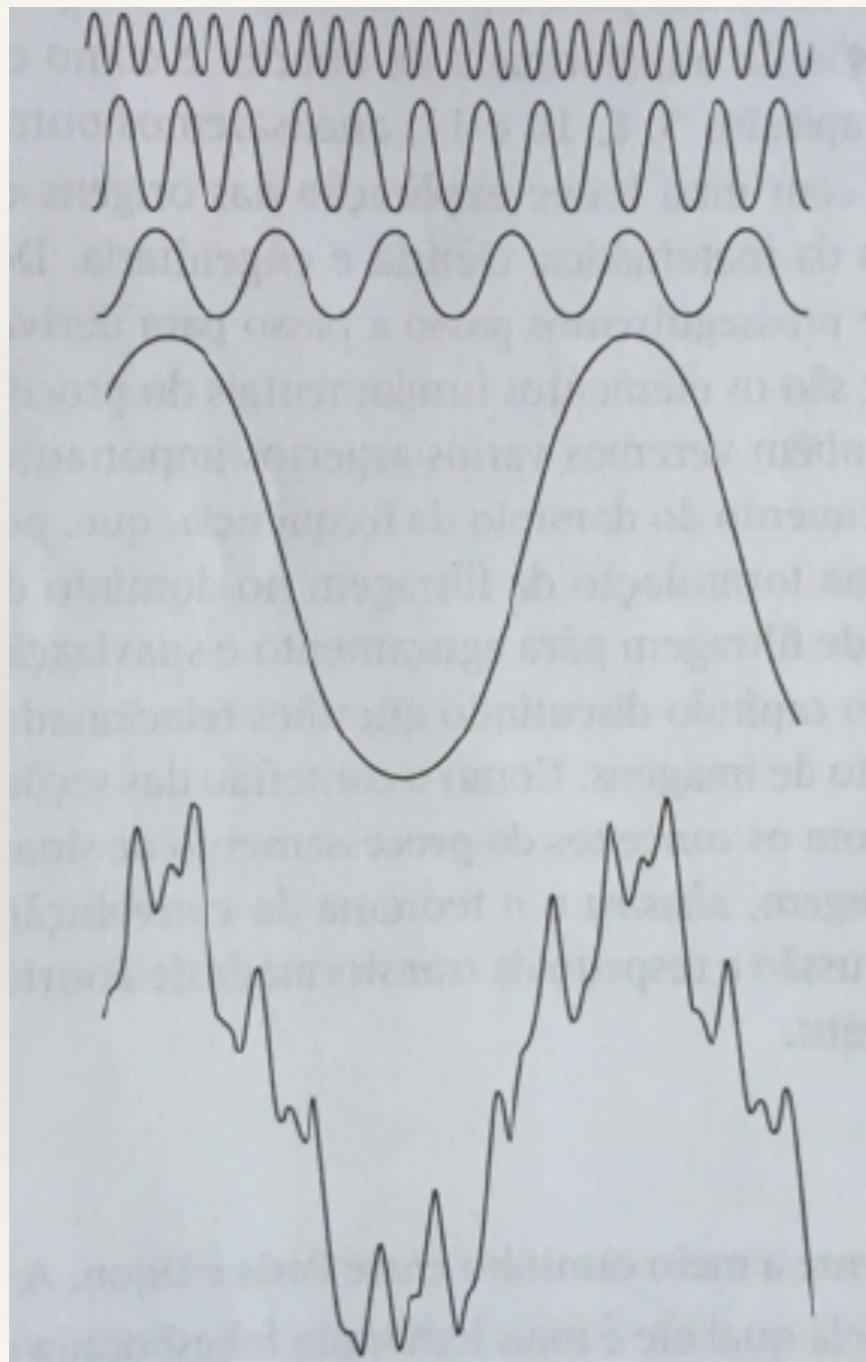


Unidade II - Fundamentos de Imagens Digitais - Parte 2: Amostragem de imagens

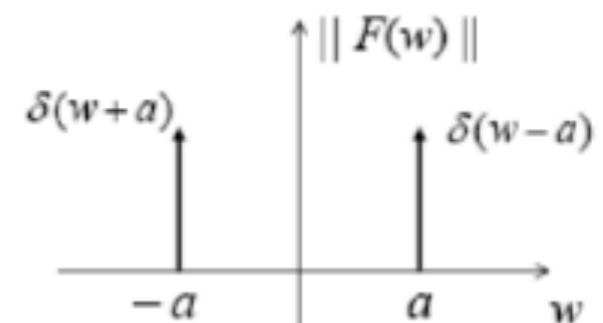
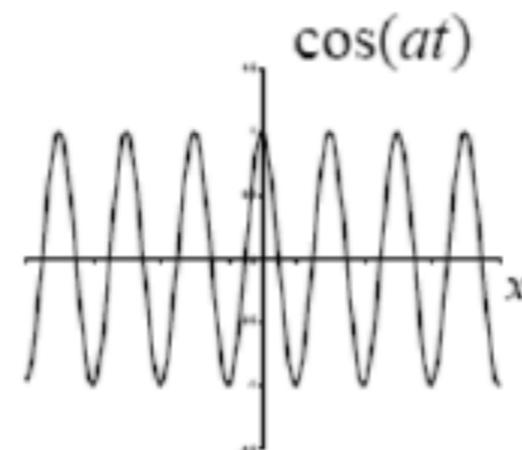
- Imagens de faixa limitada
 - Amostragem de imagens
 - Teorema da amostragem
 - Aliasing
 - Reconstrução da imagem a partir de suas amostras
-

Conceitos Introdutórios: Decomposição de um sinal em senos e cossenos



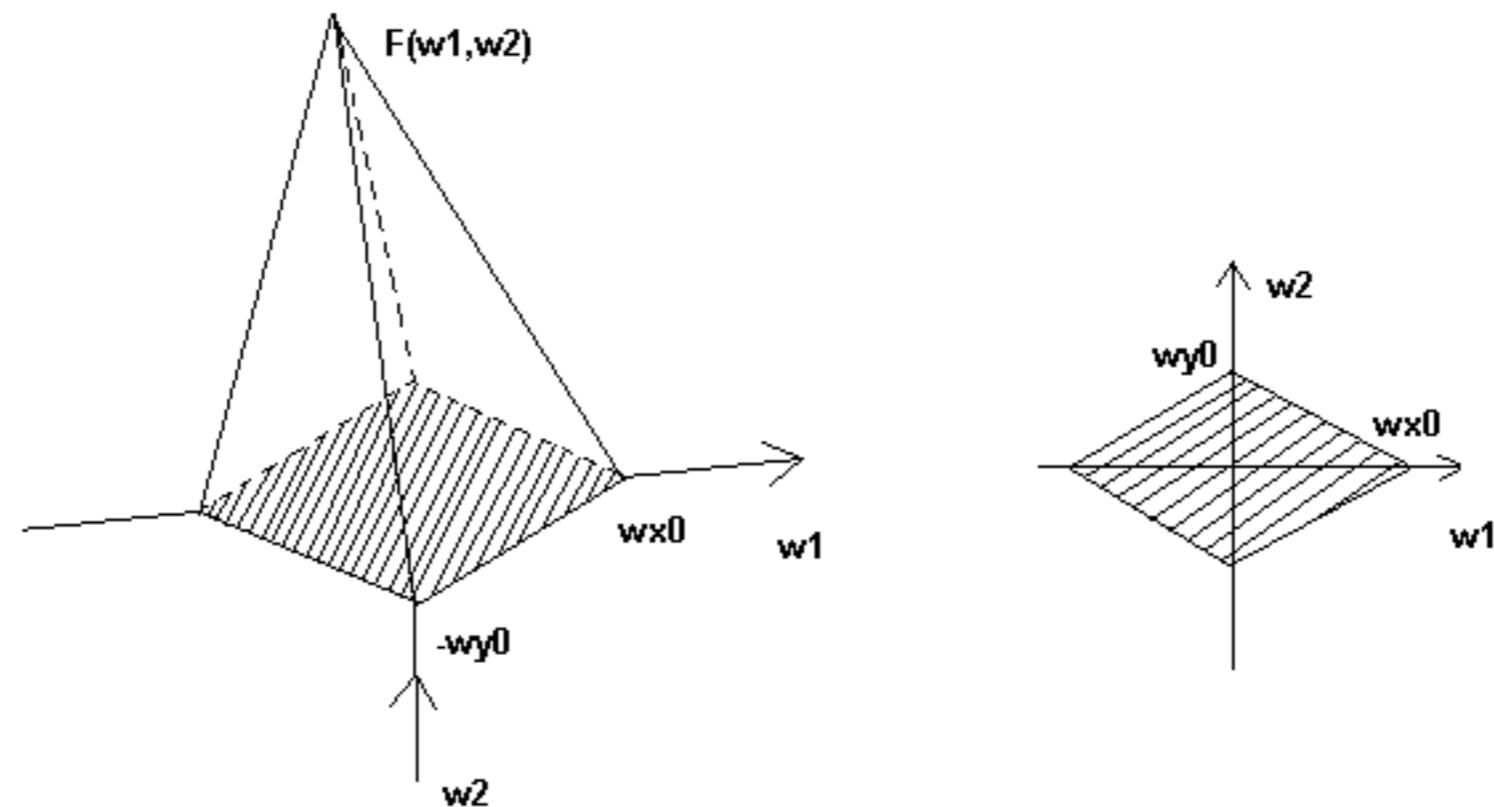
Simplificadamente falando,
o espectro do sinal será a amplitude
(e a fase - deslocamento no tempo) das
frequências senoidais que, somadas
ponto-a-ponto, reconstituem
o sinal original.

Transformada de Fourier: Sinais Senoidais



$$F(w) = \frac{1}{2} [\delta(w+a) + \delta(w-a)]$$

Conceitos Introdutórios: Imagens de Faixa Limitada

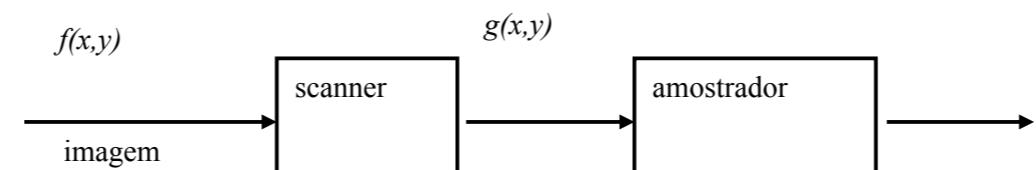


$$F(\omega_1, \omega_2) = 0, \quad |\omega_1| > \omega_{x0}, \quad |\omega_2| > \omega_{y0}$$

Conceitos Introdutórios: Imagens de Faixa Limitada

Imagens reais não são de faixa limitada (ou são de faixa limitada, mas contêm ruído fora da faixa de passagem → Necessidade de filtragem antes da amostragem (o que normalmente já acontece na prática)).

Ex.: scanner → integra a imagem sobre a abertura na posição (x, y)



$$g(x, y) = \int_{x-L/2}^{x+L/2} \int_{y-L/2}^{y+L/2} f(x', y') dx' dy'$$

onde: $L \times L$ é a abertura quadrada

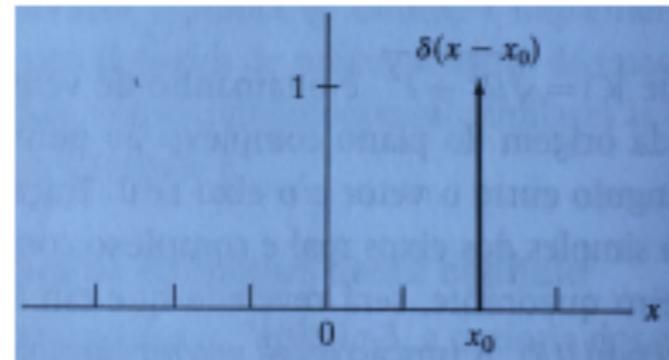
Conceitos Introdutórios: Impulso Unitário Discreto

Agora, seja x uma variável discreta. Um impulso unitário discreto $\delta(x)$ é definido como:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ 0, & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

e também é restrito para satisfazer:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



Impulso Bidimensional Discreto:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \text{ e } y = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

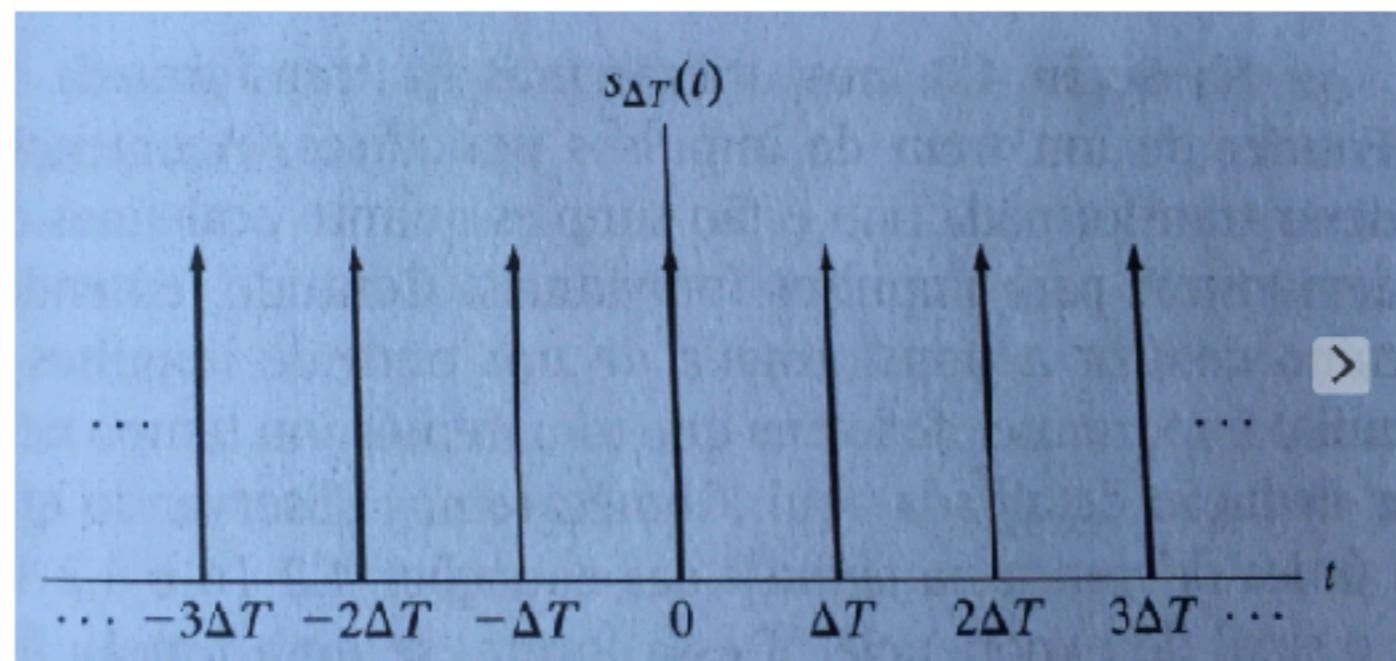
$$\delta(x - a, y - b) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = a \text{ e } y = b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\delta(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = m\Delta \text{ e } y = n\Delta_y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Conceitos Introdutórios: Trem de Impulsos

De particular interesse, o trem de impulsos, $s_{\Delta T}(t)$, é definido como a soma de um número infinito de impulsos periódicos espaçados de ΔT :

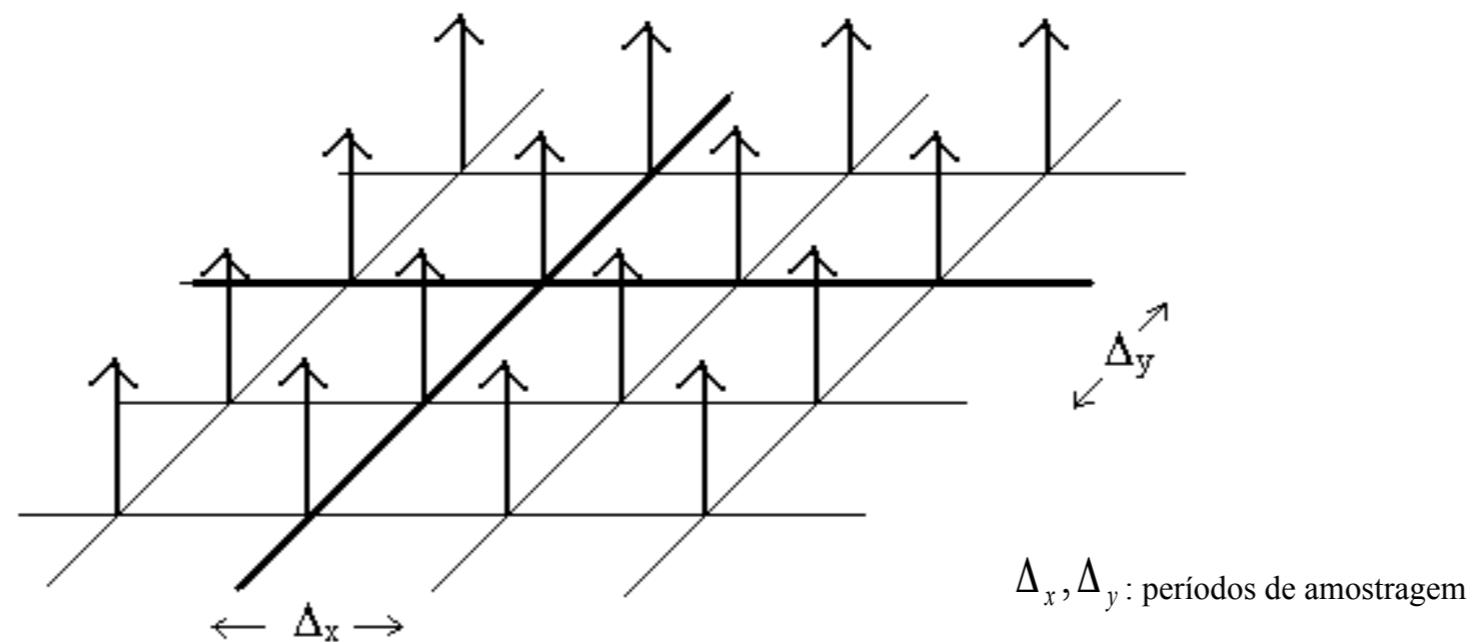
$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



Função de amostragem ideal (para sinais bidimensionais)

- Trem de Impulsos de Kronecker -

comb(x,y, Δ_x , Δ_y)



$$\delta_{\Delta_x \Delta_y} = \text{comb}(x, y, \Delta_x, \Delta_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y)$$

Imagen Amostrada

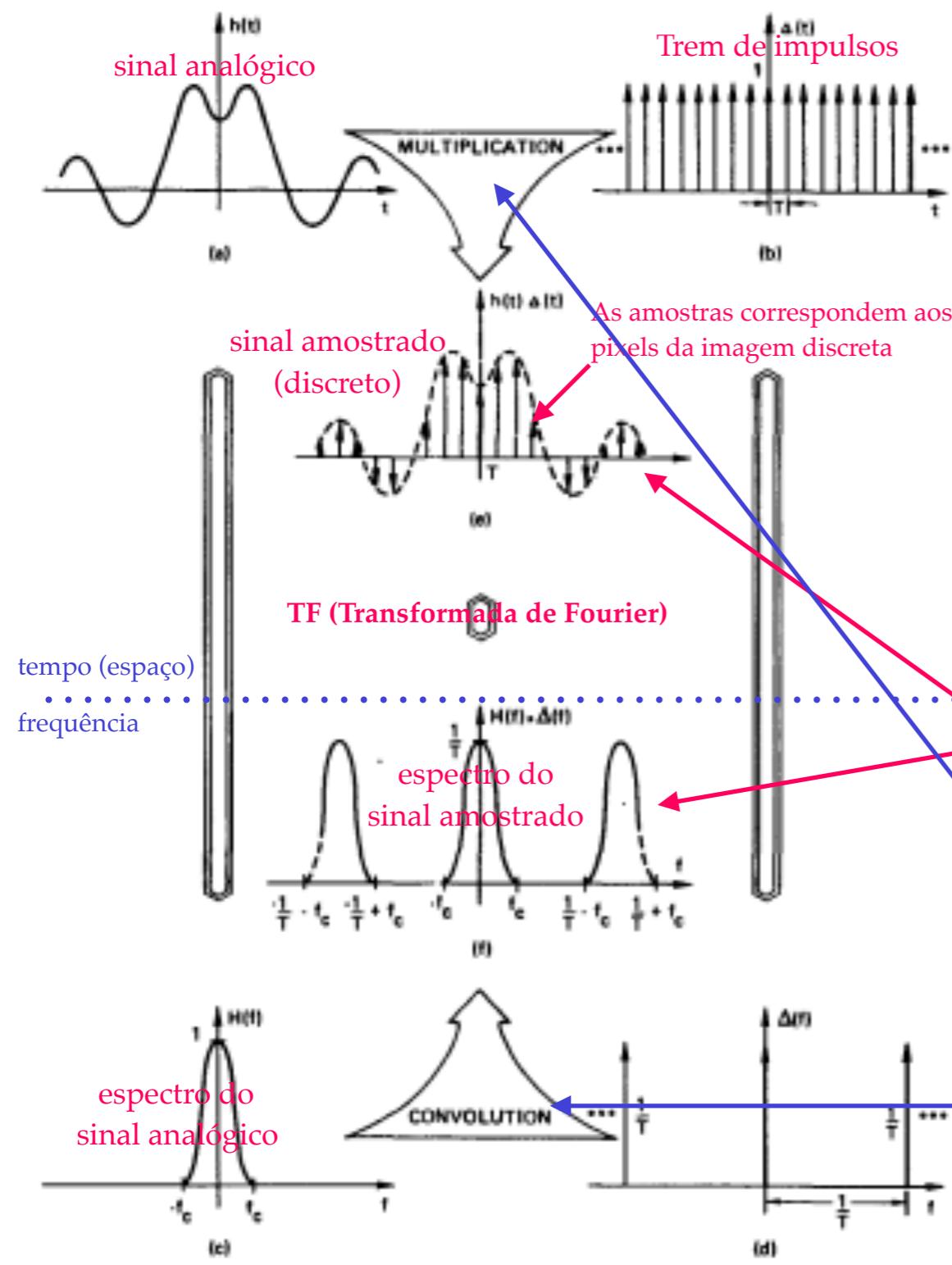
$$\begin{aligned}f_a(x, y) &= f(x, y) \delta_{\Delta_x \Delta_y} = f(x, y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y) \\&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta_x, n\Delta_y) \delta(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y)\end{aligned}$$

A imagem amostrada f_a é igual ao produto da imagem contínua (análogica) pelo Trem de Impulsos.

Isso resulta em um Trem de Impulsos, cujas amplitudes correspondem às intensidades da imagem nos pontos amostrados (que serão os **pixels** da imagem discreta).

$$\delta(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = m\Delta_x \text{ e } y = n\Delta_y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

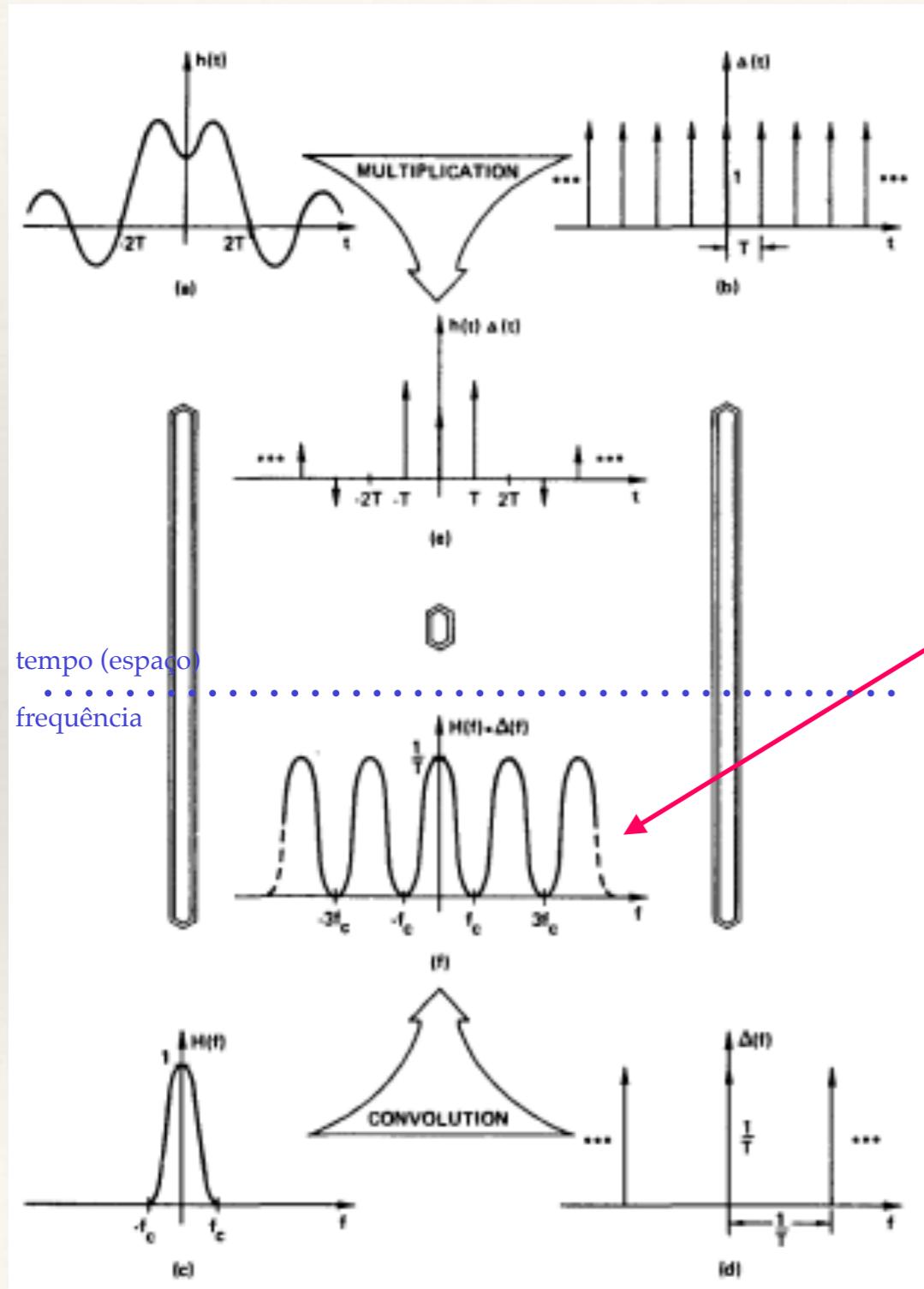
O Espectro (TF-Transformada de Fourier) de Funções amostradas



Observações:

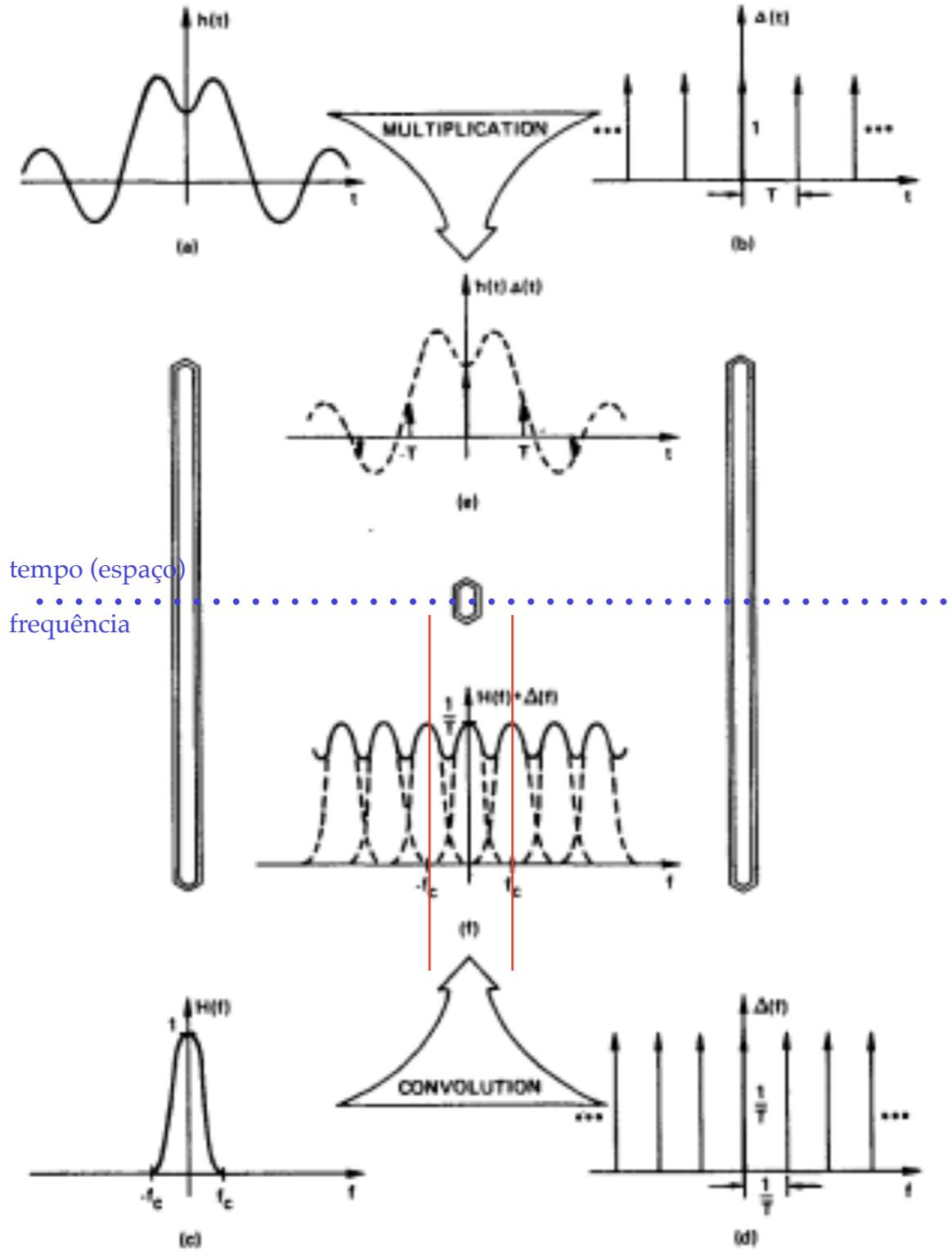
- 1) O espectro (TF) de um sinal periódico é discreto (o sinal apresenta apenas a componente fundamental e frequências múltiplas da fundamental).
- 2) O espectro (TF) de um sinal não periódico é contínuo (apresenta infinitas componentes de frequência).
- 3) O espectro (TF) de um trem de impulsos (sinal periódico) com amplitude 1 e espaçamento T (**período de amostragem**) é um trem de impulsos com amplitude $1/T$ e espaçamento $1/T$ (**frequência de amostragem**).
- 4) Amostrar uma função resulta em periodizar o seu espectro (com período igual à frequência de amostragem).
- 5) Todo sinal discreto apresenta um espectro periódico.
- 6) Seremos capazes de reconstruir perfeitamente o sinal original a partir de suas amostras discretas, se for possível isolar apenas a parte central do espectro do sinal amostrado (esta é a função de um interpelador ideal).
- 7) **Multiplicar** duas funções no domínio do tempo (ou espaço) corresponde, no domínio da frequência, à **convolução** dos seus espectros. E vice-versa: multiplicar na frequência corresponde a convoluir no tempo.

Transformada de Fourier de Funções amostradas com frequência de amostragem igual à frequência de Nyquist



Limiar da separação entre as réplicas do espectro do sinal analógico (se a distância entre centros das réplicas fosse menor, ocorreria a sobreposição entre elas, impedindo isolar apenas a réplica central, o que é a condição necessária para a reconstrução perfeita do sinal analógico original).
obs.: a distância entre os centros das réplicas dos espectros é igual a $1/T$, ou seja, igual à frequência de amostragem.

Transformada de Fourier de Funções amostradas com frequência de amostragem insuficiente (com aliasing)



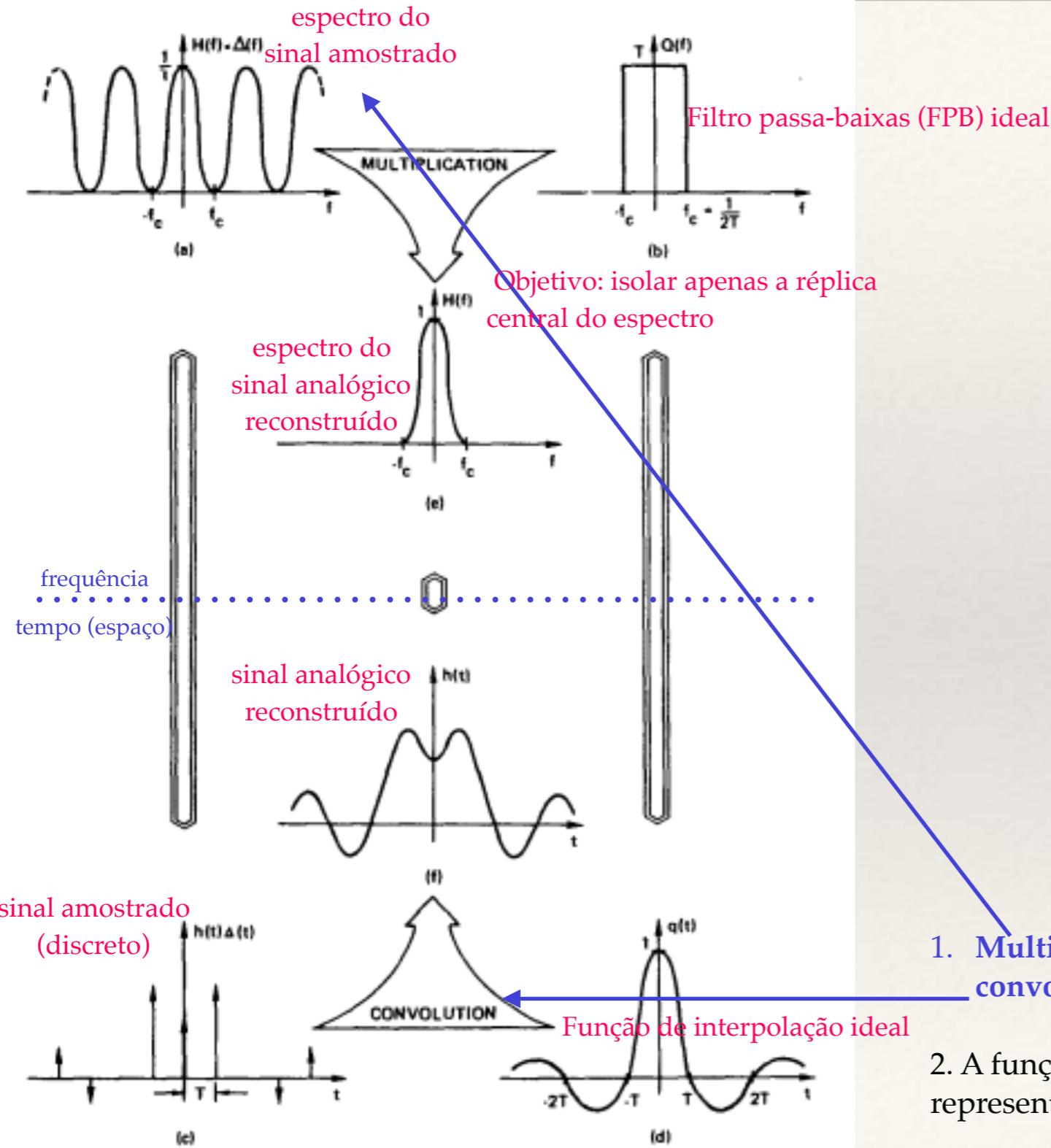
O que vai acontecer agora?

Seremos capazes de isolar a réplica central do espectro, tal qual é o espectro do sinal analógico?

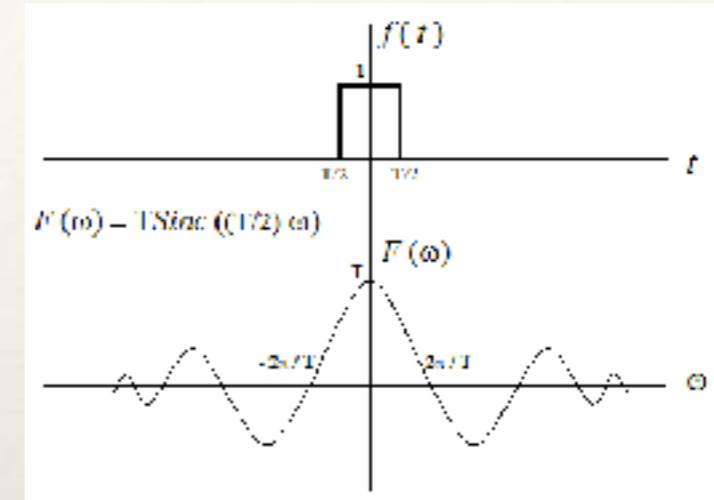
NÃO!!!

Consequência: o sinal analógico não poderá ser reconstruído sem perdas.
O sinal será corrompido.

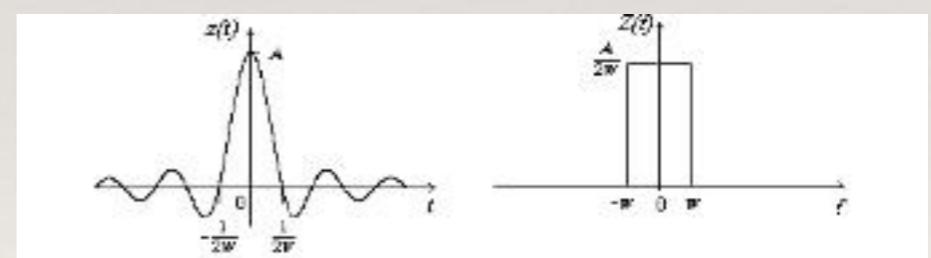
Filtragem ideal, visando reconstruir o sinal contínuo a partir de suas amostras discretas (quando não ocorre aliasing na amostragem)



Transformada de Fourier de um Pulso Retangular (no Tempo)

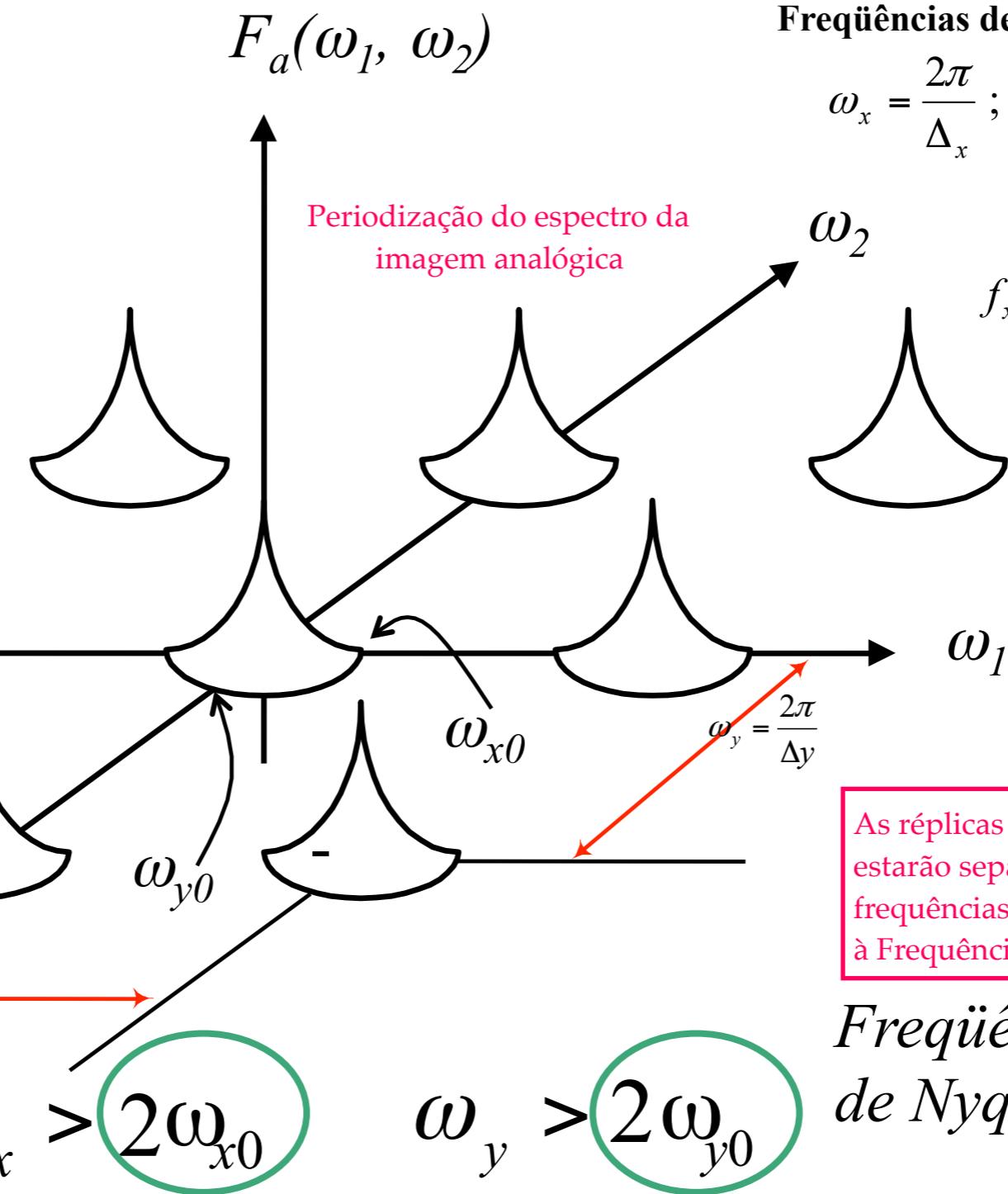
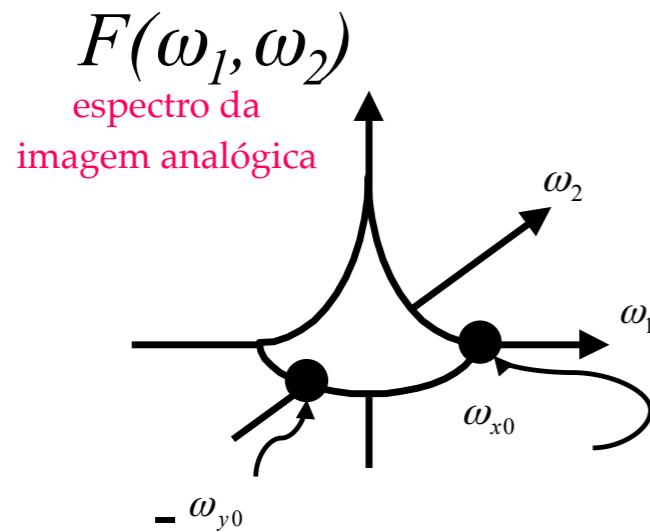


Transformada de Fourier Inversa de um Pulso Retangular (na frequência)



1. **Multiplicar** duas funções no domínio das freqüências corresponde a **convoluir** os sinais correspondentes no domínio do tempo (espaço).
2. A função de interpolação ideal é a TF inversa do pulso (FPB ideal, representado no domínio da freqüência).

Amostragem de Imagens: o que acontece do domínio das frequências espaciais?



Freqüências de amostragem:

$$\omega_x = \frac{2\pi}{\Delta_x}; \quad \omega_y = \frac{2\pi}{\Delta_y}$$

ou:

$$f_x = \frac{1}{\Delta_x}; \quad f_y = \frac{1}{\Delta_y}$$

As réplicas do espectro da imagem analógica estarão separadas (não sobrepostas) se as frequências de amostragem forem superiores à Frequência de Nyquist.

*Freqüências
de Nyquist*

$$\omega_x > 2\omega_{x0}$$

$$\omega_y > 2\omega_{y0}$$

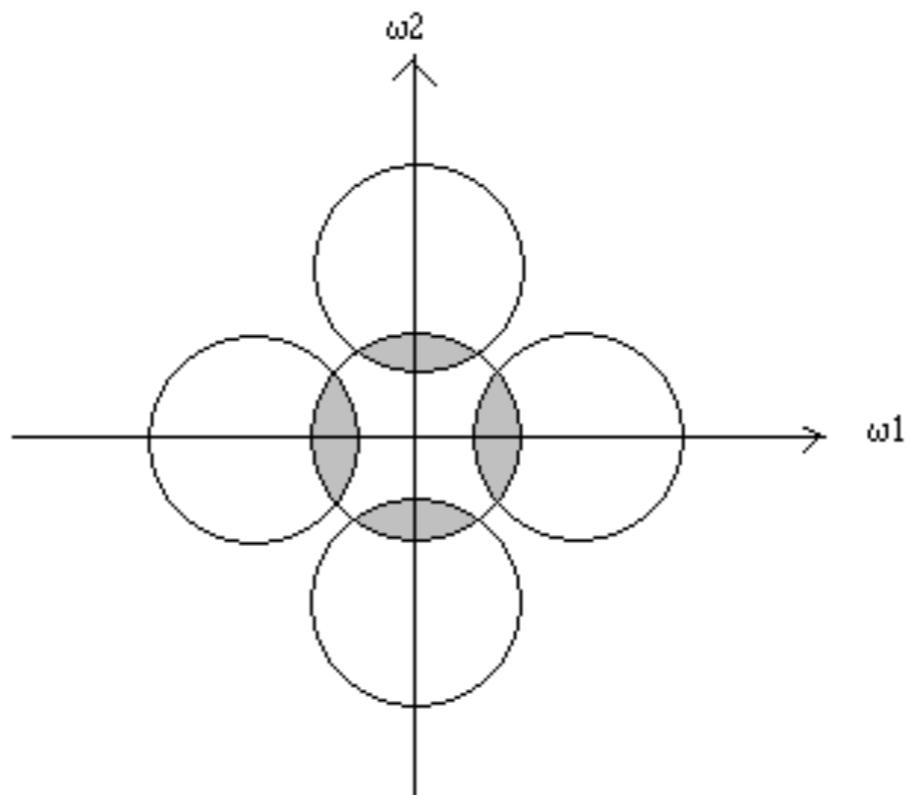
Teorema da Amostragem em Imagens

$$\omega_x > 2\omega_{x0}$$

$$\omega_y > 2\omega_{y0}$$

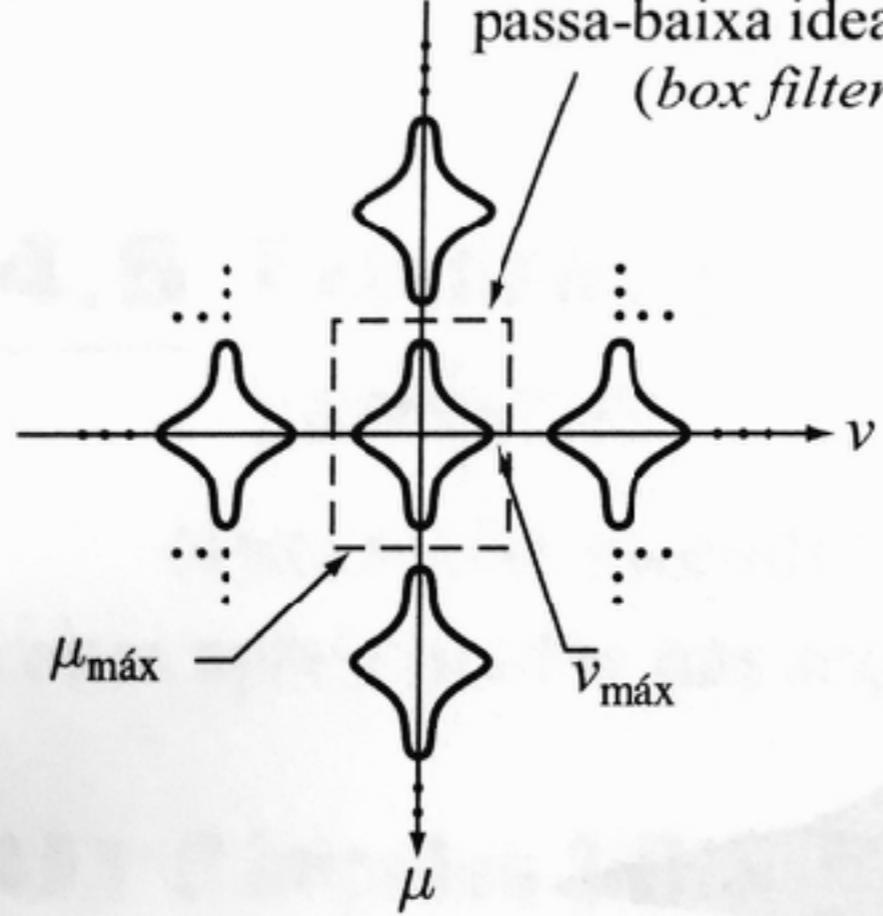
Freqüências de Nyquist

Caso as freqüências de amostragem não atendam ao requisito anterior, ocorrerá sobreposição dos espectros.



a

Área de cobertura de
um filtro retangular
passa-baixa ideal
(*box filter*)



b

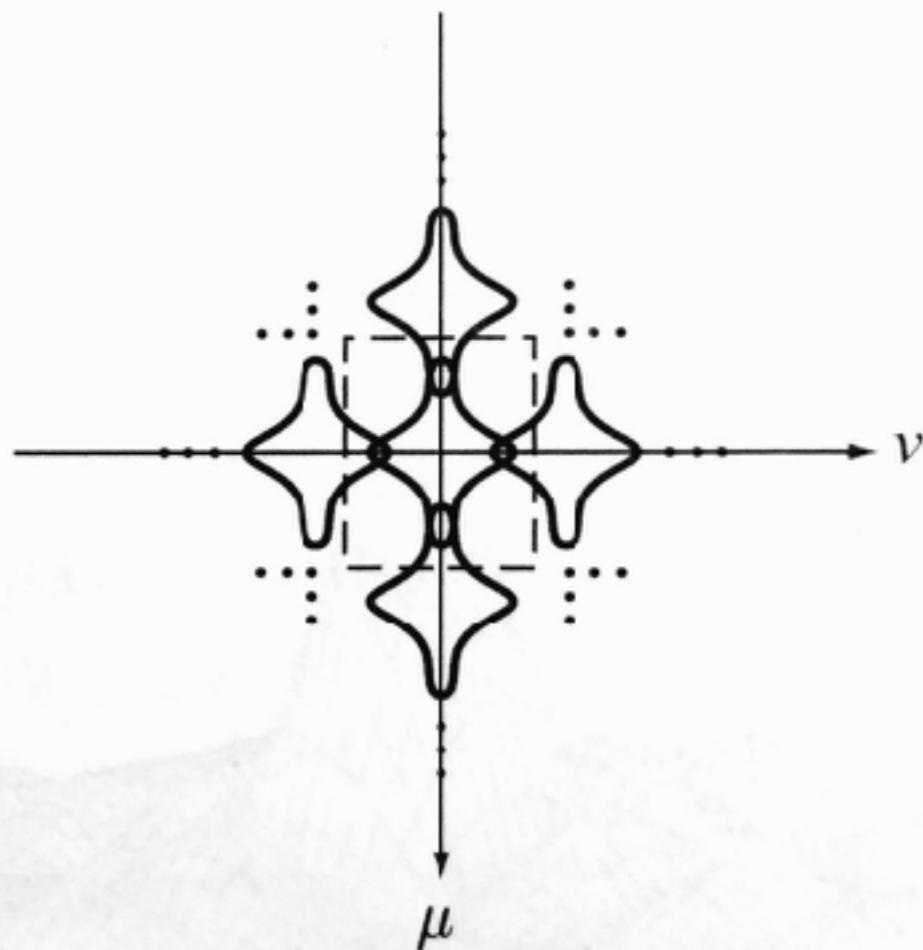


Figura 4.15 (a) Transformadas bidimensionais de Fourier de uma função de banda limitada (a) com sobreamostragem e (b) com subamostragem.

O aliasing é um processo no qual componentes de alta frequência de uma função contínua se “mascaram” como frequências mais baixas na função amostrada. O termo “alias” significa “falsa identidade”.

Na prática, os efeitos do aliasing podem ser reduzidos pela suavização da função de entrada para atenuar suas frequências mais altas (por exemplo, por meio do borramento no caso de imagens). Esse processo é chamado antialiasing e precisa ser feito antes da amostragem da função, ou seja, utilizando-se filtros analógicos (scanner).

Efeito do aliasing na Amostragem de Imagens

Imagen original

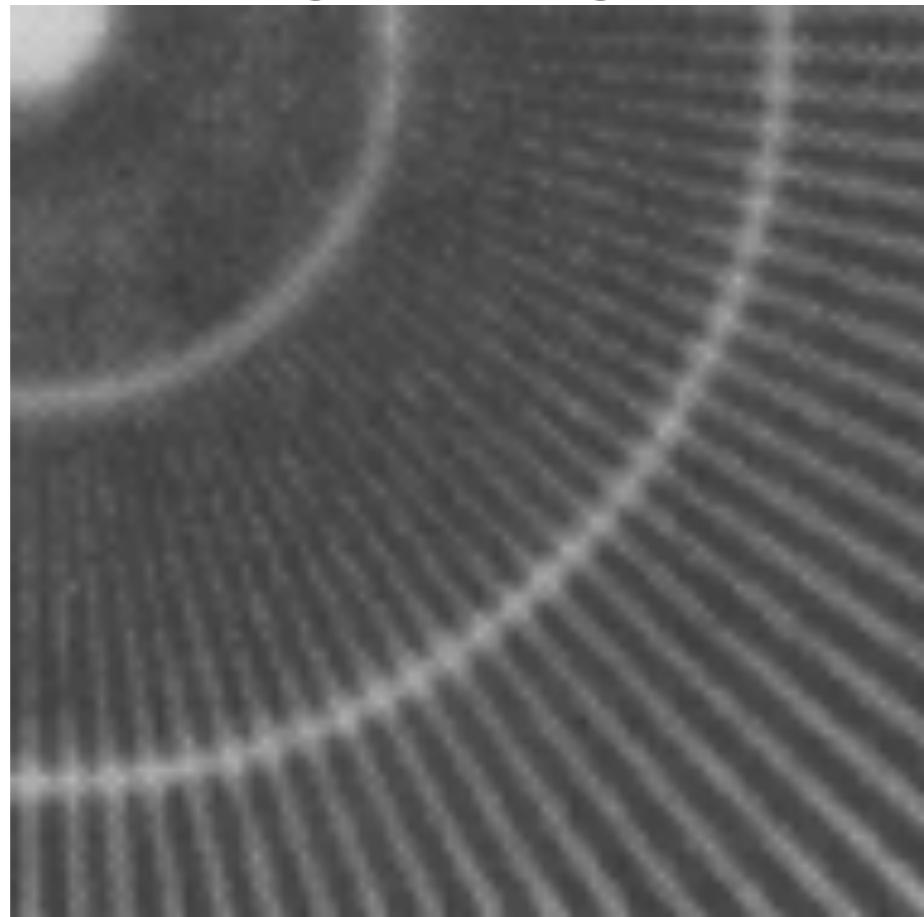
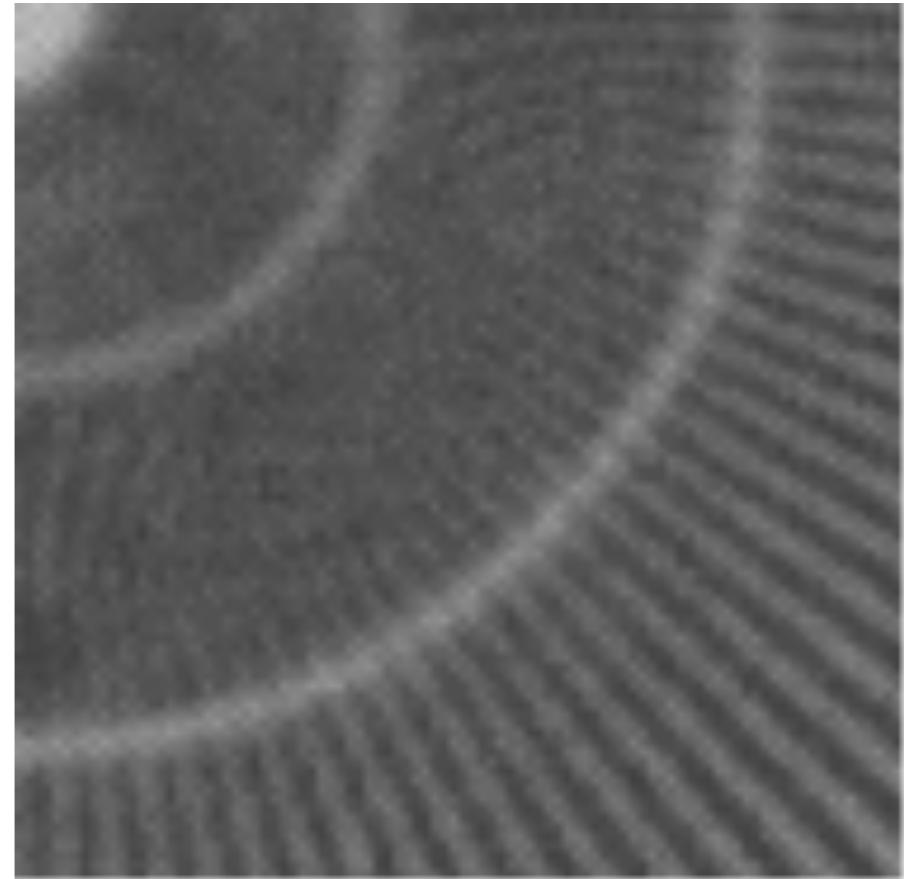


Imagen amostrada



Quando ocorre o aliasing, não se trata apenas de perder a informação de alta frequência (o que suavizaria as bordas da imagem). O maior problema é que a informação de alta frequência fica corrompida. Quanto pior o aliasing, também as componentes de médias e baixas frequências ficam corrompidas (vide slide 11).

A matemática que está por trás...

Transformada de Fourier da Função comb com espaçamento Δ_x, Δ_y

$$\delta_{\Delta_x \Delta_y}(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} \omega_x \omega_y \delta_{\omega_x \omega_y}(\omega_1, \omega_2), \text{ com } \omega_x = \frac{2\pi}{\Delta_x}, \omega_y = \frac{2\pi}{\Delta_y}$$

onde: $\delta_{\omega_x \omega_y}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_1 - k\omega_x, \omega_2 - l\omega_y)$

$$\mathcal{F}\{\delta_{\Delta_x \Delta_y}(x, y)\} = \frac{4\pi^2}{\Delta_x \Delta_y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_1 - k\omega_x, \omega_2 - l\omega_y)$$

O espectro de um trem de impulsos (sinal periódico) com amplitude 1 e espaçamento **T (período de amostragem)** é um trem de impulsos com amplitude $1/T$ e espaçamento **$1/T$ (frequência de amostragem)**.

Transformada de Fourier da Imagem Amostrada

Teorema da convolução:

Multiplicação no tempo (ou espaço) \Rightarrow Convolução na frequência

Multiplicação na frequência \Rightarrow Convolução no tempo

$$f_a(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_a(\omega_1, \omega_2)$$

Da tabela 2.4 (pág.19 – Jain) – Propriedade da multiplicação:

$$F_a(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[F(\omega_1, \omega_2)^* \omega_x \omega_y \delta_{\omega_x \omega_y}(\omega_1, \omega_2) \right] \quad (\text{convolução})$$

$$F_a(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\Delta_x \Delta_y} F(\omega_1, \omega_2)^* \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_1 - k\omega_x, \omega_2 - l\omega_y)$$

$$F_a(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\Delta_x \Delta_y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F(\omega_1 - k\omega_x, \omega_2 - l\omega_y)$$

(obs.: convoluir uma função com um impulso equivale a deslocar a função para o ponto de ocorrência do impulso)

O espectro F_a da imagem amostrada é o somatório, ponto a ponto, das réplicas do espectro F da imagem analógica, cujos centros estão espaçados das frequências e amostragem.

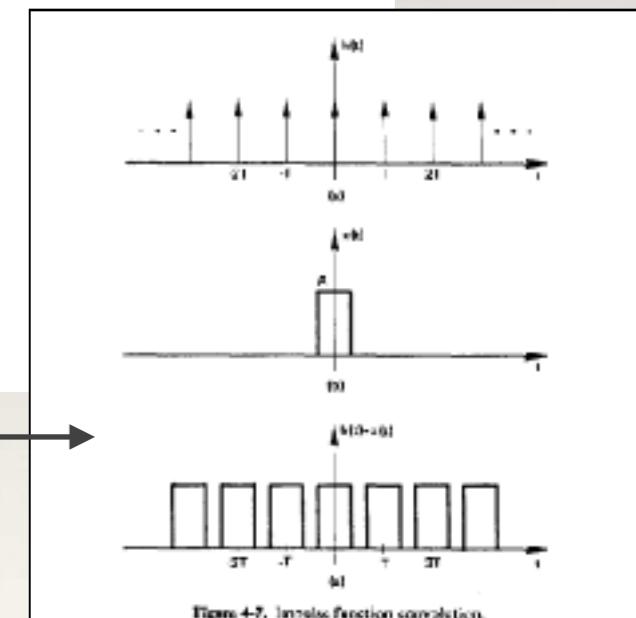
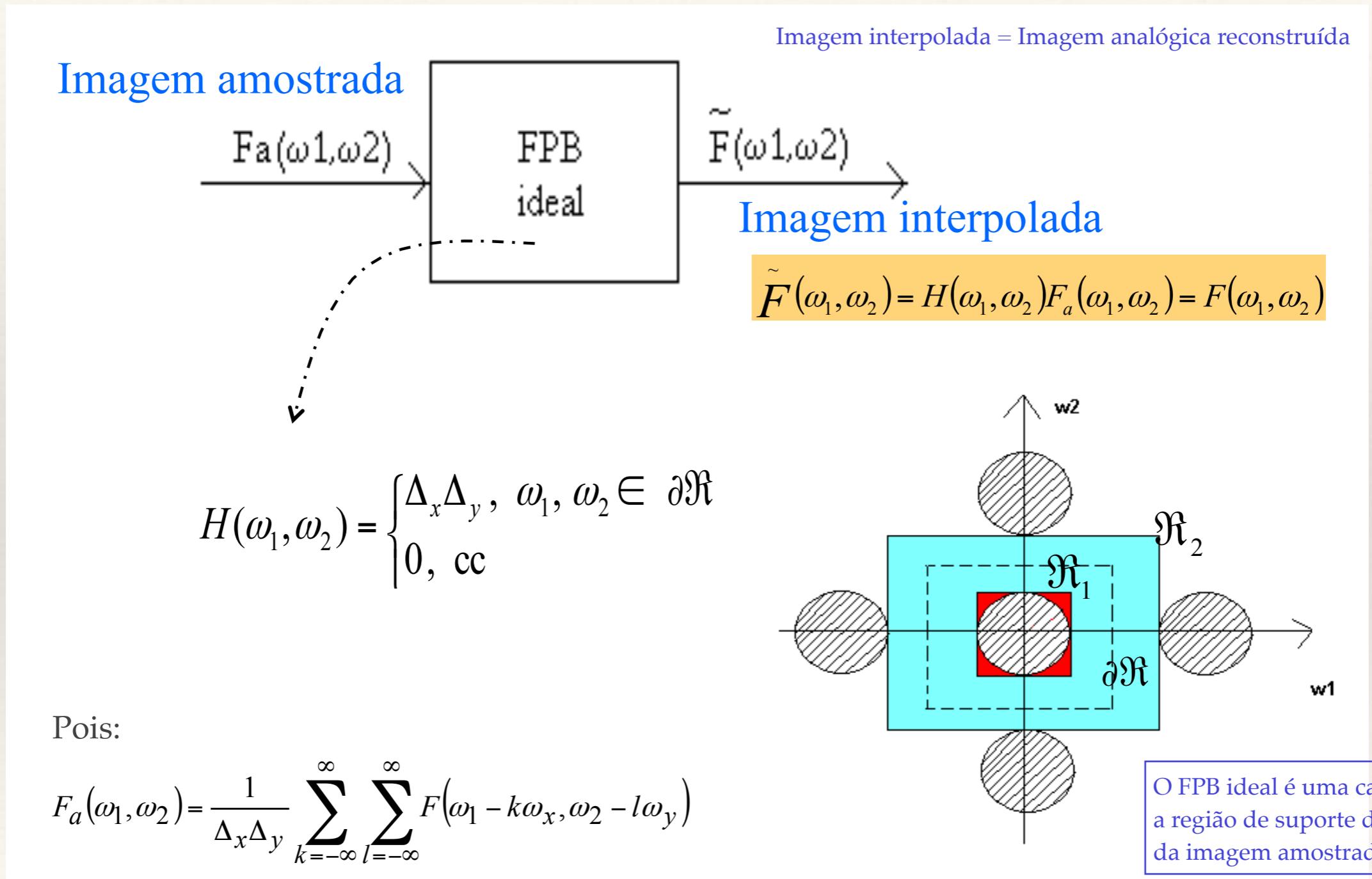
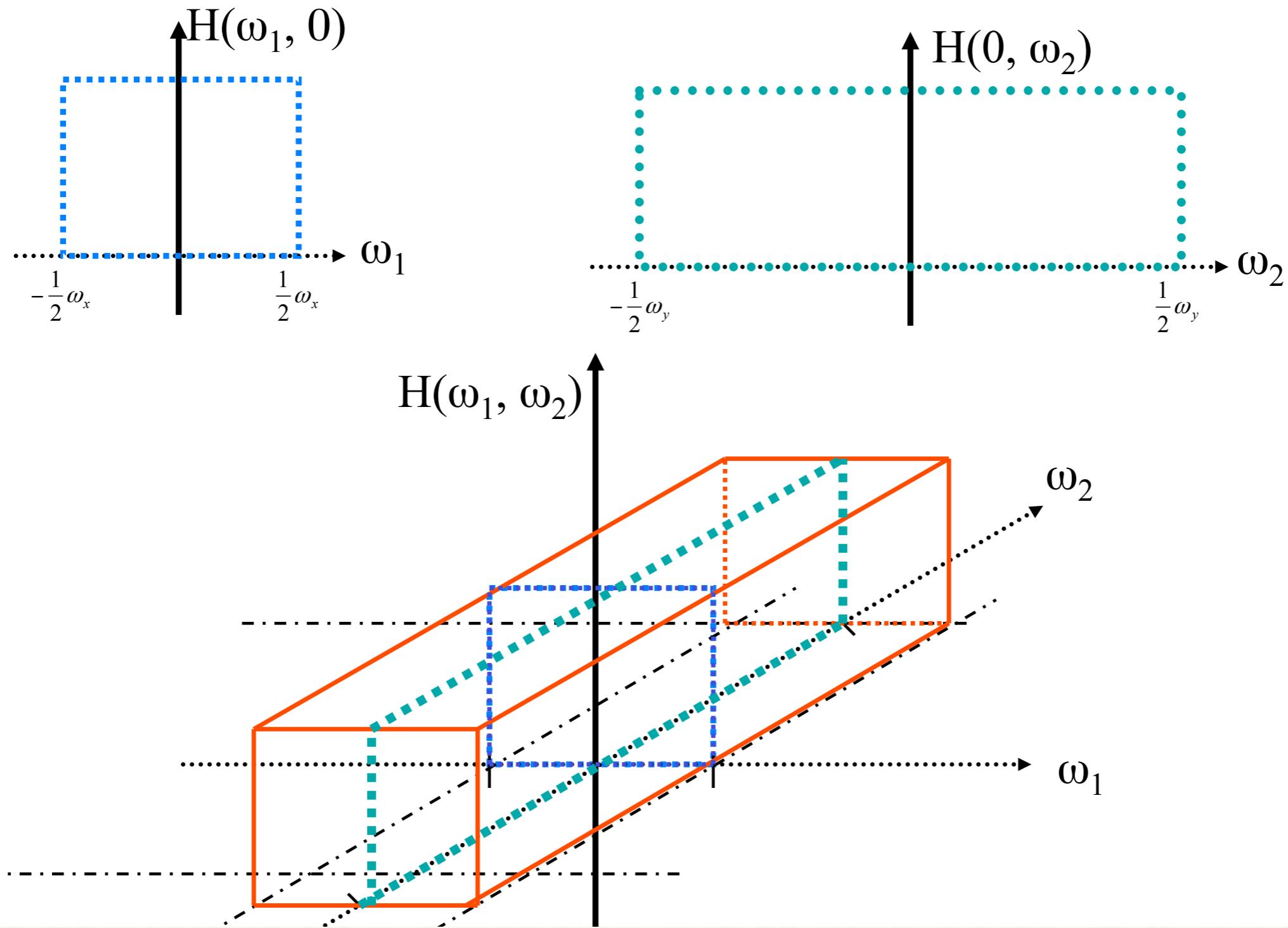


Figure 4-7. Impulse function convolution.

Reconstrução da Imagem a partir das suas amostras (multiplicando o espectro da imagem amostrada pelo FPB ideal)



Filtro passa-baixa ideal separável: Filtro Caixa



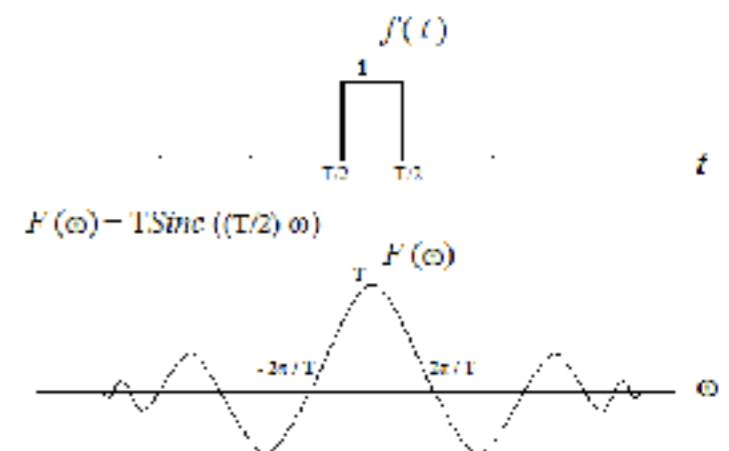
Caso não ocorra aliasing:

$$\tilde{F}(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) F_a(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1, \omega_2)$$

Propriedade da Separabilidade (pág. 19):
separável no domínio das freqüências espaciais \rightarrow
separável no domínio espacial

$$x_1(m)x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega_1)X_2(\omega_2)$$

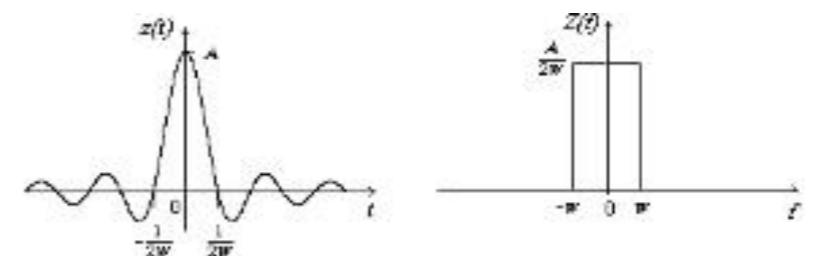
Transformada de Fourier de um Pulso Retangular (no Tempo)



$$\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega_1, \omega_2)\} = h(x, y) = \text{sinc}\left(\frac{x}{\Delta_x}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{\Delta_y}\right)$$

$$\text{onde: } \text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$

Transformada de Fourier Inversa de um Pulso Retangular (na frequência)



No domínio espacial, usando a Propriedade da Convolução:

$$\tilde{f}(x, y) = h(x, y) * f_a(x, y)$$

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta_x, n\Delta_y) \delta(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y) * \text{sinc}\left(\frac{x}{\Delta_x}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{\Delta_y}\right)$$

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta_x, n\Delta_y) \text{sinc}\left(\frac{x - m\Delta_x}{\Delta_x}\right) \text{sinc}\left(\frac{y - n\Delta_y}{\Delta_y}\right)$$

amostras **(pixels)**

Obs.: no Interpolador (filtro passa-baixas) ideal, para estimar a função em um único ponto, são necessárias todas as amostras.

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta_x, n\Delta_y) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{\Delta_x} - m\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\Delta_y} - n\right)$$

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta_x, n\Delta_y) \frac{\sin\left(\left(\frac{x}{\Delta_x} - m\right)\pi\right)}{\left(\frac{x}{\Delta_x} - m\right)\pi} \frac{\sin\left(\left(\frac{y}{\Delta_y} - n\right)\pi\right)}{\left(\frac{y}{\Delta_y} - n\right)\pi}$$

Interpolador ideal - para calcular a intensidade da imagem em um único ponto não amostrado, são necessários todos os pixels (e não apenas os vizinhos)

Exercício

Seja $f(x, y) = 2 \cos 2\pi(3x + 4y)$

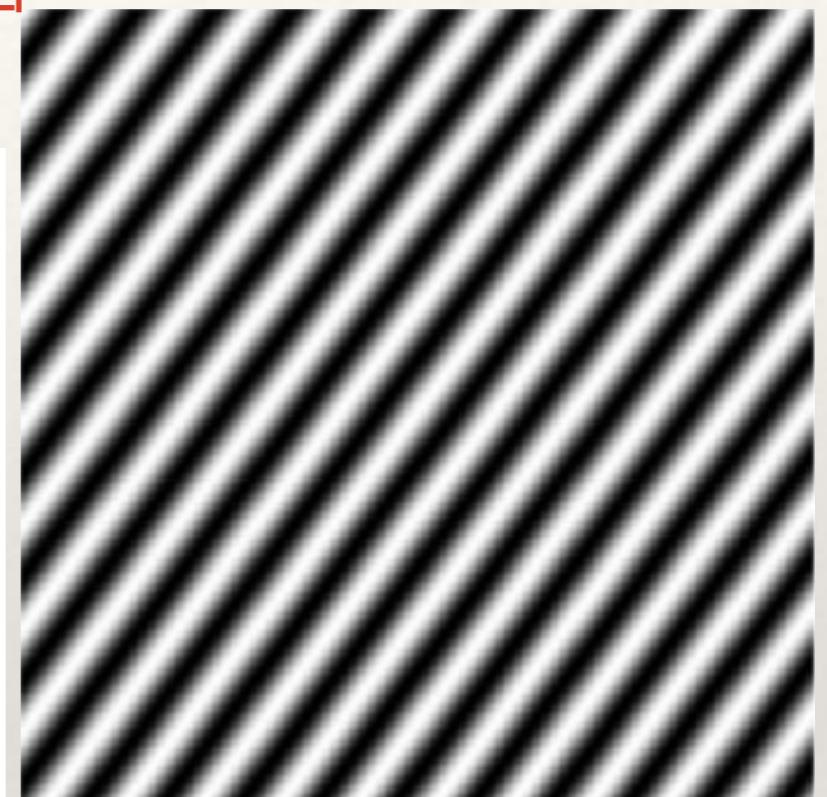
Usar $\Delta_x = \Delta_y = 0,2$ para amostrar a imagem

Para recuperar a imagem, usar um FPB com região de suporte retangular cujas freqüências de corte seja iguais à metade da freqüência de amostragem. Encontrar a imagem recuperada.

$$\Rightarrow \omega_x = \omega_y = 2\pi / \Delta_{xy} = 2\pi(5) = 10\pi \text{ (freqüências de amostragem)}$$

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \Delta_x \Delta_y = \frac{1}{25}, & -5\pi \leq \omega_1 \leq 5\pi, \quad -5\pi \leq \omega_2 \leq 5\pi \\ 0, \text{ cc} \end{cases}$$

x
y



$$f(x, y) = 2 \cos 2\pi(3x + 4y) \Rightarrow$$

$$F(f_1, f_2) = \delta(f_1 - 3, f_2 - 4) + \delta(f_1 + 3, f_2 + 4)$$

$$F(\omega_1, \omega_2) = \delta(\omega_1 - 6\pi, \omega_2 - 8\pi) + \delta(\omega_1 + 6\pi, \omega_2 + 8\pi)$$

A imagem é de faixa limitada

$$f_{x0} = 3, \quad \omega_{x0} = 6\pi$$

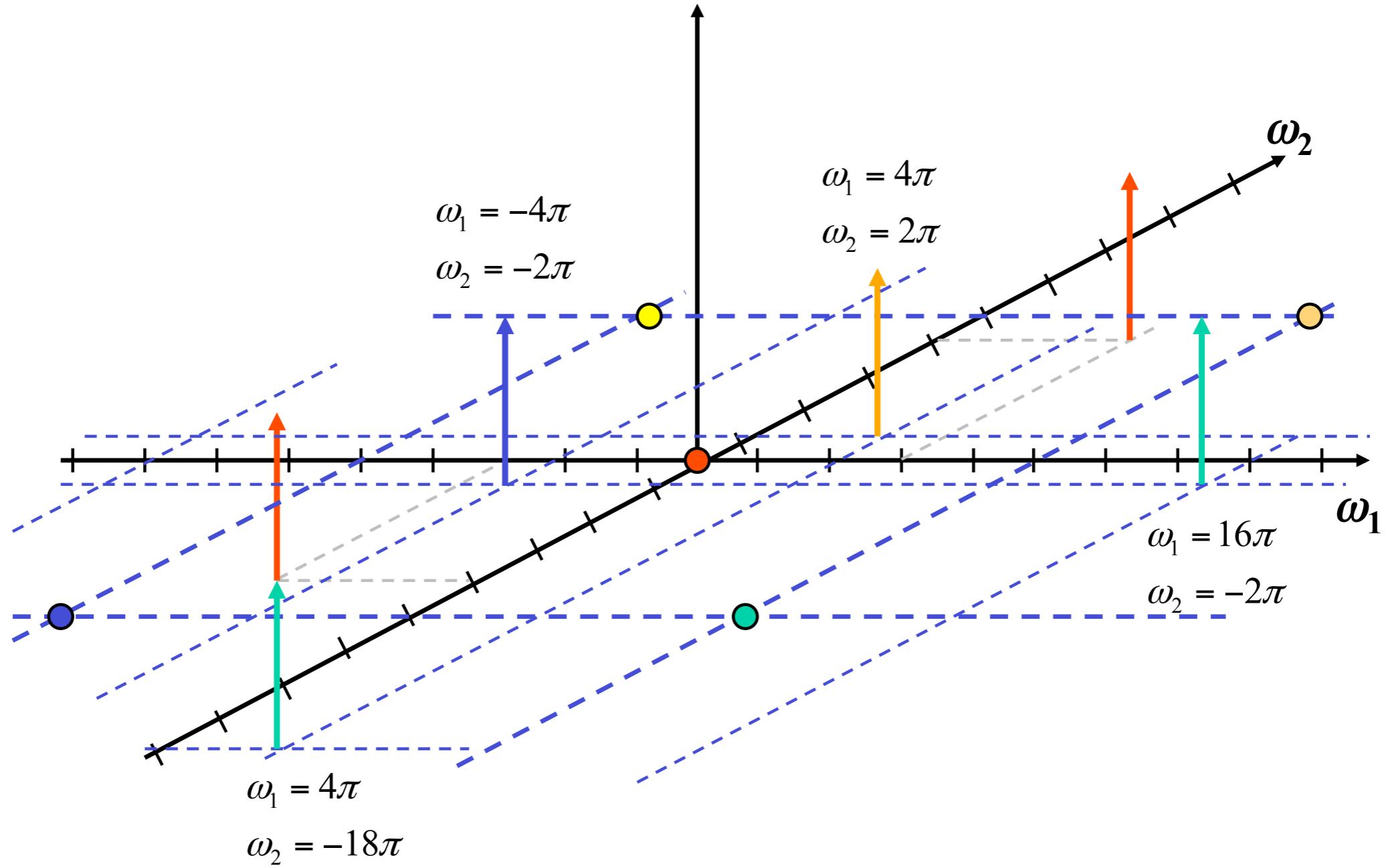
$$f_{y0} = 4, \quad \omega_{y0} = 8\pi$$

Para que não ocorra aliasing: $\omega_x > 12\pi$

$$\omega_y > 16\pi$$

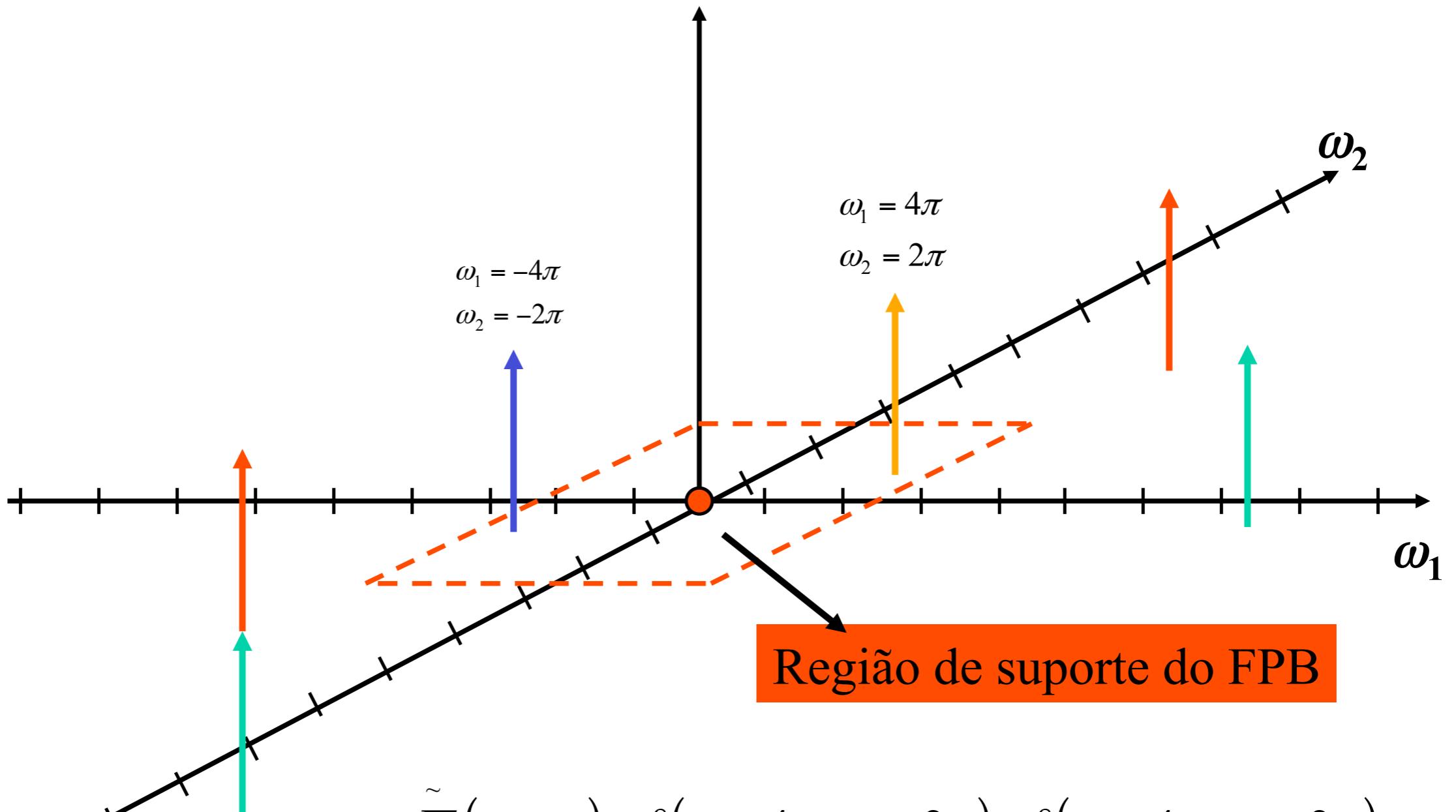
Portanto, é de se esperar que ocorra *aliasing* nas duas direções

Espectro de freqüências espaciais



Espectro original, centrado na origem, está em vermelho.
Demais cores fazem parte das réplicas do espectro original, centradas no ponto de mesma cor, como consequência da amostragem.

Espectro de freqüências espaciais



$$\tilde{F}(\omega_1, \omega_2) = \delta(\omega_1 - 4\pi, \omega_2 - 2\pi) + \delta(\omega_1 + 4\pi, \omega_2 + 2\pi)$$

$$\tilde{f}(x, y) = 2 \cos 2\pi(2x + y)$$

Imagen original x Imagen recuperada

Imagen original

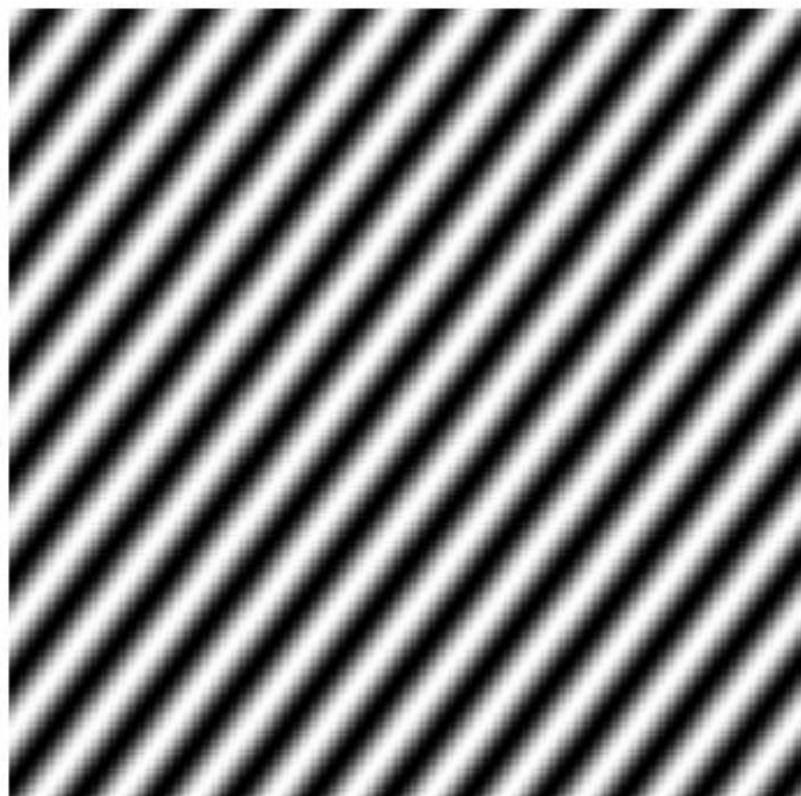
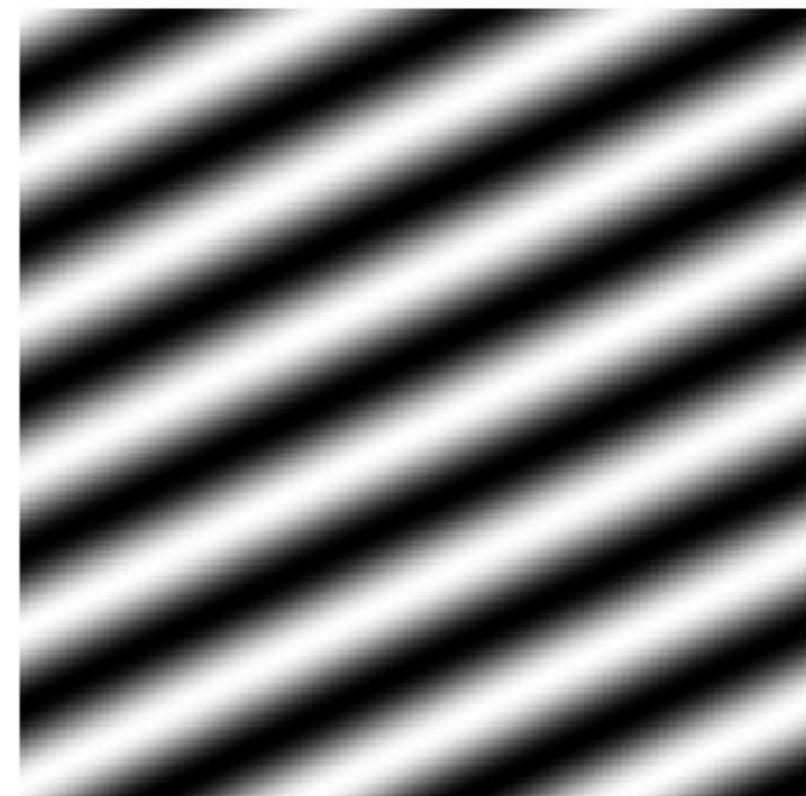


Imagen recuperada



$$f(x, y) = 128 + 128 \cos 2\pi(3x + 4y)$$

$$\tilde{f}(x, y) = 128 + 128 \cos 2\pi(2x + y)$$

Aliasing em Imagens

Suponha sistema de aquisição perfeito, em que o número de amostras possíveis é fixo em 96x96. Utilizando esse sistema para digitalizar padrões de “tabuleiros de dama”, ele poderá resolver problemas de até 96x96 quadrados. Mas o que acontece quando o detalhe é menor que 1 pixel da câmera?

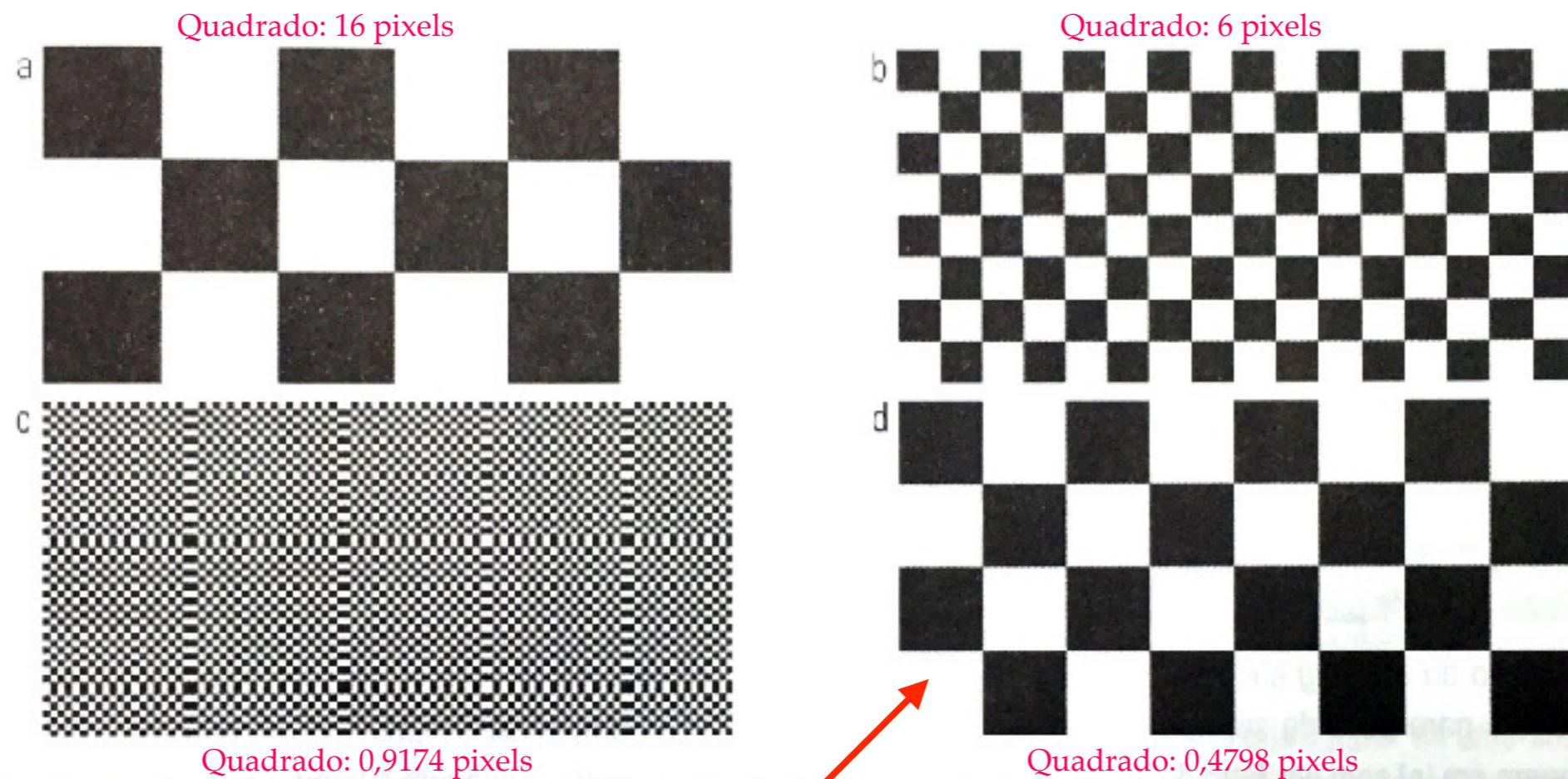


Figura 4.16 Aliasing em imagens. Em (a) e (b), os tamanhos dos lados dos quadrados são 16 e 6 pixels, respectivamente, e o aliasing é visualmente desprezível. Em (c) e (d), os lados dos quadrados são 0,9174 e 0,4798 pixels, respectivamente, e os resultados mostram um aliasing significativo. Observe que (d) é mascarada como uma imagem “normal”.

Cuidado: o aliasing pode gerar resultados bastante enganosos !

Aliasing em imagens reamostradas



Figura 4.17 Ilustração do *aliasing* em imagens reamostradas. (a) Imagem digital com *aliasing* visual desprezível. (b) Resultado do redimensionamento da imagem para 50% de seu tamanho original por meio da exclusão de pixels. O *aliasing* é claramente visível. (c) Resultado do borramento da imagem em (a) com um filtro de média 3×3 antes do redimensionamento. A imagem é ligeiramente mais borrosa do que (b), mas o *aliasing* deixa de ser visível. (Imagen original: cortesia de Laboratório de Compressão de Sinal, Universidade da Califórnia, Santa Barbara.)

O “equivalente” digital da filtragem antialiasing de imagens contínuas é atenuar as altas frequências de uma imagem digital, suavizando-a antes da reamostragem.

Ilustração de *jaggies* na redução de imagens

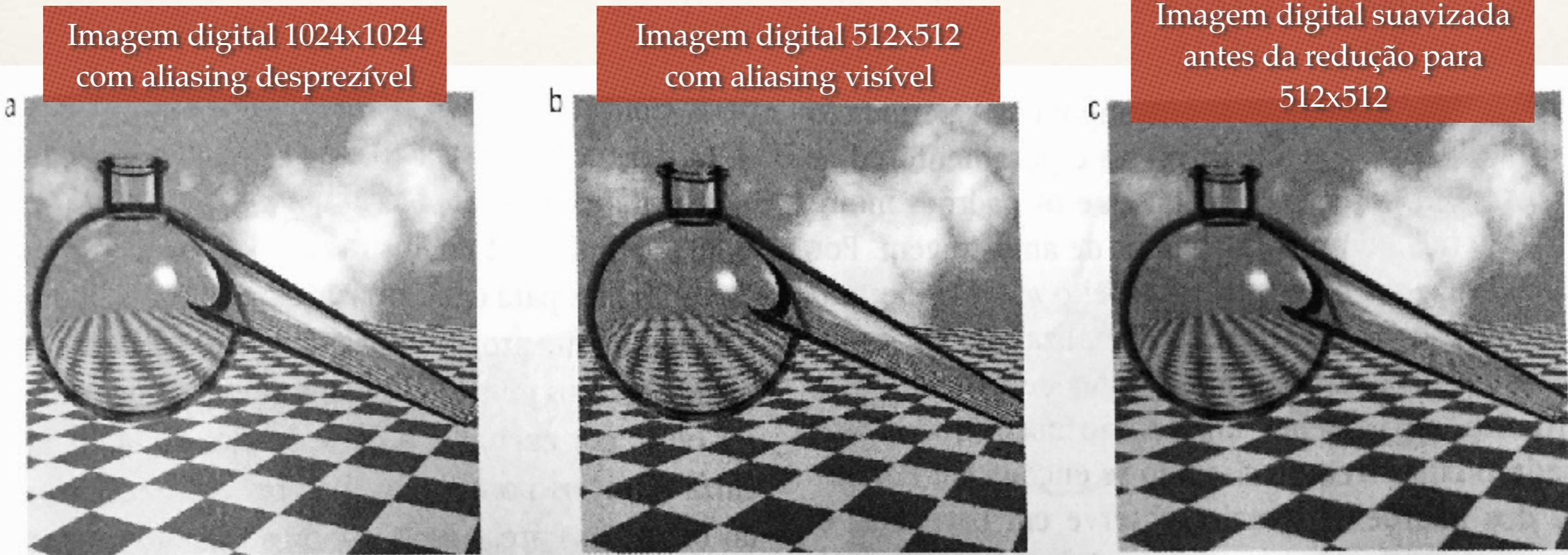
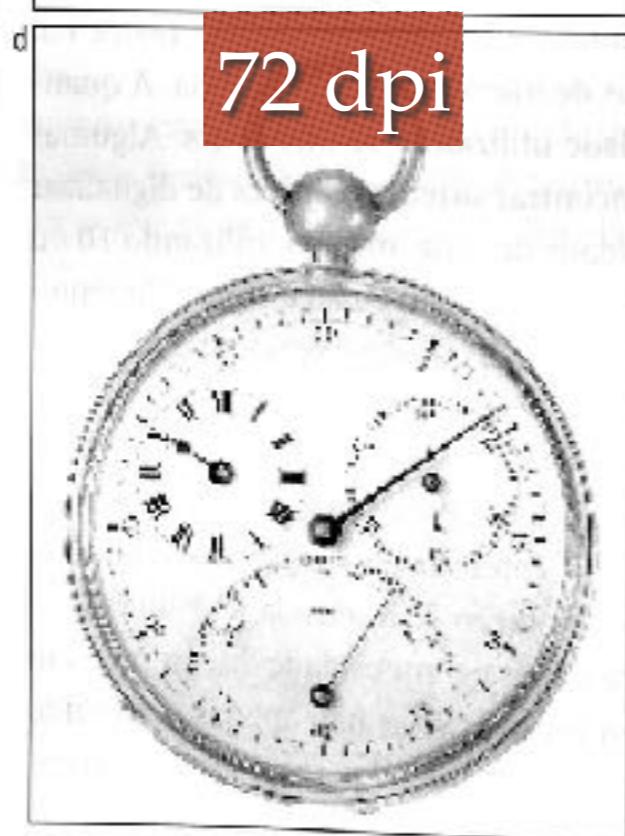
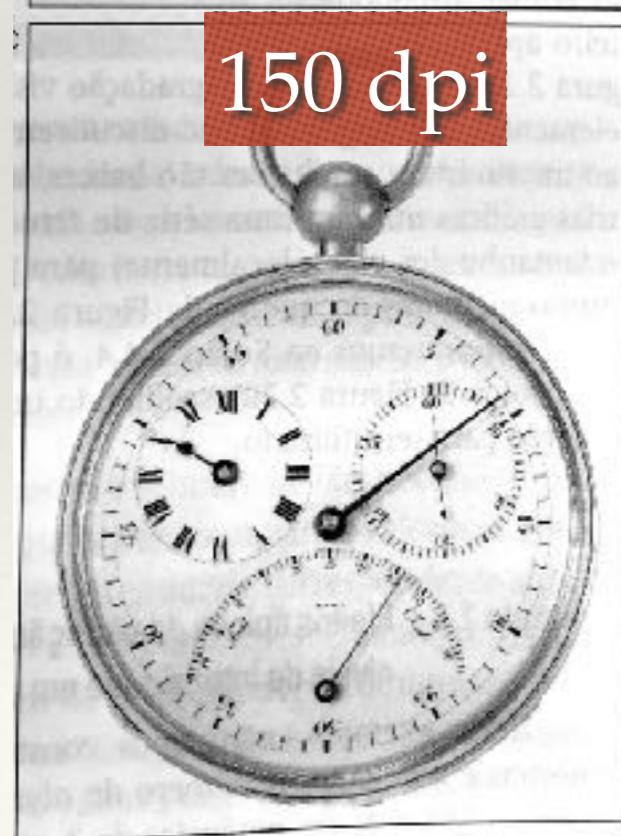
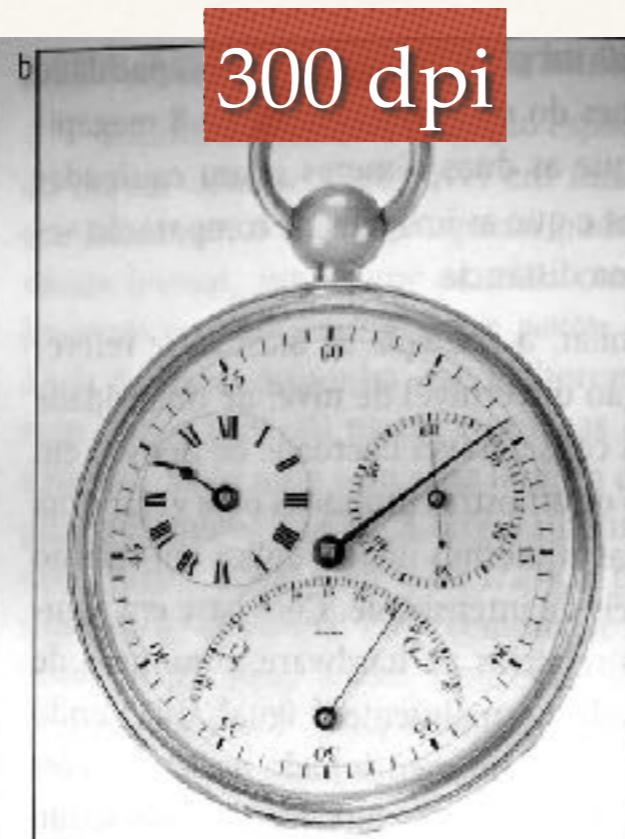
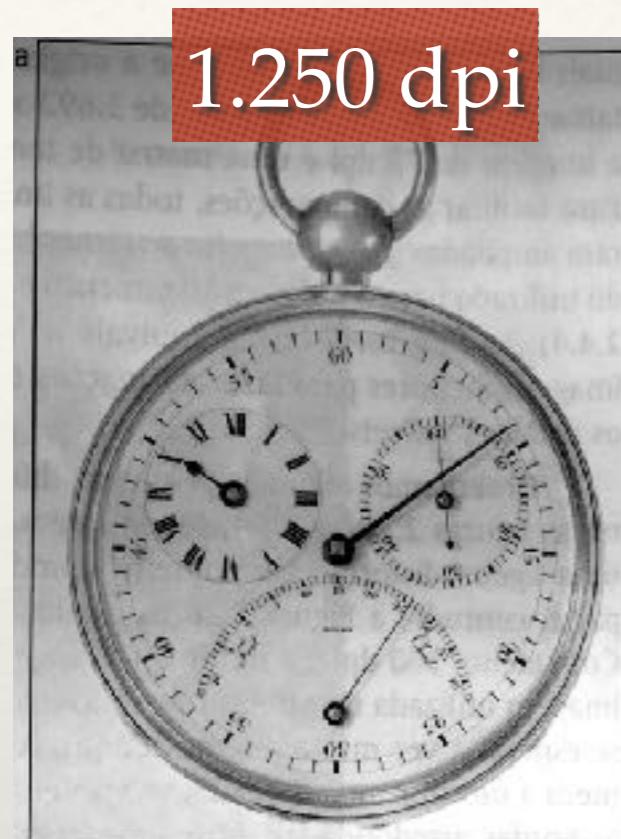


Figura 4.18 Exemplo de *jaggies* (serrilhado). (a) Imagem digital 1.024×1.024 de uma cena gerada por computador com *aliasing* desprezível. (b) Resultado da redução de (a) para 25% de seu tamanho original utilizando a interpolação bilinear. (c) Resultado do borramento da imagem em (a) com um filtro de média 5×5 antes do redimensionamento para 25% utilizando a interpolação bilinear. (Imagen original: cortesia de D. P. Mitchell, Mental Landscape, LLC.)

Quando se trabalha com imagens com alto conteúdo de bordas, os efeitos do aliasing são vistos como componentes serrilhados de imagem, chamados de *jaggies*.

Efeitos típicos da redução da resolução espacial da imagem digital



Efeitos típicos da redução da resolução espacial. Imagens amostradas com:
(a) 1.250 dpi (b) 300 dpi
(c) 150 dpi (d) 72 dpi

obs.: As imagens com resolução mais baixa são menores que a original. Por exemplo, o tamanho da imagem original é 2.692 x 2.812 pixels, mas a imagem de 72 dpi é uma matriz de tamanho 213 x 162. Mas para facilitar as comparações, todas as imagens foram ampliadas (zoom) de volta ao tamanho normal.

dpi = dots per inch (pixels por polegada)

Resolução mínima para impressão: 300 dpi