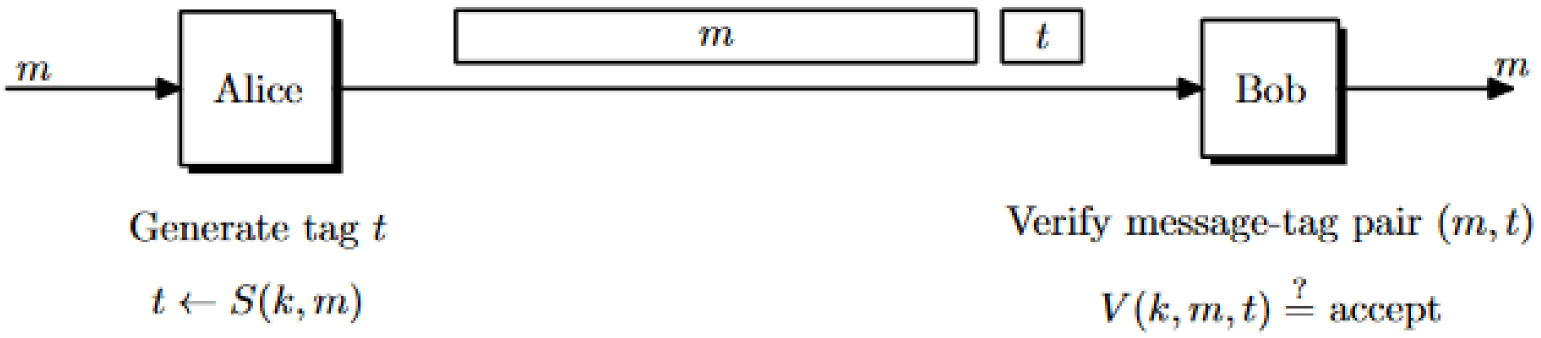
Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы МАС: схемы

Макаров Артём
МИФИ 2020

Целостность сообщений

- Задача – обеспечить целостность сообщений m при передаче
- Обеспечиваем только **целостность**, сообщения предполагаются открытыми
- Основная идея – создать небольшую по длине величину t (tag, метка) на основе сообщения, и передать данную величину вместе с сообщением: (m, t). На стороне получателя величина t' вычисляется для полученного сообщения m' и производится сравнение $t = t'$. В случае равенства полагается, что целостность сообщения не нарушена.



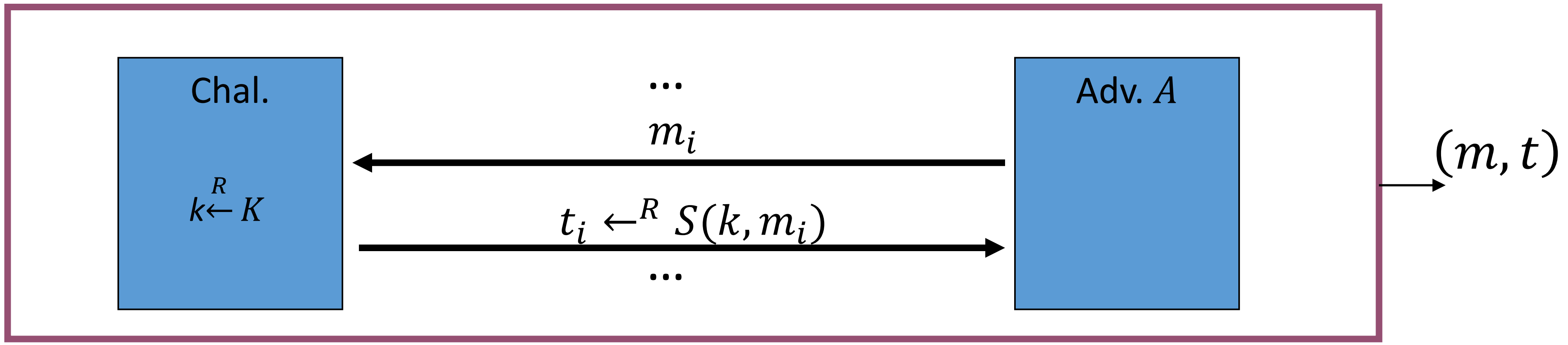
Определение MAC

MAC на (K, M, T) называется пара эффективных алгоритмов $I = (S, V)$. S – алгоритм выработки MAC, V – алгоритм проверки MAC. Пусть M – множество сообщений, K – множество ключей, T – множество кодов аутентичности (меток). Тогда для $m \in M, t \in T, k \in K$

- $S: K \times M \rightarrow T$ - вероятностный алгоритм, вычисляющий $t \xleftarrow{R} S(k, m)$
- $V: K \times M \times T \rightarrow \{0,1\}$ – детерминированный алгоритм, вычисляющий результат проверки $r \leftarrow V(k, m, t)$.
- Свойство корректности - $\Pr\left[V\left(k, m, S(k, m)\right) = 1\right] = 1$

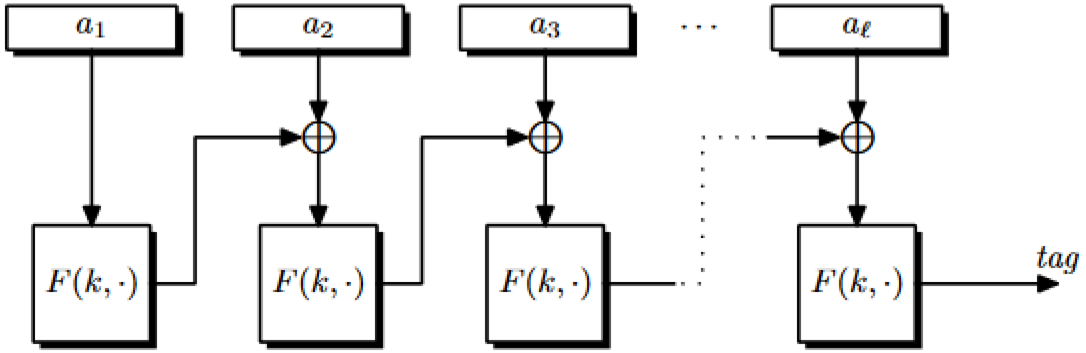
Игра на стойкость MAC (chosen message attack)

- Противник побеждает в игре, если пара (m, t) – верная пара сообщение – MAC, т.е. $V(k, m, t) = 1$.
- Преимуществом противника A в игре против MAC $I = (S, V)$ называется величина $MAC_{adv}[A, I] = \Pr[V(k, m, t) = 1]$.
- MAC $I = (S, V)$ называется стойким MAC, если $\forall A$ $MAC_{adv}[A, I] \leq \epsilon, \epsilon$ – пренебрежимо малая величина.



Беспрификсные PRF

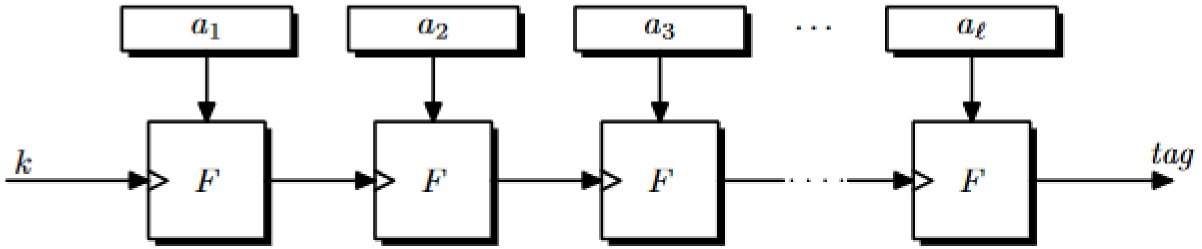
PRF $F_{CBC}(k, m)$ – цепочка CBC с использованием PRF. В качестве значение используется последний элемент цепочки.



(a) The CBC construction $F_{\text{CBC}}(k, m)$

Беспрификсные PRF

PRF $F^*(k, m)$ – каскадная конструкция. Выход каждой итерации PRF используется к качестве ключа в следующей итерации PRF.



(b) The cascade construction $F^*(k, m)$

Figure 6.3: Two prefix-free secure PRFs

Беспрификсные PRF

Теорема 9.3. Пусть F – стойкая PRF на $(K, X, X), X = \{0,1\}^n$. Для полиномиально ограниченной величины l PRF $F_{CBC}: K \times X^{\leq l} \to X$ является стойкой беспрификсной PRF, причём для любого беспрификсного противника A, делающего не более Q запросов существует противник в игре на PRF, причём

$$PRF^{pf}[A, F_{CBC}] \leq PRF_{adv}[B, F] + (Ql)^2/2|X|$$

Теорема 9.4. Пусть F – стойкая PRF на (K, X, K). Для полиномиально ограниченной величины l PRF $F^*: K \times X^{\leq l} \to K$ является стойкой беспрификсной PRF, причём для любого беспрификсного противника A, делающего не более Q запросов существует противник в игре на PRF, причём

$$PRF^{pf}[A, F_{CBC}] \leq Ql * PRF_{adv}[B, F]$$

⊳ без доказательства⊲

Построение стойких PRF на основе беспификсных PRF

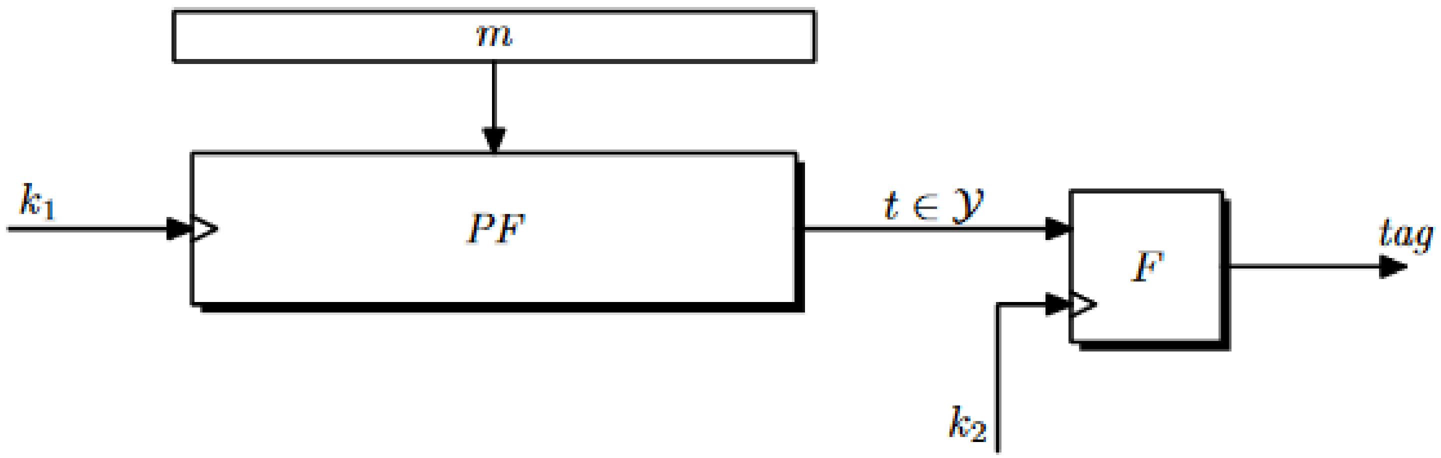
Рассмотрим 3 способа построения PRF на основе беспрификсных PRF:

- Зашифрование выхода беспрификсной PRF: зашифрование выхода беспрификсной PRF с использованием другой PRF
- Беспрификсное кодирование: преобразовать входные данные так, чтобы все они были беспрификсными
- Беспрификсное кодирование с рандомизацией: CMAC

Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Пусть PF – PRF:$K_1 \times X^{\leq l} \to Y$, F – PRF: $K_2 \times Y \to T$.

Определим $EF\big((k_1, k_2), m\big) = F\big(k_2, PF(k_1, m)\big), k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, m \in X^{\leq l}$



Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Пусть PF – PRF на $(K, X^{\leq l}, Y)$. PF является **расширяемой PRF**, если $\forall k \in K, x, y \in X^{\leq l-1}, a \in X$:

$$PF(k, x) = PF(k, y) \Rightarrow PF(k, x||a) = PF(k, y||a).$$

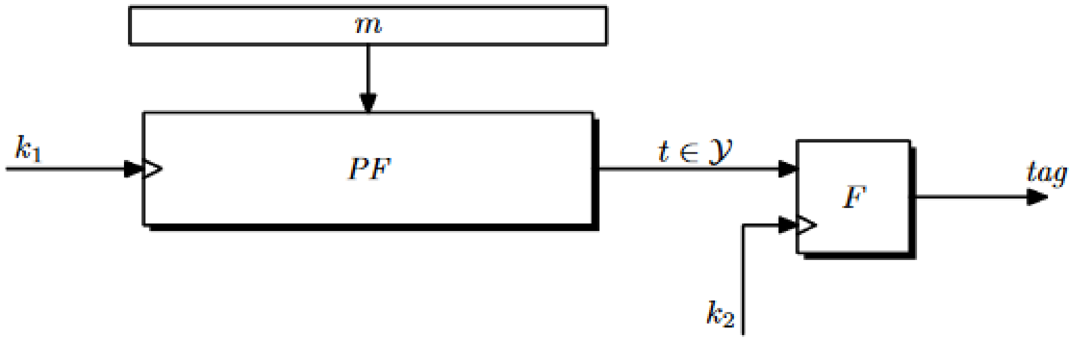
PRF CBC и каскадной конструкции являются расширяемыми.

Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Если PF функция CBC или каскадная конструкция то PRF EF – стойкая PRF.

Теорема 10.1. Пусть PF – расширяемая беспрификсная PRF на $\left(K_1, X^{\leq l+1}, Y\right)$, $|Y|$ - сверх полиномиальная, l – полиномиально ограниченная. Пусть F – стойкая PRF на (K_2, Y, T). Тогда EF определённая ранее – стойкая PRF на $\left(K_1 \times K_2, X^{\leq l}, T\right)$:

$$PRF_{adv}[A, EF] \leq PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + Q^2/2|Y|$$

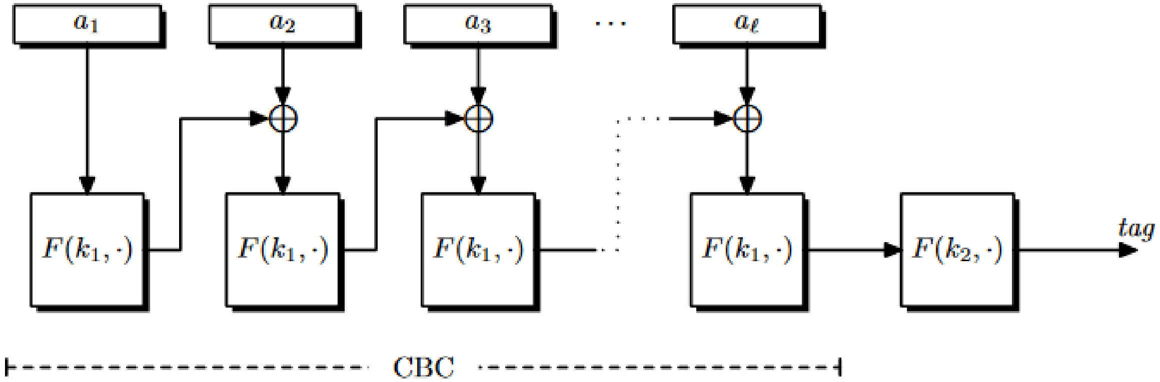


Зашифрование выхода беспрификсной PRF

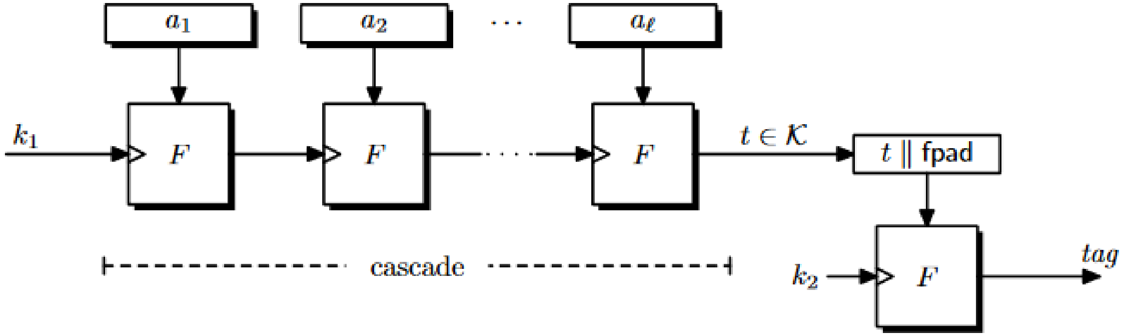
⊳ Рассмотрим идею доказательства. Самая неочевидная часть результирующей формулы $PRF_{adv}[A, EF] \leq PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + Q^2/2|Y|$ это слагаемое $Q^2/2|Y|$. Рассмотрим причину его появления.

Пусть противник запрашивает у оракула (претендента) Q кодов аутентичности для Q различных сообщений. Так как размер области значений PF есть $|Y|$, то используя парадокс дней рождений за $Q \sim \sqrt{|Y|}$ произойдёт коллизия, и итоговое значение MAC тоже даст коллизию. Т.е. мы нашли пару x_i, x_j: $PF(k_1, x_i) = PF(k_1, x_j)$. Так как PF расширяемая, то противник имея MAC t для сообщения $x_i||a$ фактически имеет MAC для сообщения $x_j||a$. ⊲

Зашифрование выхода беспрификсной PRF



(a) The ECBC construction ECBC(k, m) (encrypted CBC)



(b) The NMAC construction NMAC(k, m) (encrypted cascade)

ECBC MAC

Теорема 10.2. Зашфированный CBC MAC $ECBC$, зашифрованный с использованием PRF F на (K, X, X) ($|X|$ - сверх полиномиальная, l – полиномиально ограниченная) – стойкая PRF на $\left(K^2, X^{\leq l}, X\right)$:

$$PRF_{adv}[A, ECBC] \leq PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}[B_2, F] + \frac{\left(Q(l+1)\right)^2 + Q^2}{2|X|}$$

⊳следствие **Теоремы 10.1.**⊲

NMAC

- PRF F на $(K, M, K), K = \{0,1\}^k, X = \{0,1\}^n,\ k \leq X$
- $g(t) = t||$fpad, fpad – фиксированное дополнение, длины $n - k$ бит (например все 0).

Теорема 10.3. $NMAC$, использующая PRF F стойкая PRF на $\left(K^2, X^{\leq l}, K\right)$:

$$PRF_{adv}[A, NMAC] \leq \left(Q(l+1)\right) * PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}[B_2, F] + \frac{Q^2}{2|K|}$$

⊳следствие **Теоремы 10.1.**⊲

NMAC и ECBC MAC

- Рассмотренные конструкции являются стойкими PRF и следовательно стойкими MAC
- Нет необходимости знать длину сообщения заранее, можно обновлять полученное значение MAC при получении новых блоков сообщения, не дожидаясь получения сообщения целиком
- Можно использовать для сообщений произвольной длинны, **кратной размеру блока** PRF (чаще всего – блочного шифра)

Беспрификсное кодирование

Цель – закодировать «префиксные строки» в беспрификсные, для использования в беспрификсных PRF для получения MAC

Пусть $X_{>0}^{\leq l}$ - множество непустых строк, длины не более l элементов в X.

Функция $pf: M \to X_{>0}^{\leq l}$ называется беспрификсным кодированием, если pf – инъективна и множество элементов из образа pf – беспрификсное множество.

Теорема 10.4. Пусть pf – беспрификсное кодирование, PF – беспрификсная PRF на $(K, X^{\leq l}, Y)$. Тогда PRF $F(k, m) = PF(k, pf(m))$ – стойкая PRF на (K, M, Y)

⊳Очевидно следует из определения беспрификсной PRF⊲

Беспрификсное кодирование

- Метод 1. Добавление длины
$$X = \{0,1\}^n, M = X^{\leq l-1}, m = (a_1, \dots, a_v) \in M$$
$$pf(m) = (< v >, a_1, \dots, a_v) \in X_{>0}^{\leq l}$$
- Метод 2. «Остановочные биты»
$$X = \{0,1\}^n, \tilde{X} = \{0,1\}^{n-1}, M = \tilde{X}_{>0}^{\leq l}, m = (a_1, \dots, a_v) \in M$$
$$pf(m) = ((a_1||0), (a_2,||0), \dots, (a_{v-1}||0), (a_v||1)) \in X_{>0}^{\leq l}$$

⊳Очевидна инъективность и беспрификсность образа⊲

Беспрификсное кодирование

- Позволяет использовать беспрификсные PRF в качестве MAC
- Добавление длины сообщения увеличивает длину сообщений как входа для беспрификсной PRF, так как беспрификсное кодирование – избыточно.
- Добавление длины к сообщению не позволяет использовать MAC в поточном режиме (когда сообщение передаётся по частям), так как длина сообщения заранее не известна
- Так как в основном используются блочные шифры – добавление данных беспрификсным кодирование означает добавление лишних блоков
- Использование «остановочных битов» также увеличивает длину сообщения

Беспрификсное кодирование с рандомизацией

Пусть $x, y \in X^{\leq l}$. Обозначим $x \sim y$ если x префикс y или y префикс x (т.е. $\sim$ отношение «префиксности» на $X^{\leq l}$).

Пусть ϵ – действительное число, $0 \leq \epsilon \leq 1$. Вероятностное ϵ-префиксное кодирование это функция $prf: K \times M \to X^{\leq l}_{>0}: m_0, m_1 \in M, m_0 \neq m_1$:

$$\Pr[prf(k, m_0) \sim prf(k, m_1)] \leq \epsilon$$

Где вероятность рассматривается при случайном равновероятном выборе $k \in K$

Пример - $prf\big(k, (a_1, \dots, a_v)\big) = \big(a_1, \dots, a_v, (a_v \oplus k)\big) \in X^{\leq l}_{>0}$

Беспрификсное кодирование с рандомизацией

Пусть PF – беспрификсная PRF на $\left(K, X^{\leq l}, Y\right), prf: K_1 \times M \to X_{>0}^{\leq l}$ - вероятностное ϵ-префиксное кодирование.

Определим PRF F на $(K \times K_1, M, Y)$:

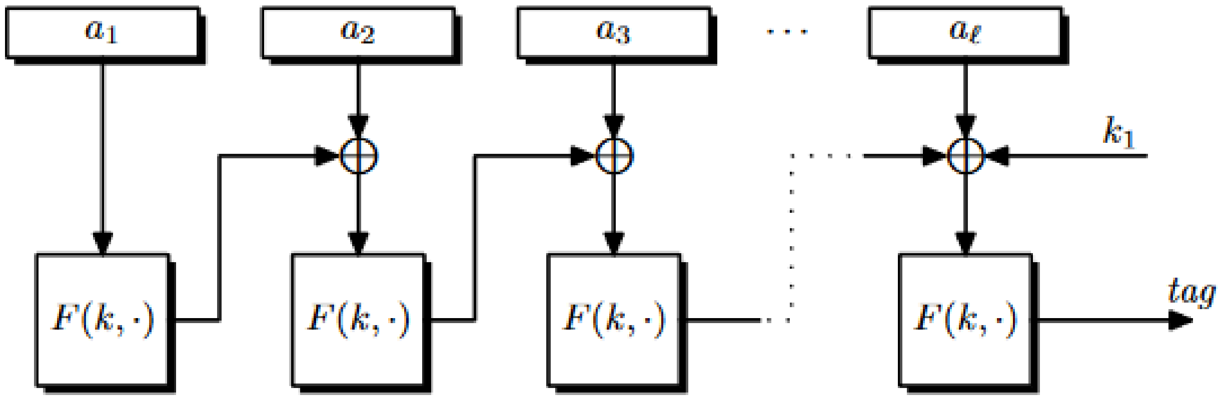
$$F\big((k_1, k_2), m\big) = PF(k, prf(k_1, m))$$

Теорема 10.5. Если PF - беспрификсная PRF, prf - вероятностное ϵ-префиксное кодирование, тогда F , введённая выше – стойкая PRF:

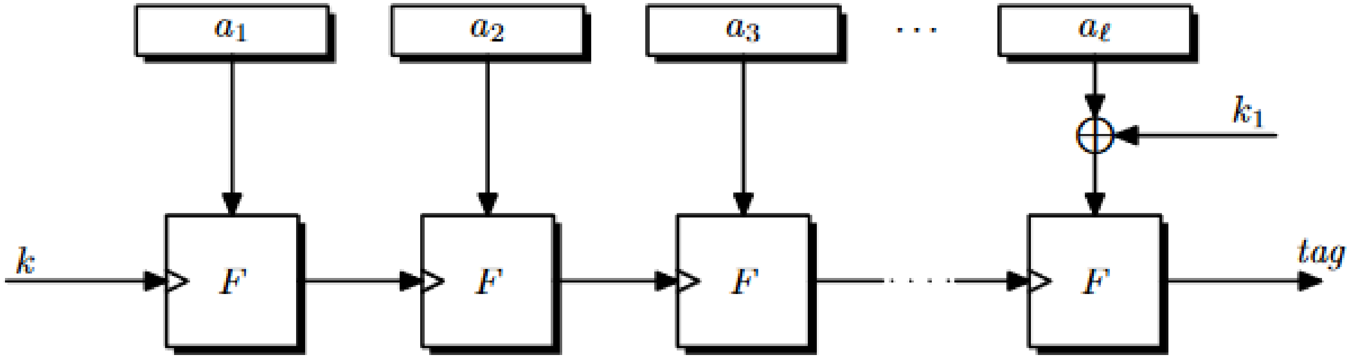
$$PRF_{adv}[A, F] \leq PRF_{adv}^{pf}[B_1, PF] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + \frac{Q^2\epsilon}{2}$$

⊳без доказательства⊲

Беспрификсное кодирование с рандомизацией



(a) *rpf* applied to CBC



(b) *rpf* applied to cascade

MAC для сообщений, некратных длине блока

Все рассмотренные до этого схемы были применимы только для сообщений длины кратных длине блока PRF (блочного шифра).

Пусть F – PRF на $\left(K, X^{\leq l+1}, Y\right), inj: \{0,1\}^{\leq nl} \to X^{\leq nl}$ - инъекция.
Определим PRF F_{bit}:

$$F_{bit} = F(k, inj(x))$$

Теорема 10.6. PRF введённая выше – стойкая PRF на $\left(K, \{0,1\}^{\leq nl}, Y\right)$

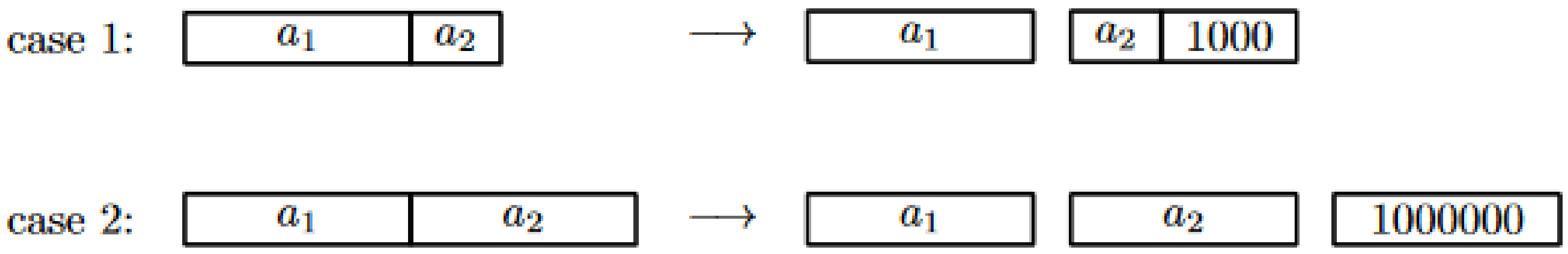
⊳очевидно⊲

Построение инъективных функций

Пусть $X = \{0,1\}^n, inj\colon \{0,1\}^{\leq nl} \rightarrow X^{\leq l+1}$

inj:

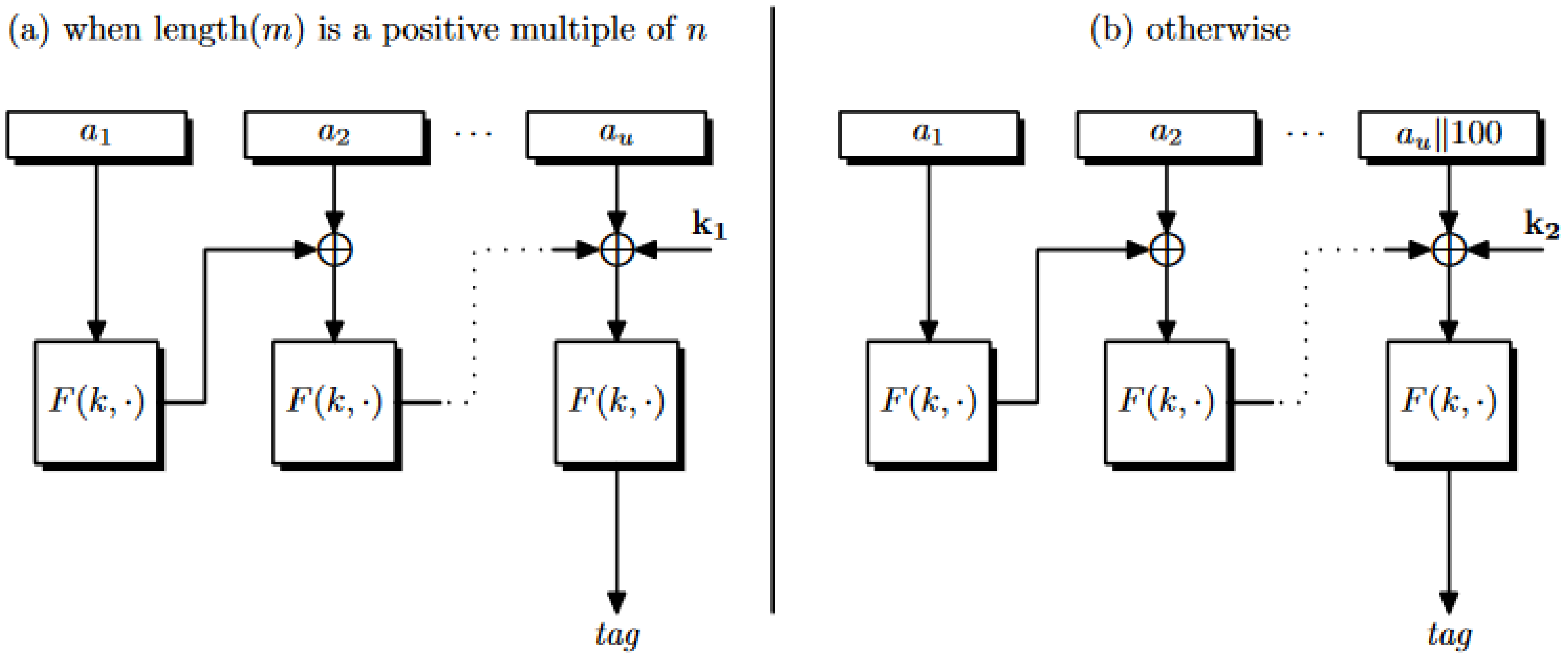
- Если входное сообщение имеет длину не кратную n – добавить 10…00 до длинны кратной n
- Иначе – добавить n-блок $(1||0^{n-1})$
- Инъективна и обратима



CMAC

- Стандарт NIST
- Один из наиболее популярных алгоритмов вычисления MAC (самый популярных после HMAC)
- Использует три различных ключа (могут быть выработаны на основе одного ключа)

CMAC



(a) when length(m) is a positive multiple of n
a1
a2
· · ·
au
k1
F(k, ·)
F(k, ·)
F(k, ·)
tag
(b) otherwise
a1
a2
· · ·
au||100
k2
F(k, ·)
F(k, ·)
F(k, ·)
tag

OMAC

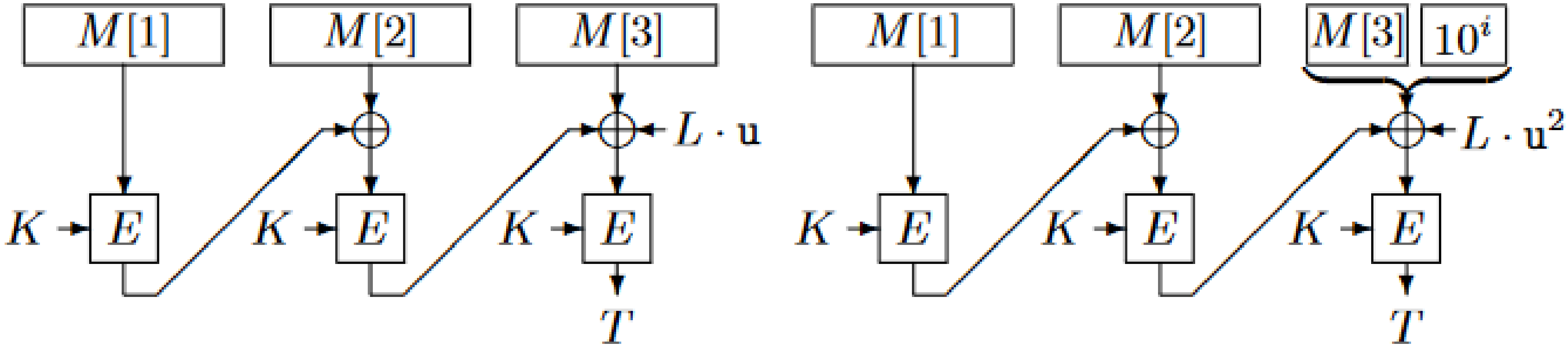
- В текущей вариации (OMAC) использует единственный ключ для генерации этих трех ключей для некоторой константы R_n:

input: key $k \in \mathcal{K}$
output: keys $k_0, k_1, k_2 \in \mathcal{X}$

$k_0 \leftarrow k$
$L \leftarrow F(k, 0^n)$
(1) if $\mathrm{msb}(L) = 0$ then $k_1 \leftarrow (L \ll 1)$ else $k_1 \leftarrow (L \ll 1) \oplus R_n$
(2) if $\mathrm{msb}(k_1) = 0$ then $k_2 \leftarrow (k_1 \ll 1)$ else $k_2 \leftarrow (k_1 \ll 1) \oplus R_n$
output k_0, k_1, k_2.

OMAC

- Фактически для получения трех ключей реализуется умножение в кольце многочленов на некоторую константу u



Trunkated CBC MAC

Основная идея – не дать противнику возможность воспользоваться MAC для осуществления префиксной атаки.

Использование части кода аутентичности. Используется в ГОСТ 28147-98

Оптимально использовать половину исходного MAC

Основной недостаток – фактически понижаем достижимый параметр стойкости в 2 раза

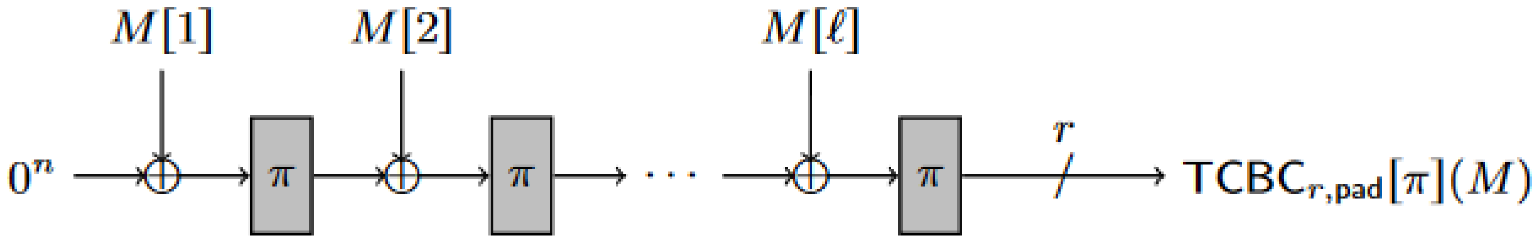


Fig. 1. Truncated CBC. Representation of $\mathsf{TCBC}_{r,\mathsf{pad}}[\pi]$. Here, $M[1], \ldots, M[\ell]$ are n-bit blocks resulting from applying the padding scheme pad to the input message $M \in \{0,1\}^*$.

PMAC

PMAC – параллельный MAC

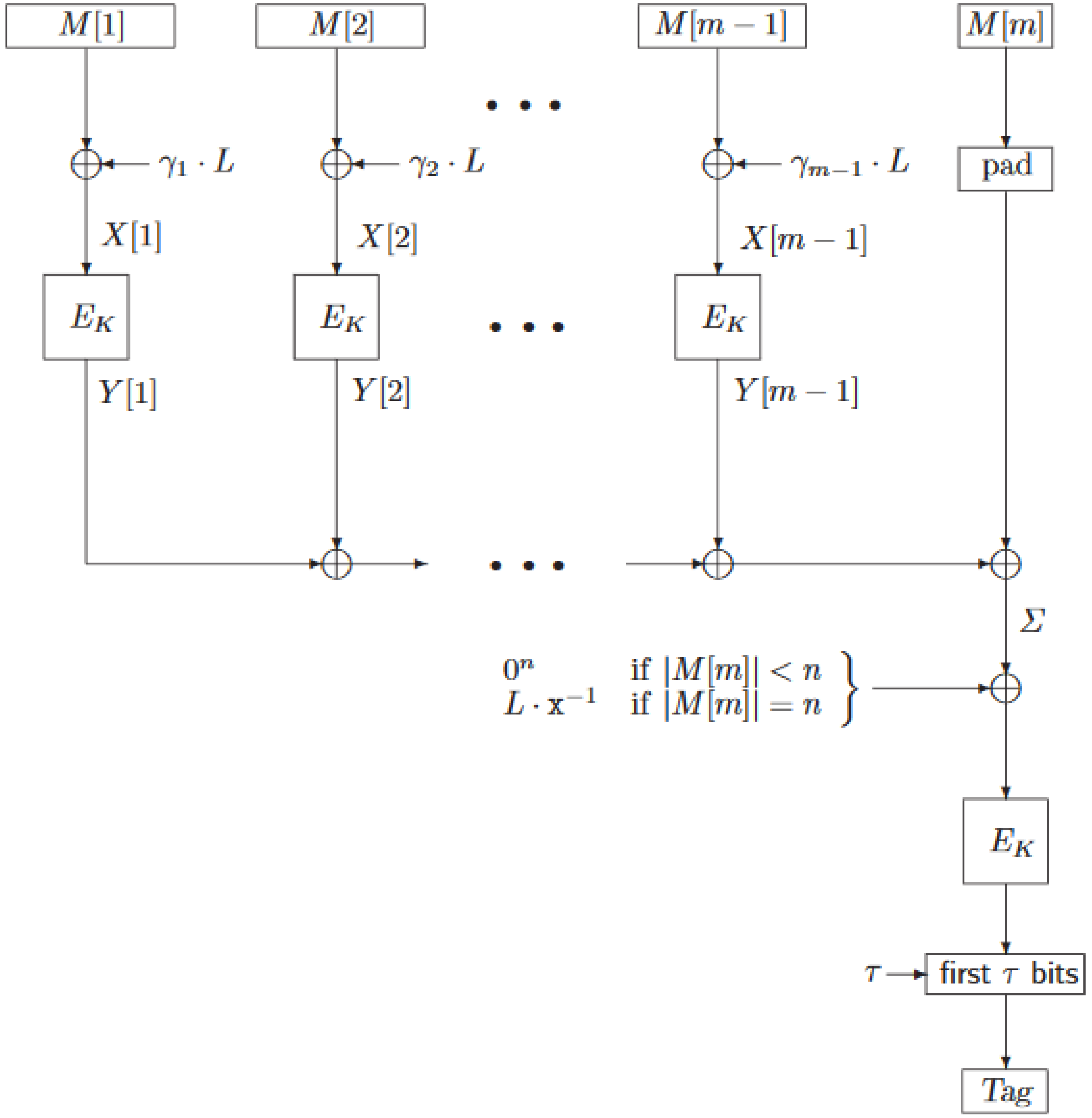
Возможность добавлять и удалять блоки из итогового значения MAC

Основная идея – использование «различных» ключей для каждого блока, полученных через умножение в кольце многочленов

Возможность вычислять MAC параллельно для всех блоков

Был патентован (США), разрешено бесплатное использование в образовательных и open-source проектах. В настоящий момент патент истёк

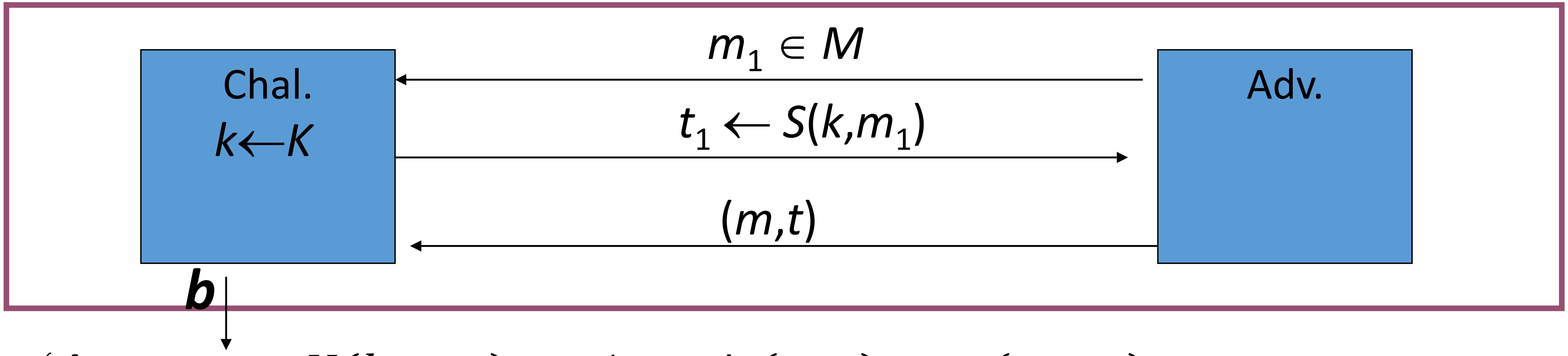
PMAC



$M[1]$
$M[2]$
$M[m-1]$
$M[m]$
$\gamma_1 \cdot L$
$\gamma_2 \cdot L$
$\gamma_{m-1} \cdot L$
pad
$X[1]$
$X[2]$
$X[m-1]$
E_K
E_K
E_K
$Y[1]$
$Y[2]$
$Y[m-1]$
Σ
0^n if $|M[m]| < n$
$L \cdot \mathrm{x}^{-1}$ if $|M[m]| = n$
E_K
τ
first τ bits
Tag

Одноразовый MAC
(по аналогии с одноразовым блокнотом)

Введём игру



$$\boldsymbol{b} = \begin{cases} 1 & \text{если } V(k, m, t) = 1 \text{ and } (m, t) \neq (m_1, t_1) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$I = (S, V)$ стойкий одноразовый MAC, если $Adv_{mac1}[A, I] = \Pr[b = 1] \leq \epsilon, \epsilon$ – пренебрежимо малая величина

Одноразовый MAC : пример

Стойкий против любых (не только эффективных) противников

Пусть q большое простое число (пример - $q = 2128 + 51$)

$$key = (a, b) \in \{1, \ldots, q\}^2$$

$$msg = (m[1], \ldots, m[L])$$

$P_{msg}(x) = x^{L+1} + m[L] * x^L + \cdots + m[1] * x$ – полином степени $L + 1$

$$S(key, msg) = P_{msg}(a) + b \pmod q$$

Одноразовый MAC ⇒ Многоразовый MAC

Пусть (H, V) стойкий одноразовый MAC на $(K, M, \{0,1\}^n)$.

Пусть F: $KF \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ стойкая PRF.

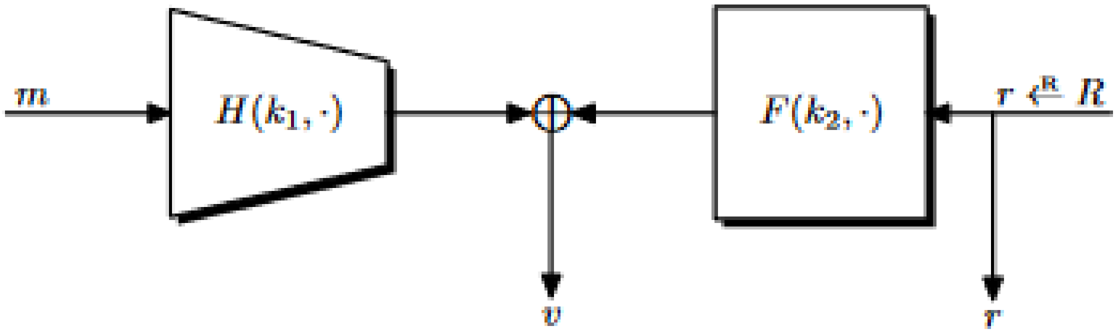
$r \xleftarrow{R} R$.

Carter-Wegman MAC:

$$S_{cw}\big((k_1, k_2), m\big) = \Big(r, \overbrace{F(k_2, r)}^{\text{Медленная, Короткий вход}} \oplus \overbrace{H(k_1, m)}^{\text{Быстрая, Длинный вход}}\Big) = (r, v)$$

$$V_{cw}(k, (r, v), m) = \begin{cases} 1, v = F(k_2, r) \oplus H(k_1, m) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Является недетерминированным



Carter-Wegman MAC

Наиболее быстрые современные MAC

- VMAC
- UMAC
- Poly1305-AES

Poly1305

Poly1305:

Пусть $m[0], m[1], .., m[l-1]$ – сообщение, $q = \frac{l}{16}$ (округление сверху)

$c_i = m[16i-16] + 2^8 m[16i-15] +$
$+ 2^{16} m[16i-14] + \cdots + 2^{120} m[16i-1] + 2^{128}$

Если 16 не делит l:
$c_q = m[16q-16] + 2^8 m[16q-15] + \ \ldots +$
$+ 2^{8(l \bmod 16)-8} m[l-1] + 2^{8(l \bmod 16)}$

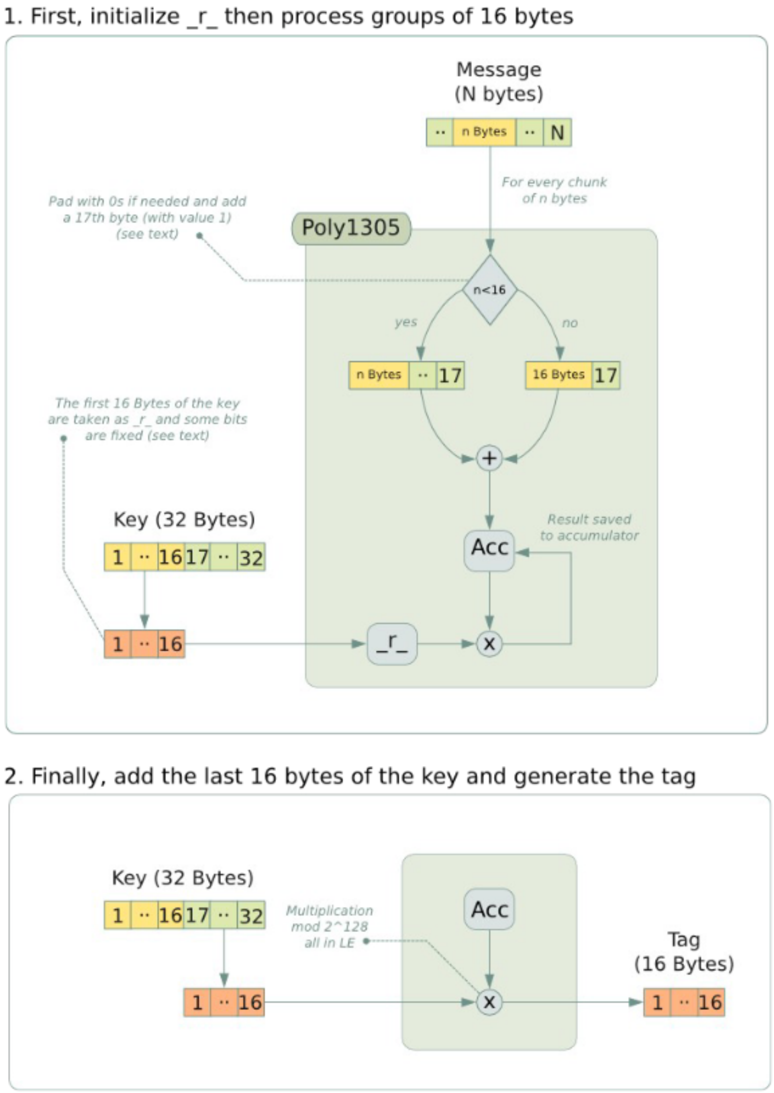
Простыми словами – дополнить каждые 16 байт до 17, добавляя 1. Если не хватает до 16 байт – добавить 100…000 чтоб хватало.

Poly1305

$$\text{Poly1305}_r(m, AES_k(n))$$
$$= \left[\left(\left(c_1 r^q + c_2 r^{q-1} + \cdots + c_q r^1\right) \bmod 2^{130} - 5\right)\right.$$

```
#include <gmpxx.h>

void poly1305_gmpxx(unsigned char *out,
  const unsigned char *r,
  const unsigned char *s,
  const unsigned char *m,unsigned int l)
{
  unsigned int j;
  mpz_class rbar = 0;
  for (j = 0;j < 16;++j)
    rbar += ((mpz_class) r[j]) << (8 * j);
  mpz_class h = 0;
  mpz_class p = (((mpz_class) 1) << 130) - 5;
  while (l > 0) {
    mpz_class c = 0;
    for (j = 0;(j < 16) && (j < l);++j)
      c += ((mpz_class) m[j]) << (8 * j);
    c += ((mpz_class) 1) << (8 * j);
    m += j; l -= j;
    h = ((h + c) * rbar) % p;
  }
  for (j = 0;j < 16;++j)
    h += ((mpz_class) s[j]) << (8 * j);
  for (j = 0;j < 16;++j) {
    mpz_class c = h % 256;
    h >>= 8;
    out[j] = c.get_ui();
  }
}
```



Poly 1305

Introduction

- Poly1305 is a Wegman-Carter, one-time authenticator designed by D. J. Bernstein
- It is used to calculate a Message Authentication Code (MAC) for a message
- Poly 1305 uses a 32 Byte key and operates on an N byte message

Operation

- The first 16 bytes of the one-time key are interpreted as a number _r_ with the following modifications:
  - The top 4 bits of bytes 3, 7, 11, 15 are set to 0
  - The bottom 2 bits of bytes 4, 8, 12 are set to 0
  - The 16 bytes are interpreted as a little endian value
- The accumulator (Acc in the diagram) is set to 0
- For every n bytes read from the N byte message, if n = 16 then just add a 17th byte having a value of 1 and the 17 bytes are treated as a little endian number
- If n < 16 then pad with 0s until there are 16 bytes and add the 17th byte as in the case when n = 16
- The number is then added to the accumulator which is multiplied by _r_ and the result is saved back to the accumulator
- Note : These operations are all mod 2^130 – 5
- Finally, the last 16 bytes of the key are interpreted as a little endian number and this number is added to the accumulator mod 2^128
- The result is then written out as a little endian number and this is taken as the 16 byte tag

NB: картинка слева предполагает, что правая часть ключа Poly1305 уже получена ранее как выход некоторой PRF, вычисленной от некоторого n поэтому явного вычисления PRF нет.

В качестве PRF используется не только AES, но и ChaCha20 (обычно в рамках построения аутентифицированного шифрования ChaCha 20 – Poly 1305)