



1^η ΑΣΚΗΣΗ

1.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 13x + 1$.



α) Να αποδειχθεί ότι η f έχει μια μοναδική ρίζα ξ στο $[0, 1]$.



β) Να εφαρμόσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Εσφαλμένης Θέσης για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_2 της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$.



γ) Να μετασχηματίσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ σε μια αντίστοιχη μορφή σταθερού σημείου, η οποία να συγκλίνει καθολικά. Στη συνέχεια να εκτελέσετε για $x_0 = 1$ δύο επαναλήψεις της μεθόδου σταθερού σημείου.

Για τους υπολογισμούς σας στα β) και γ) χρησιμοποιήστε ακρίβεια με έξι δεκαδικά ψηφία.



δ) Να βρεθεί το θεωρητικό κάτω φράγμα του αριθμού n των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη προσέγγιση του σταθερού σημείου ξ στο ερώτημα γ) με

$[a, b] = [0, 1]$, $x_0 = 0.2$ και επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon = \frac{1}{2} 10^{-6}$, έτσι ώστε

$$\frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon.$$

1.2 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2x(1 - 2x)$, η οποία έχει τα σταθερά σημεία $\xi = 0$ και $\xi = 1/4$.



α) Να αιτιολογηθεί γιατί η μέθοδος του σταθερού σημείου δεν συγκλίνει στο $\xi = 0$ με x_0 πλησίον του μηδενός;



β) Να αιτιολογηθεί γιατί η μέθοδος του σταθερού σημείου, συγκλίνει στο $\xi = 1/4$, λαμβάνοντας $x_0 \in (0.2, 0.3)$. Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου;



γ) Να εκτελεστούν τρεις επαναλήψεις της μεθόδου σταθερού σημείου λαμβάνοντας $x_0 = 0.2$.

1.3 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1} = (2\lambda - 1)x_n + 3x_n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ανωτέρω μέθοδος σταθερού σημείου συγκλίνει τετραγωνικά.



1.4 α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^3(x + 1)$, τότε αν υποθέσουμε ότι η μέθοδος **N-R** συγκλίνει στη ρίζα $\xi = 1$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε να βρεθεί η τάξη σύγκλισής της. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Στη συνέχεια να επιλέξετε και να εφαρμόσετε μια βελτιωμένη μορφή της μεθόδου **N-R** για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = 1$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = 0.5$.

γ) Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της νέας μορφής της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Προαιρετικό (Υλοποίηση αλγορίθμου-Εφαρμογές)

1.5 Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις

α) $f_1(x) = (x-1)^3(x+1)$

β) $f_2(x) = e^x - 2x - 2$

1.5.1 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα προγραμματισμού C την ακόλουθη επαναληπτική μέθοδο: **Συνδυασμός Διχοτόμησης και Newton-Raphson(NR)** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής x_n μιας πραγματικής ρίζας ξ . Λάβετε ως αρχικά διαστήματα $[a, b]$ τέτοια ώστε να περιέχεται σε αυτά μόνο μία ρίζα ξ . Η μέθοδος NR να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τη μέθοδο της Διχοτόμησης ως ακολούθως:

για τη μέθοδο Διχοτόμησης να χρησιμοποιηθεί $\varepsilon_\Delta = \frac{1}{2}10^{-2}$, ενώ για τη μέθοδο NR

$\varepsilon_{NR} = \frac{1}{2}10^{-6}$. Ως αρχική τιμή x_0 της NR να λαμβάνεται το μέσο του τελευταίου διαστήματος της Διχοτόμησης.

1.5.2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αποτελεσμάτων:

Πίνακας 1.

Συνδυασμός Διχοτόμησης και NR				
	$[a, b]$	x_0	x_n	n
f_1				
f_2				

1.5.3 Να μελετήσετε πειραματικά την ταχύτητα σύγκλισης της ανωτέρω επαναληπτικής μεθόδου. Η μελέτη αυτή να γίνει με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p}, \text{ αν η ρίζα είναι γνωστή, διαφορετικά της } \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^p}, \quad p = 1, 2.$$

Να συμπληρώσετε για κάθε περίπτωση του Πίνακα 1 ένα πίνακα αποτελεσμάτων της ακόλουθης μορφής:

Πίνακας 2.

Μελέτη Σύγκλισης: Περίπτωση f_1 (ή f_2)		
n	Απόλυτο Σφάλμα $ \varepsilon_n $	$\frac{ \varepsilon_{n+1} }{ \varepsilon_n ^p}$ (ή $\frac{ x_{n+1} - x_n }{ x_n - x_{n-1} ^p}$)
0	.	.
1	.	.
2	.	.
3	.	.
4	.	.
\vdots	\vdots	\vdots

- 1.5.4 Να δικαιολογηθεί, με βάση τη θεωρία, η συμπεριφορά της σύγκλισης σε κάθε περίπτωση. Να σχολιαστεί τόσο η σύγκλιση όσο και η τάξη σύγκλισης.

Οδηγίες για την παράδοση της 1ης Άσκησης

Προσοχή : Η άσκηση είναι **ατομική** (δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης :

Η **1η Άσκηση** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά στην **e-class** του μαθήματος μέχρι και τη Παρασκευή 20/11/2016 και ώρα 22:30.

Για το **Υποχρεωτικό** τμήμα της 1^{ης} Άσκησης (δηλ. τα ερωτήματα 1.1 μέχρι και 1.4) θα πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο) με όνομα **ASK1_XXXXXXX.zip**, όπου XXXXXXX τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχεται ένα μόνο **αρχείο κειμένου** (.doc σε word ή σε pdf), το οποίο θα περιέχει τις απαντήσεις σας..

Υπόδειξη

Για το **Προαιρετικό** τμήμα της 1^{ης} Άσκησης (δηλ. το ερώτημα 1.5) θα πρέπει επιπλέον να συμπεριλάβετε στον Φάκελο **ASK1_XXXXXXX.zip** τα εξής:

1. το αρχείο με όνομα **ask1_1.5_NR_XXXXXXX** που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source) κώδικα (σε C ή C++) για την μέθοδο “Συνδυασμός Διχοτόμησης και NR “ και
2. ένα αρχείο κειμένου με όνομα **ask1_1.5_apotel_XXXXXXX** που θα περιέχει τους πίνακες αποτελεσμάτων, τα σχόλια και τα συμπεράσματά σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ

- 1. Η Άσκηση είναι **ατομική** και σε περίπτωση αντιγραφής δεν βαθμολογείται.
- 2. Η Άσκηση θα πρέπει να λυθεί με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.
- 3. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση δεν θα γίνεται δεκτή.
- 4. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στο e-class) του μαθήματος και να ενημερώνεστε με το σχετικό υλικό(Ασκήσεις, Ανακοινώσεις, Βαθμολογίες κ.α.).