Princípio fundamental da contagem

A Matemática está ficando preguiçosa.
A Matemática está deixando os princípios fazerem o trabalho para você de forma que não tenha que fazê-lo você mesmo.

George Pólya

O matemático George Pólya (1887–1985) nasceu na Hungria, mas trabalhou em diversos países. Viveu a maior parte de sua vida nos EUA.

Pólya deu contribuições importantes em várias áreas da Matemática, entre elas teoria dos números, probabilidade, combinatória, análise complexa e equações diferenciais parciais.

Pólya publicou um livro, muito popular entre matemáticos, chamado "a arte de resolver problemas", que já vendeu mais de um milhão de cópias desde que foi lançado.

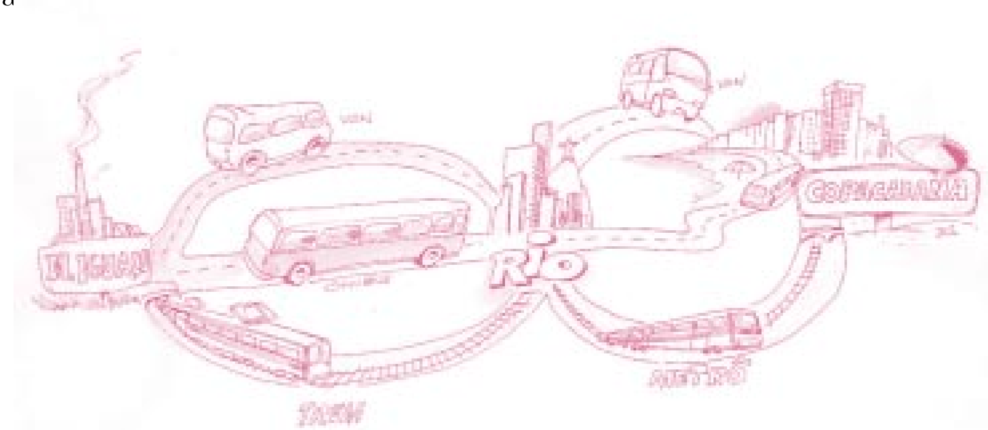
Curioso que, inicialmente, nenhuma editora queria publicá-lo. Pólya tentou quatro editoras diferentes para conseguir publicar a versão em inglês do livro.

Objetivos

Apresentar o princípio multiplicativo, também chamado de princípio fundamental da contagem, que é a base para as técnicas de contagem que estudaremos nas aulas seguintes neste módulo.

Neste aula apresentaremos uma técnica de contagem: o princípio multiplicativo. Este princípio lida com situações em que uma tarefa se divide em várias etapas. Vamos começar por um exemplo.

Uma pessoa mora em Nova Iguaçu e trabalha em Copacabana. Ela vai trabalhar todos os dias usando apenas transporte coletivo. Esta pessoa vai de Nova Iguaçu ao Centro do Rio tomando ônibus, van ou trem. Do Centro do Rio, pode ir a Copacabana de ônibus, van ou metrô. Levando em conta apenas estas possibilidades, de quantas maneiras ela poderá ir de casa ao trabalho?



Neste caso podemos contar facilmente todas as 9 possibilidades:

$$\{(V,V),(V,O),(V,M),(O,V),(O,O),(O,M),(T,V),(T,O),(T,M)\}\ ,$$

onde usamos uma notação em que, por exemplo, (T,M) indica que ela toma o trem no primeiro percurso e, em seguida, o metrô.

Em geral, a solução de problemas deste tipo se baseia no princípio multiplicativo, também chamado de princípio fundamental da contagem.

Suponha que existam N_1 maneiras de se realizar uma tarefa T_1 e N_2 maneiras de se realizar uma tarefa T_2. Então há $N_1 \times N_2$ maneiras de se realizar a tarefa T_1 seguida da tarefa T_2.

Exemplo 30

Na discussão acima, T_1 é a tarefa de ir de Nova Iguaçu ao Centro do Rio e $N_1 = 3$ (há 3 possibilidades de se fazer isto). Da mesma forma, T_2 é a tarefa de ir do Centro do Rio a Copacabana, e há $N_2 = 3$ possibilidades de se realizar esta tarefa. No total, há:

$$N_1 \times N_2 = 3 \times 3 = 9 \text{ possibilidades}$$

Exemplo 31

Um aluno se prepara para ingressar no ensino superior. Ele pode escolher entre 10 universidades. Se cada uma delas tiver 15 cursos, quantas possibilidades de cursos há para este aluno?

Solução:

$$10 \times 15 = 150 \text{ cursos diferentes.}$$

O princípio acima pode ser estendido para a situação em que temos várias tarefas, o que é chamado Princípio da Multiplicação Generalizado.

Se uma tarefa T_1 pode ser feita de N_1 maneiras, uma tarefa T_2 de N_2 maneiras, ..., uma tarefa T_k de N_k maneiras, então o número de maneiras de realizar $T_1, T_2, \ldots, T_k$, em seqüência, é $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$.

O índice k no enunciado representa qualquer inteiro maior ou igual a 1. Então, por exemplo, realizar 3 tarefas T_1, T_2 e T_3 em seguida, pode ser feito de $N_1 \times N_2 \times N_3$ maneiras.

Exemplo 32

Um restaurante oferece 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 tipos de sobremesa. Se um freguês deste restaurante decide tentar uma refeição diferente a cada noite, quanto tempo levará para esgotar todas as possibilidades?

Solução:

A questão é, em outras palavras, quantas combinações de pratos há no total. São 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 possibilidades de sobremesa. Portanto, o total de possibilidades é:

$$4 \times 10 \times 5 = 200\ .$$

Este cliente levaria 200 noites para esgotar todas as possibilidades deste restaurante.

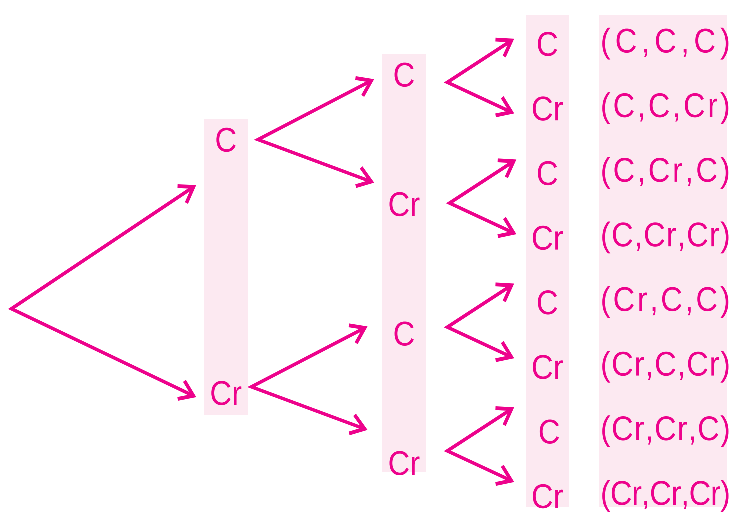
Exemplo 33

Em um jogo de "cara ou coroa", uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de resultados possíveis?

Solução:

Cada lançamento tem dois resultados possíveis: cara ou coroa, que representaremos por C e Cr, respectivamente.

Como foi lançada 3 vezes, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ resultados possíveis. Podemos ver os resultados possíveis no diagrama:



No diagrama anterior foi utilizada uma notação por ternos ordenados em que, por exemplo, (C, Cr, C) indica que os resultados dos 3 lançamentos foram, nesta ordem, cara, coroa e cara.

Quantos resultados têm exatamente 2 caras?

Inspecionando os 8 resultados possíveis, vemos que há 3 resultados com exatamente 2 caras.

Mas, e no caso de um número maior de lançamentos? Não poderemos, em geral, responder a pergunta inspecionando todas os resultados possíveis.

Em qualquer caso, o Princípio Multiplicativo permite dizer quantos resultados possíveis há no total. Se uma moeda for lançada N vezes, temos:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots 2}_{\text{N fatores}} = 2^N \text{ resultados possíveis.}$$

Destes 2^N resultados, quantos deles envolvem exatamente 2 caras? A resposta a esta pergunta envolve técnicas de contagem um pouco mais sofisticadas, que veremos na aula 10.

Em resumo, o princípio multiplicativo nos permite determinar quantos resultados há, mas dizer quantos deles têm exatamente 2 caras depende de outras técnicas.

Exemplo 34

Alguns cadeados usam anéis rotativos numéricos, em vez de chave. Existe um número que deve ser selecionado nos anéis numéricos para abrir o cadeado. Vamos chamar este número de *chave numérica*.

Suponha que um tal cadeado trabalha com números de 5 dígitos (por exemplo, 23478 é uma chave numérica possível). Quantas possibilidades de chave numérica existem?

Solução:

As chaves são números de 5 dígitos. Para cada dígito, temos 10 possibilidades, que são os algarismos $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$.

Portanto, temos

$$10.10.10.10.10 = 10^5 = 100000 \text{ possibilidades de chave.}$$

Só por curiosidade, se esta pessoa conseguisse testar 5 chaves numéricas por minuto, levaria $100000/5 = 20000$ minutos, ou seja, $20000/60 \approx 333$ horas (o símbolo $\approx$ significa "aproximadamente igual a").

Abrir o cadeado requer então um máximo de 100000 tentativas. No entanto, provavelmente a pessoa acharia a chave correta antes de testar todas as chaves possíveis.

Exemplo 35

Quantos inteiros múltiplos de 5 existem entre 1000 (inclusive) e 4999?

Solução:

Um número inteiro é múltiplo de 5 se, e somente se, seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Então, se o número é $x_1x_2x_3x_4$, temos 4 possibilidades para x_1, que são os algarismos 1,2,3 e 4; temos 10 possibilidades para x_2 (todos os algarismos de 0 a 9), 10 possibilidades para x_3 e apenas duas possibilidades para x_4, que são os algarismos 0 e 5.

Portanto, há no total:

$$4 \times 10 \times 10 \times 2 = 800$$

múltiplos de 5 entre 1000 e 4999.

Exemplo 36

As palavras de um certo código são formadas por 2 letras e 2 algarismos, de tal forma que não há letras ou algarismos iguais. Assim, a palavra LY45 é palavra deste código, enquanto que AA23 não é palavra deste código, pois repete a letra A. Quantas palavras existem neste código ?

Solução:

Para a primeira letra temos 26 possibilidades (aceitando as letras K,W e Y como letras válidas). Para a segunda letra, temos 25 possibilidades, que são as 26 letras possíveis, menos a letra que já usamos e não podemos repetir.

De maneira análoga, para o primeiro algarismo temos 10 possibilidades e para o segundo algarismo temos 9 possibilidades, pois não podemos repetir o primeiro algarismo.

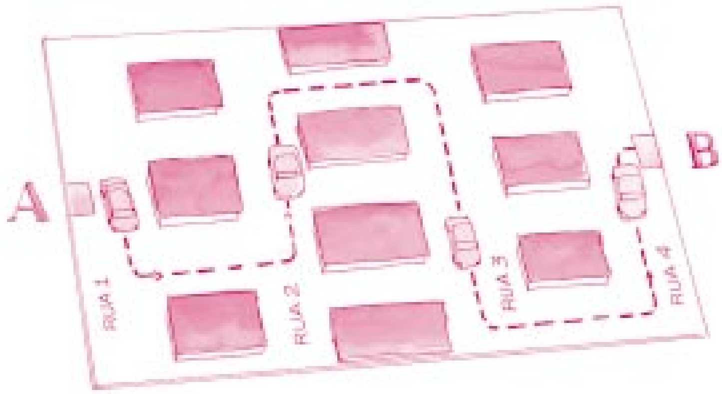
Portanto, há:

$$26 \times 25 \times 10 \times 9 = 58500$$

palavras neste código.

Exemplo 37

Considere o mapa abaixo. Quantos caminhos um carro que sai do ponto A pode tomar para chegar ao ponto B ? Suponha que a mão das ruas é tal que o carro pode ir apenas para a direita, para cima ou para baixo no mapa.



No mapa está indicado, em linha tracejada, um caminho possível que vai do ponto A para o ponto B.

Solução:

Há 4 ruas na direção vertical: são as ruas de 1 a 4, indicadas no mapa. O carro sai do ponto A, que fica na Rua 1 e vai para o ponto B, que fica na Rua 4.

Há 4 caminhos para ir da Rua 1 à Rua 2,
há 3 caminhos para ir da Rua 2 à Rua 3
e há 4 caminhos para ir da Rua 3 à Rua 4.

Portanto, dividimos o percurso do ponto A ao ponto B em 3 etapas. Multiplicando o número de maneiras de realizar cada etapa, temos:

$$4 \times 3 \times 4 = 48$$

caminhos possíveis do ponto A ao ponto B.

Resumo

Na Aula 6 aprendemos o princípio multiplicativo e o aplicamos à solução de diversos problemas. Nas aulas seguintes aprenderemos outras técnicas de contagem, entre elas, permutação, arranjo e combinação.

Exercícios

1. Uma pesquisa de opinião consiste em 6 perguntas, cada uma das quais tem 5 respostas possíveis. Se todas as perguntas devem ser respondidas, quantos resultados possíveis há para esta pesquisa ?

2. No jogo da Loto, cada jogo consiste na escolha de 5 números diferentes entre 0 e 99. Quantas cartelas um jogador deveria preencher para cobrir todas as possibilidades?

3. Uma pessoa deseja ir de avião do Rio de Janeiro para São Paulo e, no dia seguinte, de São Paulo para Brasília. Sabendo-se que uma certa companhia aérea tem 10 vôos diários do Rio para São Paulo e 5 vôos diários de São Paulo para Brasília, quantas possibilidades esta pessoa tem para realizar os dois vôos por esta companhia? Faça um diagrama.

4. Uma moeda é lançada 4 vezes. Quantos resultados possíveis existem? Faça um diagrama e descubra quantos destes resultados têm exatamente 2 caras e 2 coroas.

5. Em uma eleição há 15 candidatos para 2 vagas. Quantos resultados possíveis há para esta eleição ?

6. Na inscrição para um concurso da Receita Federal, os candidatos recebem um número de registro de 5 dígitos. O primeiro candidato a se inscrever recebe o número 00001. Quantos números de registro são possíveis?

7. Os primeiros 4 dígitos do número de telefone de 8 dígitos identificam a central telefônica. Por exemplo, o número 2455-8900 pertence à central telefônica de código 2455.

   Quantos telefones podemos ter em uma mesma central? Quantas centrais podem existir neste sistema? O primeiro dígito da central não pode ser 0.

8. As placas de carro no Brasil usam uma identificação que consta de 3 letras e 4 dígitos. Qual o número máximo de placas que podemos ter no Brasil?

9. Se você tem 5 pares de meias, 3 calças, 6 camisas e um chapéu, de quantas maneiras, usando apenas estas peças de vestuário, você pode se apresentar ao mundo?

10. O cadeado de um cofre usa um mostrador numérico com 20 números. Este mostrador deve ser girado para esquerda até um certo número, depois para a direita e depois para a esquerda novamente. A chave numérica deste cadeado é formada, portanto, por 3 números. Quantas combinações existem no total?

11. Para acessar sua conta bancária através do caixa automático, os clientes de um certo banco têm que digitar um código de 4 dígitos. Se não são permitidos códigos que usem o mesmo dígito 4 vezes (por exemplo, o código 2222 não é permitido), quantos códigos são possíveis?

12. Um pessoa está escolhendo um carro entre os modelos de duas marcas. A primeira tem 3 modelos que a interessa. Cada modelo pode vir em 5 cores diferentes. Enquanto que a segunda marca tem 5 modelos que a interessa, cada um deles podendo vir em 8 cores. Quantas possibilidades há para se escolher o carro?

13. No jogo da Loteria Esportiva, uma cartela é constituída de 13 jogos de futebol. Em cada cartela, o apostador deve escolher o resultado de cada um dos 13 jogos (3 resultados possíveis para cada jogo), podendo marcar 2 resultados em um único jogo. Em um jogo deste, de quantas maneiras podemos preencher uma cartela?

    Sugestão: a primeira tarefa é escolher, dentre os 13 jogos, aquele em que serão marcados 2 resultados.

Permutações

Objetivos

Estudar problemas de permutação.
Definir o fatorial de um número inteiro.

Nas próximas aulas aplicaremos o princípio multiplicativo a vários problemas de contagem, incluindo os problemas de permutações, de arranjos, de permutações com repetição e de combinações.

Estudamos o princípio multiplicativo na Aula 6.

Acompanhe uma discussão sobre os princípios na Matemática na aula 27.

Cada um destes problemas apresenta um tipo de situação típica e uma técnica de solução, derivada do princípio multiplicativo.

Para entender o que é permutação, vamos começar com um exemplo.

Um pai quer tirar uma fotografia de seus 3 filhos, mas não consegue colocar os 3 garotos em ordem: todos querem ficar no meio e ninguém quer ficar nos lados.

O pai poderia obrigá-los à força, mas como é paciente e educador moderno ele decide tirar uma foto de cada ordenação possível dos 3 meninos. Quantas fotos o paciente pai deverá tirar?

Os garotos se chamam André (A), João (J) e Pedro (P). É fácil *listar* todas as ordenações possíveis. Elas são as seguintes:

$$AJP, \quad APJ, \quad JAP, \quad JPA, \quad PAJ \ \text{ e } \ PJA$$

São, portanto, 6 ordenações possíveis.

Dado um conjunto de objetos distintos, uma permutação do conjunto é uma ordenação dos elementos deste conjunto.

No exemplo acima, o conjunto

$$\{A, J, P\}$$

possui 6 permutações, que são as listadas acima.

Uma maneira de calcular quantas são as permutações de um conjunto sem ter que listá-las é usar o princípio multiplicativo.

O livro de Jó é um dos livros que compõem o Antigo Testamento. Nele, Jó, um homem justo, bondoso e rico é subitamente arruinado nos bens, na família e na saúde. Na pobreza seus amigos se voltam contra ele.

Jó faz a sua experiência de Deus na pobreza e na marginalização. A confissão final de Jó: "Eu te conhecia só de ouvir. Agora, porém, meus olhos te vêem"(42,5), é o ponto de chegada de todo o livro.

O verbo "permutar"quer dizer trocar. Uma permuta é uma troca de alguma coisa. Em Matemática, o verbo "permutar" tem o sentido de ordenar. Permutar objetos é trocar sua ordem.

Voltando ao nosso exemplo do pai com paciência de Jó, são 3 posições na foto, as quais representamos com 3 traços:

$$\underline{\qquad}\quad \underline{\qquad}\quad \underline{\qquad}$$

De quantas maneiras podemos preencher a primeira posição? De 3 maneiras, pois são 3 crianças. Uma vez escolhido quem fica na primeira posição, temos 2 escolhas possíveis para a segunda posição, pois restaram 2 crianças. Depois disto, resta somente uma criança, o que dá apenas 1 escolha para a terceira posição.

Usando o princípio multiplicativo (e a paciência do pai), o número de ordenações possíveis é:

$$\underline{\ \ 3\ \ } \times \underline{\ \ 2\ \ } \times \underline{\ \ 1\ \ } = 6$$

E se fossem 6 crianças, quantas fotos teriam que ser tiradas para que houvesse uma foto de cada ordenação possível das crianças? Em outras palavras, quantas permutações existem para um conjuntos de 6 crianças?

Vamos novamente representar as 6 posições possíveis na foto por 6 espaços vazios:

$$\underline{\qquad}\quad \underline{\qquad}\quad \underline{\qquad}\quad \underline{\qquad}\quad \underline{\qquad}\quad \underline{\qquad}$$

Para preencher a primeira posição temos 6 possibilidades. Uma vez escolhida a criança que vai ficar na primeira posição, restam 5 crianças. Para a segunda posição temos 5 possibilidades. Escolhida a criança da segunda posição, ficam 4 crianças para escolher a próxima posição, e assim por diante...

O número de permutações do conjunto de 6 crianças é:

$$\underline{\ \ 6\ \ } \times \underline{\ \ 5\ \ } \times \underline{\ \ 4\ \ } \times \underline{\ \ 3\ \ } \times \underline{\ \ 2\ \ } \times \underline{\ \ 1\ \ } = 720$$

Com este mesmo raciocínio, podemos deduzir o número de permutações de um conjunto de n elementos. Cada permutação é uma ordenação deste conjunto. Temos n espaços vazios e queremos saber de quantas maneiras podemos preenchê-los com os n elementos do conjunto.

São n possibilidades para o primeiro espaço vazio, $n-1$ possibilidades para o segundo, $n-2$ para o terceiro, e assim por diante até que, para o último espaço vazio, resta apenas uma possibilidade.

Pelo princípio multiplicativo temos que o número total de permutações de um conjunto de n elementos é:

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\ .$$

É interessante apresentar uma notação para o produto acima.

Para qualquer inteiro positivo n, definimos $n!$, que se lê "n fatorial", como o produto

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

Definimos também:

$$0! = 1\ .$$

O valor que escolhemos para $0!$ pode parecer um pouco arbitrário, mas simplifica algumas fórmulas que veremos adiante.

Exemplo 38

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2.1 = 2 \\ 3! &= 3.2.1 = 6 \\ 4! &= 4.3.2.1 = 24 \\ 5! &= 5.4.3.2.1 = 120\ . \end{aligned}$$

Note que:

$$n! = n.(n-1)! = n.(n-1).(n-2)! = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)!\ ,$$

para qualquer inteiro r com $1 \leq r \leq n$.

Quando temos fatoriais no numerador e no denominador de uma fração, podemos simplificar a expressão sem ter que calcular todos os fatoriais, da seguinte forma:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\ .$$

Exemplo 39

$$
\begin{aligned}
15! &= 15.14! \\
\frac{14!}{12!} &= \frac{14.13.12!}{12!} = 14.13 \\
\frac{7!}{4!3!} &= \frac{7.6.5.4!}{4!3!} = \frac{7.6.5}{3!} = \frac{7.6.5}{6} = 7.5 = 35
\end{aligned}
$$

Quando aumentamos n, o valor de $n!$ se torna rapidamente astronômico. Por exemplo, usando um computador podemos calcular que 100! é o inteiro:

933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638
952175999932299156089414639761565182862536979208272237582511852
109168640000000000000000000000000 ,

que é um inteiro de 157 dígitos!

Vamos a mais uma notação. Chamaremos de $P(n)$ ao número de permutações de um conjunto de n elementos.

Provamos nesta aula o seguinte:

> O número de permutações de um conjunto de n elementos é:
>
> $$P(n) = n!$$

Exemplo 40

Qual o número de resultados possíveis em uma corrida de carros, onde 6 deles competem e todos chegam ao final ?

Solução:

Cada resultado possível corresponde a uma permutação do conjunto de 6 carros. O número total de permutações de um conjunto de 6 elementos é:

$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720 \ ,$$

que é o número de resultados possíveis da corrida.

Exemplo 41

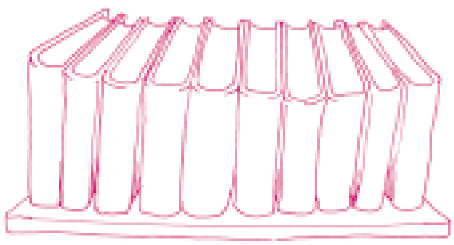
De quantas maneiras 10 livros *distintos* podem ser arrumados em uma prateleira de uma estante ?

Solução:

Cada "arrumação" corresponde a uma ordenação, ou permutação do conjunto dos 10 livros. O número total de permutações de um conjunto de 10 livros é:

$$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800\ .$$

Neste exemplo, o fato dos 10 livros serem *distintos* é muito importante! Se alguns livros fossem idênticos, teríamos um problema de contagem diferente, que será abordado mais adiante.



10 livros em uma estante

Exemplo 42

Quando uma Copa do Mundo de futebol chega às semifinais, quantos resultados são possíveis? Logo após os jogos da semifinal, quantos resultados são possíveis?

Solução:

As semifinais de um campeonato mundial de futebol são disputadas por 4 times. Dependendo de seus resultados, qualquer time pode terminar em qualquer das 4 primeiras posições. Se qualquer ordenação dos times fosse possível, o número de resultados possíveis seria o número de permutações de 4 elementos, que é:

$$P(4) = 4! = 24\ .$$

No entanto, algumas destas permutações não podem acontecer, pois se dois times disputam o mesmo jogo na semifinal, não podem se enfrentar novamente. Há, no total, 8 permutações não permitidas (por quê?), o que resulta em $24 - 8 = 16$ resultados possíveis.

Após os jogos da semifinal, temos dois times na final e dois times que farão um jogo para decidir as $3^{\underline{a}}$ e $4^{\underline{a}}$ colocações.

Usando o princípio multiplicativo, são duas possibilidades para o jogo final e 2 possibilidades para a disputa de $3^{\underline{o}}$ lugar. Logo, há:

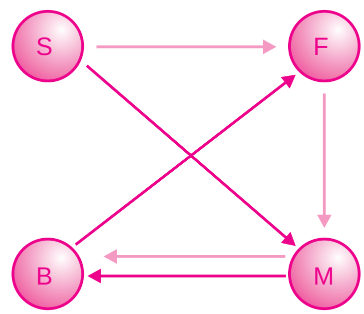
$$2 \times 2 = 4$$

resultados possíveis.

Exemplo 43

Uma pessoa sai de casa com a incumbência de ir ao supermercado (S), ir à feira (F), ir ao Banco (B) e ir ao mecânico de seu carro (M). Esta pessoa pode realizar estas 4 tarefas em qualquer ordem. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Solução:



A ilustração acima mostra duas ordens possíveis. Uma delas é: supermercado, em seguida mecânico, em seguida banco e por último feira. A outra possibilidade é: supermercado, em seguida feira, em seguida mecânico e por último banco.

O número de ordenações das 4 tarefas é o número de permutações de 4 elementos, que é:

$$P(4) = 4! = 24 \ .$$

Observe que cada ordenação corresponde a um caminho que passa pelos 4 pontos e passa por cada ponto apenas uma vez. Reciprocamente, cada caminho que passa pelos 4 pontos e passa por cada ponto apenas uma vez corresponde a uma permutação do conjunto dos 4 pontos.

Temos, portanto:

O número de caminhos que passa por n pontos, passando por cada ponto apenas uma vez e começando em qualquer um dos pontos é $n!$

Exemplo 44

Em campanha para reeleição, o presidente do Brasil quer visitar todas as capitais de todos os estados do país. Ele passará por cada capital apenas uma vez e pode começar de qualquer uma, quantas rotas são possíveis para esta turnê eleitoral?

Solução:

São 26 capitais a serem visitadas. Portanto são $P(26) = 26!$ rotas possíveis. O inteiro 26! é um número enorme com 27 dígitos!

Uma pergunta que este presidente deve se fazer é a seguinte: destas 26! rotas possíveis, qual é a mais curta? Este é um exemplo de um problema de caminho mínimo.

Resumo

Nesta aula estudamos problemas de permutação. Vimos também a definição de fatorial de um número inteiro.

Vimos que o número de permutações de um conjunto de n elementos é $n!$. Aplicamos esta fórmula a diversos exemplos.

Na próxima aula estudaremos outra técnica de contagem: os arranjos.

Exercícios

1. Calcule:

   (a) $3!$ (b) $5!$ (c) $\frac{10!}{8!}$ (d) $\frac{12!}{10!2!}$

2. Se $12! = 479001600$, calcule $13!$.

3. O que é permutação de n elementos? Crie um exemplo de problema de permutação.

4. De quantas maneiras as letras da palavra $NUVEM$ podem ser permutadas?

5. De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar em 5 cadeiras em uma fila?

6. Em um ponto de ônibus, 8 pessoas chegam ao mesmo tempo. De quantas maneiras elas podem formar uma fila?

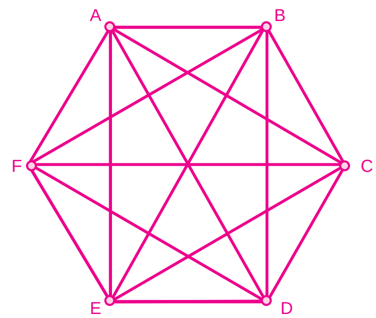
7. Uma prova de natação é disputada por 6 nadadores. Quantos resultados são possíveis?

8. Uma pessoa deve realizar 5 tarefas em um mesmo dia. Se as 5 tarefas podem ser feitas em qualquer ordem, de quantas maneiras pode ordenar as tarefas?

9. A figura abaixo representa 6 cidades: A, B, C, D, E e F. Um vendedor ambulante deve passar pelas seis cidades, passando por cada uma apenas uma vez.

A figura ao lado, em que representamos as cidades por pontos e os caminhos que as ligam por linhas é chamada de grafo.

Estudaremos os grafos nas aulas 31 e 32.



   (a) Se ele pode começar por qualquer cidade e terminar em qualquer cidade, quantos caminhos são possíveis?

   (b) Se o vendedor deve começar pela cidade A, quantos caminhos são possíveis?

   (c) Quantos caminhos possíveis existem se o vendedor deve passar pelas seis cidades uma vez e depois voltar a passar uma vez por cada cidade?

10. Um estudante está planejando ler a trilogia de Machado de Assis, que é formada pelos livros:

   – Memórias Póstumas de Brás Cubas
   – Quincas Borba
   – Dom Casmurro

Se os livros podem ser lidos em qualquer ordem, quantas ordens possíveis há para se ler a trilogia?

Machado de Assis (1839–1908) é considerado um dos maiores talentos literários brasileiros de todos os tempos.

Suas obras possuem um fino humor irônico e grande elegância de estilo. Foi o principal fundador da Academia Brasileira de Letras e o seu primeiro presidente.

Arranjos

Objetivos

Definir arranjo de n elementos tomados r a r.
Apresentar a fórmula para o cálculo de arranjos.

Em muitos problemas devemos determinar o número de maneiras de selecionar r objetos em uma certa ordem dentro de um conjunto de n objetos distintos, onde $n \geq r$.

Estes são chamados problemas de arranjo de n elementos, tomados r a r.

Portanto, o número de arranjos de n elementos, tomados r a r, é o número de maneiras de selecionar, em ordem, r elementos de um conjunto de n elementos.

Devemos ressaltar que um problema é de arranjo se a *ordem* em que os r elementos são selecionados é importante. Se a ordem não for importante, temos um outro tipo de problema, chamado combinação, que será visto na aula 10.

Um tipo de problema que pode ser considerado de arranjo: queremos saber o número de maneiras de permutar, ou ordenar, ou "arranjar" (aqui são todos sinônimos) r elementos distintos, mas escolhidos em um conjuntos de n elementos.

Vamos a um exemplo.

Exemplo 45

Em uma classe de 10 alunos, deve-se escolher um representante e seu suplente. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

Trata-se de selecionar 2 dentro de uma turma com 10 alunos. A ordem é importante, pois o primeiro será o representante e o segundo será suplente.

Temos 10 possibilidades para a primeira posição. Uma vez feita a escolha, restam 9 alunos, que são as 9 possibilidades para a segunda posição. Portanto, são:

$$\underline{10} \times \underline{9} = 90$$

possibilidades para formação desta comissão.

Seja A(n,r) o número de arranjos de n elementos, tomados r a r. Em outras palavras, $A(n,r)$ é o número de maneiras de selecionar, em ordem, r elementos em um conjunto de n elementos distintos.

Em geral, se devemos selecionar, em alguma ordem, r objetos de um conjunto de n objetos ($n \geq r$) distintos, temos n maneiras de preencher a primeira posição, seguido de $n-1$ maneiras de preencher a segunda posição, seguido de $n-2$ maneiras de preencher a terceira posição, e assim por diante. Para a $r-$ésima posição, teremos $n-r+1$ possibilidades de preenchimento.

$$\underline{n} \times \underline{\text{n-1}} \times \underline{\text{n-2}} \times \ldots \times \underline{\text{n-r+1}}$$

Usando o princípio multiplicativo, temos:

$$A(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\ .$$

Podemos escrever este resultado de uma forma mais compacta usando a notação fatorial:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)][(n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1]}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}\ .$$

Temos, portanto, a fórmula:

$$\boxed{A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Exemplo 46

Em uma reunião de condomínio onde 10 moradores estão presentes, deve-se escolher, entre eles, um síndico, um subsíndico, um secretário e um tesoureiro. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

Este problema é o de selecionar, em ordem, 4 pessoas dentro de um conjunto de 10 pessoas. Este número é:

$$A(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040 \ .$$

Há, portanto, 5040 possibilidades.

Vamos a mais um exemplo:

Exemplo 47

Um empregador tem 3 tarefas distintas que deve distribuir para 6 empregados. De quantas maneiras pode fazer isto, se cada empregado pode realizar apenas uma tarefa e cada tarefa deve ser dada a apenas um empregado?

Solução:

Trata-se de escolher 3 empregados para dar as 3 tarefas. A ordem da escolha é importante porque as tarefas são distintas. Se as tarefas são T_1, T_2 e T_3, então podemos dar a tarefa T_1 ao primeiro empregado selecionado, a tarefa T_2 ao segundo empregado e a tarefa T_3 ao terceiro empregado selecionado.

O número de soluções é, portanto, o número de arranjos de 6 elementos, tomados 3 a 3. Portanto, são:

$$A(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 6.5.4 = 120$$

maneiras de distribuir as tarefas.

Observe que os exemplos descrevem situações muito diferentes umas das outras, mas há um padrão: todos eles envolvem determinar o número de maneiras de selecionar, em ordem, um certo número de elementos de um conjunto. Isto é o que caracteriza o problema de arranjo.

Observações:

Quando $n = r$, temos que o número de arranjos de n elementos, tomados n a n, é o número de maneiras de selecionar, em ordem, n elementos de um conjunto de n elementos. Logo, é o número de maneiras de ordenar n

elementos. Este é o número de permutações de n elementos, que é $P(n)$. Por esta observação, temos:

$$A(n,n) = P(n)\ .$$

Mas, como vimos na aula 7, $P(n) = n!$.

Por outro lado, fazendo $n = r$ na fórmula de arranjo, também obtemos

$$A(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!\ .$$

Aqui fica claro porque é interessante definir $0!$ como sendo igual a 1: isto faz com que a fórmula $A(n,r) = \frac{n!}{r!}$ seja válida para $n = r$.

Poderíamos, em princípio, ter definido o "zero fatorial" livremente, ou simplesmente não tê-lo definido. Contudo, a observação acima mostra que a definição $0! = 1$ é útil porque leva a uma harmonia da fórmula para $A(n,r)$ com a fórmula para $P(n)$.

Exemplo 48

O prefeito de uma cidade está trabalhando com sua equipe, decidindo as metas de sua administração. Seus assessores lhe apresentaram uma lista de 30 metas, dividas em 3 grupos:

12 metas de curto prazo;

10 metas de médio prazo;

8 metas de longo prazo.

O prefeito então ordena que seus assessores escolham 5 metas de cada grupo, em uma ordem de prioridade em cada grupo.

De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

O problema se divide em três tarefas: escolher 5 metas em cada um dos três grupos. Como deve haver uma ordem de prioridade, a ordem da escolha é importante. Trata-se então de um problema de arranjo.

A escolha das 5 metas de curto prazo pode ser feita de:

$$A(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{7!} = 95040 \quad \text{maneiras}\ .$$

A escolha das 5 metas de médio prazo pode ser feita de

$$A(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!} = 30240 \quad \text{maneiras} .$$

A escolha de 5 metas de longo prazo pode ser feita de

$$A(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = 6720 \quad \text{maneiras} .$$

Usando o princípio multiplicativo, o prefeito tomaria um grande susto ao descobrir que possui

$$95040 \times 30240 \times 6720 = 19313344512000$$

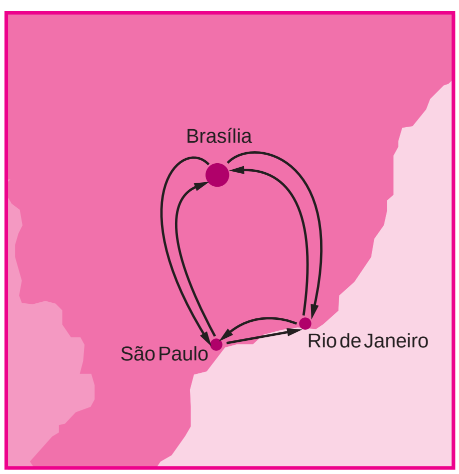
possibilidades para seu plano de administração!

Exemplo 49

Uma companhia aérea tem vôos ligando 5 cidades, interligando cada uma destas cidades a todas as outras. Calcule quantas rotas diferentes esta companhia possui. Considere a ida uma rota diferente da volta. Assim, Rio–Brasília é uma rota enquanto Brasília–Rio é outra.

Solução:

Na figura ao lado representamos as rotas ligando 3 cidades:



Cada rota é formada por duas cidades, sendo que a ordem é importante porque as mesmas duas cidades, em ordem diferente, formam 2 rotas diferentes.

Portanto, o número de rotas é o número de maneiras de selecionar 2 cidades, de um conjunto de 5 cidades, em que a ordem da escolha é importante. É um problema de arranjo.

Na figura anterior, sendo 3 cidades, temos:

$$A(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6 \quad \text{rotas.}$$

Voltando à companhia aérea, a resposta é o número de arranjos de 5, tomados 2 a 2, isto é:

$$A(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} = 20\ .$$

Esta companhia aérea possui 20 rotas.

Na figura anterior, representamos as cidades por pontos e as rotas por linhas ligando estes pontos. Este tipo de figura é chamado um grafo, e será estudado nas Aulas 31 e 32. Os pontos (as cidades na figura) são chamados vértices do grafo, enquanto as linhas ligando os vértices são chamadas arestas do grafo.

Quando as arestas têm uma orientação, como é o caso acima, o grafo é chamado de grafo dirigido ou orientado.

Resumo

Nesta aula vimos a definição de arranjo de n elementos, tomados r a r, denotado $A(n,r)$, que é o número de maneiras de selecionar r elementos em um conjunto de n elementos, onde a ordem da escolha é importante.

Mostramos a fórmula $A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ e a aplicamos à solução de alguns exemplos.

Na próxima aula apresentaremos mais uma técnica de contagem: a permutação com elementos repetidos.

Exercícios

1. Calcule:

   (a) $A(5,3)$
   (b) $A(2,1)$
   (c) $A(5,5)$
   (d) $A(20,18)$

2. O que é arranjo de n elementos tomados r a r? Dê um exemplo. Compare arranjo com permutação.

3. De quantas maneiras 4 pessoas em uma família de 10 podem se colocar em uma foto?

4. Um departamento de uma Universidade tem 10 professores. Estes professores devem escolher um chefe e um vice-chefe do departamento. De quantas maneiras podem fazê-lo?

5. (a) Para ganhar em uma corrida de cavalos, um apostador deve acertar o primeiro e o segundo colocados em um páreo em que participam 8 cavalos. Quantos são os resultados possíveis?

   (b) Suponha agora que o apostador deve acertar o primeiro e o segundo colocado nos 2 primeiros páreos. Quantos são os resultados possíveis?

6. A final de um campeonato de futebol termina empatada e deve ir para disputa de pênaltis. Um técnico deve selecionar 5 jogadores, dentro do conjunto de 10 jogadores em campo, para bater os pênaltis. O técnico deve também decidir a ordem em que as penalidades serão cobradas. De quantas maneiras ele pode fazer a escolha?

7. Uma banda de rock deve escolher 10 músicas, dentro de um conjunto de 15 músicas, para formar seu novo CD. A ordem da escolha é importante pois é a seqüência em que as músicas aparecerão no CD. Quantas escolhas são possíveis?

8. Uma companhia aérea A opera em 6 cidades de um país, ligando cada cidade a cada uma das outras cidades. Quantas rotas possui, no total? Para expandir seus negócios, ela compra a companhia aérea B, que opera em 4 cidades de outro país, ligando cada uma delas a cada uma das outras. Para se expandir ainda mais, a agora multinacional companhia A inaugura um vôo ligando duas cidades, uma em cada país. Com quantas rotas ficou, no total?

   Represente a situação por um grafo dirigido.

Permutações com elementos repetidos e permutações circulares

Objetivos

Estudar permutações com elementos repetidos.
Estudar permutações circulares.

Permutações com elementos repetidos

As permutações que estudamos até aqui envolviam conjuntos de objetos *distintos*. Porém, alguns problemas de contagem envolvem permutações com objetos repetidos.

Vamos começar calculando quantas são as permutações das letras da palavra ARARA.

Se passarmos um tempo tentando todas as reordenações possíveis das letras da palavra $ARARA$, encontraremos as 10 palavras abaixo:

$$\begin{array}{lllll} ARARA & ARAAR & ARRAA & AAARR & AARAR \\ AARRA & RARAA & RAARA & RAAAR & RRAAA\,. \end{array}$$

Mas como poderíamos determinar que são 10 permutações, sem ter de listá-las?

Iniciaremos com uma palavra de 5 letras distintas, como em:

$$A_1R_1A_2R_2A_3\ ,$$

onde A_1, A_2 e A_3 simbolizam letras distintas nas posições dos $A's$ e R_1, R_2 letras distintas nas posições dos $R's$ da palavra $ARARA$.

Como são 5 objetos distintos, temos $5! = 120$ permutações. Vamos agora contar estas 120 permutações de outra maneira. Seja x o número de permutações de $ARARA$. Para cada posição dos A's e R's, temos $3! = 6$ maneiras de distribuir os A_i's e $2! = 2$ maneiras de distribuir R_1 e R_2. Por exemplo, seja a permutação de $ARARA$ dada por $RARAA$. Então há $3! = 6$ maneiras de colocar os A_i's, que são:

$$\begin{array}{cc} RA_1RA_2A_3 & RA_1RA_3A_2 \\ RA_2RA_1A_3 & RA_2RA_3A_1 \\ RA_3RA_1A_2 & RA_3RA_2A_1 \end{array}$$

Uma vez que escolho a posição dos A_i's, por exemplo $RA_1RA_2A_3$, tenho $2! = 2$ maneiras de colocar R_1 e R_2, que são

$$R_1A_1R_2A_2A_3 \quad R_2A_1R_1A_2A_3$$

São x permutações da palavra $ARARA$, para cada uma delas 3! maneiras de colocar os A_i's e 2! maneiras de colocar os R_i's. Pelo princípio multiplicativo, o número total de permutações de $A_1R_1A_2R_2A_3$ é

$$x \times 3! \times 2!\,.$$

Por outro lado, este número é simplesmente o número de permutações de 5 objetos distintos, que é $5! = 120$. Portanto,

$$x \times 3! \times 2! = 120 \implies x = \frac{120}{3!2!} = \frac{120}{6.2} = 10\,,$$

Exemplo 50

Quantas permutações existem para a palavra $BANANA$?

Solução:

Usando o mesmo raciocínio, se fossem 6 letras distintas teríamos $6! = 720$ permutações.

Seja x o número de permutações de $BANANA$. Se os 3 A's e os 2 N's fossem distintos, para cada permutação de $BANANA$, haveria $3! = 6$ maneiras de posicionar os A's e $2! = 2$ maneiras de posicionar os N's.

Portanto, pelo princípio multiplicativo,

$$x \times 3! \times 2! = 6!\,.$$

Logo,

$$x = \frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{6.2} = 60\,.$$

Vale, em geral, o seguinte:

> Dados N objetos, de modo que
> N_1 são de um certo tipo,
> N_2 são de tipo diferente dos anteriores,
> $\ldots$
> N_r são de um tipo diferente dos anteriores e
> $N = N_1 + N_2 + \cdots N_r$,
> então, o número de permutações destes n objetos é dado pela fórmula
> $$\frac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_r!}\,.$$

Para provar a fórmula acima, basta repetir o raciocínio que fizemos nos exemplos anteriores.

Se fossem N objetos distintos, teríamos $N!$ permutações. Seja x o número de permutações dos objetos. Então, para cada permutação dos objetos, existem

$N_1!$ maneiras de colocar objetos do primeiro tipo,
$N_2!$ maneiras de colocar objetos do segundo tipo,
$\vdots$
$N_r!$ maneiras de colocar objetos do $r-$ésimo tipo.

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$x.N_1!N_2!\ldots N_r! = N!\,;$$

logo,

$$x = \frac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_r!}\,.$$

Exemplo 51

Em uma estante de uma loja de discos serão colocados 15 CD's de música popular brasileira, sendo 10 do Chico Buarque, 3 do Gilberto Gil e 2 do Djavan (sendo o mesmo CD de cada compositor). De quantas maneiras estes 15 CD's podem ser arrumados na estante?

Solução:

O número de maneiras de colocar os CD's é:

$$\frac{15!}{10!3!2!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{10!\;6.2} = \frac{15.14.13.12.11}{12} = 30030$$

Exemplo 52

Uma pessoa tem 6 garrafas de vinho para servir em uma festa em sua casa. Os vinhos são de 3 tipos, 2 garrafas de cada tipo. Esta pessoa está preocupada com a ordem em que deve servir os vinhos. Quantas são as possibilidades?

Solução:

O número de ordenações possíveis para as garrafas são as permutações de 6 objetos, sendo os objetos de 3 tipos, 2 objetos de cada tipo. Usando a fórmula, temos:

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{720}{2.2.2} = 90 \ .$$

Portanto, o dono da festa deve decidir entre 90 ordens diferentes em que pode servir os vinhos.

Exemplo 53

Um DJ tem 6 músicas para tocar. A música mais popular deve ser repetida 4 vezes. Outras duas músicas devem ser repetidas 2 vezes. As músicas restantes serão tocadas apenas 1 vez. Determine de quantas maneiras diferentes este DJ pode organizar seu show.

Solução:

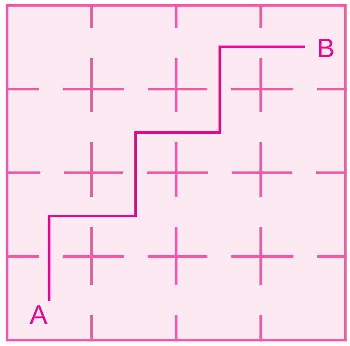
Note que o DJ tocará, com todas as repetições, um total de $4+2+2+1+1+1 = 11$ músicas, sendo que as músicas são de 6 tipos. O número de repetições é $4, 2, 2, 1, 1$ e 1. Portanto, temos no total

$$\frac{11!}{4!2!2!} = 415800$$

ordenações possíveis para estas músicas.

Exemplo 54

Uma experiência de laboratório consiste em colocar um rato no quadrado A do pequeno labirinto da figura a seguir e ver os caminhos que ele escolhe para chegar ao quadrado B, onde há comida. Os quadrados têm pequenas portas que permitem ao rato andar para cima ou para a direita somente. Quantos caminhos possíveis existem?



Solução:

Cada caminho de A para B pode ser representado por uma "palavra" de 6 letras, sendo 3 letras D e 3 letras C, onde um D significa que naquele ponto o ratinho tomou o caminho para a direita enquanto que um C significa que foi para cima.

Por exemplo, o caminho indicado na figura é o caminho:

$$CDCDCD$$

Cada palavra que representa um caminho deve ter exatamente 3 letras $D's$ e 3 letras $C's$, pois, para ir do ponto A ao ponto B, o pequeno roedor deve ir exatamente 3 vezes para a direita e 3 vezes para cima, em alguma ordem.

O problema acima se traduz então na seguinte questão: quantas palavras de 6 letras existem, com exatamente 3 letras C e 3 letras D? Colocando de outra maneira, quantas permutações de 6 objetos existem, sendo os objetos de 2 tipos, 3 objetos para cada tipo? A resposta é:

$$\frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6.6} = 20 \ .$$

Permutações circulares

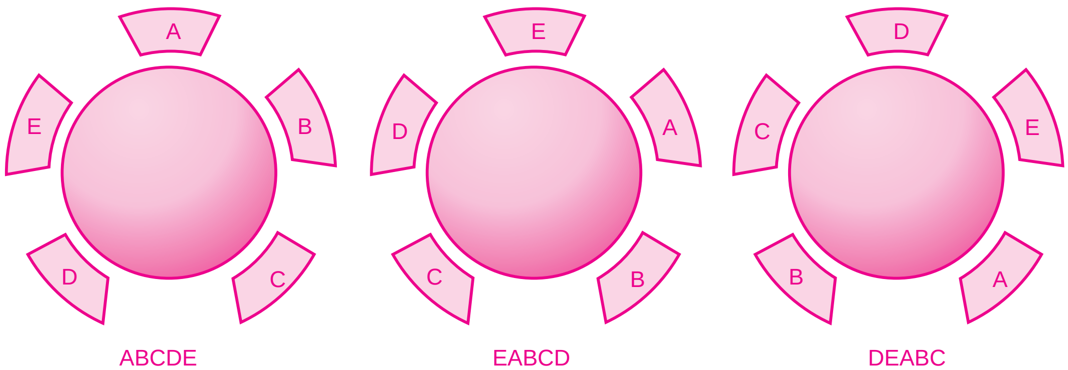
As permutações que estudamos até aqui são permutações lineares, no sentido que são permutações de objetos em linha, isto é, ordenações em fila.

Quando falamos somente "permutação", sem qualificar como "linear" ou "circular", estamos sempre nos referindo a permutações lineares

Vamos estudar agora permutações circulares. Considere o seguinte problema: de quantas maneiras 5 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa circular?

Posto desta forma, a questão fica um pouco vaga. Quando duas pessoas estão sentadas da mesma forma?

Vamos chamar as pessoas de A, B, C, D e E. Considere as ordenações dadas pela figura a seguir:



Duas permutações de pessoas são consideradas como a mesma permutação circular se uma pode ser obtida da outra, rodando todas as pessoas em círculo na mesma direção e pela mesma quantidade.

Há dois sentidos possíveis de rotação: para a nossa esquerda, que é o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, e para a nossa direita, que é o sentido dos ponteiros do relógio.

O sentido de rotação para a esquerda é chamado de sentido trigonométrico ou positivo. O sentido contrário, para direita, é chamado sentido anti-trigonométrico ou negativo.

Na figura anterior, da permutação $ABCDE$ (ordenação da esquerda) para a permutação $EABCD$ (ordenação do meio), todas as 5 pessoas pularam exatamente 1 cadeira, no sentido dos ponteiros do relógio.

Da permutação $ABCDE$ para a permutação $DEABC$ (ordenação da direita) todos pularam 2 cadeiras, no mesmo sentido, o dos ponteiros do relógio.

Ainda com relação à figura anterior, se as pessoas pulassem novamente 1 cadeira, teríamos a permutação $CDEAB$. Pulando novamente, teríamos a permutação $BCDEA$. Se pulassem 1 cadeira novamente voltariam à posição inicial.

Logo, vemos que as 5 permutações lineares:

$$ABCDE \quad EABCD \quad DEABC \quad CDEAB \quad BCDEA$$

são idênticas quando vistas como permutações circulares.

Portanto, cada 5 permutações lineares correspondem à mesma permutação circular. O número total de permutações lineares de 5 pessoas é:

$$P(5) = 5! \,.$$

Para obter o número de permutações circulares basta dividir este número por 5. Portanto, são:

$$\frac{5!}{5} = \frac{5.4!}{5} = 4! = 24$$

permutações circulares de 5 pessoas.

Exemplo 55

De quantas maneiras 6 pessoas podem sentar em torno de uma mesa?

Solução:

Raciocinando como no exemplo anterior, podemos ver que cada 6 permutações lineares de 6 pessoas corresponde a uma permutação circular. Por exemplo, se as pessoas são representadas por $ABCDEF$, então as permutações:

$$ABCDEF \quad FABCDE \quad EFABCD \quad DEFABC \quad CDEFAB \quad BCDEFA$$

correspondem à mesma permutação circular. Portanto, são:

$$\frac{P(6)}{6} = \frac{6.5!}{6} = 5! = 120$$

permutações circulares de 6 objetos.

De um modo geral, se forem n objetos, então cada n permutações lineares correspondem à mesma permutação circular. O total de permutações circulares é:

$$\frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1)!}{n} = (n-1)! \,.$$

Temos, portanto, o seguinte:

O número de permutações circulares de n objetos é $(n-1)!$.

Exemplo 56

De quantas maneiras podemos colocar 4 homens e 4 mulheres em uma mesa, de forma que os homens sempre estejam entre duas mulheres e vice-versa, isto é, não haja dois homens nem duas mulheres sentados lado a lado.

Solução:

Para resolver este problema, vamos inicialmente determinar o número de permutações lineares com a propriedade desejada (alternar homens e mulheres). Depois, calculamos o número de permutações circulares, sabendo que cada 8 permutações lineares correspondem a uma permutação circular.

O número de permutações lineares que começa com um homem é 576, pois temos 4 maneiras de escolher a primeira posição (são 4 homens), 4 maneiras de escolher a segunda posição (são 4 mulheres), 3 maneiras de escolher a terceira (tem que ser um homem e sobraram 3 homens) etc.

Portanto, há $4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 576$ permutações lineares iniciando com um homem.

Analogamente, há 576 permutações lineares iniciando com uma mulher. Assim, há $576+576 = 1152$ permutações lineares. Cada 8 destas permutações correspondem a uma permutação circular.

Portanto, há: $\frac{1152}{8} = 144$ permutações circulares com a propriedade desejada.

Resumo

Nesta aula, estudamos permutações com elementos repetidos, como é o exemplo das permutações da palavra CEDERJ.

Estudamos também permutações circulares, onde vimos que o número de permutações circulares de n elementos distintos é

$$\frac{P(n)}{n}.$$

As soluções de alguns exercícios exigem a aplicação de mais de uma técnica, como foi o caso do exemplo 56, onde usamos somente o princípio multiplicativo para determinarmos o número de permutações lineares e depois calculamos o número de permutações circulares.

Nas próximas duas aulas, estudaremos uma outra técnica de contagem: as combinações.

Exercícios

1. Quantas permutações existem para a palavra $BICICLETA$?

2. Um professor tem uma lista de 10 problemas, dos quais deve selecionar 3 para um teste. Supondo que a ordem de colocação dos problemas seja importante, de quantas maneiras pode fazer o teste?

3. O mesmo professor tem de elaborar outro teste, sendo que desta vez ele tem uma lista de 6 problemas da unidade I de sua disciplina, 8 problemas da unidade II e 7 problemas da unidade III.

   De quantas maneiras este professor pode elaborar um teste de 5 questões, sabendo-se que a ordem de apresentação dos problemas é importante e que:

   (a) Todas as questões devem ser da unidade I.

   (b) O teste deve ter 3 questões da unidade I, seguido de 2 questões da unidade II.

   (c) O teste deve ter 2 questões da unidade II, seguido de 3 questões da unidade III.

   (d) Não há restrições quanto às questões.

4. Uma pessoa deve cumprir 6 tarefas, sendo 2 delas agradáveis e as demais muito chatas. Um pouco contrariada, esta pessoa se pergunta de quantas maneiras pode ordenar o cumprimento das tarefas. Responda isto por ela, sabendo-se que:

   (a) Ela é do tipo de pessoa que gosta de fazer as coisas agradáveis primeiro.

   (b) Ela não leva em conta se a tarefa é chata ou não quando planeja a ordem de execução.

   (c) Vai realizar uma tarefa interessante, em seguida duas chatas, em seguida a outra tarefa interessante e depois as outras chatas.

5. Uma banda de reggae vai fazer uma turnê por 5 países, dando shows em 4 cidades em cada país. De quantas maneiras esta banda pode escolher seu itinerário, sabendo-se que a única restrição é que os shows em um mesmo país devem ser feitos em seguida (isto é, não pode visitar o mesmo país duas vezes)?

(Sugestão: primeiramente eles devem escolher a ordem em que visitarão os países, e depois a ordem das cidades em cada país.)

6. (a) Um trabalhador anda de casa para o trabalho. Para fazê-lo, ele percorre 5 quadras de leste para oeste e 6 quadras de norte para sul. Supondo que ele ande sempre para o oeste ou para o sul, quantos caminhos possíveis existem?

   (b) Suponha agora que, no caminho, ele sempre passa por uma banca de jornal, que fica exatamente a 3 quadras para o oeste e 3 quadras para o sul de sua casa. Quantos caminhos para o trabalho existem que passam pela banca de jornal?

7. De quantas maneiras podemos dispor 10 pessoas em uma mesa circular?

8. Na questão anterior, se as 10 pessoas são 5 homens e 5 mulheres, quantas permutações circulares existem tais que não haja 2 homens e nem 2 mulheres em lugares adjacentes?

9. Um anfitrião vai receber 5 pessoas para jantar em sua casa. Como poderá dispor as pessoas na mesa, se dois de seus convidados não se falam e, portanto, não deverão sentar em cadeiras adjacentes?

10. Considere um motor a explosão de 6 cilindros. Os cilindros são acionados sempre na mesma ordem. Por exemplo, se os cilindros são numerados $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, uma possível ordem de explosão é $1, 4, 5, 2, 3, 6$. Note que uma permutação que corresponda à mesma permutação circular, dá a mesma ordem de explosão, por exemplo $6, 1, 4, 5, 2, 3$ é a mesma ordem de explosão de antes. Quantas ordens de explosão possíveis existem para um motor de 6 cilindros?

Combinação - I

Meu trabalho tem sempre tentado unir o verdadeiro ao belo
e quando eu tive que escolher por um deles,
geralmente escolhi o belo.
Hermann Weyl

Hermann Weyl (1885–1955) foi um dos matemáticos mais importantes do séc. XX.

Sua frase destacada acima pode causar alguma estranheza, mas demonstra uma das faces do trabalho matemático: a estética, a busca da beleza e da simetria.

A Matemática reflete fortemente a busca pela perfeição estética.

Objetivos

Estudar os problemas de combinacão de n elementos tomados r a r.

Em aulas anteriores, estudamos permutações de objetos distintos, permutações com objetos repetidos e arranjos.

Uma permutação de um conjunto é uma ordenação dos elementos deste conjunto. Vimos que há $n!$ permutações de todos os n objetos de um conjunto.

Vimos também que o número de arranjos de n objetos distintos tomados r a r, denotado $A(n, r)$, é o número de maneiras de selecionar, *em ordem*, r objetos em um conjunto de n objetos.

No entanto, em muitas situações estamos interessados em selecionar r objetos em um conjunto de n objetos, *sem nenhuma preocupação com a ordem*. Este tipo de problema é chamado de Combinação.

Exemplo 57

Um jogo de pôquer utiliza as 52 cartas de um baralho. Cada "mão" é formada por 5 cartas. Quantas "mãos" diferentes são possíveis?

Evidentemente esta pergunta assume grande importância para jogadores de pôquer, mas, mesmo não o sendo, vamos tentar entender o problema combinatório envolvido.

Note que neste caso a ordem da seleção das cartas não é importante, pois as mesmas 5 cartas, independentemente da ordem, farão sempre o mesmo jogo.

O problema pode ser formulado da seguinte maneira:

"dado um conjunto de 52 objetos, de quantas maneiras podemos selecionar 5 objetos deste conjunto, sem levar em conta a ordem?"

Resolveremos este problema um pouco mais tarde, mas ainda nesta aula.

Sejam n e r inteiros, com $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$. O número de combinações de n elementos tomados r a r, denotado por $C(n,r)$, é o número de maneiras de selecionarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos, não importando a ordem em que os objetos são retirados.

A notação $C(n,r)$ para número de combinações de n elementos tomados r a r é consistente com a notação $A(n,r)$ para número de arranjos. Contudo, usa-se também bastante a notação $\binom{n}{r}$, com o mesmo significado que $C(n,r)$.

Não há uma maneira padrão de ler o símbolo $\binom{n}{r}$. É comum ler-se "n, r a r". Em inglês este símbolo é lido "n choose r", que pode ser traduzido por "n escolhe r".

Usaremos mais a notação $C(n,r)$ durante o estudo de problemas combinatórios e mais a notação $\binom{n}{r}$ quando estudarmos o teorema binomial na Aula 13.

Exemplo 58

De quantas maneiras podemos selecionar 3 objetos de um conjunto de 4 objetos distintos?

Solução:

Seja $X = \{a,b,c,d\}$ um conjunto de 4 objetos distintos. Podemos escolher 3 objetos de 4 formas distintas:

$$abc \quad acd \quad abd \quad bcd$$

Concluímos que $C(4,3) = 4$.

Observe que cada uma destas escolhas corresponde a subconjuntos diferentes de X.

Desta forma, o conjunto X possui 4 subconjuntos com 3 elementos, que são:

$$\{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d\} \text{ e } \{b,c,d\} \ .$$

Assim, selecionar r objetos de um conjunto de n objetos é o mesmo que escolher um subconjunto de r elementos de um conjunto de n elementos, o que resulta em:

Sejam n, r inteiros não negativos, com $0 \leq r \leq n$. Qualquer conjunto de n elementos possui $C(n,r)$ subconjuntos.

Vimos acima que qualquer conjunto de 4 elementos possui 4 subconjuntos de 3 elementos. Logo sabemos que $C(4,3) = 4$. Mas, em geral, ainda não sabemos como calcular $C(n,r)$.

Exemplo 59

Um grupo de 5 pessoas precisa escolher 2 delas para formar uma comissão. Quantas escolhas são possíveis?

Solução:

Vamos representar por $X = \{a, b, c, d, e\}$ o conjunto de 5 pessoas. As possibilidades para uma comissão de 2 pessoas (sem importar a ordem da escolha) são:

$$\begin{array}{llll}
\{a,b\}, & \{a,c\}, & \{a,d\}, & \{a,e\} \\
\{b,c\}, & \{b,d\}, & \{b,e\} & \\
\{c,d\}, & \{c,e\} & & \\
\{d,e\} & & &
\end{array}$$

No total, 10 comissões de 2 pessoas podem ser formadas.

No exemplo acima, concluímos que $C(5,2) = 10$. Equivalentemente, todo conjunto de 5 elementos possui 10 subconjuntos de 2 elementos.

Assim, deduzimos o valor de $C(n,r)$ simplesmente listando todas as escolhas possíveis de r elementos a partir de um conjunto de n elementos. Vamos agora deduzir uma fórmula geral para $C(n,r)$.

Observe que, para cada escolha de r objetos de um conjunto de n objetos distintos, estes r objetos podem ser permutados de $r!$ maneiras.

Portanto, podemos relacionar o número de combinações de n elementos tomados r a r com o número de arranjos de n objetos tomados r a r da seguinte maneira: cada combinação corresponde a $r!$ arranjos.

Explicando um pouco melhor: considere um conjunto de n elementos. Cada combinação de r elementos é uma escolha de r elementos, sem importar a ordem. Cada arranjo de r elementos é uma escolha de r elementos, mas com uma ordem. Cada r elementos pode ser ordenado de $r!$ maneiras; logo cada r elementos fornece uma combinação e fornece $r!$ arranjos.

Isto é, temos $r!$ arranjos para cada combinação de r elementos. O número total de arranjos de n objetos tomados r a r é $A(n,r)$. Logo,

$$C(n,r) \times r! = A(n,r), \text{ isto é, } \ C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!}$$

Mas vimos que

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}\,;$$

logo,

$$C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,.$$

O que resulta em

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,.}$$

Exemplo 60

Um técnico convocou 12 jogadores para um time de basquete. Para armar o time que vai começar o jogo, deve selecionar 5 jogadores. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Solução:

O número de combinações de 12 jogadores, tomados 5 a 5, é

$$C(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!5!} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{7!.120} = 11.9.8 = 792\,.$$

O técnico pode, portanto, formar 792 times de 5 jogadores utilizando os 12 jogadores convocados.

Exemplo 61

Voltemos ao exemplo das cartas do jogo de pôquer. Com um baralho de 52 cartas, quantas mãos de 5 cartas são possíveis?

Solução:

São possíveis

$$C(52,5) = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52.51.50.49.48.47!}{47!.120} = 2598960$$

jogos diferentes. De todas estas possibilidades, apenas 4 formam um "Royal Flush", um dos jogos mais fortes do pôquer, que é quando as 5 cartas são o dez, valete, dama, rei e ás do mesmo naipe.

Exemplo 62

Uma pessoa sai para comprar CDs. Dez CDs a interessam, mas ela tem dinheiro somente para 4 deles. Qual o número de escolhas possíveis?

Solução:

Como não importa a ordem de escolha dos CDs, estamos diante de um problema de combinação. Trata-se do número de combinações de 10 objetos, tomados 4 a 4. São, portanto,

$$C(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!.24} = \frac{10.9.8.7}{24} = 210$$

escolhas possíveis.

Exemplo 63

Uma turma possui 5 alunos e 6 alunas. Uma comissão deve ser formada entre todos os alunos, devendo ter 2 meninos e 2 meninas. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução:

Podemos dividir a seleção de uma comissão como esta em duas etapas:

1. Escolher 2 alunos de um conjunto de 5 alunos.
2. Escolher 2 alunas de um conjunto de 6 alunas.

A primeira tarefa pode ser feita de

$$C(5,2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = 10 \quad \text{maneiras,}$$

enquanto a segunda etapa pode ser feita de

$$C(6,2) = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2} = 15 \quad \text{maneiras,}$$

Pelo princípio multiplicativo, temos um total de

$$10 \times 15 = 150$$

comissões possíveis.

Exemplo 64

Uma moeda é jogada 6 vezes. Quantos são os resultados possíveis? Quantos destes resultados têm 3 caras e 3 coroas?

Solução:

Já vimos anteriormente a solução da primeira parte. Temos 6 tarefas, sendo cada tarefa o lançamento de uma moeda. Cada tarefa tem 2 resultados possíveis (cara ou coroa). Portanto são

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

resultados possíveis.

Para responder à segunda pergunta, quantos resultados têm 3 caras e 3 coroas, podemos pensar nos lançamentos como 6 objetos de um conjunto

$$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\} \ ,$$

onde m_1 representa o resultado do primeiro lançamento, m_2 o do segundo lançamento etc.

Cada resultado com exatamente 3 caras corresponde à escolha de 3 elementos no conjunto M. Por exemplo, a escolha $\{x_1, x_3, x_5\}$ corresponde ao resultado de obtermos cara no primeiro, terceiro e quinto lançamentos e coroa nos demais.

Portanto, o número de resultados com exatamente 3 caras corresponde ao número de maneiras de selecionar 3 elementos de um conjunto de 6 elementos.

A solução é:

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{6} = 20 \ .$$

Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior, obtemos a seguinte tabela, que mostra o número de resultados em que ocorrem os eventos listados na coluna da esquerda.

Evento	Nº de resultados favoráveis
6 coroas	1
1 cara e 5 coroas	$C(6,1) = 6$
2 caras e 4 coroas	$C(6,2) = 15$
3 caras e 3 coroas	$C(6,3) = 20$
4 caras e 2 coroas	$C(6,4) = 15$
5 caras e 1 coroa	$C(6,5) = 6$
6 caras	1
Total dos resultados possíveis	64

Na tabela acima usamos a palavra evento para descrever um resultado, como "2 caras e 4 coroas", por exemplo. Usamos também a expressão "número de resultados favoráveis" para descrever o número de maneiras em que o evento ocorre. Isto é, entre todos os resultados possíveis, o número de resultados "favoráveis" àquele evento.

A expressão "resultados favoráveis" é muito utilizada na teoria das probabilidades, que estudaremos no Módulo 2 desta disciplina.

Resumo

Nesta aula estudamos o que são problemas de combinação.
Encontramos a fórmula

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!},$$

que fornece o número de combinações de n elementos tomados r a r.
Aplicamos esta fórmula a diversos exemplos.

Na próxima aula veremos mais alguns problemas de combinação, e resolveremos o problema de determinar o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos.

Exercícios

1. Calcule:

   (a) $C(5,2)$
   (b) $C(3,3)$
   (c) $C(10,10)$
   (d) $C(10,0)$

2. Prove que
$$C(n,n) = C(n,0) = 1\ ,$$
para qualquer n inteiro não negativo.

3. Prove que
$$C(n,r) = C(n,n-r)\,,$$
para quaisquer inteiros não-negativos n, r, $0 \leq r \leq n$.

4. Quantos subconjuntos de quatro elementos tem um conjunto de dez elementos?

5. Uma comissão do Senado tem 12 senadores. Destes, serão escolhidos 4 para formar uma subcomissão. De quantas maneiras isto pode ser feito?

6. Um estudante recebe uma prova contendo 6 questões. Ele deve escolher 4 para resolver. De quantas maneiras ele pode fazer sua escolha?

7. Quantos inteiros de 3 dígitos podem ser formados, usando-se apenas os algarismos $\{2,4,5,8,9\}$, se não pode haver repetição? (Por exemplo, 552 não é válido).

8. Uma pessoa deseja comprar 2 presentes de uma lista de casamento onde restam 12 presentes. Quantas escolhas são possíveis?

9. Uma moeda é lançada 5 vezes. Encontre o número de maneiras de se obter:

   (a) 5 caras ,
   (b) 2 caras e 3 coroas ,
   (c) exatamente 1 cara .

10. Uma turma de formandos tem 7 mulheres e 5 homens. Uma comissão de formatura deve ser formada, sendo que a comissão deve ter 2 homens e 2 mulheres. Quantas comissões são possíveis?

11. Um quarteto de cordas é formado por 2 violinistas, um violista e 1 violoncelista. Estes devem ser escolhidos de um grupo contendo 6 violinistas, 5 violistas e 4 violoncelistas. De quantas maneiras o quarteto pode ser formado?

Um quarteto de cordas é um gênero musical que surgiu no período clássico. Um quarteto de cordas é formado por dois violinos, uma viola e um violoncelo. Esta formação é um sucesso, pois, apesar de pequena, permite uma expressividade sonora muito rica.