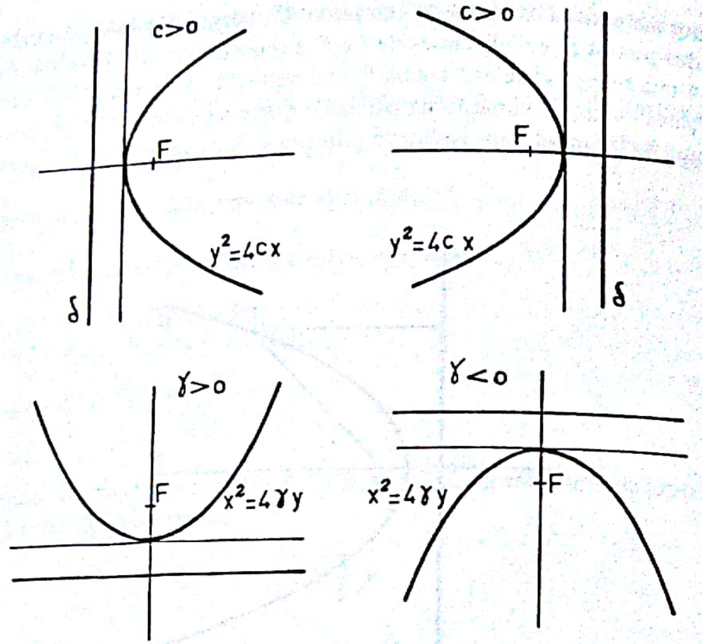

fig.55

4.3 Exemplo. Dê a equação da parábola cujo foco é $(2, 0)$ e cuja diretriz é $x = -2$.

Solução. De acordo com a notação de 4.2, temos $c = 2$, logo a equação é

$$y^2 = 8x.$$

4.4 Da equação canônica da parábola, decorre que esta intercepta a reta focal em um único ponto V (veja Exerc. 4.1). Este ponto é conhecido como *vértice da parábola*. É fácil ver (Exerc. 4.1) que, se a parábola estiver sob a forma canônica, então o vértice V será a origem, isto é, $V = (0, 0)$. A reta focal r e também a reta s perpendicular a r, passando pelo vértice da parábola, são conhecidas como *eixos da parábola*. Quando a parábola está sob a forma canônica, seus eixos são os eixos coordenados. É fácil ver que a parábola é simétrica com respeito à reta focal, não o sendo, entretanto, com respeito ao outro eixo (Exerc. 4.2).

4.5 Exemplo. Verifique que as equações abaixo representam parábolas; dê seus focos e diretrizes.

a) $2x^2 = 5y$.

b) $4y^2 - 9x = 0$.

c) $y^2 + 4x = 0$.

Solução. a) Dividindo a equação (a) por 2, ela se escreve como

$$x^2 = \frac{5}{2}\, y.$$

Logo, ela representa a parábola de foco $(0, \frac{5}{8})$ e diretriz $y = -\frac{5}{8}$.

b) Como a equação (b) pode ser reescrita como

$$y^2 = -\frac{9}{4}\, x,$$

vemos que ela representa a parábola de foco $(\frac{9}{16}, 0)$ e diretriz $x = -\frac{9}{16}$.

c) Como a equação (c) pode ser reescrita como $y^2 = -4x$, vemos que ela representa a parábola de foco $(-1, 0)$ e diretriz $x = 1$.

EXERCÍCIOS

4.1. Mostre que a parábola intercepta a reta focal em um único ponto.

4.2. Mostre que parábola é simétrica com respeito à reta focal, não o sendo, entretanto, com respeito ao outro eixo.

4.3. Dê a equação da parábola cuja diretriz é a reta δ, cujo foco é o ponto F e cujo vértice é a origem, onde

a) δ é a reta $x = 5$;

b) $F = (0, 2)$;

c) δ é a reta $y = -3$;

d) $F = (1, 0)$.

4.4. Dadas as equações abaixo, verifique que elas representam parábolas. Dê os focos e as diretrizes.

a) $2x^2 - y = 0$.

b) $y - 4x^2 = 0$.

c) $2y^2 = 13x$.

4.5. Calcule a interseção da parábola $y^2 = 16x$ com a reta $x = 8$.

4.6. Calcule a interseção entre a parábola $x^2 = 2y$ e a elipse $2x^2 + y^2 = 1$.

4.7. A reta perpendicular à reta focal que passa pelo foco da parábola intercepta esta em dois pontos, P_1 e P_2. O segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$ é conhecido como *latus rectum* da parábola. Mostre que na parábola $y^2 = 4cx$, $|P_1P_2| = 4|c|$.

5. AS CÔNICAS. UNIFICAÇÃO DO CONCEITO

A elipse, a hipérbole e a parábola são conhecidas como *curvas cônicas*, ou, simplesmente, *cônicas*. A razão desta denominação é que estas curvas podem ser obtidas como interseção de planos com cones (veja Exerc. 5.9 do Cap. 7). A seguir, vamos dar uma definição geral de cônicas que dará as três curvas acima. Infelizmente, esta definição não engloba a circunferência, que é (como foi visto em 2.1) um caso particular da elipse.

5.1 Tomemos um ponto F, uma reta δ no plano R^2, com $F \notin \delta$ (Fig. 56) e um número real $e > 0$. O lugar geométrico C dos pontos P tais que $d(P, F) = e \cdot d(P, \delta)$ é conhecido como a *cônica* de *foco* F, diretriz δ e *excentricidade* e. A reta r que passa por F e é perpendicular a δ é conhecida como *reta focal* da cônica C. Segue-se diretamente de 4.1 que, se $e = 1$, então C se reduz a uma parábola. Mostraremos a seguir que se $e < 1$, então C será uma elipse, e se $e > 1$, então C será uma hipérbole.

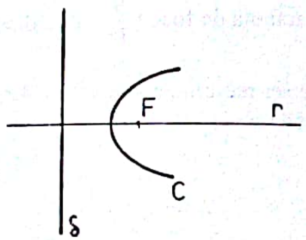

fig.56

5.2 Proposição. *Nas condições de* 5.1, *valem as seguintes afirmações*:

a) *Se* $e < 1$, *então* C *é uma elipse*;

b) *Se* $e > 1$, *então* C *é uma hipérbole*.

Prova. Tomemos o eixo $0x$ para reta focal; o ponto $F = (c, 0)$ com $c \neq 0$, para foco, e a reta $x = \dfrac{c}{e^2}$ para diretriz. Neste caso, temos que um ponto $(x, y) \in C$ se, e somente se,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{c}{e^2}\right|,$$

o que, racionalizando e desenvolvendo, mostra que (x, y) está na cônica C, se, e somente se,

$$x^2 + y^2 - 2xc + c^2 = e^2\left(x^2 - 2\frac{c}{e^2}x + \frac{c}{e^4}\right),$$

que, simplificada, mostra que $(x, y) \in C$ se, e somente se,

$$x^2 + y^2 + c^2 = e^2x^2 + \frac{c^2}{e^2},$$

o que, reduzindo os termos semelhantes, pode ser reescrito como

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = c^2\,\frac{1 - e^2}{e^2}.$$

Finalmente, considerando que:

a) Se $0 < e < 1$, temos $e^2 < 1$; daí, $1 - e^2 > 0$. Logo, existe um número real b tal que $b^2 = c^2\,\dfrac{1 - e^2}{e^2}$. Assim, se tomarmos o número real a tal que $a^2 = \dfrac{c^2}{e^2}$, e dividindo membro a membro a equação acima por $c^2\,\dfrac{1 - e^2}{e^2} = b^2$, temos que ela se escreve como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que, por 2.2, é a equação canônica de uma elipse;

b) Se $e > 1$, temos $1 - e^2 < 0$. Logo, existe um número real b tal que $b^2 = -c^2\,\dfrac{1 - e^2}{e^2}$. Assim, tomando o número real a tal que $a^2 = \dfrac{c^2}{e^2}$, e dividindo membro a membro a equação por $-c^2\,\dfrac{1 - e^2}{e^2} = c^2\,\dfrac{e^2 - 1}{e^2} = b^2$, temos que ela se escreve como

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

ou ainda como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que, por 3.2, é a equação canônica de uma hipérbole. *Cqd.*

5.3 Observação. Da igualdade $a^2 = \dfrac{c^2}{e^2}$ usada acima, segue-se que $e = \dfrac{c}{a}$. Logo, a noção de excentricidade dada aqui coincide com aquelas dadas em 2.5 e 3.5. Da mesma maneira, temos que o foco F usado nesta seção, coincide com um dos focos da elipse ou da hipérbole. Como, no estudo que fizemos, não impusemos qualquer restrição ao sinal de c, segue-se que podemos obter o mesmo resultado trabalhando com o foco $F = (c, 0)$ e a diretriz $x = \dfrac{c}{e^2}$ (como foi feito em 5.2), ou com o foco $\bar{F} = (-c, 0)$ e a diretriz $x = -\dfrac{c}{e^2}$. Concluímos, assim, que a elipse e a hipérbole têm, cada uma, duas diretrizes.

5.4 Exemplo. Dê a equação canônica da elipse de foco $(3, 0)$ e excentricidade $1/2$.

Solução. De acordo com a notação de 5.2, $e = 1/2$ e $c = 3$. Logo, $a^2 = 36$ e $b^2 = 27$ e, daí, a elipse é

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$$

EXERCÍCIOS

5.1. Mostre que, nas condições da Proposição 5.2a, a reta focal da elipse é o eixo $0x$. (*Sugestão*. Basta mostrar que $a^2 > b^2$.)