AULA 04
Dualidade

DORIRLEY RODRIGO ALVES[1]

[1] Optimum Consultoria Ltda
SSME - Service Science, Management & Engineering
dorirley@optimumconsultoria.com

Abstract. Um dos principais papéis da teoria da dualidade é a interpretação e implementação da análise de sensibilidade, que é uma parte muito importante de um estudo de Programação Linear.

1 Considerações Gerais

DUALIDADE significa que todo o problema de Programação Linear, a que chamaremos de **Primal**, possui um segundo problema associado chamado **Dual**. Ambos são completamente interrelacionados, de forma que a solução ótima de um fornece informações completas sobre o outro. A dualidade permite um entendimento mais profundo so problema em questão e essa profundidade baseia-se na Análise de Sensibilidade e também de determinados tipos de problemas.

O problema dual para os modelos em que as restrições são desigualdades do tipo ($\leq$) é construído da seguinte forma:

1. Cada restrição em um problema corresponde a uma variável no outro;
2. os elementos do lado direito das restrições em um problema, são os coeficientes da Função Objetivo do outro problema;
3. se o objetivo de um problema é maximizar, o do outro, será minimizar, e vice-versa;
4. o problema de maximização tem restrições com sentido ($\leq$) e o problema de maximização em restrições com o sentido ($\geq$);
5. as variáveis de ambos os problemas são não negativos;
6. o número de variáveis do dual é igual ao número de restições do primal.

1.1 Teorema do Dual

(i) Caso ambos os problemas, primal e dual, possuam soluções viáveis, então o problema primal tem uma solução ótima x^* para $j = 1, 2, \ldots, n$ o problema dual tem uma solução ótima para j_i para $i = 1, 2, \ldots, m$ e

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

(ii) se o problema primal e dual possuir uma solução viável com uma valor ótimo finito da Função Objetivo, então o outro problema possui uma solução viável com o mesmo valor ótimo da Função Objetivo.

Observe o exemplo:

Uma empresa fabrica três produtos em malha, calça, camisa e blusa. Cada produto requer um tempo de produção em cada um dos 2 teares que a fábrica possui. Os dois teares possuem uma autonomia para funcionamento de 4 e 5 horas por dia.

	Calça	Camisa	Blusa	Disp.
Tear 1	1	0	7	4 horas
Tear 2	2	3	1	5 horas
Lucro	R$6,00	R$2,00	R$1,00	

Cada peça em malha contribuem com R$6,00, R$2,00 e R$1,00, respectivamente no faturamento da empresa. O proprietário necessita obter o nível de produção de cada peça que maximize o faturamento total da empresa em um dia.

$$\begin{aligned} \text{FO(x)} \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 6x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 7x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Neste caso, resolvendo o problema, são encontrados os seguintes resultados: $x_1 = 2,5; x_2 = 0; x_3 = 0$. Isso significa que a empresa deverá produzir apenas $2,5$ peças de Calças e nenhuma quantidade dos outros produtos para alcançar um lucro máximo de $R15,00$.

Por outro lado, vamos supor que a fábrica tenha a alternativa de alugar a hora da máquina em vez de empregá-la na fabricação dos três produtos.

$$y_1 = \text{Tear 1}$$
$$y_2 = \text{Tear 2}$$

A quantidade de horas disponível das máquinas é:

$$4y_1 + 5y_2$$

Em termos desta avaliação das máquinas, cada um dos produtos também pode ser avaliado levando em conta o tempo gasto para cada peça fabricada. Assim, como calça gasta 1 hora para o tear 1 e 2 horas para o tear 2, sua avaliação em termos do conteúdo de recursos é

$$y_1 + 2y_2$$

com relação a Camisa; é

$$0y_1 + 3y_2$$

e a Blusa

$$7y_1 + 1y_2$$

Obviamente, essas avaliações dos produtos não podem ser inferiores às margens unitárias de lucro fornecidas para cada um, assim:

$$\begin{aligned} 1y_1 + 2y_2 &\geq 6 \\ 3y_2 &\geq 2 \\ 7y_1 + 1y_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

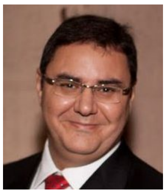
Neste tipo de problema, o gerente tem o interesse em determinar a quantidade mínima de funcionamento das máquinas, respeitando as restrições de que as avaliações dos produtos seja pelo menos iguais aos lucros fornecidos.

$$\begin{aligned} \text{FO(x)} \rightarrow \text{Min } \mathbb{Z} &= 4y_1 + 5y_2 \\ 1y_1 + 2y_2 &\geq 6 \\ 3y_2 &\geq 2 \\ 7y_1 + 1y_2 &\geq 1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Neste caso, resolvendo o problema, são encontrados os seguintes resultados: $y_1 = 0; y_2 = 3$. Isso significa que a empresa deverá utilizar apenas 3 horas do Tear 2 para produzir a mesma quantidade de calças - observe que o custo será de R$15,00 . Ou seja, o Tear 1 não será necessário e portanto ele ainda poderá alugá-lo.

De acordo com o apresentado, o primeiro problema é o Primal e o segundo problema é o Dual. Neste caso, as variáveis duais podem ser interpretadas como avaliações unitárias dos recursos relativos às contribuições de cada um para obtenção do lucro total. Além disso, a viabilidade do uso do problema dual em relação ao primal é que resolver um problema com mais variáveis de decisão e poucas restrições é muito mais fácil do que o contrário e a inversão do primal para o dual possibilita essa facilidade.

Referências



Dorirley Rodrigo Alves tem experiência em ensino e consultoria. Coordenou e participou de projetos relacionados à modelagem e otimização de vários processos gerenciais tais como escalonamento de mão-de-obra e de tarefas, planejamento de produção, corte de materiais e empacotamento. Possui graduação em Sistemas de Informação (PUC Minas, 2006) e mestrado em Engenharia Elétrica (PUC Minas, 2010). Atualmente é professor assistente dos cursos de Sistemas de Informação e Engenharia de Energia na PUC Minas e Tecnologia em Logística na Faculdade UNA de Contagem.