Técnicas de Demonstração

Prof. Roney R. Nunes

Para trabalharmos com técnicas de demonstração, inicialmente se fazem necessárias algumas definições:

Definição

É um enunciado que descreve o significado de um termo.

Axioma

É o ponto de partido de um raciocínio, uma proposição assumida como verdadeira.

Conjectura

É uma fórmula, frase ou ideia feita baseando-se em palpites, intuições, suposições. É uma sentença proposta como verdadeira, com fundamento não verificado. Uma conjectura *deve* ser provada ou rejeitada.

Teorema

Proposição científica que pode ser demonstrada. Enunciado de uma proposição ou de uma propriedade que se *demonstra* por um raciocínio lógico, partindo de fatos dados ou de hipóteses justificáveis, contidos nesse enunciado.

Lema

Proposição preliminar, cuja demonstração facilita a de um teorema subsequente.

Corolário

Proposição deduzida a partir de uma outra (anteriormente) demonstrada, fazendo com que um conhecimento seja acrescentado a mesma. Em geral, é consequência direta de um teorema.

Em geral, as conjecturas são apresentadas na forma condicional

$$P \rightarrow Q$$

(lê-se "se P, então Q") onde P são as hipóteses da conjectura, e Q a conclusão a qual espera-se chegar a partir da hipóteses.

Exemplo 1.

Exemplos de Conjecturas:

a) Se n é um número ímpar, então n^2 é um número ímpar.
b) Se a e b são números irracionais, então $a + b$ é um número irracional.
c) Se r e s são retas concorrentes com vetores diretores $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$, respectivamente, então $\vec{v_r} \times \vec{v_s} \neq \vec{0}$
d) Se r e s são retas vetores diretores $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$, respectivamente, tais que $\vec{v_r} \times \vec{v_s} \neq \vec{0}$, então r e s são retas concorrentes.
e) Sejam a, b e c números e considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a \leq 0$ o gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada para baixo.
f) A soma de n números naturais consecutivos é um múltiplo de n.
g) $\sqrt{3}$ é um número irracional.
h) $-7 \leq \cos x \leq 16$, $\forall\ x$ real.
i) Se $a^2 \leq b^2$, então $a \leq b$.
j) Seja n um número natural. Quanto maior o valor de n, maior o número de divisores de n.
k) Se f é uma função contínua em $x = a$, então f é derivável em $x = a$.
l) Se f é uma função derivável em $x = a$, então f é contínua em $x = a$.

Dentre as afirmações acima, quais são falsas? E quais são verdadeiras?

Iniciemos pelas conjecturas que podem ser refutadas (b, d, e, f, i, j, k). Como garantir que cada uma delas é falsa?

Para se refutar uma conjectura, é suficiente apresentar um contra-exemplo, mostrando assim que a conjectura é falsa.

CONTRA-EXEMPLO

Apresentar um contra-exemplo para uma conjectura é apresentar um exemplo em que a hipótese é verificada, mas a conclusão proposta não ocorre, isto é, a hipótese é verdadeira mas a conclusão é falsa.

É suficiente apresentar um contra-exemplo para se refutar uma conjectura.

Exemplo 2.

Verifique se a conjectura

se a e b são números irracionais, então $a + b$ é um número irracional

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 3.

Verifique se a conjectura

Se r e s são retas vetores diretores $\overrightarrow{v_r}$ e $\overrightarrow{v_s}$, respectivamente, tais que

$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} \neq \vec{0}$, então r e s são retas concorrentes.

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 4.

Verifique se a conjectura

para todo inteiro positivo n, vale a desigualdade $n! \leq n^2$

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 5.

Verifique se a conjectura

se uma figura plana de 4 lados possui 4 ângulos retos,
então esta figura é um quadrado.

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 6.

Verifique se a conjectura

se ao final do semestre Axkazul tiver nota final 81 em Matemática Discreta,
certamente Axkazul está aprovado na disciplina.

é verdadeira ou falsa.

E para as conjecturas verdadeiras, como demonstrá-las?

O estudo de técnicas de demonstração tem por objetivo transformar, quando possível, conjecturas em teoremas - isto é, provar que a sentença proposta de fato é verdadeira.

Para provar a veracidade de uma conjectura, trabalharemos com as seguintes técnicas de demonstração:

- ✓ demonstração por exaustão
- ✓ demonstração direta
- ✓ demonstração indireta
- ✓ demonstração por absurdo
- ✓ demonstração por indução.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

A técnica de demonstração por exaustão é utilizada para verificar a validade de uma conjectura feita para todos os elementos de um conjunto finito S.

Exemplo 7.

Verifique se a conjectura

se n é um inteiro entre 1 e 100 que é múltiplo de15,
então n também é múltiplo de 3.

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 8.

Verifique se a conjectura

se n *é um número composto entre* 1 *e* 20*,*

então n *tem um fator primo* p *tal que* $p \leq \sqrt{n}$

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 9.

Verifique se a conjectura

todos os alunos matriculados em Matemática Discreta

também estão matriculados em Cálculo I

é verdadeira ou falsa.

A conjectura

a soma de 3 *inteiros consecutivos é um múltiplo de* 3

pode ser demonstrada por exaustão?

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

Na demonstração direta, queremos provar a validade de uma conjectura na forma

$$P \to Q$$

Neste caso, assumiremos que P é verdadeira, e apresentaremos um desenvolvimento lógico a partir deste fato, que permita concluir que Q também é verdadeira.

Exemplo 10.

Verifique se a conjectura

se n é ímpar, então n^2 é ímpar

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 11.

Verifique se a conjectura

a soma de 3 inteiros consecutivos é múltiplo de 3.

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 12.

Verifique se a conjectura

se n *é múltiplo de 6, então* n *é múltiplo de 3*

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 13.

Verifique se a conjectura

para todo número real n, $4(n^2 + n + 1) - 3n^2$ *é quadrado perfeito*

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 14.

Verifique se a conjectura

o produto de três inteiros consecutivos é um número par

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 15.

Verifique se a conjectura

a soma de dois números ímpares é um número par

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 16.

Verifique se a conjectura

o produto de dois números ímpares é um número ímpar

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 17.

Verifique se a conjectura

o produto de duas funções ímpares é uma função ímpar

é verdadeira ou falsa.

DEMONSTRAÇÃO INDIRETA (OU CONTRAPOSITIVA)

A demonstração indireta - ou contrapositiva - de uma conjectura na forma

$$P \to Q$$

consiste em demonstrar a conjectura

$$\sim Q \to \sim P$$

Negaremos a conclusão à qual desejamos chegar, e provaremos com isso que a negação da hipótese.

Para demonstrar $\sim Q \to \sim P$, utilizamos demonstração direta.

Exemplo 18.

Verifique se a conjectura

se n^2 é ímpar, então n é ímpar

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 19.

Verifique se a conjectura

se n é um número natural tal que $n! > (n+1)$, então $n > 2$.

é verdadeira ou falsa.

RECÍPROCA DE UMA CONJECTURA

Dada uma conjectura

$$P \to Q$$

sua recíproca é a conjectura

$$Q \to P$$

Em geral, a veracidade de uma conjectura não implica na veracidade de sua recíproca.

Exemplo 20.

Verifique se a conjectura

se m é múltiplo de 6, então m é par

é verdadeira, mas sua recíproca não.

Uma conjectura da forma

$$P \leftrightarrow Q$$

(lê-se "$P\ se, e\ somente\ se, Q$") é equivalente à combinação das proposições

$$P \to Q\ e\ Q \to P$$

ou seja, para verificar a veracidade de $P \leftrightarrow Q$ devemos demonstrar a verificar que são verdadeiras as conjecturas $P \to Q$ e $Q \to P$, enquanto que para refutar a conjectura $P \leftrightarrow Q$ basta mostrar que não é válida uma das conjecturas $P \to Q$ ou $Q \to P$

Exemplo 21.

Verifique se a conjectura

um inteiro n é ímpar se, e somente se, n^2 é ímpar

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 22.

Verifique se a conjectura

um número n é primo se, e somente se, n é ímpar

é verdadeira ou falsa.

Exemplo 23.

Verifique se a conjectura

sejam x e y inteiros positivos.

$x > y$ se, e somente se, $x^2 > y^2$

é verdadeira ou falsa.

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO (OU CONTRADIÇÃO)

Dada uma afirmação A,

- A e $\sim A$ não podem ser, simultaneamente, verdadeiras;
- A ou $\sim A$ deve, obrigatoriamente, ser verdadeira.

É nesses fatos que se baseia a técnica de demonstração por absurdo.

Na demonstração por absurdo, dada uma conjectura $P \rightarrow Q$, a ideia é demonstrar que $\sim (P \rightarrow Q)$ não pode ocorrer, ou seja, se negamos a conjectura chegaremos a um absurdo e, consequentemente, a conjectura deve ser verdadeira.

Exemplo 24.

Verifique se a conjectura

$$\sqrt{2} \text{ é irracional}$$

é verdadeira ou falsa.

É possível seguir os passos do exemplo anterior, mostrando que $\sqrt{p}$ é irracional, para um número primo p qualquer.

Exemplo 25.

Verifique se a conjectura

existem infinitos números primos

é verdadeira ou falsa.

Exercícios Sugeridos

Verifique se cada conjectura abaixo é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, demonstre. Se falsa, apresente um contra-exemplo.

1. O único inteiro positivo primo e par é 2.
2. Se p e q são primos e $p - q = 3$, então $p = 5$ e $q = 2$.
3. Se n é par, n^2 é par.
4. Se n^3 é ímpar, então n é ímpar.
5. n^4 é par se, e somente se, n é par
6. A soma de dois inteiros de mesma paridade par é par.
7. A soma de dois inteiros ímpares é ímpar.
8. A soma de dois inteiros de paridade distintas é ímpar.

9. $\sqrt{7}$ é irracional
10. $\sqrt{9}$ é irracional
11. $\sqrt{2}$ é irracional
12. O produto de dois inteiros consecutivos é ímpar.
13. O produto de números irracionais é irracional.
14. O quociente de números irracionais é irracional.
15. Se n é inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.
16. Se a, b são números inteiros e $n = ab$, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.
17. Todo múltiplo de 6 também é múltiplo de 3.
18. Todo múltiplo de 3 também é múltiplo de 6.
19. Se x e y são inteiros não nulos, a equação $x^2 - y^2 = 1$ não possui solução.
20. Se x e y são números reais, a equação $x^2 + y^2 = 1$ possui apenas quatro soluções.
21. Todo quadrado é um retângulo
22. Todo retângulo é um quadrado.
23. Se x, y são números inteiros e xy é ímpar, então x e y são ímpares.
24. Se x, y são números inteiros xy é par, então x e y são pares.
25. Se x, y são números inteiros xy é par, então x ou y são pares.
26. Se x e y são racionais, então x^y é racional.
27. Para todo inteiro positivo n, $n! < 2^n$.
28. Dados dois números reais x e y, $x < y$ se e somente se $x^2 < y^2$.
29. Se x, y são inteiros positivos, $x > y$, se e somente se $x^2 > y^2$.
30. Se dois inteiros são divisíveis por n, a soma destes inteiros também é divisível por n.

31. Se k é um inteiro positivo, $2k^2 - 5k + 2$ é primo.
32. Se a, b, c são números primos, então $a^2 + b^2 \neq c^2$.
33. Um número natural n é par se, e somente se, seu algarismo das unidades é par.
34. Se n é um inteiro par, $4 \leq n \leq 12$, então n é uma soma de dois números primos.
35. Se o produto de dois inteiros é divisível por um inteiro n, então pelo menos um destes inteiros é divisível por n.
36. Para todos os inteiros k, se $k > 0$ então $k^2 + 2k + 1$ é um número composto.
37. Existe um número inteiro k tal que $k \geq 4$ e $2k^2 - 5k + 2$ é primo.
38. Se m e n são números inteiros e $m - n$ é par, então $m^3 - n^3$ é par.
39. Se m e n são números inteiros e $m - n$ é ímpar, então $m^3 - n^3$ é ímpar.
40. Se m e n são números inteiros e $m - n$ é par se e somente se $m^3 - n^3$ é par.
41. Para todos os números primos a, b, c, vale a relação $a^2 + b^2 \neq c^2$.
42. Todo número primo é ímpar.
43. Todo animal que vive no oceano é um peixe.
44. Se um número somado à ele mesmo resulta nele mesmo, então este número é 0.
45. Se $n + 1$ senhas diferentes foram distribuídas para n alunos, então algum aluno recebe ≥ 2 senhas.

PARA EXERCÍCIOS ADICIONAIS, LEIA AS SEÇÕES 1.6 E 1.7 DO LIVRO *MATEMÁTICA DISCRETA E SUAS APLICAÇÕES (ROSEN, KENNETH H.), SEXTA EDIÇÃO, E RESOLVA OS PROBLEMAS PROPOSTOS.*

INDUÇÃO MATEMÁTICA

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de que certas sentenças abertas definidas sobre os números naturais são verdadeiras a partir de algum $n_0 \in N$.

Uma **proposição** (ou sentença aberta) $P(n)$ que depende de uma variável n é uma afirmação que pode ser verdadeira ou falsa dependendo do valor de n.

Exemplo 26.

Considere a proposição

$P(n)$: n *é ímpar e primo*

e avalie

$P(1)$

$P(2)$

$P(5)$

$P(7)$

O Primeiro Princípio da Indução

Seja $P(n)$ uma sentença aberta relativa aos números naturais e seja $n_0 \in N$

Suponha que

1. $P(n_0)$ é verdadeira
2. Se $P(k)$ é verdadeira para algum natural k, então $P(k+1)$ também é verdadeira

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Assim, se queremos provar que uma propriedade $P(n)$ é válida para todos os naturais a partir de n_0, podemos

1º) Verificar a validade da propriedade quando $n = n_0$, isto é, provar que $P(n_0)$ é verdadeira.

2º) Supondo que a propriedade é válida para $k \in N$,isto é, que $P(k)$ é verdadeira, provar que a propriedade também é válida para $k+1$, ou seja, $p(k+1)$ também é verdadeira.

Exemplo 27.

Prove por indução que

$$1 \ + \ 2 \ + \ 3 \ + \ 4 \ + \backslash cdots \ + \ n \ = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 28.

Prove por indução que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exemplo 29.

Prove por indução que

$$(1+r)^n \geq 1 + nr, \forall\, n \in N^* \; e \; r > 0$$

Exemplo 30.

Prove por indução que

$$para\ todo\ n \in N\ existe\ k \in N\ tal\ que\ 9^n - 1 = 8k$$

EXERCÍCIOS SUGERIDOS

1. Seja n um número natural. Prove que por indução que

a) $2^n < n!,\ n \geq 4$

b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, n \geq 1$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}, n \geq 1$

d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots\ n)^2, n \geq 1$

e) $n^2 < 2^n, n \geq 5$

f) $3^n - 2$ é $ímpar, n \geq 1$

g) $n^2 + n + 2$ é um número par.

h) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2,\ n \geq 0$

i) $n^2 + 2n$ é múltiplo de 3.

j) $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

k) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

2. Prove por indução a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de termo inicial a e razão q.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule $A^2, A^3\ e\ A^4$
   b) Elabore uma conjectura para $A^n,\ n \in N^*$.
   c) Prove (se possível) que sua conjectura é válida. (Se sua conjectura não for válida, retorne ao item b).

4. Temos 2^n moedas de ouro, sendo uma delas falsa, com peso menor que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos, sem nenhum peso. Prove que é possível achar a moeda falsa com n pesagens.

5. (QUESTÃO ENADE)

Considere a sequência numérica definida por

$$a_1 = a$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{a_n}}, n \geq 1$$

Usando o princípio da indução finita, mostre que $a_n < a$, para todo $n \geq 1$ e $a \geq 2$. Para isso,

a) Escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada;
b) Prove que $a(a-1) > 0$ sempre que $a \geq 2$;
c) Mostre que $\sqrt{a} < a$ para todo $a \geq 2$;
d) Supondo que $a_n < a$, mostre que $a_{n+1} < \sqrt{2a}$
e) Mostre que $a_{n+1} < a$
f) A partir dos passos anteriores, conclua a prova por indução.

PARA EXERCÍCIOS ADICIONAIS, LEIA A SEÇÃO 4.1 DO LIVRO *MATEMÁTICA DISCRETA E SUAS APLICAÇÕES* (ROSEN, KENNETH H.), *SEXTA EDIÇÃO, E RESOLVA OS PROBLEMAS PROPOSTOS.*