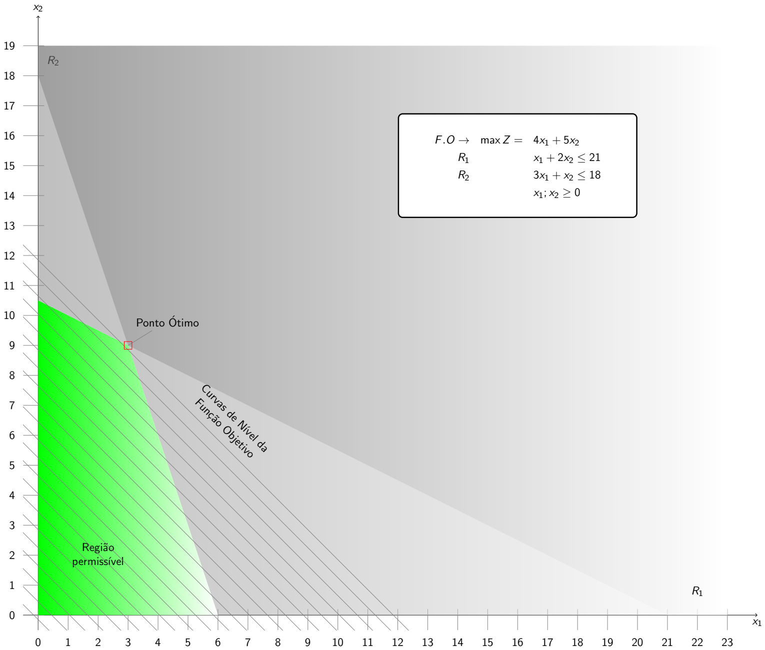
Programação Linear

Análise de Sensibilidade

Prof. Dorirley Rodrigo Alves
dorirley@pucminas.br

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - PUC Minas
Instituto de Ciências Exatas e Informática - ICEI
Otimização de Sistemas


$F.O \rightarrow \max Z = 4x_1 + 5x_2$
$R_1 \quad x_1 + 2x_2 \leq 21$
$R_2 \quad 3x_1 + x_2 \leq 18$
$x_1; x_2 \geq 0$
Ponto Ótimo
Curvas de Nível da Função Objetivo
Região permissível
R_1
R_2
x_1
x_2

Observe o modelo matemático e suas respectivas soluções utilizando o Método Gráfico e o Método Simplex

$$
\begin{aligned}
FO \mapsto \max z \quad &= \quad 4x_1 + 5x_2 \\
\text{Sujeito a:} \quad R_1 : \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 21 \\
R_2 : \quad & 3x_1 + x_2 + \quad x_4 = 18 \\
& x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Tabela Inicial			
	ML	x_1	x_2
$f(x)$	0	4	5
x_3	21	1	2
x_4	18	3	1

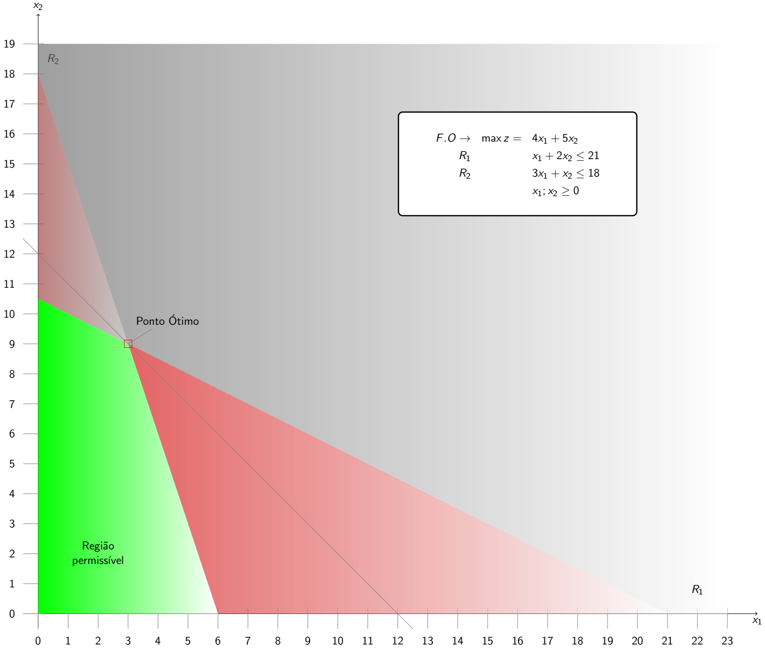
Tabela Final			
	ML	x_3	x_4
$f(x)$	-57	-11/5	-3/5
x_2	9	3/5	-1/5
x_1	3	-1/5	2/5

Análise de Sensibilidade

Há, inicialmente, algumas análises a serem realizadas para uma melhor tomada de decisão.

1. Análise dos parâmetros da Função Objetivo;
2. Analise dos coeficientes das restrições. Ou seja, alterar o valor das variáveis não básicas (VNB);
3. Análise dos limites das disponibilidades.

Analisando os parâmetros da Função Objetivo



Se a reta $\mathbb{Z}$ for girada no sentido horário ou anti-horário sobre o vértice que representa o Ponto Ótimo, esse ponto permanecerá enquanto $\mathbb{Z}$ estiver entre as faixas das Restrições 1 e 2.
De um modo geral, a expressão da F.O pode ser representada da seguinte forma:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \text{Coeficiente angular}(\alpha) = \frac{c_1}{c_2}$$

Matematicamente, temos:

Declividade da Rs_1		**Declividade da FO**		**Declividade da Rs_2**
$x_1 + 2x_2 = 21 \quad \alpha = \frac{1}{2}$	$\leq$	$\frac{4}{5}$	$\leq$	$3x_1 + x_2 = 18 \quad \alpha = 3$

Significa que para sabermos quais alterações podemos realizar na FO, a razão entre c_1/c_2 deve estar sobre esse intervalo.

primeiro exemplo

Suponha que no cenário de exemplo ($z = 4x_1 + 5x_2$) houve uma modificação nos lucros dos itens que compõem a função objetivo, alterando seus valores para ($z = 7x_1 + 8x_2$). A condição continuaria sendo atendida?

$$\max z = 7x_1 + 8x_2 \quad \text{Coeficiente angular}(\alpha) = \frac{7}{8}$$

Matematicamente, temos:

Declividade da Rs_1		**Declividade da FO**		**Declividade da Rs_2**
$\alpha = 0,5$	$\leq$	$\frac{7}{8} = 0,875$	$\leq$	$\alpha = 3$

Portanto, as alterações ainda seriam válidas e o valor final de z passaria a ser $z = 7(3) + 8(9) \therefore z = 93$

segundo exemplo

Lembrando que ($z = 4x_1 + 5x_2$), quais possíveis variações em c_2 que manteriam a solução básica do modelo original? Obs.: os demais parâmetros permanecem os mesmo.
Substituindo $c_1^0 = 4$ (valor original de c_1) na condição

$$0,5 \leq \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{5} = 0,8 \leq 3$$

tem-se que:

$$\begin{cases} 0,5 \times c_2 \leq 4 \Rightarrow c_2 \leq 8 & (1) \\ 3 \times c_2 \geq 4 \Rightarrow c_2 \geq 1,33 & (2) \end{cases}$$

$$1,33 \leq c_2 \leq 8$$

Portanto, enquanto c_2 atender o intervalo especificado, a solução básica ótima do modelo original ($x_1 = 3$ e $x_2 = 9$), permanecerá inalterada.

terceiro exemplo

Lembrando que ($z = 4x_1 + 5x_2$), quais possíveis variações em c_1 que manteriam a solução básica do modelo original? Obs.: os demais parâmetros permanecem os mesmo.
Substituindo $c_2^0 = 5$ (valor original de c_2) na condição

$$0,5 \leq \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{5} = 0,8 \leq 3$$

tem-se que:

$$0,5 \times 5 \leq c_1 \leq 3 \times 5 \Rightarrow 2,5 \leq c_1 \leq 15$$

$$2,5 \leq c_1 \leq 15$$

Portanto, enquanto c_1 atender o intervalo especificado, a solução básica ótima do modelo original ($x_1 = 3$ e $x_2 = 9$), permanecerá inalterada.

Prof. Msc. Dorirley Rodrigo Alves
Análise gráfica
2012

A. Author.
Handbook of Everything.
Some Press, 1990.

Alguém com dúvida?!