ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1.12.2015

2η ΑΣΚΗΣΗ

2.1 Άμεσοι μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων.

2.1.1 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθεί ο A^{-1} με τη μέθοδο απαλοιφής

(i) Gauss με μερική οδήγηση

(ii) Jordan με μερική οδήγηση

β) Να υπολογιστεί ο **αριθμός συνθήκης** $\kappa(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$.

2.1.2 Δίνεται το ακόλουθο τριδιαγώνιο $n \times n$ γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} d_1 & f_1 & & & & & & & \\ e_2 & d_2 & f_2 & & & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & e_k & d_k & f_k & & & & \\ & & & e_{k+1} & d_{k+1} & f_{k+1} & & & \\ & & & & e_{k+2} & d_{k+2} & f_{k+2} & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & & & e_{n-1} & d_{n-1} & f_{n-1} \\ & & & & & & & e_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \\ g_{k+1} \\ g_{k+2} \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (\Sigma1)$$

α) Αν $n = 2k$, k δεδομένος θετικός ακέραιος αριθμός ≥ 2, να βρεθούν οι τύποι για τον υπολογισμό των l_i, r_i και s_i (συναρτήσει των e_i, d_i, f_i και g_i) για το μετασχηματισμό του συστήματος (Σ1) στο ακόλουθο ισοδύναμο :

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & r_2 & & & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 0 & 1 & r_k & & & & \\ & & & l_{k+1} & 1 & 0 & & & \\ & & & & l_{k+2} & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & & & l_{n-1} & 1 & 0 \\ & & & & & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \\ s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{bmatrix} \qquad (\Sigma2)$$

β) Να δοθεί αλγόριθμος (σε μορφή ψευδοκώδικα) για την υλοποίηση του ανωτέρω μετασχηματισμού (Σ1) $\Longrightarrow$ (Σ2).

2.2 Επαναληπτικές μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων.

2.2.1 Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $\begin{bmatrix} 4 & k & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & k & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k \in R$

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων των επαναληπτικών μεθόδων **(i) Jacobi(J)** και **(ii) Gauss-Seidel (GS)** για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.

β) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη (διάστημα τιμών του k) έτσι ώστε η ε.μ. **GS** να συγκλίνει.

γ) Για $k = 1$ και $\mathbf{x}^{(0)} = (-4, 0, 4)^T$ να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{x}^{(2)}$ της λύσης του ανωτέρω γραμμικού συστήματος με την ε.μ. **(i) J** και **(ii) GS**.

2.2.2 Να βρεθούν οι τύποι για την αριθμητική επίλυση του γραμμικού συστήματος (Σ2) στο 2.1.2α με την επαναληπτική μέθοδο **SOR** και στην συνέχεια να δοθεί αλγόριθμος (σε μορφή ψευδοκώδικα) για την επίλυσή του, λαμβάνοντας υπόψη την *ειδική δομή* του πίνακα.

Προαιρετικό (Υλοποίηση Αλγορίθμου - Αποτελέσματα)

Προσοχή: Τα ακόλουθα ερωτήματα είναι προαιρετικά, δηλαδή θα ληφθούν υπόψη θετικά στην τελική βαθμολογία χωρίς αυτό να σημαίνει κάποια μείωση για όσους δεν απαντήσουν σε αυτά.

2.3 Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος και υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πίνακα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n},\mathbf{n}}$, $\mathbf{x} = (x_i)$, $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, όπου ο $\mathbf{A}$ είναι μεγάλος και πυκνός πίνακας.

2.3.1 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα C (ή C++) τον αλγόριθμο της μεθόδου **Jordan με μερική οδήγηση** για την επίλυση του γραμμικού συστήματος και να εκτιμηθεί το σχετικό σφάλμα της λύσης $\mathbf{x}$ με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

α) $\dfrac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$, όπου $||\delta\mathbf{x}||_\infty = ||\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}||_\infty$ το απόλυτο σφάλμα

β) $\dfrac{||\delta\mathbf{r}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$, όπου $||\delta\mathbf{r}||_\infty = ||\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}||_\infty$ το υπόλοιπο

και $\hat{\mathbf{x}}$: η υπολογιζόμενη λύση από την εφαρμογή του αλγορίθμου.

Υπόδειξη : Για πειραματικούς λόγους συνήθως δίνεται το διάνυσμα $\mathbf{x}$ (ως προκαθοριζόμενη λύση) και στη συνέχεια υπολογίζεται το $\mathbf{b} = \mathbf{A} * \mathbf{x}$. (Για παράδειγμα, αν $\mathbf{x} = (1, 1, \cdots, 1)^T$, τότε $\mathbf{b}_i = (\mathbf{A} * \mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$).

2.3.2 Με κατάλληλη τροποποίηση του προγράμματος που χρησιμοποιήσατε στο 2.3.1

α) να υπολογίσετε τον αντίστροφο $\mathbf{A}^{-1}$ του πίνακα $\mathbf{A}$

β) να υπολογίσετε τον **αριθμό συνθήκης**: $\kappa(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_\infty ||\mathbf{A}^{-1}||_\infty$.

Τα προγραμματά σας σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις πρέπει να δίνουν στο χρήστη τις ακόλουθες δυνατότητες επιλογής :

(i) να εισάγει τα απαραίτητα δεδομένα

(ii) να δημιουργεί ένα συγκεκριμένο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια τύπων)

(iii) να δημιουργεί ένα τυχαίο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια της συνάρτησης rand για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών)

2.3.3 Στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας (βλ. παρακάτω πίνακα 2.1). Συμπεράσματα – Αιτιολογήσεις.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1 : $\mathbf{n = 4}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

Για την πειραματική επαλήθευση στο **2.3.1** θεωρήστε ότι η λύση του γρ. συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ -2,\ 2,\ -1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **2.3.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Εφαρμογή 2 : $\mathbf{n = 8}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & 3 & 10 & -3 & 3 & 3 & -4 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 3 & -12 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -13 & -1 & 1 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 12 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 3 & -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

Για την πειραματική επαλήθευση στο **2.3.1** θεωρήστε ότι η λύση του γρ. συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (-1,\ 1,\ -1,\ 1\ -1,\ 1\ -1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **2.3.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Εφαρμογή 3 : $\mathbf{n = 10}$, $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \dfrac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n$

όπου προκαθορίζετε εκ των προτέρων τη λύση (παρόμοια με την εφαρμογή 2).

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **2.3.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Αποτελέσματα

Πίνακας 2.1

Επίλυση του $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ και υπολογισμός του A^{-1} (μέθοδος Jordan)			
Εφαρμογή	**Σχ. Σφάλμα** $\dfrac{\|\|\delta\mathbf{x}\|\|_\infty}{\|\|\mathbf{x}\|\|_\infty}$	**Σχ. Υπόλοιπο** $\dfrac{\|\|\delta\mathbf{r}\|\|_\infty}{\|\|\mathbf{x}\|\|_\infty}$	**Αριθμός Συνθήκης** $\kappa(A)$
1			
2			
3			

Οδηγίες για την παράδοση της 2ης Άσκησης

.

Προσοχή : Η άσκηση είναι **ατομική**(δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης:

Η **2η Άσκηση** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά στην **e-class** του μαθήματος μέχρι και τη **Δευτέρα 21/12/2015** και **ώρα 22:30**.

Για το **Υποχρεωτικό** τμήμα της 2ης Άσκησης (δηλ. τα ερωτήματα 2.1 και 2.2) θα πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο) με όνομα **ASK2_xxxxxxx.zip**, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχεται ένα μόνο **αρχείο κειμένου**(.doc σε word ή σε pdf), το οποίο θα περιέχει τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη

Για το **Προαιρετικό** τμήμα της 2ης Άσκησης (δηλ. το ερώτημα 2.3) θα πρέπει επιπλέον να συμπεριλάβετε στον Φάκελο **ASK2_xxxxxxx.zip** τα ακόλουθα:

1. το αρχείο με όνομα **ask2_2.3.1_JORDAN_xxxxxxx** που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source)κώδικα (σε C ή C++) για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο Jordan,

2. το αρχείο με όνομα **ask2_2.3.2_TropJORDAN_xxxxxxx** που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source)κώδικα (σε C ή C++) για την εύρεση του αντιστρόφου με τη μέθοδο Jordan και

3. ένα αρχείο κειμένου με όνομα **ask2_2.3_apotel_xxxxxxx** που θα περιέχει τους πίνακες αποτελεσμάτων, τα σχόλια και τα συμπεράσματά σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ

1. Η Άσκηση είναι ατομική και σε περίπτωση αντιγραφής δεν βαθμολογείται.

2. Η Άσκηση θα πρέπει να λυθεί με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.

3. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση δεν θα γίνεται δεκτή.

4. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στην e-class) του μαθήματος και να ενημερώνεστε με το σχετικό υλικό(Ασκήσεις, Ανακοινώσεις, Βαθμολογίες κ.α.).