

БДЗ по анализу данных и машинному обучению

Фирсов Георгий, М21-507

18 января 2023 г.

Вариант: 10

Содержание

Задание 6	2
Задание 7	4
Задание 8	5
Задание 9	5
Задание 10	6
Задание 11	7
Задание 12	7
Задание 13	9
Задание 14	11
Задание 15	13
Приложение А. Таблицы с перечислением кратчайших путей между вершинами графа из задачи 10	14
Приложение Б. Графлеты, содержащие исследуемую вершину, для задачи 11	24

Задание 6

1. Свертка «расширенной» матрицы признаков по каналам. Первый канал:

$$\begin{vmatrix}
 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 42 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 56 & 78 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 97 & 74 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 33 & 85 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 77 \\ 0 & 52 \end{vmatrix} & 57 & \begin{vmatrix} 31 & 72 \\ 18 & 2 \end{vmatrix} & 64 & \begin{vmatrix} 93 & 48 \\ 56 & 84 \end{vmatrix} & 46 & \begin{vmatrix} 68 & 68 \\ 47 & 12 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 58 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 17 & \begin{vmatrix} 46 & 26 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} & 45 & \begin{vmatrix} 78 & 97 \\ 20 & 93 \end{vmatrix} & 95 & \begin{vmatrix} 80 & 10 \\ 24 & 43 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 92 \\ 0 & 77 \end{vmatrix} & 16 & \begin{vmatrix} 36 & 81 \\ 17 & 49 \end{vmatrix} & 63 & \begin{vmatrix} 46 & 18 \\ 42 & 94 \end{vmatrix} & 77 & \begin{vmatrix} 90 & 38 \\ 10 & 17 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 84 \\ 0 & 83 \end{vmatrix} & 39 & \begin{vmatrix} 81 & 48 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} & 74 & \begin{vmatrix} 55 & 93 \\ 22 & 68 \end{vmatrix} & 34 & \begin{vmatrix} 76 & 9 \\ 87 & 46 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 47 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 53 & \begin{vmatrix} 80 & 95 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 47 & \begin{vmatrix} 46 & 27 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 5 & \begin{vmatrix} 19 & 60 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 0
 \end{vmatrix}
 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 126 & 346 & 416 & 321 \\ 233 & 114 & 412 & 198 \\ 58 & 95 & 416 & 187 \\ 323 & 262 & 384 & 109 \\ 333 & 94 & 341 & 321 \\ 47 & 95 & 27 & 60 \end{vmatrix}$$

(1)

Второй канал:

$$\begin{vmatrix}
 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 76 & 64 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 70 & 24 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & 51 & \begin{vmatrix} 9 & 44 \\ 10 & 64 \end{vmatrix} & 71 & \begin{vmatrix} 17 & 67 \\ 33 & 87 \end{vmatrix} & 19 & \begin{vmatrix} 77 & 7 \\ 48 & 2 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 93 \\ 0 & 94 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 17 & 86 \\ 16 & 21 \end{vmatrix} & 91 & \begin{vmatrix} 41 & 3 \\ 21 & 89 \end{vmatrix} & 37 & \begin{vmatrix} 95 & 79 \\ 37 & 45 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 42 \\ 0 & 66 \end{vmatrix} & 56 & \begin{vmatrix} 51 & 46 \\ 86 & 79 \end{vmatrix} & 46 & \begin{vmatrix} 90 & 100 \\ 70 & 31 \end{vmatrix} & 62 & \begin{vmatrix} 44 & 51 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 84 \\ 0 & 22 \end{vmatrix} & 75 & \begin{vmatrix} 41 & 73 \\ 29 & 64 \end{vmatrix} & 69 & \begin{vmatrix} 60 & 43 \\ 22 & 8 \end{vmatrix} & 65 & \begin{vmatrix} 50 & 69 \\ 96 & 34 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 33 & \begin{vmatrix} 20 & 91 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 74 & \begin{vmatrix} 41 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 34 & \begin{vmatrix} 80 & 99 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 0
 \end{vmatrix}
 * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42 & 83 & 764 & 494 \\ 36 & 637 & 1006 & 511 \\ 936 & 601 & 774 & 1056 \\ 564 & 1241 & 1206 & 419 \\ 468 & 944 & 510 & 1110 \\ 64 & 424 & 147 & 636 \end{vmatrix}$$

(2)

Третий канал:

$$\begin{vmatrix}
 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 73 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 51 & 69 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 65 \\ 0 & 95 \end{vmatrix} & 90 & \begin{vmatrix} 47 & 9 \\ 54 & 21 \end{vmatrix} & 19 & \begin{vmatrix} 22 & 37 \\ 78 & 47 \end{vmatrix} & 6 & \begin{vmatrix} 62 & 18 \\ 34 & 15 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 79 \\ 0 & 37 \end{vmatrix} & 38 & \begin{vmatrix} 83 & 68 \\ 86 & 22 \end{vmatrix} & 72 & \begin{vmatrix} 56 & 10 \\ 36 & 21 \end{vmatrix} & 76 & \begin{vmatrix} 89 & 66 \\ 34 & 41 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 44 \end{vmatrix} & 35 & \begin{vmatrix} 85 & 20 \\ 60 & 22 \end{vmatrix} & 65 & \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 58 & 86 \end{vmatrix} & 79 & \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 40 & 16 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 32 \\ 0 & 85 \end{vmatrix} & 2 & \begin{vmatrix} 67 & 29 \\ 40 & 0 \end{vmatrix} & 32 & \begin{vmatrix} 33 & 81 \\ 50 & 98 \end{vmatrix} & 35 & \begin{vmatrix} 9 & 87 \\ 60 & 12 \end{vmatrix} & 0 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 63 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 93 & \begin{vmatrix} 23 & 93 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 20 & \begin{vmatrix} 77 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 84 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 0
 \end{vmatrix}
 * \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 657 & 64 & 1092 & 1029 \\ 1310 & 966 & 1438 & 905 \\ 886 & 1860 & 883 & 1637 \\ 473 & 1328 & 1673 & 1226 \\ 989 & 925 & 2047 & 1207 \\ 441 & 789 & 483 & 444 \end{vmatrix}$$

(3)

2. Пулинг по максимальному значению по каналам. Первый канал:

$$\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} 126 & 346 & 416 & 321 \\ 233 & 114 & 412 & 198 \\ 58 & 95 & 416 & 187 \\ 323 & 262 & 384 & 109 \\ 333 & 94 & 341 & 321 \\ 47 & 95 & 27 & 60 \end{array} \right\| \xrightarrow[\substack{\text{max pooling} \\ (2, 2)}]{} \left\| \begin{array}{ccc} 346 & 416 & 416 \\ 233 & 416 & 416 \\ 323 & 416 & 416 \\ 333 & 384 & 384 \\ 333 & 341 & 341 \end{array} \right\| \end{array} \quad (4)$$

Второй канал:

$$\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} 42 & 83 & 764 & 494 \\ 36 & 637 & 1006 & 511 \\ 936 & 601 & 774 & 1056 \\ 564 & 1241 & 1206 & 419 \\ 468 & 944 & 510 & 1110 \\ 64 & 424 & 147 & 636 \end{array} \right\| \xrightarrow[\substack{\text{max pooling} \\ (2, 2)}]{} \left\| \begin{array}{ccc} 637 & 1006 & 1006 \\ 936 & 1006 & 1056 \\ 1241 & 1241 & 1206 \\ 1241 & 1241 & 1206 \\ 944 & 944 & 1110 \end{array} \right\| \end{array} \quad (5)$$

Третий канал:

$$\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} 657 & 64 & 1092 & 1029 \\ 1310 & 966 & 1438 & 905 \\ 886 & 1860 & 883 & 1637 \\ 473 & 1328 & 1673 & 1226 \\ 989 & 925 & 2047 & 1207 \\ 441 & 789 & 483 & 444 \end{array} \right\| \xrightarrow[\substack{\text{max pooling} \\ (2, 2)}]{} \left\| \begin{array}{ccc} 1310 & 1438 & 1438 \\ 1860 & 1860 & 1637 \\ 1860 & 1860 & 1673 \\ 1328 & 2047 & 2047 \\ 989 & 2047 & 2047 \end{array} \right\| \end{array} \quad (6)$$

3. Теперь финальный шаг — кросс-канальная свертка. Первый выходной канал:

$$\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} 346 & 416 & 416 \\ 233 & 416 & 416 \\ 323 & 416 & 416 \\ 333 & 384 & 384 \\ 333 & 341 & 341 \end{array} \right\| * \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 3562 & 4992 & 4992 \\ 3756 & 4800 & 4800 \\ 3976 & 4414 & 4414 \end{array} \right\| \\ + \\ \left\| \begin{array}{ccc} 637 & 1006 & 1006 \\ 936 & 1006 & 1056 \\ 1241 & 1241 & 1206 \\ 1241 & 1241 & 1206 \\ 944 & 944 & 1110 \end{array} \right\| * \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 12464 & 13482 & 13472 \\ 14282 & 14422 & 14172 \\ 13110 & 13110 & 13896 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 37246 & 39950 & 37926 \\ 37166 & 42664 & 41220 \\ 32052 & 41714 & 42126 \end{array} \right\| \\ + \\ \left\| \begin{array}{ccc} 1310 & 1438 & 1438 \\ 1860 & 1860 & 1637 \\ 1860 & 1860 & 1673 \\ 1328 & 2047 & 2047 \\ 989 & 2047 & 2047 \end{array} \right\| * \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 21220 & 21476 & 19462 \\ 19128 & 23442 & 22248 \\ 14966 & 24190 & 23816 \end{array} \right\| \end{array} \quad (7)$$

Второй выходной канал:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 346 & 416 & 416 \\ 233 & 416 & 416 \\ 323 & 416 & 416 \\ 333 & 384 & 384 \\ 333 & 341 & 341 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4464 & 6240 & 6240 \\ 4645 & 6016 & 6016 \\ 4965 & 5555 & 5555 \end{vmatrix} \\
& + \\
& \begin{vmatrix} 637 & 1006 & 1006 \\ 936 & 1006 & 1056 \\ 1241 & 1241 & 1206 \\ 1241 & 1241 & 1206 \\ 944 & 944 & 1110 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15278 & 16735 & 16740 \\ 17700 & 17910 & 17640 \\ 16536 & 16536 & 17418 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45992 & 49609 & 47190 \\ 46521 & 53135 & 51261 \\ 40644 & 52235 & 52556 \end{vmatrix} \\
& + \\
& \begin{vmatrix} 1310 & 1438 & 1438 \\ 1860 & 1860 & 1637 \\ 1860 & 1860 & 1673 \\ 1328 & 2047 & 2047 \\ 989 & 2047 & 2047 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26250 & 26634 & 24210 \\ 24176 & 29209 & 27605 \\ 19143 & 30144 & 29583 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

Ответ: Первый выходной канал:

$$\begin{vmatrix} 37246 & 39950 & 37926 \\ 37166 & 42664 & 41220 \\ 32052 & 41714 & 42126 \end{vmatrix}$$

Второй выходной канал:

$$\begin{vmatrix} 45992 & 49609 & 47190 \\ 46521 & 53135 & 51261 \\ 40644 & 52235 & 52556 \end{vmatrix}$$

Задание 7

Ядро $K(x, y) = (\langle x, y \rangle + 1)^d$ является частным случаем *полиномиального* ядра $K(x, y) = (\langle x, y \rangle + \theta)^d$. Произведем некоторые преобразования, а также воспользуемся мультиномиальной теоремой:

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\langle x, y \rangle + \theta)^d = \\
&= \left(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n + \sqrt{\theta} \sqrt{\theta} \right)^d = \\
&= \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{n+1} = d \\ j_1, \dots, j_{n+1} \geq 0}} \binom{d}{j_1, \dots, j_{n+1}} \theta^{j_{n+1}/2} \prod_{k=1}^n x_k^{j_k} y_k^{j_k},
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Несложно заметить, что последнее выражение является суммой «элементарных» произведений, один множитель которых зависит только от \mathbf{x} , а второй — только от \mathbf{y} , дей-

СТВИТЕЛЬНО:

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{n+1} = d \\ j_1, \dots, j_{n+1} \geq 0}} \sqrt{\binom{d}{j_1, \dots, j_{n+1}}} \theta^{j_{n+1}/2} \prod_{k=1}^n x_k^{j_k} \cdot \sqrt{\binom{d}{j_1, \dots, j_{n+1}}} \theta^{j_{n+1}/2} \prod_{k=1}^n y_k^{j_k} = \\
&= \langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \rangle,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\phi : F \rightarrow H$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$ (т.е. H — спрямляющее пространство).

Заметим, что сумма в (10) имеет ровно $\binom{n+d}{n}$ слагаемых, а значит это число является и размерностью спрямляющего пространства H .

Ответ: $\dim H = \binom{n+d}{n}$.

Задание 8

Положим $\alpha = \langle \cdot, \cdot \rangle$, тогда уравнения несколько упрощаются (точнее их получится записать в матричном виде). Расчет ведется попросту по шагам:

1. Вычисление оценки:

$$\begin{aligned}
a = q \cdot \mathbf{K}^\top &= \begin{bmatrix} 0,592 & 1,683 & 3,100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,316 & 0,587 & 1,310 & 0,011 \\ 1,218 & 2,156 & 4,011 & 0,592 \\ 3,654 & 1,857 & 2,982 & 1,816 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 13,564366 & 9,732752 & 16,770233 & 6,632448 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{11}$$

2. Получение весов:

$$\begin{aligned}
b = \text{softmax}(a) &= \begin{bmatrix} m = e^{13,564366} + e^{9,732752} + e^{16,770233} + e^{6,632448} \approx 19991924,01 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{13,564366}}{m} & \frac{e^{9,732752}}{m} & \frac{e^{16,770233}}{m} & \frac{e^{6,632448}}{m} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,03891 & 0,00084 & 0,96021 & 0,00004 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

3. Вычисление результата:

$$\begin{aligned}
o = b \cdot \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} 0,03891 & 0,00084 & 0,96021 & 0,00004 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,210 & 1,312 & 2,654 \\ 0,612 & 2,389 & 1,762 \\ 0,998 & 3,654 & 3,002 \\ 0,312 & 0,861 & 1,368 \end{bmatrix} \approx \\
&\approx \begin{bmatrix} 0,96699 & 3,56169 & 2,98735 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13}$$

Ответ: $o = \begin{bmatrix} 0,96699 & 3,56169 & 2,98735 \end{bmatrix}$.

Задание 9

Модель BLOOM (BigScience Large Open-science Open-access Multilingual Language Model) была разработана в рамках проекта BigScience в период с 2021 по 2022 годы. Релиз первой версии состоялся в 2022 году, данная версия является на текущий момент самой актуальной [1].

Исходный код модели является закрытым, однако разработчики сообщают об использовании 13 языков программирования для реализации данной модели [2]. В то же время модель предоставляет открытый интерфейс для взаимодействия с использованием специального веб-приложения [1].

Модель может продолжать текст некоторого поданного ей на вход запроса. По утверждениям разработчиков генерируемый текст трудно отличим от написанного человеком [1]. Поддерживается 46 различных языков.

Следует отметить, что модель также может быть нацелена на решение задач, для которых она непосредственно не обучалась путем сведения их к задаче генерирования текста.

Обучение производилось на основе корпусов текстов суммарным объемом 1.6 терабайт [2] при помощи 384 основных графических процессоров (с объемом видеопамати 80 гигабайт) и 32 дополнительных аналогичных по характеристикам графических процессоров [1]. Обучение стартовало 11 марта 2022 года. Интересный факт: используемый для обучения суперкомпьютер потребляет энергию, в основном выработанную на атомных электростанциях [1].

Модель содержит 176 миллиардов параметров (если точнее, то 176,247,271,424 параметра) [3, 1]. Представляет из себя сеть-кодировщик, применяет эмбединги и механизмы внимания. Впрочем, прочие параметры модели авторами не раскрываются подробно ни на сайте модели, ни в публикациях. Количество параметров сети выделяется в качестве основной особенности авторами разработки.

К возможным недостаткам и рискам следует отнести [1]:

- возможность присутствия персональных данных в выходных результатах модели;
- потенциальное наличие стереотипных суждений, которые могут кого-либо оскорбить;
- генерирование текста, содержащего оскорбительный, дискриминационный и иной неприемлемый контент;
- допущение фактических ошибок в генерируемом тексте;
- генерирование нерелевантного вывода, что может быть использовано для введения кого-либо в заблуждение.

Список использованных источников

1. BigScience Large Open-science Open-access Multilingual Language Model [Электронный ресурс]. — 2020. — Режим доступа: <https://huggingface.co/bigscience/bloom> (дата обращения: 18.01.2023).
2. What Language Model to Train if You Have One Million GPU Hours? — 2022. — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2210.15424>.
3. BLOOM: A 176B-Parameter Open-Access Multilingual Language Model. — 2022. — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2211.05100>.

Задание 10

1. В таблице 1 представлены длины кратчайших путей из вершины $u = 18$ во все остальные.

Рассчитаем величину closeness centrality:

$$cc_{18} = \frac{1}{\sum_{v, v \neq 18} d(18, v)} \approx 0.016. \quad (14)$$

Ответ: $cc_{18} \approx 0.016$

Таблица 1: Длины кратчайших путей в графе из вершины $u = 18$ во все остальные

Вершина v	Длина пути $d(u, v)$	Вершина v	Длина пути $d(u, v)$
1	5	11	4
2	5	12	3
3	4	13	2
4	5	14	2
5	5	15	1
6	4	16	2
7	4	17	1
8	5	19	1
9	3	20	2
10	3	—	—

2. Для расчета величины betweenness centrality построим все кратчайшие пути из всех вершин, кроме $u = 18$, во все остальные, кроме $u = 18$, и рассчитаем долю содержащих u (см. таблицы в приложении А). Для получения искомой величины следует просуммировать значения последнего столбца всех таблиц 4–21.

Ответ: $bc_{18} = 19\frac{2}{3}$.

3. Смежными с вершиной $u = 18$ являются: 15, 17 и 19, которые при этом не являются смежными попарно. Таким образом, $\mathfrak{N}_{18} = 0$, где через \mathfrak{N}_u обозначим количество ребер между смежными с u вершинами.

Так как $e(u) = \mathfrak{N}_u / \binom{\deg u}{2}$, то $e(18) = 0$.

Ответ: $e(18) = 0$.

Задание 11

Выделим все графлеты (в количестве 195 штук), содержащие от 2 до 5 вершин, в числе которых также присутствует $u = 23$ (см. приложение Б). Далее механически соотнесем каждый графлет с его «типом» по его топологии и расположению вершины u . После подсчета количеств графлетов для каждого «типа» получается следующий вектор:

$$\begin{aligned}
 GDV(23) = || & 4, 9, 4, 2, 12, 11, 6, 1, 4, 1, 8, 2, 0, 1, 0, 19, 12, 5, 6, 18, 4, 4, 1, \\
 & 0, 0, 6, 5, 3, 1, 10, 2, 1, 5, 0, 1, 0, 4, 9, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \\
 & 2, 0, 1, 2, 1, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ||.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Ответ: Значение вектора $GDV(23)$ см. в (15).

Задание 12

Запишем множества смежных вершин для указанных в задании: $N(u) = N(5) = \{1, 4, 6\}$, $N(v) = N(8) = \{7, 9\}$. Отметим, что $N(5) \cap N(8) = \emptyset$, $N(5) \cup N(8) = \{1, 4, 6, 7, 9\}$.

1. Индекс Жаккарда:

$$J(5, 8) = \frac{|N(5) \cap N(8)|}{|N(5) \cup N(8)|} = \frac{0}{5} = 0. \tag{16}$$

Ответ: $J(5, 8) = 0$.

2. Адамика–Адара:

$$A(5, 8) = \sum_{v \in N(5) \cap N(8)} \frac{1}{\log \deg v} = 0. \quad (17)$$

Ответ: $A(5, 8) = 0$.

3. Индекс Каца. Построим матрицу смежности графа:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (18)$$

Элемент на пересечении 5 строки и 8 столбца равен 0, то есть между вершинами 5 и 8 нет путей длины 1. Возведем матрицу во вторую степень:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (19)$$

Вновь элемент равен 0. Возведем в 3 степень:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 1 & 5 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 4 & 2 & 9 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 4 & 8 & 2 & 5 & 10 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 2 & 7 & 2 & 11 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 0 & 6 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 6 & 2 & 11 & 3 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 10 & 11 & 3 & 11 & 10 & 9 & 11 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 11 & 6 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 2 & 6 & 10 & 3 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (20)$$

Теперь элемент равен 2, то есть существуют два пути из 5 в 8 длины 3 (действительно: $5 - 4 - 7 - 8$ и $5 - 6 - 7 - 8$). Продолжая возводить матрицу в последовательные

степени будем получать количество путей соответствующей длины. На основе данных значений можно составить индекс Каца:

$$S(5, 8) = 2\beta^3 + 6\beta^4 + 33\beta^5 + 106\beta^6 + 457\beta^7 + 1559\beta^8 + 6160\beta^9 + \dots$$

Ответ: $S(5, 8) = 2\beta^3 + 6\beta^4 + 33\beta^5 + 106\beta^6 + 457\beta^7 + 1559\beta^8 + 6160\beta^9 + \dots$

Задание 13

В данном задании цвет будем обозначать числом: разные числа — разные цвета. При этом на изображениях цвета в обычном их представлении будут отсутствовать.

На рисунке 1 изображена начальная раскраска графов (правда, не совсем в том смысле, в котором она обыкновенно понимается в теории графов), а также сразу агрегированы цвета смежных вершин.

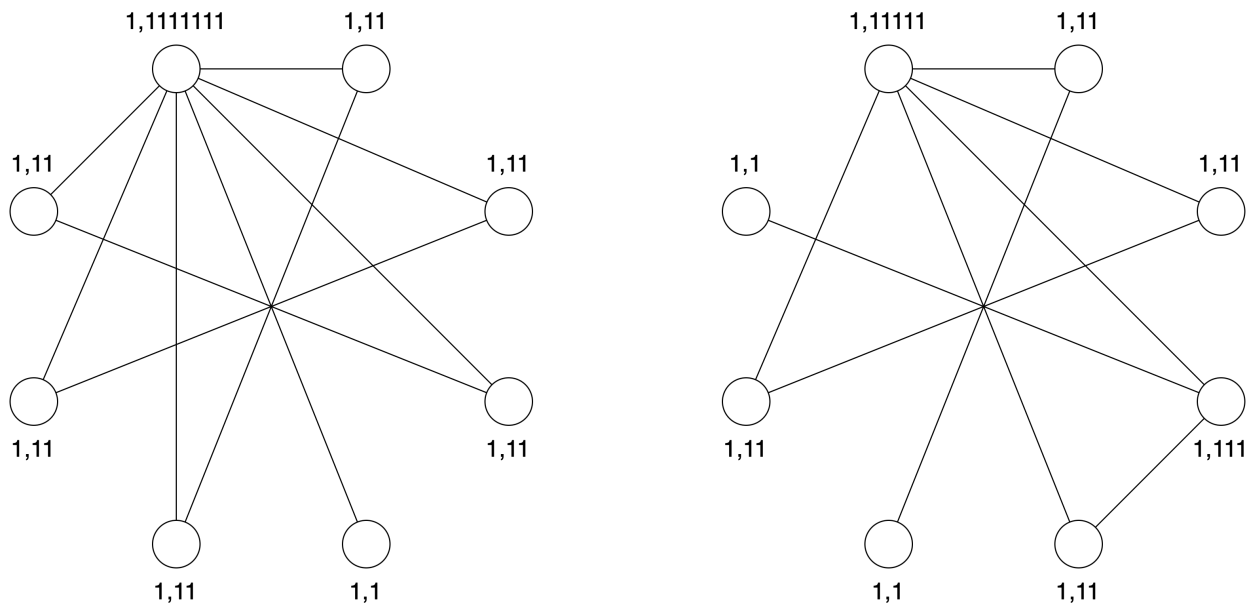


Рис. 1: Начальная раскраска графов и агрегирование цветов смежных вершин

Определим хэш-функцию H на полученных агрегированных цветах (2).

Таблица 2: Значения хэш-функции H на цветах с рисунка 1

Цвет c	$H(c)$
1,1	2
1,11	3
1,111	4
1,11111	5
1,1111111	6

Заменяем старые цвета на полученные (рис. 2) и так же сразу агрегируем цвета смежных вершин.

Доопределим хэш-функцию на полученных цветах (3).

Повторим замену цветов (рис. 3) и заметим, что при последующих заменах получится так, что цвета, одинаково поменявшиеся на шаге 3, меняются одинаково и на последующих шагах, а поменявшиеся по-разному — меняются по-разному. Таким образом, алгоритм сошелся.

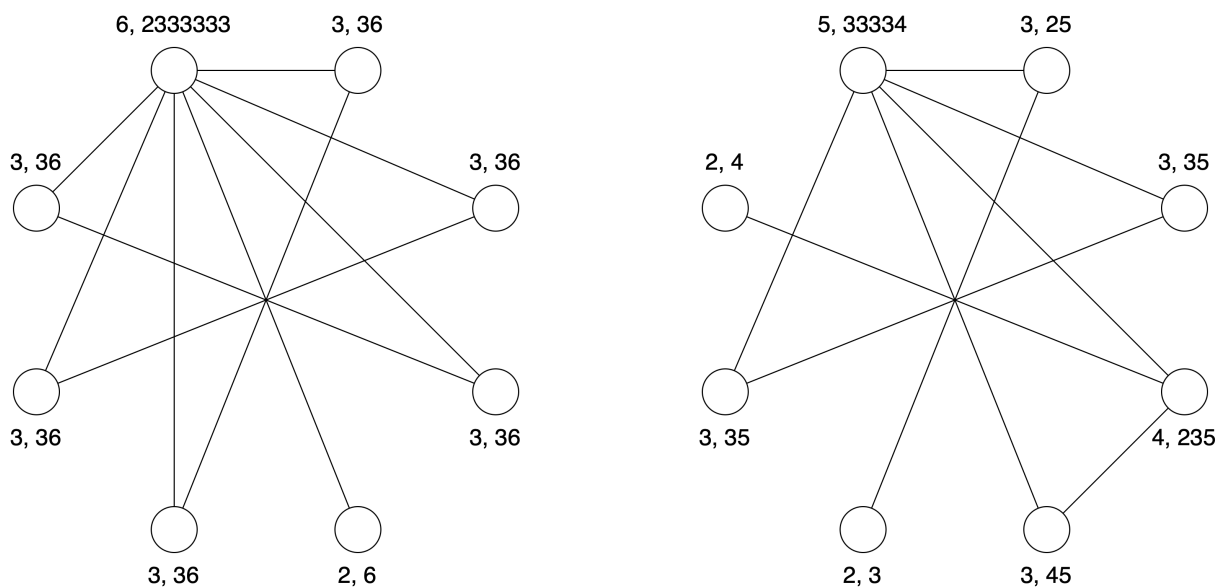


Рис. 2: Раскраска графов и агрегирование цветов смежных вершин на втором шаге

Таблица 3: Значения хэш-функции H на цветах с рисунка 2

Цвет c	$H(c)$
2,3	7
2,4	8
2,6	9
3,25	10
3,35	11
3,36	12
3,45	13
4,235	14
5,33334	15
6,2333333	16

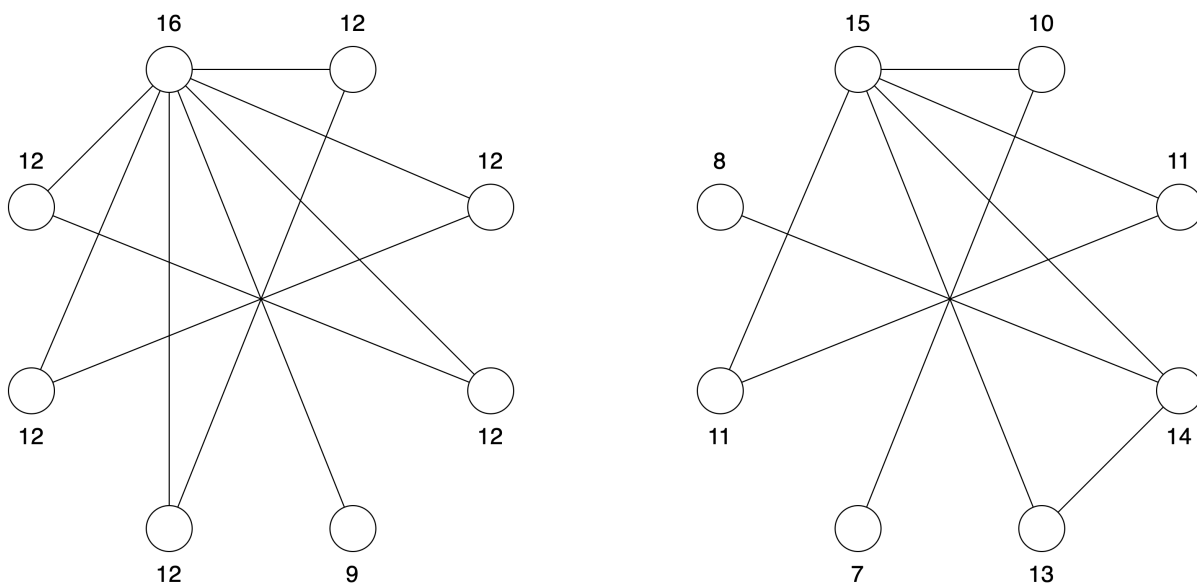


Рис. 3: Раскраска графов на третьем шаге

Теперь вычислим значение ядра. Для начала посчитаем количество вершин с конкрет-

ными цветами и составим из этого векторы:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \phi_2 &= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (21)$$

Непосредственно значение ядра:

$$K(G_1, G_2) = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 90. \quad (22)$$

Ответ: $K(G_1, G_2) = 90$.

Задание 14

В данном задании опишу часть моей ВКР в бакалавриате, так как она как раз посвящена обучению с подкреплением (если точнее, то глубокому обучению с подкреплением). Решалась задача прогнозирования трех параметров производных финансовых инструментов (на примере фьючерсов): цены, объема и открытого интереса.

Модель содержит некоторое количество агентов — математических моделей игроков срочного рынка, которых характеризует неизменная в течение процесса моделирования стратегия (пара функций (ϕ_k, f_k) , где k — номер агента), в соответствии с ней агент выставляет заявки, и изменяющееся внутреннее состояние (на t -м шаге модельного времени вектор внутреннего состояния выглядит так: $s_k(t) = (m_k(t), z_k(t))$, где k — номер агента, $m_k(t)$ — остаток денег у k -го агента к моменту начала t -го шага времени, $z_k(t)$ — зависящие от конкретной стратегии агента значения).

Средой является абстракция ранка (стакан, модель клирингового центра и пр.).

На каждом t -м шаге модельного времени k -й агент (для всех k) может разместить некоторое количество $n_k^+(t)$ заявок на покупку или некоторое количество $n_k^-(t)$ заявок на продажу. Данные количества не могут превысить максимально возможное количество заявок, которые может разместить k -й агент на t -м шаге:

$$n_k^{max}(t) = \left\lfloor \frac{m_k(t)}{c} \right\rfloor, \quad (23)$$

где c — величина, называемая гарантийным обеспечением (для упрощения модели она принята постоянной на протяжении всего времени моделирования).

При помощи функции f_k агент вырабатывает значение готовности $r_k(t) \in [0; 1]$, а далее желаемое количество заявок рассчитывается следующим образом:

- если $r_k(t) \in [-1; 0)$, то: $n_k^-(t) = \lfloor n_k^{max}(t) \cdot |r_k(t)| \rfloor$, $n_k^+(t) = 0$;
- если $r_k(t) \in (0; 1]$, то: $n_k^+(t) = \lfloor n_k^{max}(t) \cdot r_k(t) \rfloor$, $n_k^-(t) = 0$;
- если $r_k(t) = 0$, то агент выходит из рынка.

Цена в заявке формируется следующим образом: $p_k(t) = \lfloor \hat{p}(t-1)(1 + \omega r_k(t)) \rfloor$, где $\hat{p}(t-1)$ — смоделированная (выход модели) на шаге $t-1$ цена, $\omega \in (0, 1]$ — неизменный в течение моделирования параметр модели.

При этом в действительности на t -м шаге k -агент размещает следующее количество заявок (заметим, что оно не всегда равно желаемому, чтобы учесть уже размещенные, но еще не закрытые):

$$n_k(t) = \text{sgn}(\xi_k(t)) \min(n_k^{max}(t), \xi_k(t)), \quad (24)$$

где $\xi_k(t) = |n_k^{max}(t)r_k(t)| - o_k(t) - n_k^+(t) + n_k^-(t)$, $o_k(t)$ — количество действующих на момент начала шага t контрактов для агента k .

На этом описание действий агента не завершается. Перед вычислением значения $r_k(t)$ агент обновляет свою внутреннее состояние при помощи функции ϕ_k на основе предыдущего внутреннего состояния $s_k(t-1)$, смоделированных цены $\hat{p}(t-1)$, объема $\hat{v}(t-1)$ и открытого интереса $\hat{a}(t-1)$, а также вектора параметров модели \mathbf{x}_k (данные параметры как раз и подбираются в ходе обучения модели).

После размещения заявок наступает клиринговая фаза, и вычисляются значения смоделированных цены $\hat{p}(t)$, объема $\hat{v}(t)$ и открытого интереса $\hat{a}(t)$ (функции их вычисления приводить не буду в силу их нетривиальности).

Оптимизируется функция $L(P, V, A, \mathbf{x}) = \sum_t \mathcal{F}(\rho(p_t, \hat{p}(t)), \rho(v_t, \hat{v}(t)), \rho(a_t, \hat{a}(t)))$, где ρ — метрика в \mathbb{R}^2 , \mathcal{F} — функция, которая прямо пропорциональна каждому своему аргументу (например, среднее трех входных значений), P, V, A — исходные временные ряды цен, объемов и открытого интереса (обучающая выборка).

Таким образом, задачей является нахождение:

$$\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} L(P, V, A, \mathbf{x}), \quad (25)$$

где $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_K\|$.

Агенты в модели имеют различные стратегии, основанные на реальном поведении игроков на срочном рынке. Примером, может служить использование индикаторов, например, MACD или полос Боллинджера¹. Данные стратегии определяют вектор параметров $z_k(t)$, хранимых во внутреннем состоянии, а также конкретный вид функций ϕ_k и f_k .

Вознаграждение агента обратно пропорционально значению функции \mathcal{F} на рассматриваемом шаге. При этом если по сравнению с предыдущим шагом была улучшена точность прогнозирования, то величина является положительной, а если точность ухудшилась, то — отрицательной. При этом отдельно рассматривается случай равенства нулю расстояний до обучающих данных: в этом случае вознаграждение фиксированное положительное (использовалось значение 100).

Задача обучения решалась методом градиента стратегии, так как значения состояния фактически ограничений не имеют. Элементы вектора действий (количества размещаемых заявок) хоть и ограничены целочисленными значениями, но было введено допущение в виде трактовки пространства действий как \mathbb{R}^K , где K — количество задействованных агентов. В силу того, что процесс моделирования может продолжаться сколь угодно долго, задача считается непрерывной. Суть метода состоит в нахождении некоторых приближений функций ценности $v_\pi(s)$ (это математическое ожидание дохода при начале работы в состоянии s и следовании стратегии π) и самой стратегии $\pi(a|s)$ (выражающей вероятность принять действие a при нахождении в состоянии s), где через a традиционно для публикаций по обучению с подкреплением обозначается действие. Приближения находятся при помощи параметризации (а параметрами и выступают векторы \mathbf{x}_k).

В качестве «истинной» стратегии была выбрана многомерная гауссова: $\pi(a|s) = \prod_{j=1}^K \mathcal{N}(\mu_j(s), \sigma_j^2(s))$ (это предположение). Для решения был выбран метод «исполнитель-критик».

При этом следует отметить, что используемые стратегии на основе индикаторов не являются дифференцируемыми по вектору параметров (а это необходимо для метода «исполнитель-критик»), в связи с чем было принято решение аппроксимировать их при помощи нейронной сети (сеть вырабатывает на выходе весь вектор действий). Функция ценности состояния также аппроксимируется нейронной сетью. Следует отметить, что обучение проходит в два этапа: на первом запускается симуляция, в ходе которой нейронные сети обучаются аппроксимировать параметризованные функции стратегии

¹Подробнее: Кауфман П. Системы и методы биржевой торговли ; Пер. с англ. — М. : Альпина Паблишер, 2017 — 1279 с.

и функцию ценности состояния (параметры являются входами нейронных сетей), то есть устанавливается приближенная зависимость результатов функций от входных данных и параметров модели рынка. На втором же этапе обучения (второй симуляции) происходит подбор параметров самой модели с использованием полученных приближений (которые, несомненно, являются дифференцируемыми по параметрам модели) по методу «исполнитель-критик». Найденные на втором этапе параметры модели считаются оптимальными и определяют оптимальную стратегию (строго говоря, — ее приближение).

Задание 15

:(

Приложение А. Таблицы с перечислением кратчайших путей между вершинами графа из задачи 10

Таблица 4: Пути из вершины 1 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
2	[1, 3, 2]	0/1
3	[1, 3]	0/1
4	[1, 3, 6, 4]	0/1
5	[1, 3, 6, 5]	0/1
6	[1, 3, 6]	0/1
7	[1, 3, 7]	0/1
8	[1, 3, 7, 8]	0/1
9	[1, 3, 9]	0/1
10	[1, 3, 6, 10]	0/1
11	[1, 3, 6, 10, 11]	0/1
12	[1, 3, 9, 13, 12]	0/1
13	[1, 3, 9, 13]	0/1
14	[1, 3, 9, 14]	0/1
15	[1, 3, 9, 13, 15] [1, 3, 9, 14, 15]	0/2
16	[1, 3, 6, 10, 16]	0/1
17	[1, 3, 9, 13, 15, 18, 17] [1, 3, 9, 14, 15, 18, 17] [1, 3, 9, 14, 19, 18, 17]	3/3
19	[1, 3, 9, 14, 19]	0/1
20	[1, 3, 9, 14, 19, 20]	0/1

Таблица 5: Пути из вершины 2 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
3	[2, 3]	0/1
4	[2, 3, 6, 4]	0/1
5	[2, 3, 6, 5]	0/1
6	[2, 3, 6]	0/1
7	[2, 3, 7]	0/1
8	[2, 3, 7, 8]	0/1
9	[2, 3, 9]	0/1
10	[2, 3, 6, 10]	0/1
11	[2, 3, 6, 10, 11]	0/1
12	[2, 3, 9, 13, 12]	0/1
13	[2, 3, 9, 13]	0/1
14	[2, 3, 9, 14]	0/1
15	[2, 3, 9, 13, 15] [2, 3, 9, 14, 15]	0/2
16	[2, 3, 6, 10, 16]	0/1
17	[2, 3, 9, 13, 15, 18, 17] [2, 3, 9, 14, 15, 18, 17] [2, 3, 9, 14, 19, 18, 17]	3/3
19	[2, 3, 9, 14, 19]	0/1
20	[2, 3, 9, 14, 19, 20]	0/1

Таблица 6: Пути из вершины 3 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
4	[3, 6, 4]	0/1
5	[3, 6, 5]	0/1
6	[3, 6]	0/1
7	[3, 7]	0/1
8	[3, 7, 8]	0/1
9	[3, 9]	0/1
10	[3, 6, 10]	0/1
11	[3, 6, 10, 11]	0/1
12	[3, 9, 13, 12]	0/1
13	[3, 9, 13]	0/1
14	[3, 9, 14]	0/1
15	[3, 9, 13, 15] [3, 9, 14, 15]	0/2
16	[3, 6, 10, 16]	0/1
17	[3, 9, 13, 15, 18, 17] [3, 9, 14, 15, 18, 17] [3, 9, 14, 19, 18, 17]	3/3
19	[3, 9, 14, 19]	0/1
20	[3, 9, 14, 19, 20]	0/1

Таблица 7: Пути из вершины 4 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
5	[4, 6, 5]	0/1
6	[4, 6]	0/1
7	[4, 6, 3, 7] [4, 6, 9, 7]	0/2
8	[4, 6, 3, 7, 8] [4, 6, 9, 7, 8]	0/2
9	[4, 6, 9]	0/1
10	[4, 6, 10]	0/1
11	[4, 6, 10, 11]	0/1
12	[4, 6, 9, 13, 12]	0/1
13	[4, 6, 9, 13]	0/1
14	[4, 6, 9, 14] [4, 6, 10, 14]	0/2
15	[4, 6, 9, 13, 15] [4, 6, 9, 14, 15] [4, 6, 10, 14, 15] [4, 6, 10, 16, 15]	0/4
16	[4, 6, 10, 16]	0/1
17	[4, 6, 9, 13, 15, 18, 17] [4, 6, 9, 14, 15, 18, 17] [4, 6, 10, 14, 15, 18, 17] [4, 6, 10, 16, 15, 18, 17] [4, 6, 9, 14, 19, 18, 17] [4, 6, 10, 14, 19, 18, 17] [4, 6, 10, 16, 19, 18, 17]	7/7
19	[4, 6, 9, 14, 19] [4, 6, 10, 14, 19] [4, 6, 10, 16, 19]	0/3
20	[4, 6, 9, 14, 19, 20] [4, 6, 10, 14, 19, 20] [4, 6, 10, 16, 19, 20]	0/3

Таблица 8: Пути из вершины 5 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
6	[5, 6]	0/1
7	[5, 6, 3, 7] [5, 6, 9, 7]	0/2
8	[5, 6, 3, 7, 8] [5, 6, 9, 7, 8]	0/2
9	[5, 6, 9]	0/1
10	[5, 6, 10]	0/1
11	[5, 6, 10, 11]	0/1
12	[5, 6, 9, 13, 12]	0/1
13	[5, 6, 9, 13]	0/1
14	[5, 6, 9, 14] [5, 6, 10, 14]	0/2
15	[5, 6, 9, 13, 15] [5, 6, 9, 14, 15] [5, 6, 10, 14, 15] [5, 6, 10, 16, 15]	0/4
16	[5, 6, 10, 16]	0/1
17	[5, 6, 9, 13, 15, 18, 17] [5, 6, 9, 14, 15, 18, 17] [5, 6, 10, 14, 15, 18, 17] [5, 6, 10, 16, 15, 18, 17] [5, 6, 9, 14, 19, 18, 17] [5, 6, 10, 14, 19, 18, 17] [5, 6, 10, 16, 19, 18, 17]	7/7
19	[5, 6, 9, 14, 19] [5, 6, 10, 14, 19] [5, 6, 10, 16, 19]	0/3
20	[5, 6, 9, 14, 19, 20] [5, 6, 10, 14, 19, 20] [5, 6, 10, 16, 19, 20]	0/3

Таблица 9: Пути из вершины 6 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
7	[6, 3, 7] [6, 9, 7]	0/2
8	[6, 3, 7, 8] [6, 9, 7, 8]	0/2
9	[6, 9]	0/1
10	[6, 10]	0/1
11	[6, 10, 11]	0/1
12	[6, 9, 13, 12]	0/1
13	[6, 9, 13]	0/1
14	[6, 9, 14] [6, 10, 14]	0/2
15	[6, 9, 13, 15] [6, 9, 14, 15] [6, 10, 14, 15] [6, 10, 16, 15]	0/4
16	[6, 10, 16]	0/1
17	[6, 9, 13, 15, 18, 17] [6, 9, 14, 15, 18, 17] [6, 10, 14, 15, 18, 17] [6, 10, 16, 15, 18, 17] [6, 9, 14, 19, 18, 17] [6, 10, 14, 19, 18, 17] [6, 10, 16, 19, 18, 17]	7/7
19	[6, 9, 14, 19] [6, 10, 14, 19] [6, 10, 16, 19]	0/3
20	[6, 9, 14, 19, 20] [6, 10, 14, 19, 20] [6, 10, 16, 19, 20]	0/3

Таблица 10: Пути из вершины 7 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
8	[7, 8]	0/1
9	[7, 9]	0/1
10	[7, 3, 6, 10] [7, 9, 6, 10] [7, 9, 14, 10]	0/3
11	[7, 3, 6, 10, 11] [7, 9, 6, 10, 11] [7, 9, 14, 10, 11]	0/3
12	[7, 9, 13, 12]	0/1
13	[7, 9, 13]	0/1
14	[7, 9, 14]	0/1
15	[7, 9, 13, 15] [7, 9, 14, 15]	0/2
16	[7, 3, 6, 10, 16] [7, 9, 6, 10, 16] [7, 9, 14, 10, 16] [7, 9, 13, 15, 16] [7, 9, 14, 15, 16] [7, 9, 14, 19, 16]	0/6
17	[7, 9, 13, 15, 18, 17] [7, 9, 14, 15, 18, 17] [7, 9, 14, 19, 18, 17]	3/3
19	[7, 9, 14, 19]	0/1
20	[7, 9, 14, 19, 20]	0/1

Таблица 11: Пути из вершины 8 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
9	[8, 7, 9]	0/1
10	[8, 7, 3, 6, 10] [8, 7, 9, 6, 10] [8, 7, 9, 14, 10]	0/3
11	[8, 7, 3, 6, 10, 11] [8, 7, 9, 6, 10, 11] [8, 7, 9, 14, 10, 11]	0/3
12	[8, 7, 9, 13, 12]	0/1
13	[8, 7, 9, 13]	0/1
14	[8, 7, 9, 14]	0/1
15	[8, 7, 9, 13, 15] [8, 7, 9, 14, 15]	0/2
16	[8, 7, 3, 6, 10, 16] [8, 7, 9, 6, 10, 16] [8, 7, 9, 14, 10, 16] [8, 7, 9, 13, 15, 16] [8, 7, 9, 14, 15, 16] [8, 7, 9, 14, 19, 16]	0/6
17	[8, 7, 9, 13, 15, 18, 17] [8, 7, 9, 14, 15, 18, 17] [8, 7, 9, 14, 19, 18, 17]	3/3
19	[8, 7, 9, 14, 19]	0/1
20	[8, 7, 9, 14, 19, 20]	0/1

Таблица 12: Пути из вершины 9 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
10	[9, 6, 10] [9, 14, 10]	0/2
11	[9, 6, 10, 11] [9, 14, 10, 11]	0/2
12	[9, 13, 12]	0/1
13	[9, 13]	0/1
14	[9, 14]	0/1
15	[9, 13, 15] [9, 14, 15]	0/2
16	[9, 6, 10, 16] [9, 14, 10, 16] [9, 13, 15, 16] [9, 14, 15, 16] [9, 14, 19, 16]	0/5
17	[9, 13, 15, 18, 17] [9, 14, 15, 18, 17] [9, 14, 19, 18, 17]	3/3
19	[9, 14, 19]	0/1
20	[9, 14, 19, 20]	0/1

Таблица 13: Пути из вершины 10 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
11	[10, 11]	0/1
12	[10, 6, 9, 13, 12] [10, 14, 9, 13, 12] [10, 14, 15, 13, 12] [10, 16, 15, 13, 12]	0/4
13	[10, 6, 9, 13] [10, 14, 9, 13] [10, 14, 15, 13] [10, 16, 15, 13]	0/4
14	[10, 14]	0/1
15	[10, 14, 15] [10, 16, 15]	0/2
16	[10, 16]	0/1
17	[10, 14, 15, 18, 17] [10, 16, 15, 18, 17] [10, 14, 19, 18, 17] [10, 16, 19, 18, 17]	4/4
19	[10, 14, 19] [10, 16, 19]	0/2
20	[10, 14, 19, 20] [10, 16, 19, 20]	0/2

Таблица 14: Пути из вершины 11 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
12	[11, 10, 6, 9, 13, 12] [11, 10, 14, 9, 13, 12] [11, 10, 14, 15, 13, 12] [11, 10, 16, 15, 13, 12]	0/4
13	[11, 10, 6, 9, 13] [11, 10, 14, 9, 13] [11, 10, 14, 15, 13] [11, 10, 16, 15, 13]	0/4
14	[11, 10, 14]	0/1
15	[11, 10, 14, 15] [11, 10, 16, 15]	0/2
16	[11, 10, 16]	0/1
17	[11, 10, 14, 15, 18, 17] [11, 10, 16, 15, 18, 17] [11, 10, 14, 19, 18, 17] [11, 10, 16, 19, 18, 17]	4/4
19	[11, 10, 14, 19] [11, 10, 16, 19]	0/2
20	[11, 10, 14, 19, 20] [11, 10, 16, 19, 20]	0/2

Таблица 15: Пути из вершины 12 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
13	[12, 13]	0/1
14	[12, 13, 9, 14] [12, 13, 15, 14]	0/2
15	[12, 13, 15]	0/1
16	[12, 13, 15, 16]	0/1
17	[12, 13, 15, 18, 17]	1/1
19	[12, 13, 9, 14, 19] [12, 13, 15, 14, 19] [12, 13, 15, 16, 19] [12, 13, 15, 18, 19]	1/4
20	[12, 13, 9, 14, 19, 20] [12, 13, 15, 14, 19, 20] [12, 13, 15, 16, 19, 20] [12, 13, 15, 18, 19, 20]	1/4

Таблица 16: Пути из вершины 13 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
14	[13, 9, 14] [13, 15, 14]	0/2
15	[13, 15]	0/1
16	[13, 15, 16]	0/1
17	[13, 15, 18, 17]	1/1
19	[13, 9, 14, 19] [13, 15, 14, 19] [13, 15, 16, 19] [13, 15, 18, 19]	1/4
20	[13, 9, 14, 19, 20] [13, 15, 14, 19, 20] [13, 15, 16, 19, 20] [13, 15, 18, 19, 20]	1/4

Таблица 17: Пути из вершины 14 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
15	[14, 15]	0/1
16	[14, 10, 16] [14, 15, 16] [14, 19, 16]	0/3
17	[14, 15, 18, 17] [14, 19, 18, 17]	2/2
19	[14, 19]	0/1
20	[14, 19, 20]	0/1

Таблица 18: Пути из вершины 15 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
16	[15, 16]	0/1
17	[15, 18, 17]	1/1
19	[15, 14, 19] [15, 16, 19] [15, 18, 19]	1/3
20	[15, 14, 19, 20] [15, 16, 19, 20] [15, 18, 19, 20]	1/3

Таблица 19: Пути из вершины 16 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
17	[16, 15, 18, 17] [16, 19, 18, 17]	2/2
19	[16, 19]	0/1
20	[16, 19, 20]	0/1

Таблица 20: Пути из вершины 17 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
19	[17, 18, 19]	1/1
20	[17, 18, 19, 20]	1/1

Таблица 21: Пути из вершины 19 в другие вершины.

Целевая вершина	Кратчайшие пути	Доля путей через 18
20	[19, 20]	0/1

Приложение Б. Графлеты, содержащие исследуемую вершину, для задачи 11

В данном приложении представлены все 195 графлетов, содержащих исследуемую вершину $u = 23$, которая отмечена на изображениях салатовым цветом.

