Matemática Discreta – Roteiro de aulas 4
Prof. Célio Humberto

4 - Técnicas de contagem

4.1 - Permutação

Permutação de um conjunto A é uma correspondência um-a-um dos elementos de A, ou uma função bijetora de A em A.

Se A = {1 , 2 , 3} , são permutações:

$$f_1 = \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 3 \end{cases}, \quad f_2 = \begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 1 \\ f(3) = 3 \end{cases}, \quad f_3 = \begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases} \ldots$$

que podem ser escritas ainda com outra notação: (1 , 2 , 3) ; (2 , 1 , 3) ; (3 , 2 , 1) , . . .

NOTA: uma permutação de um conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ é um agrupamento ordenado (isto é, uma fila ou uma sequência) dos n elementos.

Teorema:

Se A tem n elementos então o número de permutações de A é n!

Demonstração

1º) seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

2º) para obter uma permutação de A devem-se escolher as imagens $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)$. Deve-se, portanto, obter uma n-upla ordenada dos elementos de A.

3º) tem-se n possibilidades para $f(a_1)$, n-1 para $f(a_2)$, e assim por diante, até 1 possibilidade para $f(a_n)$.

4º) pelo princípio do produto tem-se: $P_n = n(n-1)(n-2)...2.1 = n!$

c.q.d.

Exemplo 1

Determine o número de permutações do conjunto R = {a , b , 1 , 3}

Solução

$P_4 = 4! = 24$

4.1 - Arranjos

Arranjo de n elementos r a r é uma função injetora de um conjunto A em B de cardinalidade r e n respectivamente.

São permutações com r elementos de um conjunto de n elementos ($r \leq n$).

Notações: O número de arranjos de n elementos tomados r à r pode ser representado por:

P(n , r) ou A(n , r)

Exemplo 2

Sendo A = {a , b , c} tem-se:

a) permutações de A

abc	bca
acb	cab
bac	cba

Teorema:

O número de arranjos de n elementos tomados r à r é :

A(n , r) = n(n - 1) (n - 2) . . . (n - r + 1)

Demonstração

1º) seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

2º) arranjos são funções injetoras com r elementos no domínio, portanto devem ser encontradas r imagens, tiradas dos n elementos.

3º) tem-se :

n possibilidades para escolher $f(a_1)$

n - 1 possibilidades para escolher $f(a_2)$

...

n - (r - 1) possibilidades para escolher $f(a_r)$

4º) pelo princípio do produto tem-se $A(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

Teorema :

Se n , r são inteiros com $r \leq n$ então $A(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Demonstração:

1º) A(n , r) = n(n - 1) . . . (n - r + 1)

2º) para se obter n! no numerador multiplica-se e divide-se como indicado:

$$A(n,r) = n(n-1)\ldots(n-r+1)x\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots\ .2.1}{(\text{n - r})(\text{n - r - 1})\ldots\ .2.1} \quad \text{e resulta em :}$$

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad c.q.d.$$

Exemplo 3 : Calcule A(7 , 3)

Solução : Pode-se usar qualquer um dos teoremas apresentados:

a) A(7 , 3) = 7.6.5 = 210 (veja 5 = 7 - 3 + 1)

b) $A(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 7.6.5 = 210$

4.3 - Combinação

Seja A um conjunto com n elementos. Todo subconjunto de A com r elementos é chamado de uma combinação dos n elementos tomados r à r .

NOTA: Combinações são subconjuntos logo a ordem com que os elementos são agrupados não importa.

Para representar o número de combinações de n elementos tomados r à r, usam-se as notações :

$$\text{C(n,r)} \;\text{ ou }\; \binom{\text{n}}{\text{r}}$$

Exemplo 4 :

Liste as combinações de 2 elementos do conjunto A = {a , b , c , d)

Solução:

{a , b} {a , d} {b , d}
{a , c} {b , c} {c , d}

Teorema:

O número de combinações de n elementos tomados r à r é dado por

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Demonstração

Seja $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

Para se chegar ao resultado calcula-se A(n , r) da seguinte maneira:

1º) seleciona-se um subconjunto com r elementos de A.

O número de possibilidades é : C(n , r)

2º) ordena-se, de alguma forma, os r elementos escolhidos.

O número de maneiras de ordená-los é : r!

3º) pelo princípio do produto tem-se :

$$A(n, r) = \underbrace{C(n, r)}_{\text{número de maneiras de escolher.}} \cdot \underbrace{r!}_{\text{número de maneiras de ordenar.}}$$

e daí tem-se:

$$C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{c.q.d.}$$

NOTA:

a) combinação é subconjunto, logo não importa a ordem dos elementos: {a, b}={b, a}

b) arranjo ou permutação é função injetora , logo as imagens formam uma sequência, um vetor, uma n-upla ordenada e, portanto, importa a ordem dos elementos : (a , b) ≠ (b , a)

Exemplo 5

De quantas maneiras um presidente, um vice-presidente e um secretário podem ser eleitos de um grupo de 9 pessoas?

Solução:

Supondo que nenhuma pessoa possa ocupar dois cargos (isso não ficou explícito no enunciado), trata-se de um agrupamento ordenado com elementos distintos: (p , vp, s)

a) $A(9,3) = \frac{9!}{(9-3)!} = 9.8.7 = 504$

b) pode-se usar o princípio do produto diretamente:

$|P| = 9$; $|VP| = 8$; $|S| = 7$

$|P \times VP \times S| = 9.8.7 = 504$.

Exemplo 6

Quantas comissões de 3 alunos podem ser formadas com um grupo de 9 alunos?

Solução:

Note que na comissão um aluno só pode representar um elemento e não existe ordem estabelecida. Tratam-se de subconjuntos, logo combinações.

$C(9,3) = \dfrac{9!}{3!(9-3)!} = 84$ logo são possíveis 84 comissões.

Exemplo 7

Uma equipe de basquete é formada por 13 elementos: seis avantes, três centros, quatro quardas. Quantos times podem ser montados com dois avantes, um centro e dois guardas?

Solução:

Os elementos são escolhidos em 3 conjuntos. A , C , G .

Maneiras de escolher os 2 avantes : $|A| = \binom{6}{2}$

Maneiras de escolher 1 centro : $|C| = \binom{3}{1}$

Maneiras de escolher 2 guardas : $|G| = \binom{4}{2}$

pelo princípio do produto tem-se :

$$\binom{6}{2}.\binom{3}{1}\binom{4}{2} = 270 \text{ times.}$$

Exemplo 8

Um código deve ser obtido com 5 letras <u>distintas</u> do alfabeto (26 letras). Quantos códigos podem ser gerados ?

Solução:

Trata-se de grupos ordenados de 5 letras tomadas das 26 letras.

$A(26,5) = \dfrac{26!}{(26-5)!}$ são possíveis 7.893.600 códigos.

Exemplo 9

Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5} ?

Solução:

X → total de agrupamentos ordenados de 4 símbolos

$|X| = A(6, 4)$

Y → total de agrupamentos de 4 símbolos começando com o $\underline{0}$ ___ ___ ___

$|Y| = A(5, 3)$

X - Y → total de números procurados.

$|X - Y| = |X| - |Y| = A(6, 4) - A(5, 3)$

logo existem 300 números.

Exemplo 10

Quantos são os arranjos de n elementos r à r com p elementos fixos, $p \leq r \leq n$?

Solução:

p elementos fixos significa:

1º) sobraram n - p elementos para se escolher.

2º) faltam r - p elementos para completar o grupo de r , que já tem p elementos.

$$\underbrace{a_1 a_2 \ldots . a}\,_p \underbrace{\ldots\ldots\ldots a_n}_{n-p}$$

logo basta calcular A(n - p , r - p) .

Exemplo 11

Quantos números de quatro algarismos distintos podem ser formados pelos elementos do conjunto {2 , 3 , 4 , 5 , 6} e que são divisíveis por 5 ?

Solução:

Para ser divisível por 5 o algarismo 5 deve estar fixo na última posição, logo:

$$A(5-1,4-1) = A(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Tarefa 8:

01) Liste os arranjos de 3 elementos de {a, b, c, d}

02) Calcule: a) A(7,4)b) A(n,n-1) c) A(2n,n) d) A(n,1)

03) De quantas maneiras 5 tarefas distintas podem ser distribuídas para 6 trabalhadores de modo que cada um receba no máximo uma tarefa ?

04) De quantos modos dois monitores podem ser selecionados, entre oito candidatos ?

05) Quantas funções bijetoras podem ser definidas com domínio {a,b,c,d} e imagem {1,2,3,4}

06) De quantas maneiras n casais podem ficar em fila, alternando homem-mulher-homem... e começando com homem?

09) Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, sendo o último algarismo igual a 5 ?

10) Deseja-se usar o alfabeto (26 letras) para formar 30.000 palavras de igual tamanho, onde nenhuma letra se repita em cada palavra. Qual o menor tamanho de palavra que satisfaz a esta condição?

13) Liste todas as combinações de 3 elementos de {a, b, c, d}

14) Calcule: a) C(7,2) b) C(n,n-1) c) C(n,0) d) C(n,n) e) C(n,1)

15) De quantas maneiras pode-se escolher 5 cartas de um conjunto de 52 cartas distintas ?

16) Quantas comissões de seis membros podem ser escolhidas de um grupo de 10 pessoas ?

17) Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0,1,2,3 e 4 ?

18) De quantas maneiras um grupo de 13 pessoas pode ser divido em dois grupos com 5 pessoas cada um e outro grupo com 3 pessoas ?

19) De quantas maneiras podem sete crianças serem dispostas em um círculo ? (dois grupos são considerados iguais quando um é uma rotação do outro).

22) A cada dia do ano (365 dias) um conjunto diferente de 4 pessoas adultas de uma cidade se reunem para conversar sobre os problemas da comunidade. Qual o menor número possível de pessoas adultas dessa cidade ?

23) Quantos números de quatro algarismos distintos podem ser formados pelos elementos do conjunto {0 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} e que são divisíveis por 2 ?

25) Para indicar uma equipe de dois analistas e três programadores, seguiu-se o critério:

- sorteou-se 16 candidatos entre os 28 melhores alunos do curso de computação.
-escolheu-se para analistas os dois candidatos com melhores médias em Álgebra.
- escolheu-se os programadores dentre os candidatos restantes.

Quantas equipes diferentes puderam ser indicadas ?

REPOSTAS:

1) abc, abd, acd, adb, adc, ... , dcb (são 24)

2) a)840 b) n! c) 2(2n-1)!/(n-1)! d) n

3) 720 4) 56 5) 24 6) $(n!)^2$ 9) 180 10) 4

13) abc, abd, acd, bcd 14) a) 21 b) n c) 1 d) 1 e) n

15) 2.598.960 16) 210 17) 48 18) 72072 19) 720

21) $2^9.C(20,11)$ 22) 12 23) 204 25) $\binom{28}{16}.\binom{14}{3}$