PUC Minas – Cálculo III – Profa. Maria Clara R. Frota

Máximos e Mínimos de uma função de duas variáveis

Seja f uma função de duas variáveis. Dizemos que :

a) f(a,b) é um **máximo local** de f se existe (uma vizinhança de (a,b)), ou seja, um disco aberto D de centro(a,b) tal que f é definida em D e $f(x,y) \leq f(a,b)$ para quaisquer $(x,y) \in D$.

b) f(a,b) é um **mínimo local** de f se

Importante: Se as condições a) ou b) são satisfeitas em todo o domínio de f, dizemos que f tem um **máximo absoluto ou um mínimo absolut**o em (a,b)

Ex 1) $f(x,y) = x^2 + y^2$ tem um mínimo local e absoluto em (0, 0).

2) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ tem um máximo local e absoluto em (0, 0).)

Teorema 1 Se f tem um máximo ou um mínimo local em (a,b) e ambas as derivadas parciais de primeira ordem $f_x(a,b)$ *e* $f_y(a,b)$ existem, então $f_x(a,b) = 0$ *e* $f_y(a,b) = 0$.

Como podemos enunciar esse teorema em termos de **gradiente**?

Definição de ponto crítico

Um **ponto crítico** (ou estacionário) de uma função f de duas variáveis é um ponto (a,b) onde ambas as derivadas parciais $f_x(a,b) = 0$ *e* $f_y(a,b) = 0$ ou em que uma dessas duas derivadas parciais não existe.

O que podemos dizer sobre um ponto (a,b) em que a função f tem um máximo ou mínimo local?

Em um ponto crítico a função pode não ter máximo nem mínimo local?

Analise a função: $f(x,y) = y^2 - x^2$

Teorema 2 Teste da Derivada Segunda para funções de duas variáveis

Seja (a,b) um ponto críticoda função f e suponhamos que f tem derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas em um disco aberto centrado em (a , b).

Seja $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$

1) Se D>0 e $f_{xx}(a,b) > 0$ então f tem um mínimo local em (a,b)..
2) Se D>0 e $f_{xx}(a,b) < 0$ então f tem um máximo local. em (a,b)..
3) Se D<0 então f não tem um máximo local, nem um mínimo local em ((a,b), mas tem um ponto de sela em (a,b).

Importante: Se D=0 o teste não se aplica e f pode ter em (a,b) um ponto de mínimo local, ou de máximo local ou de sela.

Teorema 3 Valor Extremo para funções de duas variáveis
Se uma função f de duas variáveis for contínua em um conjunto fechado e limitado $D \subset R^2$, então f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em alguns pontos de D.

Determinação dos valores extremos absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado $D \subset R^2$:

1) Determinar os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2) Determinar os valores de extremos de f na fronteira de D.
3) O maior dos valores nos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto de f em D; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto de f em D.

Exercícios:

Determinar os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto dado D:

1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ na região $D=\{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le 4\}$
2) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+2$ na região $D=\{(x,y)\,;\, 0\le x\le 3,\, 0\le y\le 2\}$
3) $f(x,y)=x^2+y^2-2x$ na região triangular de vértices (0,0((2,0) e (0,2)

Problemas aplicados

39) Determine a menor distância entre o ponto (2, 0, 3) e o plano $x+y+z=1$

44) Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45) Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio *r*.

51)Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32.000 cm3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.