Técnicas de Projeto (Parte 4)
Projeto e Análise de Algoritmo

Felipe Cunha

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Técnicas de Projeto

1) Algoritmos Gulosos

Algoritmos Gulosos

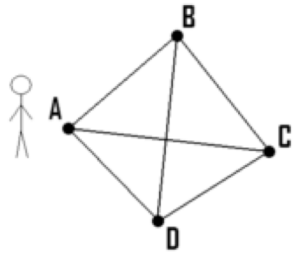
- Tipicamente algoritmos gulosos são utilizados para resolver problemas de otimização.
- Uma característica comum dos problemas onde se aplicam algoritmos gulosos é a existência de subestrutura ótima, semelhante à programação dinâmica:
  - Programação dinâmica: tipicamente os subproblemas são resolvidos quanto à otimalidade antes de se proceder a escolha de um elemento que irá compor a solução ótima
  - Algoritmo guloso: primeiramente é feita a escolha de um elemento que irá compor a solução ótima e só depois um subproblema é resolvido.

Algoritmos Gulosos

- Um algoritmo guloso sempre faz a escolha que parece ser a melhor a cada iteração, ou seja, de acordo com um critério guloso. É uma decisão localmente ótima.
- Propriedade da escolha gulosa: garante que a cada iteração é tomada uma decisão que irá levar a um ótimo global.
- Em um algoritmo guloso uma escolha que foi feita nunca é revista, ou seja, não há qualquer tipo de retrocesso.

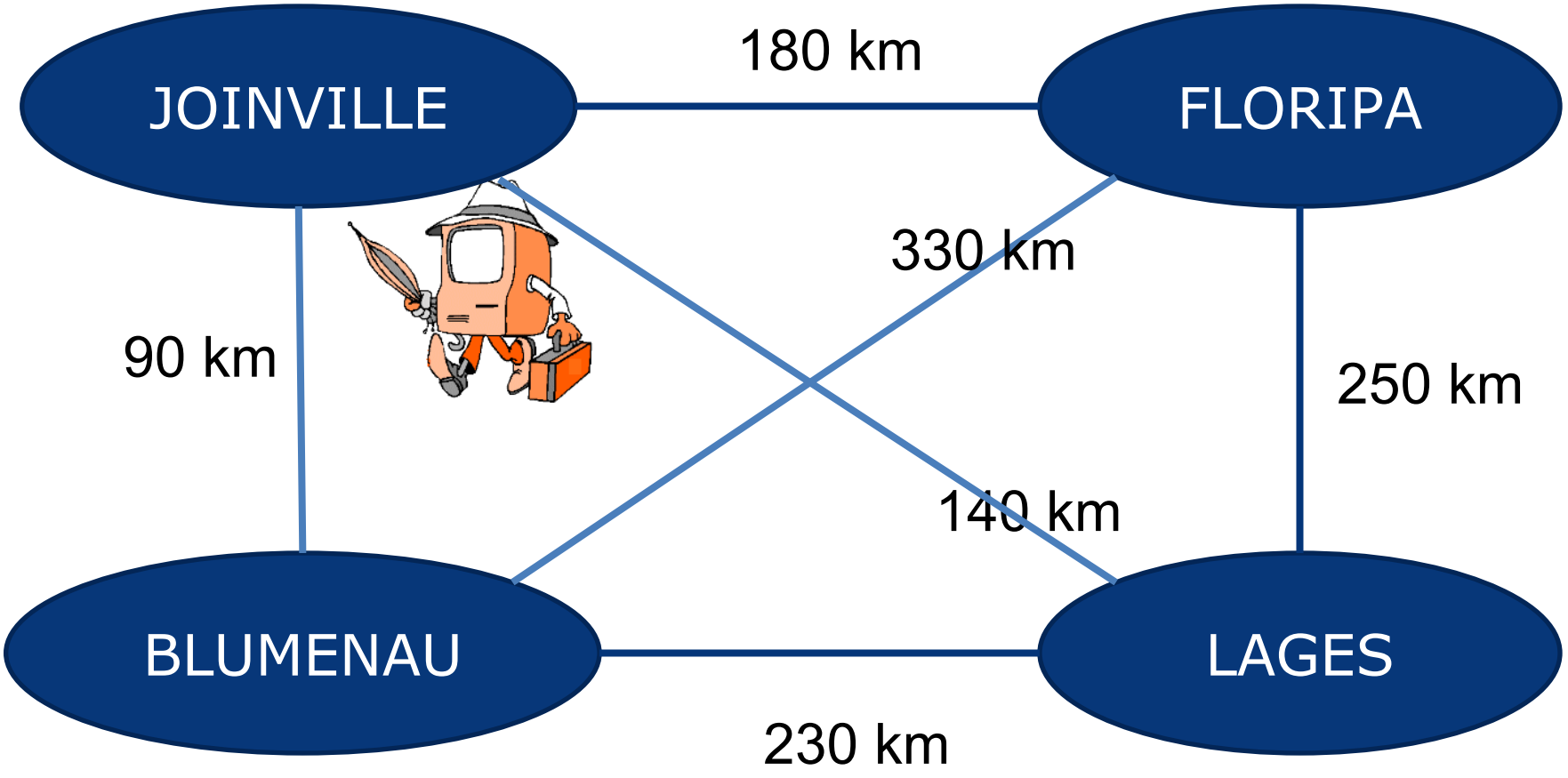
Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante

- Um caixeiro viajante deseja visitar N cidades e entre cada par de cidades existe uma rota;
- Cada rota possui uma distância (ou o custo necessário) para percorrê-la;
- O caixeiro viajante deseja encontrar um caminho que passe por cada cidade apenas uma vez, e além disso que tenha um custo menor que certo valor.



Traveling Salesman Problem - TSP

Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante



Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante

N	Rotas por Segundo	(n - 1)!	Cálculo Total
5	250 milhões	24	Insignificante
10	110 milhões	362 880	0.003 seg
15	71 milhões	87 bilhoes	20 min
20	53 milhões	1.2×10^{17}	73 anos
25	42 milhões	6.2×10^{23}	470 milhões de anos

Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante

Vizinho mais próximo (Abordagem Gulosa)

1 - Selecione arbitrariamente uma cidade inicial

2 - Selecione a menor rota até qualquer cidade. Repita até todas as cidades terem sido visitadas.

- **PROBLEMA**: se a distância da última cidade até a primeira foi muito grande, a solução é obrigada a escolher esse caminho.

Características de Algoritmos Gulosos

- Quando funciona corretamente, a primeira solução encontrada é sempre ótima.
- Se o objetivo é:
  - Maximizar: provavelmente escolherá o candidato restante que proporcione o maior ganho individual.
  - Minimizar: então será escolhido o candidato restante de menor custo.
- O algoritmo nunca muda de ideia:
  - Um candidato escolhido e adicionado à solução passa a fazer parte dessa solução permanentemente.
  - Um candidato excluído do conjunto solução, não é mais reconsiderado.

Características de Algoritmos Gulosos

- Para construir a solução ótima existe um conjunto ou lista de candidatos.
- São acumulados um conjunto de candidatos considerados e escolhidos, e o outro de candidatos considerados e rejeitados.
- Existe uma função verifica se um conjunto de candidatos é viável
- Uma *função de seleção* indica a qualquer momento quais dos candidatos restantes é o mais promissor.
- Uma *função objetivo* fornece o valor da solução encontrada, como o comprimento do caminho construído (não aparece de forma explicita no algoritmo guloso).

Prog. Dinâmica X Algoritmos Gulosos

- Possuem sub-estrutura ótima.
- Programação dinâmica:
  - Faz uma escolha a cada passo.
  - Escolha depende das soluções dos sub-problemas.
  - Resolve os problemas bottom-up.
- Técnica gulosa:
  - Trabalha na forma top-down.

Exemplo: Problema da Mochila

- Problema da Mochila (enunciado):
  - Um ladrão acha *n* itens numa loja.
  - Item *i* vale v_i unidades (dinheiro, e.g., R$, US$, etc).
  - Item *i* pesa w_i unidades (kg, etc).
  - v_i e w_i são inteiros.
  - Consegue carregar *W* unidades no máximo.
  - Deseja carregar a "carga" mais valiosa.

Exemplo: Problema da Mochila

- Problema da Mochila 0 –1 ou (0 –1 Knapsack Problem):
  - O item *i* é levado integralmente ou é deixado.

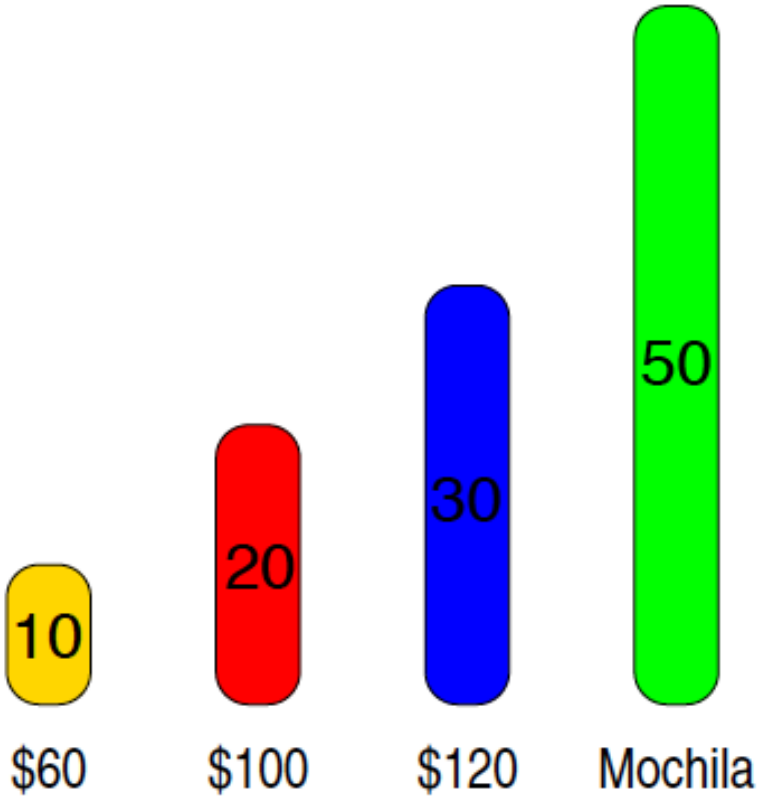
- Problema da Mochila Fracionário:
  - Fração do item *i* pode ser levada.

Exemplo: Problema da Mochila

- Possuem a propriedade de sub-estrutura ótima.
- Problema inteiro:
  - Considere uma carga que pesa no máximo *W* com *n* itens.
  - Remova o item *j* da carga (específico mas genérico).
  - Carga restante deve ser a mais valiosa pesando no máximo $W - w_j$ com $n - 1$ itens.
- Problema fracionário:
  - Considere uma carga que pesa no máximo *W* com *n* itens.
  - Remova um peso *w* do item *j* da carga (específico mas genérico).
  - Carga restante deve ser a mais valiosa pesando no máximo $W - w$ com $n - 1$ itens mais o peso $w_j - w$ do item j.

Exemplo: Problema da Mochila

- Situação Inicial

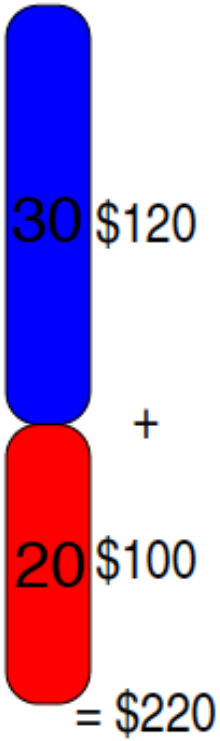


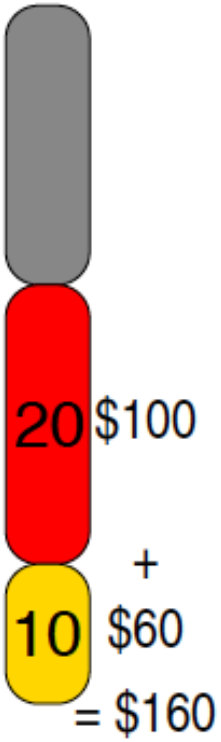
Item	Peso	Valor	V/P
1	10	60	6
2	20	100	5
3	30	120	4

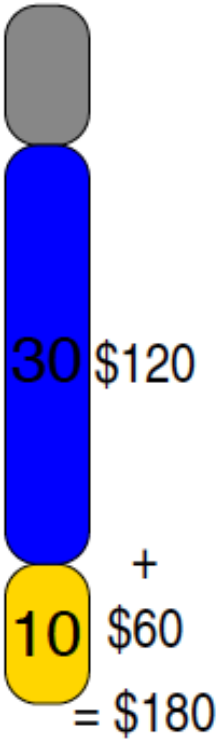
Carga máxima da mochila: 50

Exemplo: Problema da Mochila

- Estratégia Gulosa







Soluções possíveis:

#	Item (Valor)
1	2 + 3 = 100 + 120 = 220
2	1 + 2 = 60 + 100 = 160
3	1 + 3 = 60 + 120 = 180

➜ Solução 2 é a gulosa.

Exemplo: Problema da Mochila

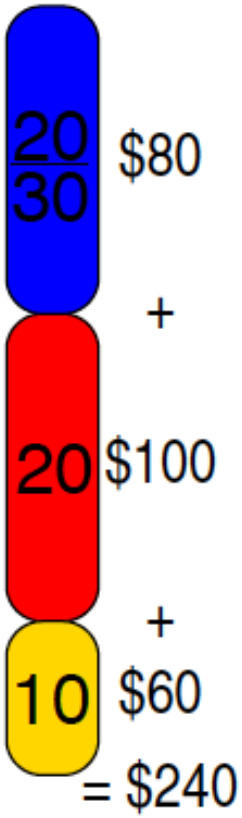
- Levar o item 1 faz com que a mochila fique com espaço vazio
- Espaço vazio diminui o valor efetivo da relação `v/w`
- Neste caso deve-se comparar a solução do sub-problema quando:

  Item é incluído na solução X Item é excluído da solução

- Passam a existir vários sub-problemas
- Programação dinâmica passa a ser a técnica adequada

Exemplo: Problema da Mochila

- Estratégia Gulosa Problema Fracionário



Item	Peso	Valor	Fração
1	10	60	1
2	20	100	1
3	30	80	2/3

➜ Total = 240.

➜ Solução ótima!

Exercícios

- Descreva como o algoritmo de PRIM utiliza a abordagem gulosa para construir a árvore geradora mínima de um grafo simples qualquer

- Projete uma abordagem gulosa para o problema do troco de moedas

Exemplo: Seleção de Atividades

- S = {a_1 ... a_n}: conjunto de *n* atividades que podem ser executadas em um mesmo local. Exemplo: palestras em um auditório.
- Para todo *i = 1 ... n*, a atividade a_i começa no instante s_i e termina no instante f_i , com $0 <= s_i < f_i$. Ou seja, supõe-se que a atividade a_i será executada no intervalo de tempo (semi-aberto) [s_i ; f_i).
- Definição: As atividades a_i e a_j são ditas compatíveis se os intervalos [s_i ; f_i) e [s_j ; f_j) são disjuntos.

Exemplo: Seleção de Atividades

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
F_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- Pares de atividades incompatíveis: $(a_1; a_2)$, $(a_1; a_3)$
- Pares de atividades compatíveis: $(a_1; a_4)$, $(a_4; a_8)$
- Conjuntos máximos de atividades compatíveis: $(a_1; a_4; a_8; a_{11})$ e $(a_2; a_4; a_9; a_{11})$
- As atividades estão ordenadas em ordem crescente de tempos de término.

Exemplo: Seleção de Atividades

- Inicialmente verificaremos que o problema da seleção de atividades tem a propriedade da sub-estrutura ótima e, então, definiremos recursivamente o valor de uma solução ótima.
- Em seguida, mostraremos que há uma forma de resolver uma quantidade consideravelmente menor de subproblemas do que é feito na programação dinâmica.
- Isto será garantido por uma propriedade de escolha gulosa, a qual dará origem a um algoritmo guloso.

Exemplo: Seleção de Atividades

- Definição: $S_{ij} = \{a_k \in S : f_i <= s_k < f_k <= s_j\}$, i.e., o conjunto de tarefas que começam depois do término de a_i e terminam antes do início de a_j.
- Tem-se que $S = S_{0; n+1}$ e, com isso, S_{ij} está bem definido para qualquer par (i ; j) tal que $0 <= i ; j <= n + 1$.
- Supondo que $f_0 <= f_1 <= f_2 <= \ldots f_n < f_{n+1}$, ou seja, que as tarefas estão ordenadas em ordem crescente de tempos de término, pode-se concluir que $S_{ij} = \varnothing$ para todo i >= j .

Exemplo: Seleção de Atividades

Subestrutura ótima:

- Considere o subproblema da seleção de atividades definido sobre S_{ij} .
- Suponha que a_k pertence a uma solução ótima de S_{ij} .
- Como $f_i <= s_k < f_k <= s_j$, uma solução ótima para S_{ij} que contenha a_k será composta pelas atividades de uma solução ótima de S_{ik}, pelas atividades de uma solução ótima de S_{kj} e por a_k .

Exemplo: Seleção de Atividades

- Definição: para todo *0 <= i, j <= n + 1*, seja *c[i,j]* o valor ótimo do problema de seleção de atividades para a instância S_{ij} . Deste modo, o valor ótimo do problema de seleção de atividades para instância $S = S_{0;n+1}$ é *c[0, n + 1]*.
- Fórmula de recorrência:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & S_{ij} = \phi \\ \max_{i<k<j:a_k \in S_{ij}} \{c[i,k] + c[k,j] + 1\} & , S_{ij} \neq \phi \end{cases}$$

Exemplo: Seleção de Atividades

- Teorema: (escolha gulosa)
- Considere o subproblema definido para uma instância não-vazia S_{ij}, e seja a_m a atividade de S_{ij} com o menor tempo de término, i.e.:

$$f_m = \min \{f_k : a_k \in S_{ij}\}$$

- Então:
  - existe uma solução ótima para S_{ij} que contém a_m e
  - S_{im} é vazio e o subproblema definido para esta instância é trivial, portanto, a escolha de a_m deixa apenas um dos subproblemas com solução possivelmente não-trivial, já que S_{mj} pode não ser vazio.

Exemplo: Seleção de Atividades

SelecionaAtivGulosoRec(s; f ; i ; j)

Entrada: vetores *s* e *f* com instantes de início e término das atividades *i , i + 1,..., j*, sendo $f_i <= ... <= f_j$.

Saída: conjunto de tamanho máximo de índices de atividades mutuamente compatíveis.

1. m = i + 1;
// Busca atividade com menor tempo de término que pode estar em S_{ij}
2. enquanto $m < j$ e $s_m < f_i$ faça m = m + 1;
3. se $m >= j$ então retorne conjunto-vazio;
4. senão
5. se $f_m > s_j$ então retorne conjunto-vazio; // $a_m \notin S_{ij}$
6. senão retorne $\{a_m\} \cup$ **SelecionaAtivGulosoRec**(*s, f, m, j*).

Exemplo: Seleção de Atividades

- A chamada inicial será

```
SelecionaAtivGulosoRec(s,f,0,n+1).
```

- Complexidade: $\Theta(n)$.

- Ao longo de todas as chamadas recursivas, cada atividade é examinada exatamente uma vez no laço da linha 2. Em particular, a atividade a_k é examinada na última chamada com $i < k$.

Exercícios

- Encontre uma colocação ótima de parênteses de um produto de cadeias de matrizes cuja sequência de dimensões é <5, 10, 3, 12, 5, 50, 6>

- Resolva o problema da mochila fracionária considerando uma mochila com capacidade 50 e 4 itens conforme peso e valor especificados na tabela abaixo

	A	B	C	D	E
Peso	40	30	20	10	20
Valor	840	600	400	100	300

Exercícios

- Implemente um programa que resolva o problema do Ciclo Hamiltoniano, usando backtracking. Compare o desempenho do programa que usa a técnica de força bruta
- Enumere as diferenças e semelhanças entre a técnica de Divisão e Conquista e Programação Dinâmica
- Mostre que o tempo de execução de Quicksort é $\Theta(n^2)$ quando todos os elementos do vetor A são distintos e estão ordenados em ordem decrescente