A CONGRUÊNCIA MODULAR E O CADASTRO DE PESSOAS FÍSICAS

O Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) é um banco de dados gerenciado pela Secretaria da Receita Federal do Brasil – RFB, que armazena informações cadastrais dos contribuintes. Este banco de dados associa a cada pessoa um número formado por uma sequência de 11 dígitos, sendo o primeiro bloco constituído por 9 dígitos, e o segundo bloco constituído de 2 dígitos, conhecidos como *Dígitos Verificadores*.

“Dígitos verificadores (ou de checagem) são mecanismos que utilizam um ou mais dígitos, acrescentados a uma cadeia de dígitos original, que certifica e/ou corrige esta cadeia, dando maior segurança contra fraudes, erros de digitação ou leitura.” (Silva, 2013)[1]. No CPF, os 2 últimos dígitos são calculados a partir dos 9 dígitos iniciais e tem como objetivo confirmar a autenticidade do número do CPF.

Fonte: Adaptado de Instituto de Previdência Social de Campinas

Considerando um CPF com número de inscrição

$$a_1a_2a_3.a_4a_5a_6.a_7a_8a_9 - a_{10}a_{11}$$

onde a_i é o i-ésimo dígito do CPF, e a_{10} e a_{11} são os dígitos verificadores.

Para determinarmos os dígitos verificadores,

1º) Multiplicamos os 9 primeiros dígitos do CPF, na ordem da esquerda para a direita, pela sequência de números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 respectivamente. Em seguida somamos os produtos obtidos; chamaremos esta soma de S_9.

$$S_9 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 + a_4 \cdot 4 + a_5 \cdot 5 + a_6 \cdot 6 + a_7 \cdot 7 + a_8 \cdot 8 + a_9 \cdot 9$$

[1]SILVA, Elisabete Santana de Ávila e. **Um código co-dígito verificador baseado em D5: uma aplicação dos grupos de simetria**, 2013. 19 f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal de Sergipe, 2013.

2º) O primeiro dígito verificador é o algarismo que devemos retirar de S_9 para que esta soma seja um múltiplo de 11. Em outras palavras, temos que o dígito a_{10} corresponde:

$$(S_9 - a_{10}) \equiv 0 \; mod \; 11 \Rightarrow S_9 \equiv a_{10} \; mod \; 11$$

3º) Para o segundo dígito verificador, repetimos o processo, e agora multiplicamos os 10 dígitos do CPF (já com o primeiro dígito verificador incluído) pela sequência de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Em seguida somamos os produtos obtendo assim S_{10}.

$$S_{10} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 2 + a_4 \cdot 3 + a_5 \cdot 4 + a_6 \cdot 5 + a_7 \cdot 6 + a_8 \cdot 7 + a_9 \cdot 8 + a_{10} \cdot 9$$

4º) Assim como foi feito para a_{10}, o segundo dígito verificador a_{11} é o algarismo que devemos retirar da soma S_{10} para obtermos um múltiplo de 11, ou seja $S_{10} \equiv a_{11} \; mod \; 11$.

Observação: Se na determinação do primeiro e do segundo dígito verificador, S_{10} ou S_{11} forem congruentes a 10 módulo 11, os dígitos verificadores a_{10} e a_{11} serão considerados como sendo o algarismo 0.

Exemplo. Vamos determinar os dígitos verificadores do seguinte CPF:

Fonte: Elaborado pelo autor

Primeiro, vamos multiplicar os termos da sequência 146333989 ordenadamente pelos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Em seguida somamos estes produtos, obtendo assim S_9;

$$\begin{aligned} S_9 &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \\ &= 1 + 8 + 18 + 12 + 15 + 18 + 63 + 64 + 81 \\ &= 280 \end{aligned}$$

Assim, o primeiro dígito verificador a_{10} será dado por: $S_9 \equiv a_{10} \; mod \; 11$ então $280 \equiv a_{10} \; mod \; 11$. Logo, temos que o primeiro dígito verificador $a_{10} = 5$.

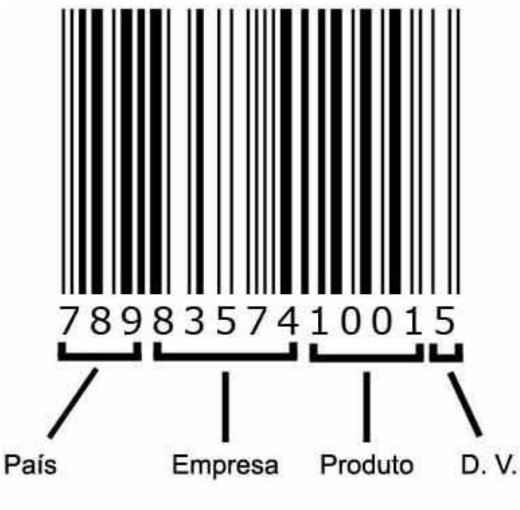
Acrescentando 5 a sequência e a multiplicamos ordenadamente pelos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9. Em seguida somamos os produtos, obtendo assim S_{10};

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 5 \cdot 9 \\
&= 0 + 4 + 12 + 9 + 12 + 15 + 54 + 56 + 72 + 45 \\
&= 279
\end{aligned}
$$

Assim, o segundo dígito verificador a_{11} será dado por: $S_{10} \equiv a_{11}\ mod\ 11$ então $279 \equiv a_{11}\ mod\ 11.$ Logo, temos que o segundo dígito verificador $a_{11} = 4.$ Sendo assim, temos que o CPF completo será $146.333.989 - 54.$

A CONGRUÊNCIA MODULAR E O CÓDIGO DE BARRAS EAN-13

O código de barras é uma representação gráfica de dados, que permite precisão na leitura e captação dos dados, além de dar velocidade e controle nas transações. O sistema EAN-13 (European Article Numbering) é um dos mais utilizados em todo mundo. Ele é composto por 13 dígitos, sendo o último o dígito verificador ou dígito de controle. Os 3 primeiros dígitos se referem ao país de origem do produto – o Brasil é o código 789, os 5 dígitos seguintes são da identificação da empresa e os 4 dígitos seguintes são a identificação do produto.



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando um código de barras do sistema EAN-13 pela sequência

$$a_1a_2a_3.a_4a_5a_6a_7a_8.a_9a_{10}a_{11}a_{12}-a_{13}$$

onde a_i é o i-ésimo dígito do código de barras, e a_{13} é o dígito verificador.

Para determinarmos o dígito verificador do código de barras no sistema EAN-13,

1º) Multiplicamos os 12 primeiros dígitos do código de barras, na ordem da esquerda para a direita, pela sequência de números 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1 e 3, respectivamente. Em seguida somamos os produtos obtidos; chamaremos esta soma de S_{12}.

$$S_{12} = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 3 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 3 + a_5 \cdot 1 + a_6 \cdot 3 + \cdots + a_{12} \cdot 3$$

2º) O dígito verificador é o algarismo que devemos somar a S_{12} para que esta soma seja um múltiplo de 10. Em outras palavras, temos que o dígito a_{13} corresponde à solução da equação modular:

$$(S_{12} + a_{13}) \equiv 0 \; mod \; 10$$

Exemplo: Considere o seguinte código de barras:

Fonte: Elaborado pelo autor

Primeiro, multiplicaremos os termos da sequência 123456789123 por 1 e 3 alternadamente, em seguida, somamos estes produtos.

$$\begin{aligned} S_{12} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ &= 1 + 6 + 3 + 12 + 5 + 18 + 7 + 24 + 9 + 3 + 2 + 9 \\ &= 99 \end{aligned}$$

Assim, o dígito verificador a_{13} satisfaz a relação $(S_{12} + a_{13}) \equiv 0 \, mod \, 10$. Temos então que $(99 + a_{13}) \equiv 0 \, mod$ 10. Logo, o dígito verificador $a_{13} = 1$. Sendo assim, o código de barras é $123456789123 - 1$.

A CONGRUÊNCIA MODULAR E O CALENDÁRIO

Muitas vezes nos passa por despercebido o quão presente a Matemática está em nossas vidas. Existem situações que poderíamos usar desta ciência a nosso favor, e que não recorremos a ela para auxiliar em nossa tarefa, por vários motivos.

Um exemplo de como utilizarmos de nossos conhecimentos sobre Aritmética Modular, é poder determinar o dia da semana que cairá o aniversário de uma pessoa no futuro ou outra data qualquer.

Descreveremos a seguir os passos a serem seguidos para encontrar o dia da semana em que ocorrerá uma data futura qualquer.

1º) Calcule quantos dias faltam para o término do mês atual. Vamos chamar essa quantidade de **A**.

> **Explicação:** O valor **A** é para determinarmos o número de avanços ocorridos nos dias da semana até o fim do mês tomado como ponto de partida. Por exemplo, se primeiro de janeiro de um ano cai em uma sexta-feira, dia 31 de janeiro desse ano cairá em um domingo, pois $(31 - 1) \equiv 2 \; mod \; 7$, ou seja, um avanço de dois dias após sexta-feira.

2º) Calcule quantos dias faltam para o fim do ano, considerando os meses seguintes ao utilizado no primeiro passo. Chame essa quantidade de **B**.

> **Explicação:** Vide explicação do valor **A**. Por exemplo, se dia 31 de outubro de um ano caiu em uma segunda-feira, dia 31 de dezembro desse ano cairá em um sábado, pois para o término do ano faltam: 30 dias de novembro e 31 dias de dezembro. Logo $30 + 31 = 61$ e $61 \equiv 5 \; mod \; 7$, ou seja, ocorreram 5 avanços a partir de segunda-feira, chegando em sábado.

3º) Determine o número de anos completos que se tem até o ano da data desejada. Chame este número de **C**.

> **Explicação:** Raciocínio análogo às explicações apresentadas anteriormente. Como temos que $365 \equiv 1 \; mod \; 7$, o produto dos anos compreendidos em **C** por 365 (dias do ano) em módulo 7, é igual ao próprio **C**.

4º) Determine quantos anos bissextos se passaram durante o período de **C**. Chamaremos este número de **D**.

Explicação: Um ano bissexto possui 366 dias em vez de 365, acrescentando um dia a fevereiro, que passa a ter 29 dias. É necessário saber quantos avanços adicionais ocorreram durante o período **C**.

Os anos bissextos são múltiplos de 4 (exceto os anos múltiplos de 100 e que não são múltiplos de 400). A baixo segue a lista dos últimos, e dos próximos 50 anos bissextos.

Quadro 1 – Anos bissextos entre 1816 e 2224

1816, 1820, 1824, 1828, 1832, 1836, 1840, 1844, 1848, 1852, 1856, 1860, 1864, 1868, 1872, 1876, 1880, 1884, 1888, 1892, 1896, 1904, 1908, 1912, 1916, 1920, 1924, 1928, 1932, 1936, 1940, 1944, 1948, 1952, 1956, 1960, 1964, 1968, 1972, 1976, 1980, 1984, 1988, 1992, 1996, 2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024, 2028, 2032, 2036, 2040, 2044, 2048 2052, 2056, 2060, 2064, 2068, 2072, 2076, 2080, 2084, 2088, 2092, 2096, 2104, 2108, 2112, 2116, 2120, 2124, 2128, 2132, 2136, 2140, 2144, 2148, 2152, 2156, 2160, 2164, 2168, 2172, 2176, 2180, 2184, 2188, 2192, 2196, 2204, 2208, 2212, 2216, 2220, 2224

Fonte: Elaborado pelo autor

5º) Calcule, no ano da data desejada, quantos dias se passaram anteriormente ao mês que contém o dia que objetivamos. Chame este valor de **E**.

Explicação: Análogo ao 2º passo.

6º) Some os valores obtidos de **A**, **B**, **C**, **D** e **E** com o dia da data almejada. Chamaremos o resultado desta soma de **S**. Se a é o número de deslocamento(os) no ciclo de dias da semana à direita, temos que a é congruente à **S** módulo 7, isto é,

$$\boldsymbol{S} \equiv a \; mod \; 7$$

Explicação: A soma **S** é o total de dias entre o dia tomado como referência e a data desejada. Ao fazermos a congruência de **S** módulo 7, temos o deslocamento em dias da semana no período de tempo em questão.

Exemplo: O feriado da Independência do Brasil, dia 07 de setembro deste ano de 2016, caiu em uma quarta-feira. Vamos determinar em qual dia da semana este feriado cairá em 2026.

Primeiro, temos que para o término do mês de setembro faltam 23 dias. Como $23 \equiv 2 \; mod \; 7$, por equivalência temos que $\mathbf{A} = 2$.

	Número de Dias	Número de Dias módulo 7
Dias até o fim do mês	23	2

Para o fim do ano faltam os meses de outubro, novembro e dezembro. Respectivamente, faltam 92 dias para o término do ano, pois outubro tem 31 dias, novembro tem 30 dias e dezembro tem 31 dias. Temos que $92 \equiv 1 \; mod \; 7$, logo $\mathbf{B} = 1$.

		Número de Dias	Número de Dias módulo 7
Meses até o final do ano	**Outubro**	31	3
	Novembro	30	2
	Dezembro	31	3

Entre os anos de 2016 e 2026, são 9 anos completos. Sendo assim, temos que $\mathbf{C} = 2$, pois $9 \equiv 2 \; mod \; 7$ e $365 \equiv 1 \; mod \; 7$, e pela propriedade da *compatibilidade do produto* temos que $(9 \cdot 365) \equiv (2 \cdot 1) \; mod \; 7$.

	Número de Dias	Número de Dias módulo 7
Anos completos	$9 \cdot 365 = 3285$	$2 \cdot 1 = 2$

No período de tempo entre esses anos, existem 2 anos bissextos, 2020 e 2024; sendo assim $\mathbf{D} = 2$.

	Número de Dias	Número de Dias módulo 7
Acréscimo Anos Bissextos	2	2

Como 2026 não é um ano bissexto, temos que a soma dos dias dos meses antessedentes a novembro é de 243 dias. Segue que $243 \equiv 5 \; mod \; 7$, logo $\mathbf{E} = 5$.

		Número de Dias	Número de Dias módulo 7
Meses anteriores ao mês desejado	**Janeiro**	31	3
	Fevereiro	28	0
	Março	31	3
	Abril	30	2
	Maio	31	3
	Junho	30	2
	Julho	31	3
	Agosto	31	3

Por fim, temos que a soma **S** é igual a 19, e $19 \equiv 5 \; mod \; 7$. Sendo assim, contaremos 5 avanços no ciclo de dias da semana a partir de quarta-feira. Logo, dia 07 de setembro de 2026 cairá em uma segunda-feira.

	Número de Dias	Número de Dias módulo 7
Dia do mês para data final	7	0
Soma	3645	5

Assim, a soma do número dos dias módulo 7 é

Soma	5

Assim,

Data final: 07/09/2026, segunda-feira

A seguir, segue a tabela com os dados utilizados no cálculo do dia da semana que cairá o dia 07 de setembro do ano de 2026.

Tabela 1 – Dados utilizados para determinar o dia da semana da data procurada

Data inicial: 07/09/2016, quarta-feira

		Número de Dias		Número de Dias módulo 7
Dias até o fim do mês		23		2
Meses até o final do ano	Janeiro	31	-	-
	Fevereiro	29	-	-
	Março	31	-	-
	Abril	30	-	-
	Maio	31	-	-
	Junho	30	-	-
	Julho	31	-	-
	Agosto	31	-	-
	Setembro	30	-	-
	Outubro	31	x	3
	Novembro	30	x	2
	Dezembro	31	x	3
Anos Completos		$9 \cdot 365 = 3285$		$2 \cdot 1 = 2$
Acréscimo Anos Bissextos		2		2
Meses anteriores ao mês desejado	Janeiro	31	x	3
	Fevereiro	28	x	0
	Março	31	x	3
	Abril	30	x	2
	Maio	31	x	3
	Junho	30	x	2
	Julho	31	x	3
	Agosto	31	x	3
	Setembro	30	-	-
	Outubro	31	-	-
	Novembro	30	-	-
	Dezembro	31	-	-

Dia do mês p/ data final		7	0

Soma: $33 \equiv 5 \bmod 7$

Data final: 07/09/2116, segunda-feira