Matemática Discreta – Lista de Exercícios

Assunto: MDC, Números Primos e Fatoração

1. Se p é um primo e a é natural, quais os possíveis valores para mdc(a, p)?

2. Seja n um natural tal que mdc(n, 6) = 1. Mostre que $(n^2 - 1)$ é múltiplo de 12.

3. Determine o mmc(a, b) de dois números positivos a e b cujo produto é $2^5 . 3^3$ e mdc(a, b) = $2^2 . 3$.

4. Os restos das divisões de 247 e 315 por x são 7 e 3, respectivamente. Determine o maior valor possível para x.

5. Encontre todos os primos p e q tais que p − q = 3.

6. Três naturais ímpares consecutivos são primos. Mostre que estes números são 3, 5 e 7.

7. Mostre que existem infinitos primos.

8. Se n é um inteiro positivo, mostre que:
   a. Todo número ímpar natural é da forma $4n+1$ ou $4n-1$.
   b. Todo número da forma $4n-1$ admite ao menos um fator primo dessa forma.
   c. Existem infinitos primos da forma $4n-1$.

9. Se p é primo, mostre que não existem inteiros primos entre si a e b tais que $a^2 = pb^2$.

10. Classifique cada uma das afirmativas abaixo como verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

(i) Se a|(2b + 3) e a|(b + 1) então a = 1 ou a = −1.
(ii) Se p é um primo tal que p^3|ab e p^2|a então p| b.
(iii) Se mdc(a, b) é par então mmc(a, b) é par.
(iv) Se mmc(a, b) é par então mdc(a, b) é par.
(v) Se um primo p divide a + b então p divide a e p divide b.
(vi) Se a divide um primo p então a é primo.
(vii) Se d = mdc(a, $a^2 + b^2$) então d|$(a − b)^2$.

11. Responda e justifique:
    a. Se p é um primo e mdc(a, b) = p, quais são os possíveis valores de mdc(a^2, b)? E de mdc(a^2 , b^2)?
    b. Suponha que quando você divide um número primo p por 3, o resto é igual a 1. Qual será o resto da divisão de p por 6?