# Introdução ao Método Simplex Gráfico

Prof. Dorirley Rodrigo Alves
dorirley@pucminas.br

Departamento de Administração
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PESQUISA OPERACIONAL
(2014)

## Problema

Um Gerente de uma Refinaria de Petróleo deseja maximizar sua produção de Gasolina Comum e Aditivada a partir do consumo máximo de suas principais matérias-primas: (a) Querosene; (b) Aditivo e (c) Solvente. As composições necessárias para a produção dos dois produtos juntamente com as disponibilidades no estoque e seus ganhos financeiros são apresentados na tabela abaixo:

| | Gas. Comum | Gas. Aditivada | Disponibilidade |
|---|---|---|---|
| Querosene | 8 | 2 | 18 |
| Aditivo | 1 | 1 | 6 |
| Solvente | 2 | 2 | 28 |
| Lucro | R$1,00 | R$2,00 | |

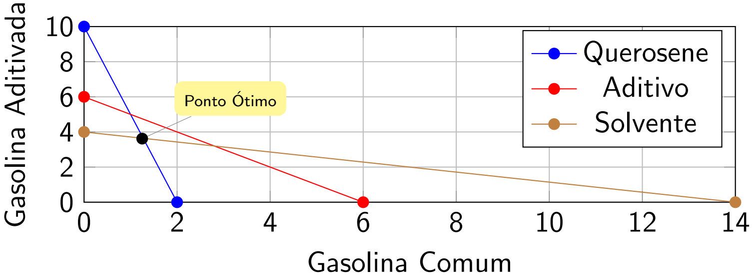
## Modelo Matemático

$$\begin{aligned} FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} &= x_1 + 2x_2 \\ R_1 \text{ (Querosene):} &\quad 8x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ R_2 \text{ (Aditivo):} &\quad x_1 + x_2 \leq 6 \\ R_3 \text{ (Solvente):} &\quad 2x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ &\quad x_1; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## Resultado

$$\begin{aligned} (1,07) + 2(3,69) &= 8,46 \\ 8(1,07) + 2(3,69) &= 16 \\ (1,07) + (3,69) &= 4,77 \\ 2(1,07) + 7(3,69) &= 28 \\ (1,07); (3,69) &\geq 0 \end{aligned}$$

## Representação Gráfica



| **Modelo Matemático** | | **Resultado** |
|---|---|---|
| $FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} =$ | $x_1 + 2x_2$ | $(1,07) + 2(3,69) = 8,46$ |
| $R_1$ (Querosene): | $8x_1 + 2x_2 \leq 16$ | $8(1,07) + 2(3,69) = 16$ |
| $R_2$ (Aditivo): | $x_1 + x_2 \leq 6$ | $(1,07) + (3,69) = 4,77$ |
| $R_3$ (Solvente): | $2x_1 + 7x_2 \leq 28$ | $2(1,07) + 7(3,69) = 28$ |
| | $x_1; x_2 \geq 0$ | $(1,07); (3,69) \geq 0$ |

**Uma simples pergunta....**

Mas como faço para saber de fato "o quanto" sobrou na Restrição 2 que representa aditivo?

- De forma a transformar as restrições do problema de PL de inequações em equações, são introduzidas variáveis adicionais;
- Qualquer desigualdade pode ser transformada em igualdade introduzindo variáveis adicionais;
- Essas variáveis adicionais podem ser definidas como Variáveis adicionais de "folga" ou de "excesso"

## Variáveis de Folga

$$8x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \text{equivale} \quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16$$

## Variáveis de Excesso

$$8x_1 + 2x_2 \geq 16 \quad \text{equivale} \quad 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 16$$

## Variáveis de Folga

$$8x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \text{equivale} \quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16$$

## Variáveis de Excesso

$$8x_1 + 2x_2 \geq 16 \quad \text{equivale} \quad 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 16$$

Para o problema proposto, deveremos adicionar apenas variáveis de folga pois todas as restrições são do tipo $\leq$

## Modelo Matemático

$$
\begin{aligned}
FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} &= x_1 + 2x_2 \\
\text{Sujeito a:} & \\
R_1 \text{ (Querosene):} &\quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\
R_2 \text{ (Aditivo):} &\quad x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
R_3 \text{ (Solvente):} &\quad 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\
&\quad x_1 \geq 0 \\
&\quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Para o problema proposto, deveremos adicionar apenas variáveis de folga pois todas as restrições são do tipo $\leq$

## Modelo Matemático

$$
\begin{aligned}
FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} &= x_1 + 2x_2 \\
\text{Sujeito a:} & \\
R_1 \text{ (Querosene):} \quad & 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\
R_2 \text{ (Aditivo):} \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
R_3 \text{ (Solvente):} \quad & 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Quando o número $n$ de variáveis no sistema das equações é maior que o número $m$ das equações, então uma das possíveis soluções pode ser obtida para quando $n - m$ das variáveis arbitrárias for consideradas iguais a zero.

Como neste caso o número de variáveis $n = 5$ e o número de equações $m = 3$, então temos um número elevado de possibilidades de solução:

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

## Combinações

1) $x_1; x_2$ 2) $x_1; x_3$ 3) $x_1; x_4$ 4) $x_1; x_5$ 5) $x_2; x_3$
6) $x_2; x_4$ 7) $x_2; x_5$ 8) $x_3; x_4$ 9) $x_3; x_5$ 10) $x_4; x_5$

Quando o número $n$ de variáveis no sistema das equações é maior que o número $m$ das equações, então uma das possíveis soluções pode ser obtida para quando $n - m$ das variáveis arbitrárias for consideradas iguais a zero.

Como neste caso o número de variáveis $n = 5$ e o número de equações $m = 3$, então temos um número elevado de possibilidades de solução:

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

## Combinações

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) $x_1; x_2$ | 2) $x_1; x_3$ | 3) $x_1; x_4$ | 4) $x_1; x_5$ | 5) $x_2; x_3$ |
| 6) $x_2; x_4$ | 7) $x_2; x_5$ | 8) $x_3; x_4$ | 9) $x_3; x_5$ | 10) $x_4; x_5$ |

Quando o número $n$ de variáveis no sistema das equações é maior que o número $m$ das equações, então uma das possíveis soluções pode ser obtida para quando $n - m$ das variáveis arbitrárias for consideradas iguais a zero.

Como neste caso o número de variáveis $n = 5$ e o número de equações $m = 3$, então temos um número elevado de possibilidades de solução:

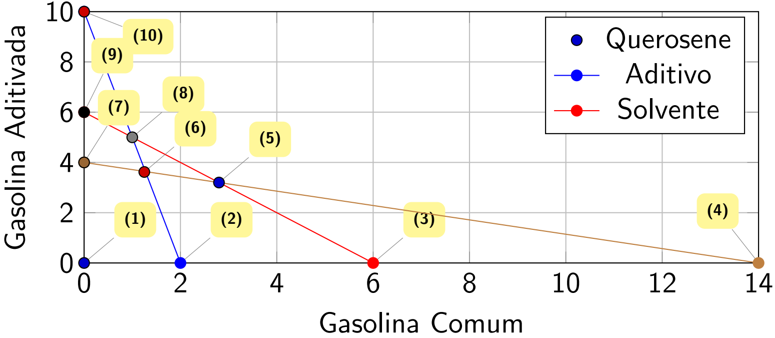
$$C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

## Combinações

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) $x_1; x_2$ | 2) $x_1; x_3$ | 3) $x_1; x_4$ | 4) $x_1; x_5$ | 5) $x_2; x_3$ |
| 6) $x_2; x_4$ | 7) $x_2; x_5$ | 8) $x_3; x_4$ | 9) $x_3; x_5$ | 10) $x_4; x_5$ |

Ou seja, para o modelo matemático apresentado, temos 10 possíveis resultados que podem ser visualizados no gráfico por meio de seus 10 vértices.

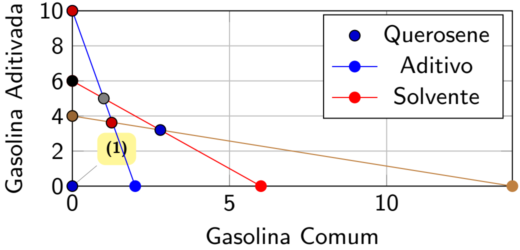
## Representação Gráfica



# Igualando a zero $x_1$ e $x_2$

$$
\begin{aligned}
R_1 \text{ (Querosene)}: &\quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16\\
R_2 \text{ (Aditivo)}: &\quad x_1 + x_2 + x_4 = 6\\
R_3 \text{ (Solvente)}: &\quad 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28\\
&\quad x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

## Representação Gráfica




## Resultado no vértice 1

$$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = 0;$$

$$x_3 = 16;$$

$$x_4 = 6;$$

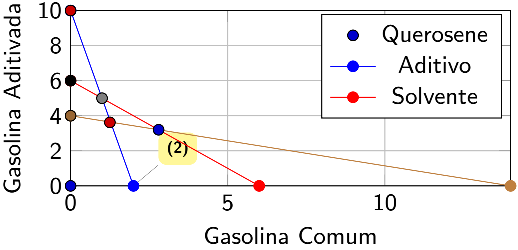
$$x_5 = 28;$$

$$\mathbb{Z} = 0,00$$

# Igualando a zero $x_2$ e $x_3$

$$\begin{aligned} R_1 \text{ (Querosene):} \quad & 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ R_2 \text{ (Aditivo):} \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ R_3 \text{ (Solvente):} \quad & 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\ & x_1; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## Representação Gráfica



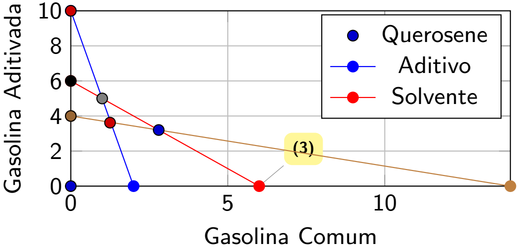

## Resultado no vértice 2

$$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$$
$$x_1 = 2;$$
$$x_2 = 0;$$
$$x_3 = 0;$$
$$x_4 = 4;$$
$$x_5 = 24;$$
$$\mathbb{Z} = 2,00$$

# Igualando a zero $x_2$ e $x_4$

$$
\begin{aligned}
R_1 \text{ (Querosene)}: &\quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16\\
R_2 \text{ (Aditivo)}: &\quad x_1 + x_2 + x_4 = 6\\
R_3 \text{ (Solvente)}: &\quad 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28\\
&\quad x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

## Representação Gráfica




## Resultado no vértice 3

$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$

$x_1 = 6;$

$x_2 = 0;$

$x_3 = -32;$

$x_4 = 0;$

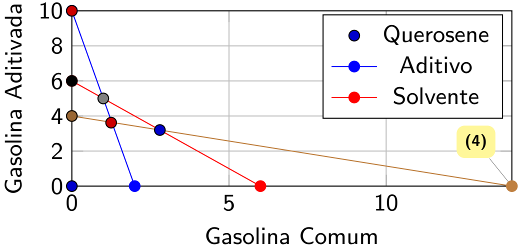
$x_5 = 16;$

$\mathbb{Z} = 6,00$

# Igualando a zero $x_2$ e $x_5$

$$
\begin{aligned}
R_1 \text{ (Querosene):} \quad & 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\
R_2 \text{ (Aditivo):} \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
R_3 \text{ (Solvente):} \quad & 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\
& x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

## Representação Gráfica




## Resultado no vértice 4

$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$

$x_1 = 14;$

$x_2 = 0;$

$x_3 = -96;$

$x_4 = 8;$

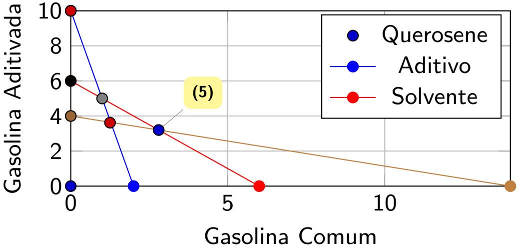
$x_5 = 0;$

$\mathbb{Z} = 14,00$

# Igualando a zero $x_4$ e $x_5$

$$
\begin{aligned}
R_1 \text{ (Querosene):} \quad & 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\
R_2 \text{ (Aditivo):} \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
R_3 \text{ (Solvente):} \quad & 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\
& x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

## Representação Gráfica




## Resultado no vértice 5

$$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 = 2,8;$$

$$x_2 = 3,2;$$

$$x_3 = -12,8;$$

$$x_4 = 0;$$

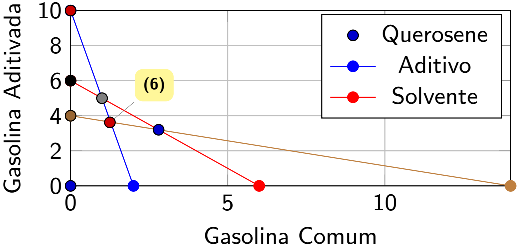
$$x_5 = 0;$$

$$\mathbb{Z} = 9,2$$

# Igualando a zero $x_3$ e $x_5$

$$
\begin{aligned}
R_1 \text{ (Querosene):} &\quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\
R_2 \text{ (Aditivo):} &\quad x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
R_3 \text{ (Solvente):} &\quad 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\
&\quad x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

## Representação Gráfica




## Resultado no vértice 6

$$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 = 1,07;$$

$$x_2 = 3,69;$$

$$x_3 = 0;$$

$$x_4 = 1,23;$$

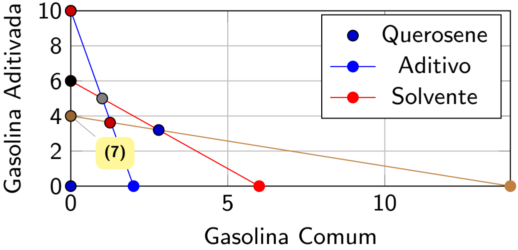
$$x_5 = 0;$$

$$\mathbb{Z} = 8,46$$

# Igualando a zero $x_1$ e $x_5$

$$
\begin{aligned}
R_1 \text{ (Querosene):} \quad & 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\
R_2 \text{ (Aditivo):} \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
R_3 \text{ (Solvente):} \quad & 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\
& x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

## Representação Gráfica



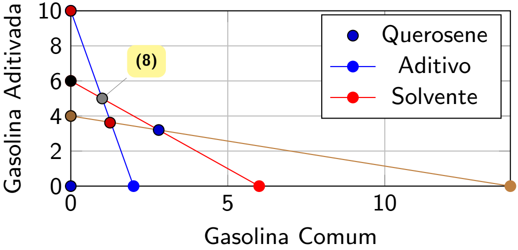

## Resultado no vértice 7

$$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$$
$$x_1 = 0;$$
$$x_2 = 4;$$
$$x_3 = 8;$$
$$x_4 = 2;$$
$$x_5 = 0;$$
$$\mathbb{Z} = 8,0$$

# Igualando a zero $x_3$ e $x_4$

$$\begin{aligned} R_1 \text{ (Querosene)}: &\quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ R_2 \text{ (Aditivo)}: &\quad x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ R_3 \text{ (Solvente)}: &\quad 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\ &\quad x_1; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## Representação Gráfica




## Resultado no vértice 8

$$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 = 0,66;$$

$$x_2 = 5,36;$$

$$x_3 = 0;$$

$$x_4 = 0;$$

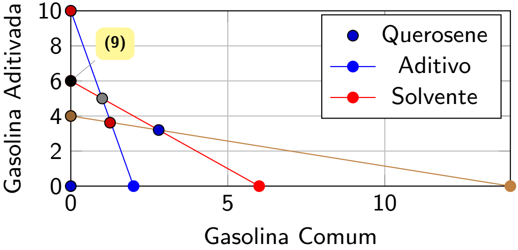
$$x_5 = -10,84;$$

$$\mathbb{Z} = 11,38$$

## Igualando a zero $x_1$ e $x_4$

$$
\begin{aligned}
R_1 \text{ (Querosene)}: &\quad 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\
R_2 \text{ (Aditivo)}: &\quad x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
R_3 \text{ (Solvente)}: &\quad 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\
&\quad x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

### Representação Gráfica




### Resultado no vértice 9

$$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = 6;$$

$$x_3 = 4;$$

$$x_4 = 0;$$

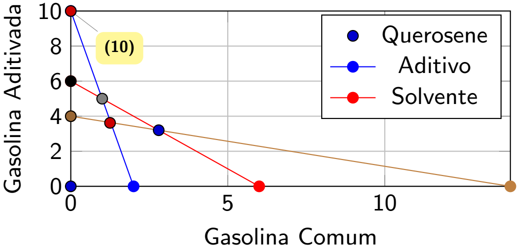
$$x_5 = -14,0;$$

$$\mathbb{Z} = 12,00$$

# Igualando a zero $x_1$ e $x_3$

$$
\begin{aligned}
R_1 \text{ (Querosene):} \quad & 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\
R_2 \text{ (Aditivo):} \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
R_3 \text{ (Solvente):} \quad & 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 28 \\
& x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

## Representação Gráfica




## Resultado no vértice 10

$$\mathbb{Z} = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = 8;$$

$$x_3 = 0;$$

$$x_4 = -2;$$

$$x_5 = -28,0;$$

$$\mathbb{Z} = 16,00$$

Ao avaliarmos as soluções encontradas pelos procedimentos realizados no problema anterior, vimos que um problema de programação linear é bastante custoso em ser resolvido devido ao grande número de vértices que determinam a fronteira da região permissiva gerada pelas restrições. Vimos também, que esse número pode ser exponencial dado o número de restrições existentes.

Podemos resumir em dois blocos as dificuldades que deverão ser vencidas por quem deseja encontrar a melhor solução possível para um sistema indeterminado de equações lineares.

- Como obter soluções viáveis básicas do sistema de equações.
- Como evitar o teste de todas as soluções viáveis básicas possíveis para garantir a otimização do sistema.

Ao avaliarmos as soluções encontradas pelos procedimentos realizados no problema anterior, vimos que um problema de programação linear é bastante custoso em ser resolvido devido ao grande número de vértices que determinam a fronteira da região permissiva gerada pelas restrições. Vimos também, que esse número pode ser exponencial dado o número de restrições existentes.

Podemos resumir em dois blocos as dificuldades que deverão ser vencidas por quem deseja encontrar a melhor solução possível para um sistema indeterminado de equações lineares.

- Como obter soluções viáveis básicas do sistema de equações.
- Como evitar o teste de todas as soluções viáveis básicas possíveis para garantir a otimização do sistema.

## Método Simplex

É nesse contexto que o método Simplex destaca-se como uma das grandes contribuições para a programação matemática neste século. Trata-se de um algoritmo bastante eficiente de estratégia muito simples que possibilita encontrar uma solução ótima, caso exista.

Podemos entender por algoritmo, um procedimento que termina em um número finito de operações (passos).

O Algoritmo Simplex está embasado na álgebra linear, para determinar se há ou não uma solução ótima.

## Método Simplex

É nesse contexto que o método Simplex destaca-se como uma das grandes contribuições para a programação matemática neste século. Trata-se de um algoritmo bastante eficiente de estratégia muito simples que possibilita encontrar uma solução ótima, caso exista.

Podemos entender por algoritmo, um procedimento que termina em um número finito de operações (passos).

O Algoritmo Simplex está embasado na álgebra linear, para determinar se há ou não uma solução ótima.

## Método Simplex

É nesse contexto que o método Simplex destaca-se como uma das grandes contribuições para a programação matemática neste século. Trata-se de um algoritmo bastante eficiente de estratégia muito simples que possibilita encontrar uma solução ótima, caso exista.

Podemos entender por algoritmo, um procedimento que termina em um número finito de operações (passos).

O Algoritmo Simplex está embasado na álgebra linear, para determinar se há ou não uma solução ótima.

## Método Simplex

Em linhas gerais, ele parte de uma solução básica viável e a partir desta solução, vai identificando nelas soluções viáveis de valor igual ou melhor que a corrente. O algoritmo portanto, possui um critério de escolha que permite encontrar sempre novos e melhores vértices do problema e em outro critério que consegue determinar se o vértice escolhido é ou não um vértice ótimo.

## Método Simplex

Vale ressaltar que a forma como o método será representado neste estudo, busca simplesmente orientar a compreensão de seu funcionamento de forma didática, com um olhar puramente pedagógico.

Os passos que resultam em uma solução matemática, possuem um conteúdo bastante diferente daquele apresentado aqui. Sugere-se para aqueles alunos que desejam aprofundar seus conhecimentos sobre o referido método, buscar referências mais voltadas para o uso da álgebra linear e cenários ligados ao contexto computacional.

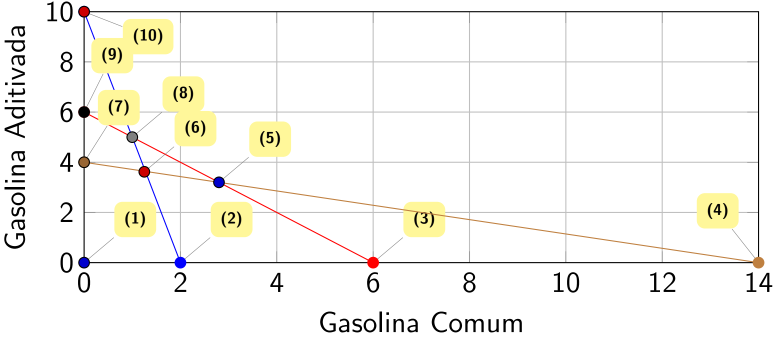
## Método Simplex

Vale ressaltar que a forma como o método será representado neste estudo, busca simplesmente orientar a compreensão de seu funcionamento de forma didática, com um olhar puramente pedagógico.

Os passos que resultam em uma solução matemática, possuem um conteúdo bastante diferente daquele apresentado aqui. Sugere-se para aqueles alunos que desejam aprofundar seus conhecimentos sobre o referido método, buscar referências mais voltadas para o uso da álgebra linear e cenários ligados ao contexto computacional.

# Passo 1: Enumere todos os vértices do Gráfico

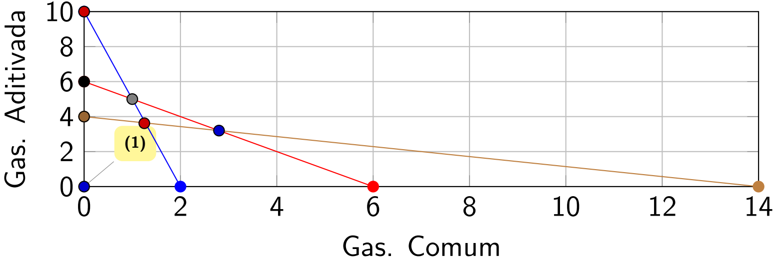
## Representação Gráfica



## Passo 2: Parta do vértice 1 que determina a base canônica do gráfico

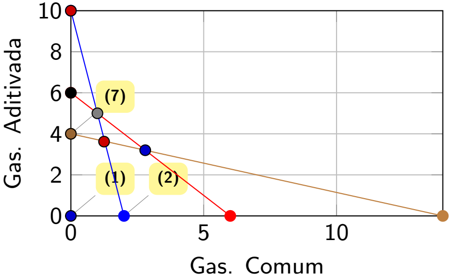
- Óbvio, pois se $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, então $Z = 0$ e isso pode ser considerado a solução básica inicial

### Representação Gráfica



# Passo 3: Calcule os vértices vizinhos ao vértice corrente

## Representação Gráfica




- O vértice que tiver o maior número de variáveis adicionais atendidades de acordo com a região permissiva apresentada pelo modelo será eleito como "novo vértice"(considere variáveis iguais a zero como uma variável atendida).

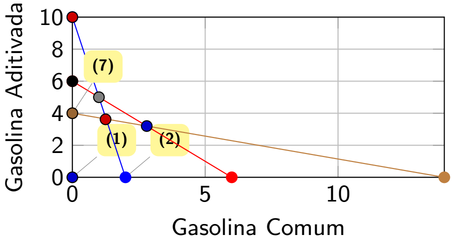
- Se o número de variáveis adicionais atendidades forem iguais para o conjunto de vizinhos, escolha aquela que possuir o melhor valor de $Z$

# Passo 3: Calcule os vértices vizinhos ao vértice corrente

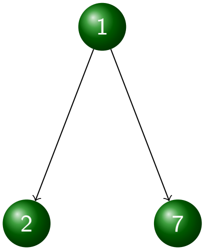
## Valores das variáveis nos vértices

| Vértice | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $Z$ | Obs.: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 16 | 6 | 28 | 0 | $x_1, \ldots, x_5 \geq 0$ |
| 2 | 2 | 0 | 0 | 4 | 24 | 2 | $x_1, \ldots, x_5 \geq 0$ |
| 7 | 0 | 4 | 8 | 2 | 0 | 8 | $Z$ (maior valor) e $x_1, \ldots, x_5 \geq 0$ |

## Representação Gráfica




## Árvore de decisão

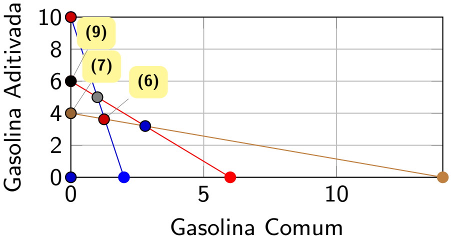


# Passo 3: Calcule os vértices vizinhos ao vértice corrente

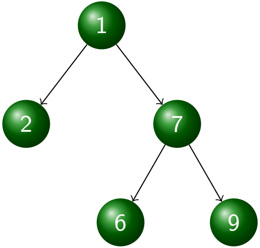
## Valores das variáveis nos vértices

| Vértice | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $Z$ | Obs.: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 0 | 4 | 8 | 2 | 0 | 8 | $x_1, \ldots, x_5 \geq 0$ |
| 6 | 1,07 | 3,69 | 0 | 1,23 | 0 | 8,46 | $Z$ (maior valor) e $x_1, \ldots, x_5 \geq 0$ |
| 9 | 0 | 6 | 4 | 0 | -14 | 12 | $x_5 \leq 0$ |

## Representação Gráfica




## Árvore de decisão

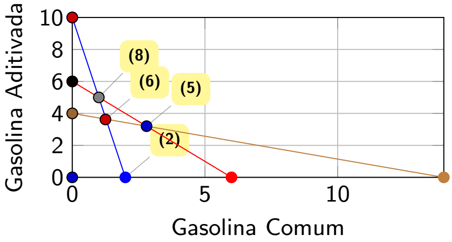


# Passo 4: O método termina quando não há mais um vértice vizinho viável a ser visitado. Neste caso, o vértice ótimo é o 6

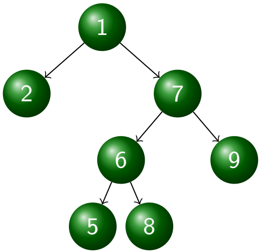
## Valores das variáveis nos vértices

| Vértice | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $Z$ | Obs.: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1,07 | 3,69 | 0 | 1,23 | 0 | 8,46 | $Z$ (maior valor) e $x_1, \ldots, x_5 \geq 0$ |
| 2 | 2 | 0 | 0 | 4 | 24 | 2 | já visitado |
| 5 | 2,8 | 3,2 | -12,8 | 0 | 0 | 9,2 | $x_3 \leq 0$ |
| 8 | 0,66 | 5,36 | 0 | 0 | -10,84 | 11,38 | $x_5 \leq 0$ |

### Representação Gráfica




### Árvore de decisão



## Implemente o Método para o Modelo abaixo:

$$\begin{aligned} FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} &= 30x_1 + 50x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1 + x_2 \leq 11 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**Resposta**

$$x_1 = 7;$$
$$x_2 = 2;$$
$$\mathbb{Z} = 310,00$$

Prof. Msc. Dorirley Rodrigo Alves
Simulando o Método Simplex utilizando um gráfico bidimensional
*Notas de Aulas para a disciplina Pesquisa Operacional para o Curso de Administração - PUC Minas*
2012

# Alguém com dúvida?!