

## Lista de Exercícios de Matemática Discreta

**Assunto:** Aritmética Modular

1. Para cada par de inteiros  $a$  e  $n$ , determine um inteiro  $b$  tal que  $a \equiv b \pmod{n}$  e  $0 \leq b < n$ .  
 $a = 3256$  e  $n = 2$   
 $a = 3256$  e  $n = 3$   
 $a = 3256$  e  $n = 7$   
 $a = 3256$  e  $n = 11$
2. Determine o resto da divisão de  $18!$  por  $19$ .
3. Ache o menor inteiro não negativo que seja congruente módulo  $15$  a cada um dos seguintes números:  
a)  $511$   
b)  $-625$   
c)  $-2717$
4. Enuncie e prove, usando congruências, os critérios de divisibilidade por  $5$  e por  $9$ .
5. Determine o resto da divisão de  
a)  $5^{200}$  por  $26$   
b)  $7^{1001}$  por  $11$   
c)  $2^{130}$  por  $263$   
d)  $13^{221}$  por  $19$   
e)  $2^{1000}$  por  $3$
6. Encontre, caso exista, o inverso multiplicativo de  $a$  em  $\mathbb{Z}_m$  onde:  
a)  $a = 61$  e  $m = 124$   
b)  $a = 12$  e  $m = 111$   
c)  $a = 45$  e  $m = 124$   
d)  $a = 45$  e  $m = 111$ .
7. Liste os elementos de  $\mathcal{U}(n)$  para  $n = 9, 15, 30$  e  $36$ .
8. Ache a solução geral e a menor solução positiva para as seguintes congruências lineares.  
 $10x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$   
 $6x + 1 \equiv 4 \pmod{6}$   
 $81x \equiv 1 \pmod{256}$   
 $4x \equiv 7 \pmod{15}$

9. Ache todos os inteiros entre 1 e 100 que são congruentes a 4 mod 11.
10. Mostre que para todo inteiro  $n$ ,  $n^3 = n \pmod{6}$ .
11. Se  $a = 72^6 + 72^5 + 2$ , mostre que  $7|a$ .
12. Se agora são 3 horas da tarde, qual o horário daqui a 5873 horas?
13. Calcule a soma  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{19}$  módulo 4 e o produto  $11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19$  módulo 7.
14. Ache o último algarismo do número  $9^{9^9}$ .
15. O número do CPF (Cadastro de Pessoa Física) é composto por onze algarismos  $a_1a_2\dots a_{11}$  sendo que os dois últimos,  $a_{10}a_{11}$ , são chamados de dígitos verificadores. O cálculo desses dois dígitos é feito da seguinte maneira:  
 Considere  $R$  tal que  $10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + \dots + 3a_8 + 2a_9 \equiv R \pmod{11}$ . Se  $R < 2$  então  $a_{10} = 0$ , caso contrário,  $a_{10} = 11 - R$ .  
 Considere  $S$  tal que  $11a_1 + 10a_2 + 9a_3 + \dots + 3a_9 + 2a_{10} \equiv S \pmod{11}$ . Se  $S < 2$  então  $a_{11} = 0$ , caso contrário,  $a_{11} = 11 - S$ .
- a) Calcule o dígito verificador XX para o CPF 123.456.789 - XX.
- b) Verifique se o número 008.210.496-41 pode ser o CPF de alguém.
16. Resolva os sistemas abaixo:
- a) 
$$\begin{cases} 10 - 3x = 2 & \pmod{23} \\ x = 17 & \pmod{20} \\ 2x + 4 = 9 & \pmod{11} \end{cases}$$
- b) 
$$\begin{cases} x = 5 & \pmod{6} \\ x = 4 & \pmod{11} \\ x = 3 & \pmod{17} \end{cases}$$
17. Hoje, à meia noite, em uma pequena cidade, inaugurou uma rodoviária, que tem apenas duas plataformas de embarque e três empresas de ônibus, digamos A, B e C, atuando. Por isso, o encarregado decidiu que o ônibus da empresa A começaria a rodar a partir da 3 horas da manhã, e os ônibus da empresa B a partir das 4 horas da manhã, e os ônibus da empresa C a partir das 5 horas da manhã. Se os ônibus da empresa A saem de 12 em 12 horas os da empresa B de 5 em 5 horas e os da empresa C de 7 em 7 horas, a que horas depois das 3 horas da manhã poderemos ter problemas na rodoviária?
18. Três satélites passarão sobre o Rio esta noite. O primeiro, 1 hora da madrugada, o segundo às 4 horas e o terceiro às 8 horas da manhã. Cada satélite tem um período diferente. O primeiro leva 13 horas para completar uma volta em torno da Terra, o segundo 15 horas e o terceiro 19 horas. Determine quantas horas decorrerão, a partir da meia noite, até que os três satélites passem ao mesmo tempo sobre o Rio.