ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

28.12.2015

3η ΑΣΚΗΣΗ

3.1 Δίνονται στον παρακάτω πίνακα τα ζεύγη τιμών $(x_i, f_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots n$ μιας συνάρτησης f $\left(f(x) = \dfrac{36}{x+1}\right)$ όπου $x_i \in [1, 5],\quad f_i = f(x_i)$.

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
f_i	18	12	9	36/5	6

α) Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή της $f(2.5)$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παρεμβολής με προς τα εμπρός διαφορές του Newton

(i) στα σημεία $(x_i,\ f_i),\ i = 0, 1, 2, 3$

(ii) σε όλα τα σημεία.

β) Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή της $f(2.5)$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παρεμβολής του Newton με διηρημένες διαφορές

(i) στα σημεία $(x_i,\ f_i),\ i = 0, 2, 3$

(ii) στα σημεία $(x_i,\ f_i),\ i = 0, 2, 3, 4$.

γ) Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις στα α) και β) να βρεθούν

(i) το απόλυτο σφάλμα

(ii) το άνω φράγμα του απολύτου σφάλματος με βάση τη θεωρία.

δ) Συγκρίνατε σε κάθε περίπτωση το άνω φράγμα του απολύτου σφάλματος με το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα. Σχολιάσατε τα συμπεράσματά σας.

3.2 Είναι γνωστό ότι ένα ορθογώνιο σύνολο πολυωνύμων $\phi_k(x),\ k = 0, 1, \ldots, n$ για κάθε $x \in [a,\ b]$ ως προς μιά συνάρτηση βάρους $w(x)$, μπορεί να κατασκευαστεί με την χρήση του ακόλουθου αναδρομικού τύπου (Διαδικασία Gram-Schmidt):

$$\phi_0(x) = 1,$$
$$\phi_1(x) = x - a_0, \qquad \text{όπου} \qquad a_0 = \frac{(x\phi_0,\ \phi_0)}{(\phi_0,\ \phi_0)}$$

και

$$\phi_{k+1}(x) = (x - a_k)\phi_k(x) - \beta_k\phi_{k-1}(x), \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots n-1$$

$$\text{όπου} \qquad a_k = \frac{(x\phi_k,\ \phi_k)}{(\phi_k,\ \phi_k)} \qquad \text{και} \qquad \beta_k = \frac{(x\phi_k,\ \phi_{k-1})}{(\phi_{k-1},\ \phi_{k-1})}.$$

Με την χρήση της ανωτέρω διαδικασίας Gram-Schmidt να βρεθεί το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $p_2(x)$ που προσεγγίζει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων την

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 - 2x + 10$$

στα σημεία $(x_i, f_i),\ i = 1, 2, \ldots, 6$ με

$$x_i = 10 + \frac{i-1}{5}, \quad f_i = f(x_i) \quad \text{και} \quad w(x) = 1.$$

3.3 Χρησιμοποιώντας τα 4 πρώτα σημεία $(x_i,\ f_i),\ i = 0, 1, 2, 3$ που δίνονται στον πίνακα στο ερώτημα **3.1**

α) να βρεθούν οι προσεγγιστικές τιμές των παραγώγων : **(i)** $f^{'}(2)$, **(ii)** $f^{'}(2.5)$, **(iii)** $f^{''}(2)$ και **(iv)** $f^{''}(2.5)$

β) να βρεθεί το αριθμητικό σφάλμα στα **(i)**, **(ii)**, **(iii)** και **(iv)**.

3.4 Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_0^2 \frac{1}{x+4} dx$ με την εφαρμογή σε τέσσερα υποδιαστήματα ($n = 4$)

α) **(i)** του σύνθετου κανόνα του Τραπεζίου

(ii) του σύνθετου κανόνα του Simpson

(iii) του σύνθετου κανόνα του Μέσου

(iv) να βρεθεί το αριθμητικό σφάλμα στα **(i)**, **(ii)** και **(iii)**.

β) Για τον καθένα από τους ανωτέρω σύνθετους κανόνες να βρεθεί η μικρότερη τιμή του n προκειμένου η προσέγγιση της τιμής του I να έχει ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

3.5 Δίνεται ο ακόλουθος τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{2} f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του συντελεστή c_1 και των σημείων $x_0,\ x_1$ έτσι ώστε ο ανωτέρω τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης να είναι όσο το δυνατόν πιό ακριβής.

β) Να βρεθεί το σφάλμα του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης στο **α)**.

γ) Ποιός είναι ο βαθμός ακρίβειας του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης στο **α)**;

Οδηγίες για την παράδοση της 3ης Άσκησης

Προσοχή : Η Άσκηση είναι ***ατομική*** *(δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).*

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης:

Η **3η Άσκηση** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά στην e_class του μαθήματος μέχρι και την **Πέμπτη 21.1.2016** και **ώρα 22:30**.

Για την υποβολή στην **e_class** πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο) με όνομα **ASK3_eponymo_xxxxxxx.zip**, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό πρέπει να περιέχεται ένα μόνο αρχείο με όνομα **ask3_apanthseis_xxxxxxx** (.pdf), το οποίο θα περιέχει τις απαντήσεις σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι απαραίτητο στην αρχή του αρχείου σας να αναγράφετε το ονοματεπώνυμό σας και τον ΑΜ.

1. Η Άσκηση είναι **ατομική** και σε περίπτωση αντιγραφής δεν βαθμολογείται.

2. Η Άσκηση θα πρέπει να λύνεται με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.

3. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση δεν θα γίνεται δεκτή.