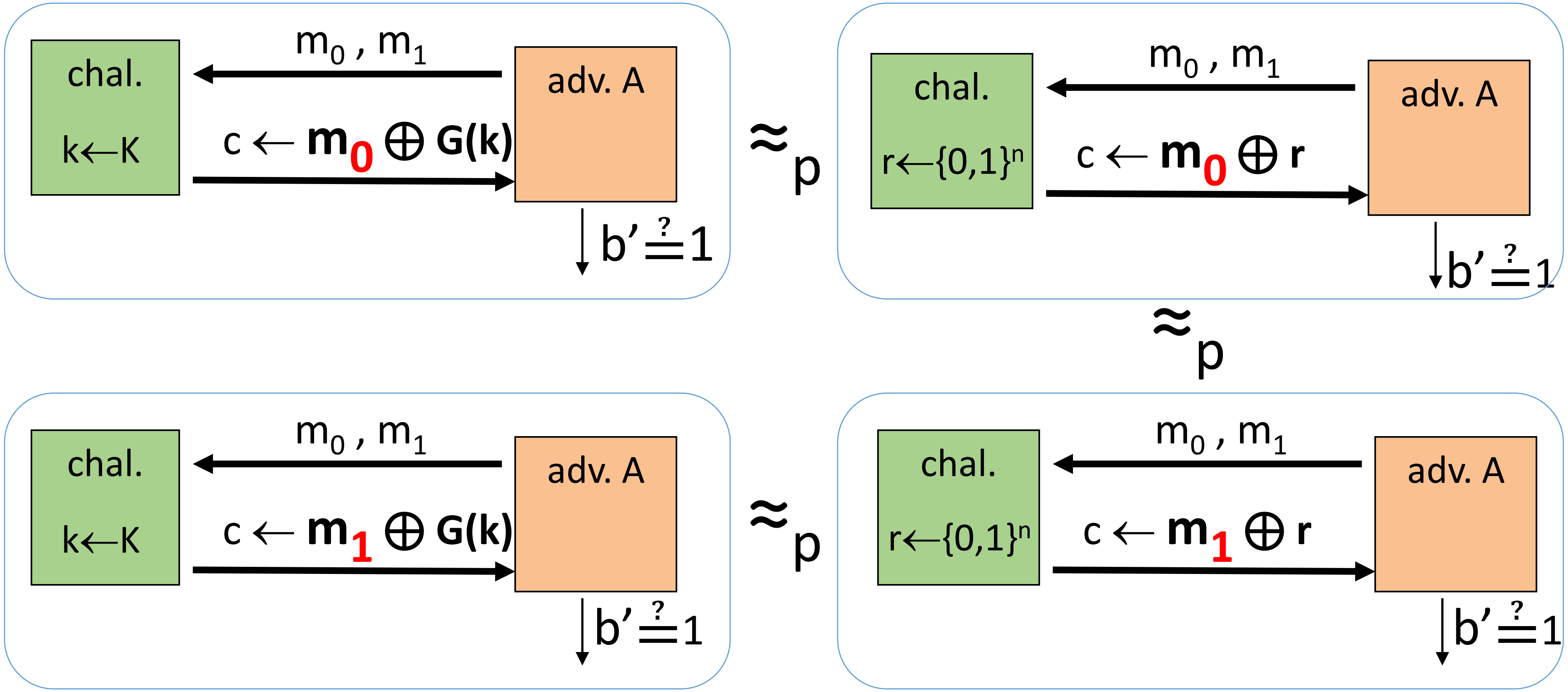
Поточные шифры и семантическая стойкость

Теорема 2.4. Пусть $G: S \to \{0,1\}^n$ стойкий генератор (PRG).

Тогда поточный шифр E определённый с использованием G семантически стойкой, т.е. $\forall A$: A – противник в игре на семантическую стойкость, $\exists$ противник B в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{SS}[A,E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B,G]$$

Идея доказательства



Теорема 2.4. Пусть $G: S \to \{0,1\}^n$ стойкий генератор (PRG).

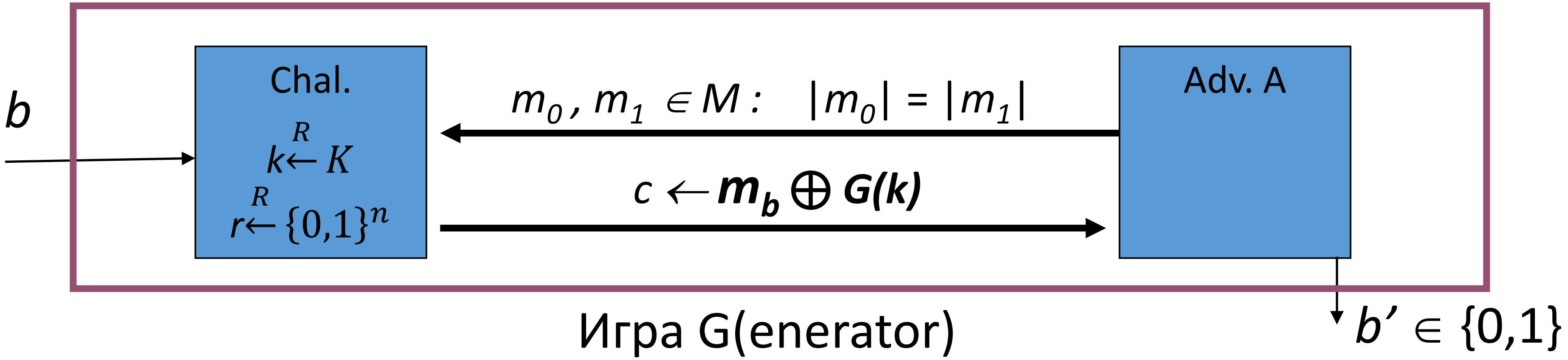
Тогда поточный шифр E определённый с использованием G семантически стойкой, т.е. $\forall A$: A – противник в игре на семантическую стойкость, $\exists$ противник B в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{ss}[A, E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B, G]$$

⊳ Пусть A противник в игре на семантическую стойкость.

Пусть претендент также генерирует $r \xleftarrow{R} \{0,1\}^n$.

Пусть W_b событие, при котором $b' = 1$



Игра G(enerator)

Теорема 2.4. Пусть $G: S \to \{0,1\}^n$ стойкий генератор (PRG).

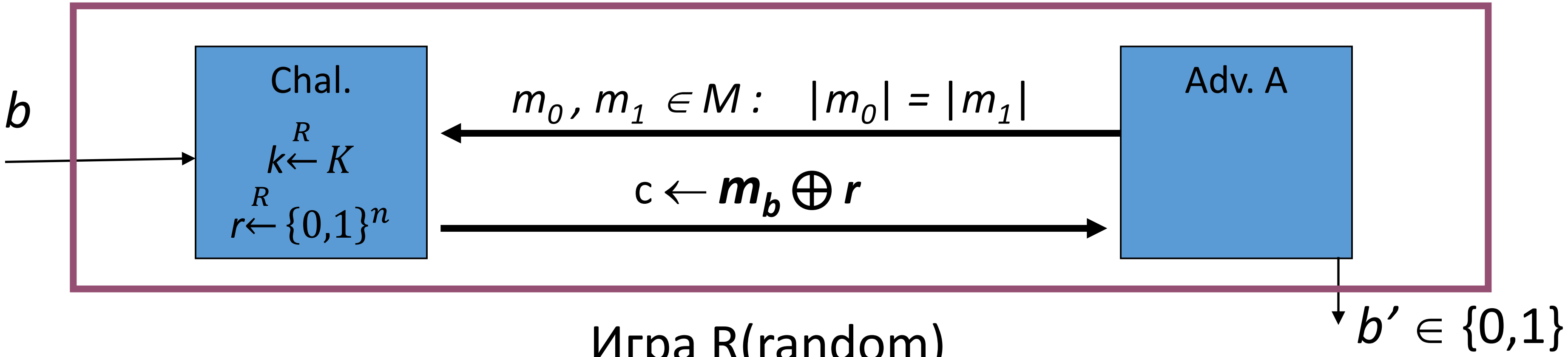
Тогда поточный шифр E определённый с использованием G семантически стойкой, т.е. $\forall A$: A – противник в игре на семантическую стойкость, $\exists$ противник B в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{ss}[A, E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B, G]$$

Пусть A противник в игре на семантическую стойкость.

Пусть претендент шифрует сообщение одноразовым блокнотом (OTP).

Пусть R_b событие, при котором $b' = 1$.



Игра R(random)

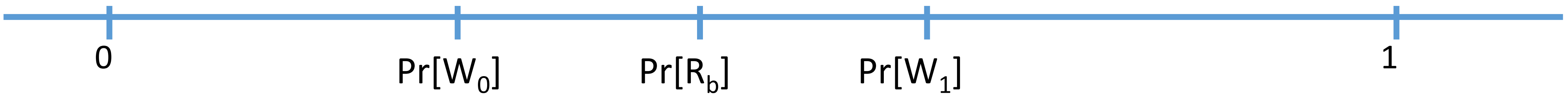
Теорема 2.4. Пусть $G\colon S \to \{0,1\}^n$ стойкий генератор (PRG).

Тогда поточный шифр E определённый с использованием G семантически стойкой, т.е. $\forall A$: A – противник в игре на семантическую стойкость, $\exists$ противник B в игре на стойкость PRG (различимость):

$$Adv_{ss}[A,E] \leq 2 * Adv_{PRG}[B,G]$$

Утверждение 2.4.1. $Adv_{ss}[A,OTP] = 0 = |\Pr[R_0] - \Pr[R_1]|$

Утверждение 2.4.2. $\exists B\colon Adv_{PRG}[B,G] = |\Pr[W_b] - \Pr[R_b]|$, т.е. B – противник, которые пытается различить PRG и OTP.

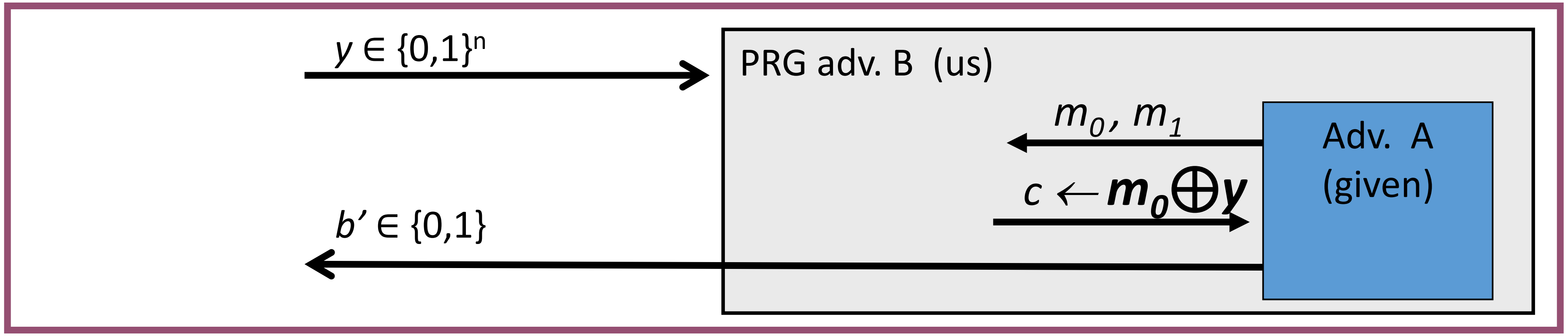


$$\Rightarrow \quad Adv_{SS}[A,E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq 2 * Adv_{PRG}[B,G]$$

Поточные шифры и семантическая стойкость

Утверждение 2.4.2. $\exists B$: $Adv_{PRG}[B,G] = |\Pr[W_b] - \Pr[R_b]|$, т.е. B – противник, которые пытается различить PRG и OTP.

Алгоритм B:



$$Adv_{PRG}[B,G] = |\Pr[B(r)=1] - \Pr[B(G(k))=1|,$$ где $k \xleftarrow{R} K, r \xleftarrow{R} \{0,1\}^n$

$$\Pr[B(r)=1] = \Pr[R_0], \qquad \Pr[B(G(k))=1| = \Pr[W_0]$$

$$\Rightarrow Adv_{PRG}[B,G] = |\Pr[W_b] - \Pr[R_b]|. \lhd$$