PUC MINAS - CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Matemática Discreta - Roteiro de Aulas

Assunto: Técnicas de Demonstração

1 Um pouco sobre Matemática Discreta

O mundo da Matemática pode ser dividido em duas partes: a matemática *contínua* e a *discreta*. A diferença entre elas pode ser exemplificada pelos relógios. A matemática contínua corresponde aos relógios analógicos. Neles, os ponteiros se deslocam suave e continuamente ao longo do tempo. O estudo da matemática contínua está intimamente ligado ao estudo dos números reais e oferece modelos para analisar fenômenos que se modificam continuamente ao longo do tempo, como o movimento eliptico dos planetas ao redor do sol ou o deslocamento de uma corrente de ar na atmosfera.

Já a matemática discreta corresponde ao relógio digital, que mostra um segundo em seguida do outro, como se desconsiderássemos as frações de segundo. O conjunto dos números inteiros é o que melhor se alinha ao estudo da matemática discreta. Segundo a *Wikipédia*, o site da enciclopédia livre, "as pesquisas em matemática discreta aumentaram na segunda metade do século XX, sendo parte, devido ao desenvolvimento de computadores digitais que operam em passos discretos e armazenam dados em bits discretos. Os conceitos e notações da matemática discreta são úteis para estudar e descrever objetos e problemas em ramos da ciência da computação, tais como algoritmos de computador, linguagens de programação, criptografia, prova automática de teoremas e desenvolvimento de software".

A matemática discreta abrange diversos tópicos, alguns deles estudados nesta disciplina: Análise Combinatória, Técnicas de Demonstração e Teoria dos Números (que estuda as propriedades dos números inteiros).

2 Técnicas de Demonstração

Surge naturalmente a pergunta: O que são e por que desenvolver técnicas de demonstração? Antes de tudo, precisamos fazer alguns comentários sobre *teoremas*. O termo teorema foi introduzido pelo grande matemático Euclides (360 a.C. - 295 a.C.) em sua (também grande) obra *Os Elementos*, onde foi criada a Geometria Euclidiana que conhecemos hoje. Um teorema é uma afirmação matemática verdadeira que pode ser provada, ou seja, demonstrada através de argumentação lógica. Uma boa "fluência"em técnicas de demonstração permite o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, uma característica muito importante para quem trabalha com computação.

Na maioria das vezes, um teorema vem expresso na forma "se p então q", que denotamos por $p \to q$, onde p e q são afirmações que chamamos de *hipótese* e *tese*, respectivamente.

Em geral, para se formular um teorema, um pesquisador tem alguns casos nos quais sua proposição é verdadeira. Nesse momento ele tem um raciocínio dedutivo que o leva a formular uma (até então) conjectura (como são chamados os teoremas antes de serem provados), que passará a ser teorema depois de demonstrada através de raciocínio lógico.

Por exemplo, você tem em mãos alguns números inteiros divisíveis por 9: 9, 18, 27 e 36. Observa-os e constata que todos eles também são divisíveis por 3. Se, denotamos por p : "um inteiro é divisível por 9 e q : "um inteiro é divisível por 3 , você estabelece a conjectura $p \to q$ como " Se um inteiro é divisível por 9, então ele também é divisível por 3". Depois de provada para todos os casos possíveis, no caso, para todos os inteiros que cumprem a hipótese de ser divisível por 9, sua conjectura será finalmente um teorema! Veremos em breve a demonstração dessa (até então) conjectura.

Se for possível encontrar um exemplo que contrarie a sua conjectura, ela será falsa e não poderá ser considerada um teorema. Exemplos desse tipo são chamados de contra exemplo e basta apenas um para garantir a falsidade da conjectura. Por exemplo, para mostrar que é falsa a proposição que diz que "todo inteiro positivo é par", basta exibir um único inteiro positivo ímpar, por exemplo o número 1. Porém, fique atento: exemplos verdadeiros não provam que uma conjectura é verdadeira, a menos que ela seja feita exatamente sobre eles.

Uma demonstração é uma argumentação que deve ser escrita de maneira padronizada e que mostra, de maneira indiscutível, que uma afirmação é verdadeira. Existem vários tipos de provas e esse será nosso próximo objetivo: aprender técnicas de demonstração.

Há vários métodos de demonstrar teoremas, como veremos a seguir.

2.1 Demonstrações Diretas, Indiretas e por Absurdo

Numa demonstração *direta* do teorema $p \to q$, partimos da hipótese p e por meio de argumentos lógicos verdadeiros, mostramos que a tese q é verdadeira. Vejamos um exemplo.

Teorema 1 *Se um inteiro é divisível por 9, então ele também é divisível por 3.*

Demonstração: Seja n um inteiro positivo divisível por 9. Então existe um inteiro k tal que $n = 9k$. Portanto, $n = 9k = (3 \cdot 3)k = 3(3k)$, o que garante que n também é divisível por 3, já que o número $3k$ também é inteiro.

$\square$

A forma como a exposição de uma demonstração pode ser colocada, pode variar para uma linguagem mais simbólica e pode ser mais detalhada ou mais direta, como a que fizemos.

Muitas vezes, pode ser difícil partir da hipótese p e chegar diretamente à hipótese q e a técnica de demonstração pode mudar para a demonstração indireta ou na forma contrapositiva. A base dessa técnica é o fato de que se o teorema $p \to q$ é verdadeiro, sempre que a hipótese p for verdadeira, deveremos ter a tese q também verdadeira. Portanto, se negarmos a tese q (ou seja se admitirmos que sua negação é verdadeira) deveremos ter a negação da hipótese p (isto é a negação da hipótese também deve ser verdadeira). Uma demonstração *indireta* (ou na forma contrapositiva) consiste na prova direta da releitura (*não* q) $\to$ (*não* p) de $p \to q$. Veja o exemplo seguinte:

Teorema 2 *Se n^2 é um inteiro par, então n é um inteiro par.*

Numa tentativa inicial de demonstrar o teorema acima diretamente, teríamos: se n^2 é par, ou seja, se $n^2 = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, então precisamos garantir que $n = \sqrt{2k}$ é inteiro, fato que nem sempre é verdadeiro. Vamos, portanto, a seguir, provar o teorema na sua forma contrapositiva:

"Se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar"

Demonstração: Se n é um inteiro ímpar, então $n = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, que é um inteiro ímpar, já que $2k^2 = 2k \in \mathbb{Z}$

$\square$

Se um teorema $p \to q$ é verdadeiro, sua hipótese p e sua tese q são verdadeiras; logo ao assumirmos que a hipótese é verdadeira e a tese é falsa (ou seja, que a negação da tese é verdadeira), devemos ter alguma contradição, isto é um *absurdo*. Uma demonstração por absurdo se baseia nessa idéia. Vejamos o exemplo seguinte:

Teorema 3 *Se um número n é somado a ele próprio e o resultado é o próprio n, então $n = 0$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que sejam verdadeiros $n + n = n$ e $n \neq 0$. Assim:

Se $n + n = n$
$\Rightarrow 2n = n$
$\Rightarrow 2n - n = 0$
$\Rightarrow n(2-1) = 0$
$\Rightarrow n(1) = 0$

Como supusemos $n \neq 0$, podemos dividir a equação acima por n e teremos $1 = 0$, o que é um absurdo. Logo, podemos concluir que $n = 0$.

$\square$

2.2 Demonstrações por Indução

Indução Matemática é um método de prova matemática tipicamente usado para estabelecer que um fato ou uma propriedade é verdadeira sobre todos os números naturais. Esse método funciona provando que a dada propriedade é verdadeira para $n = 1$, e em seguida, provando que se a propriedade é válida para o número natural n, então ela também é válida para o número natural seguinte. Dessa maneira, a propriedade será válida para qualquer valor natural através da repetição desse processo.

Para entender por que os dois passos são suficientes, é útil pensar no seguinte problema: Você está subindo uma escada infinitamente alta. Como saber que será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto?

Suponha as seguintes hipóteses:

i. Você consegue alcançar o primeiro degrau;

ii. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo.

Pela hipótese i, você é capaz de chegar ao primeiro degrau; pela hipótese ii, você consegue chegar ao segundo; novamente pela hipótese ii, chega ao terceiro degrau; e assim sucessivamente, será capaz de chegar ao degrau que quiser. Mas se você não puder cumprir uma das condições acima, o resultado não será possivel.

Outra forma interessante de entender indução matemática é através do efeito dominó: se você tem uma longa fila de dominós em pé e você puder assegurar que:

i. O primeiro dominó cairá;

ii. Sempre que um dominó cair, seu próximo vizinho também cairá; então podemos concluir que todos os dominós cairão. Observe porém que se uma as condições i ou ii falhar, a fila continuará intacta.

Formalmente falando, uma demosntração por *indução matemática* é baseada no

> **Princípio de Indução Matemática:** *Seja $P(n)$ uma propriedade sobre os números naturais. Suponha que:*
>
> *i. $P(1)$ seja verdadeira; e*
> *ii. qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, sempre que $P(k)$ é verdadeira, segue que $P(k+1)$ também é verdadeira.*
>
> *Então, segue que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Toda demonstração por indução deve garantir a condições *i* e *ii* do Princípio de Indução Matemática, chamadas de passo base e passo de indução, respectivamente. O passo de indução é uma condicional em que a hipótese é chamada de "hipótese de indução", que deverá ser suposta verdadeira, nos restando mostrar, através dela, que o caso seguinte também é verdadeiro. Vejamos o exemplo seguinte:

Teorema 4 *A soma dos n primeiros ímpares naturais é n^2*

Demonstração: Devemos mostrar que $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos prová-la por indução em n. Considere para tanto que:

A proposição vale se $n = 1$, já que $1 = 1^2$, ou seja a soma do primeiro ímpar positivo é 1^2. (E vale o passo base!)

Para o passo de indução devemos supor a:

Hipótese de indução: Suponha que a proposição seja válida para $n = k$, ou seja: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.

Devemos agora, dar o *passo de indução*, isto é, garantir, usando a hipótese de indução que a fórmula também é verdadeira se $n = k + 1$. Vejamos:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + [2(k + 1) - 1] &= 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + [2(k + 1) - 1] \\ &= K^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2, \end{aligned}$$

garantindo o passo de indução.

Observe que a hipótese de indução foi usada no passo de indução quando usamos que a soma dos k primeiros inteiros positivos ímpares é k^2.

Logo, pelos passos acima, de acordo com o Princípio de Indução Matemática garantimos que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

3 Exercícios Propostos

1. Prove ou dê contra-exemplo para as afirmações abaixo
   (a) Toda figura geométrica com quatro ângulos retos é um quadrado.
   (b) Se um número real não é positivo, então ele é negativo.
   (c) Todos os triângulos têm um ângulo interno igual a $90°$.
   (d) Se $m + n$ é ímpar, então m e n devem ser ímpares.
   (e) O produto de quasiquer três inteiros consecutivos é par.
   (f) A soma de quasiquer três inteiros consecutivos é par.
   (g) A soma de um inteiro com seu cubo é par.
   (h) Para todo primo ímpar n, $n + 4$ é primo.
   (i) O produto de dois números irracionais é irracional.
2. Mostre que se $n = 25,\ 100$ ou 169 então n é um quadrado perfeito e é a soma de dois quadrados perfeitos.
3. Prove que:
   (a) A soma de dois interos pares é par.
   (b) A soma de dois inteiros ímpares é par.
   (c) O produto de dois inteiros consecutivos é sempre par.
   (d) O quadrado de um inteiro par é divisível por 4.
   (e) Se $x^2 - 5x + 6 = 0$, então $x \neq 4$.
   (f) Se x é par e primo, então $x = 2$.
   (g) Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.
   (h) Se dois inteiros são divisíveis por um inteiro n, então a soma desses dois inteiros também é divisível por n.
   (i) $\sqrt{2}$ é irracional.
   (j) $\sqrt{3}$ é irracional.
4. Prove por indução que a soma dos ângulos internos de um polígono simples fechado é $S_n = (n - 2)180°$.

5. Mostre que existem infinitos números primos.
6. Se a é um número real positivo, prove que $ln\ a^n = n\ ln\ a$ para todo $n \geq 1$ inteiro.
7. Mostre que para cada inteiro $n > 0$:
   (a) O inteiro $9^n - 1$ é divisível por 8.
   (b) O inteiro $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.
   (a) O inteiro $3^{4n} - 1$ é divisível por 80.
8. O que está errado com a seguinte "demonstração"por indução matemática?

   Vamos provar que, para qualquer inteiro positivo n, n é igual a $1 + n$. Suponha que $P(k)$ é verdadeira: $k = k + 1$ Somando 1 aos dois lados da equação obtemos $k + 1 = k + 2$. Portanto, P(k+1) é verdadeira.
9. Temos 2^n moedas de ouro, sendo uma delas falsa, com peso menor que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos, sem nenhum peso. Prove, por indução, que é possível achar a moeda falsa com n pesagens.
10. Temos 3 moedas de ouro, sendo uma delas falsa, com peso menor que as demais. Qual o número mínimo de pesagens para achar a moeda falsa?
11. Temos 3^n moedas de ouro, sendo uma delas falsa, com peso menor que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos, sem nenhum peso. Prove, por indução, que é possível achar a moeda falsa com n pesagens.
12. Se $x \neq 1$ é um número real, mostre, para cada inteiro $n \geq 1$ que vale a fórmula:
$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{n^{n+1} - 1}{x - 1}$$
13. Encontre uma fórmula para a soma abaixo e prove-a por indução:
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$