



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Belo Horizonte - Minas Gerais

Disciplina Pesquisa Operacional	Curso Engenharias	Turno Manhã	Período 2ª/2017
Professor Dorirley Rodrigo Alves	Tipo do Documento TEORIA	Data 2 de novembro de 2017	Versão 01

1 Dualidade

A Daicast Ind. e Com é uma empresa metalúrgica que fabrica peças de alumínio e zamak para os mercados de autopeças, de telecomunicações e de eletrônica, dentre outros. Ela tem uma linha de produção que atende o mercado com demandas dependentes (como o de autopeças para montadoras) e uma outra que atende linhas com demandas independentes (como o mercado de reposição de autopeças). Como é uma empresa pequena se comparada as outras do mesmo segmento que atuam no mercado de reposição de autopeças, ela consegue escoar toda a sua produção de produtos com a demanda independente sem grandes problemas. A tabela abaixo oferece uma visão geral dos problemas enfrentados por eles mensalmente: definir as quantidades a serem produzidas considerando os recursos disponíveis, os recursos necessários para a produção dos itens e as margens dos mesmos.

Recurso	Disponibilidade	Recurso necessário / Peça		
		Tampa	Suporte	Plaqueta
Matéria-prima	10.000 kgs	0,3	0,2	0,1
Injetora	1.600 hrs	0,003	0,005	0,007
Furadeira	800 hrs	0,007	0,008	0,01
Afinação	600 hrs	0,033	0,005	0,002
Margem líquida(R\$ 0)		R\$5,00	R\$7,00	R\$8,00

Tabela 1: Quantidades a serem produzidas considerando os recursos disponíveis

Um problema de PL pode ser facilmente formulado para esse caso. Sejam x_1 , x_2 e x_3 as quantidades a serem produzidas da tampa, do suporte e da plaqueta, respectivamente. Se considerarmos que a empresa deseja maximizar sua margem, podemos definir seu problema como:

$$\begin{aligned}
 F.O \mapsto \text{MAX } Z &= 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \quad (\text{Maximizar a margem}) \\
 S.a. \quad &0,30x_1 + 0,20x_2 + 0,10x_3 \leq 10.000 \quad (\text{restrição da matéria-prima}) \\
 &0,003x_1 + 0,005x_2 + 0,007x_3 \leq 1.600 \quad (\text{Restrição da capacidade de injeção}) \\
 &0,007x_1 + 0,008x_2 + 0,010x_3 \leq 800 \quad (\text{Restrição da capacidade de furação}) \\
 &0,033x_1 + 0,005x_2 + 0,002x_3 \leq 600 \quad (\text{Restrição da capacidade de afinação}) \\
 &x_1; x_2; x_3 \geq 0 \quad (\text{condições de não-negatividade})
 \end{aligned}$$

Se consideramos que o problema anterior é o problema primal, podemos definir o problema dual como:

$$\begin{aligned}
 F.O \mapsto \text{MIN } \mathbb{Z}^* &= 10.000y_1 + 1.600y_2 + 800y_3 + 600y_4 \text{ (Minimizar o uso dos recursos disp.)} \\
 S.a. & \quad 0,3y_1 + 0,003y_2 + 0,007y_3 + 0,033y_4 \geq 5 \text{ (Restrição da tampa)} \\
 & \quad 0,2y_1 + 0,005y_2 + 0,008y_3 + 0,005y_4 \geq 7 \text{ (Restrição do suporte)} \\
 & \quad 0,1y_1 + 0,007y_2 + 0,010y_3 + 0,002y_4 \geq 8 \text{ (restrição da Plaqueta)} \\
 & \quad y_1; y_2; y_3; y_4 \geq 0 \text{ (condições de não-negatividade)}
 \end{aligned}$$

Fazendo uma analogia entre a tabela anterior e o problema dual, podemos perceber que y_1 está associada com a matéria-prima, y_2 com a injetora, y_3 com a furadeira e y_4 com a afinação.

Considere que os recursos da Daicast possam tanto ser utilizados em sua produção como podem ser vendidos a Metagal, uma outra empresa que atua em mercados semelhantes e que utiliza os mesmos tipos de processos e recursos. As variáveis y_1 podem ser entendidas como as margens oferecidas pelo uso da matéria-prima, y_2 como a margem paga pelo uso da injetora, y_3 como a margem paga pelo uso da furadeira e y_4 como a margem paga pelo uso da afinação. A soma de todas as margens de cada recurso utilizado deve estar maior do que a margem dos produtos. Em outras palavras, a Metagal tem que oferecer no mínimo a margem atual para que o problema seja viável (caso contrário, a Daicast não venderia recursos para Metagal, pois seria mais vantajoso vender peças).

Como as equações e as inequações precisam ter consistência dimensional, as variáveis y são dimensionalmente diferentes. Por exemplo: y_1 é a margem paga por quilo de matéria-prima, y_2 é a margem paga por hora do uso da injetora e assim sucessivamente.

O problema dual da Daicast pode ser entendido como se a Metagal estivesse interessada na minimização das margens pagas pelo uso dos recursos da Daicast.

Considerando que o custo total de compra de todos os recursos da Daicast seja de

$$10.000y_1 + 1.600y_2 + 800y_3 + 600y_4.$$

Ou seja, 10.000 kgs de matéria-prima \times margem para por quilo de matéria prima + 1.600 horas de injetora \times margem paga por hora de injetora + ..., a Metagal estaria interessada em minimizar esse custo total, ou seja:

$$F.O \mapsto \text{MIN } \mathbb{Z}^* = 10.000y_1 + 1.600y_2 + 800y_3 + 600y_4$$

que é exatamente a função-objetivo do problema dual.

Para o caso da restrição da tampa, a Metagal precisa oferecer uma margem que seja superior ou igual à que a Daicast conseguiria com a utilização de seus próprios recursos. Em outras palavras, para que a Daicast se interesse em vender recursos equivalentes à produção de uma

tampa (0,3 kg de matéria-prima, 0,003 horas de injetora; 0,007 horas de furadeira e 0,033 horas de afinação), a Metagal precisa oferecer, o mínimo, a mesma margem que a Daicast conseguiria com ela mesma fazendo tampa, ou seja, R\$ 5,00. Matematicamente,

$$0,3y_1 + 0,003y_2 + 0,007y_3 + 0,033y_4 \geq 5$$

que é exatamente a restrição da tampa do problema dual.

As outras restrições são obtidas com um raciocínio análogo. Como nesse caso só faz sentido que as margens pagas pelos recursos sejam positivas, as restrições de não negatividade são estabelecidas para as variáveis y .

As variáveis duais (ou seja, os y em nosso exemplo) são muitas vezes chamados de preço-sombra, ou custos de oportunidade dos recursos.

Referências

- [1] COLIN, Emerson C. *Pesquisa Operacional - 170 Aplicações em Estratégia, Finanças, Logística, Produção, Marketing e Vendas..* LTC. 2007. 501 p. Rio de Janeiro. ISBN 978-85-216-1559-0