

Contando com Repetição – Coeficientes Binomiais – Expansão Multinomial

Roteiro 5 – Prof. Célio Humberto

5.1 – Contando com Repetição

5.1.1 - Arranjos com repetição

Considera-se aqui que um determinado elemento que tenha participado de um agrupamento em uma posição possa comparecer novamente em outra posição. Casos como este já foram considerados mas resolvidos pelo princípio do produto. Veja o exemplo:

Exemplo 1

Quantos números de três algarismos podem ser formados com os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Solução

Deve-se fazer uma terna ordenada (x_1, x_2, x_3) onde $x_1, x_2, x_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

Pelo princípio do produto tem-se:

$$|A \times A \times A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$$

Este tipo de agrupamento é ordenado o que motiva chamá-lo de arranjo com repetição.

De modo geral:

O número de arranjos tomados r à r de um conjunto com n elementos, onde repetição é permitida é dado por n^r .

Notação: $AR(n, r) = n^r$

Exemplo 2

Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, determine o número de funções:

- a) de A para B
- b) de B para A
- c) injetoras de B para A
- d) bijetoras de A para B .

Solução:

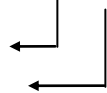
- a) todo elemento de A deve ter imagem em B , portanto devem ser formados grupos de 6 elementos de B para serem imagens.

Como cada elemento de B pode ser usado mais de uma vez, o número de funções de A para B é: $AR(4,6) = 6^4$

NOTA: se $|A| = n$ e $|B| = m$ o número de funções (sem restrições) de A para B é $AR(m, n) = m^n$

disponíveis para serem imagens

nº de imagens necessárias



- b) com as mesmas considerações anteriores, o número de funções de B para A é:

$$AR(6,4) = 6^4$$

- c) numa função injetora cada elemento só poderá ser usado como imagem uma única vez, logo as considerações são idênticas ao caso anterior mas sem repetição:

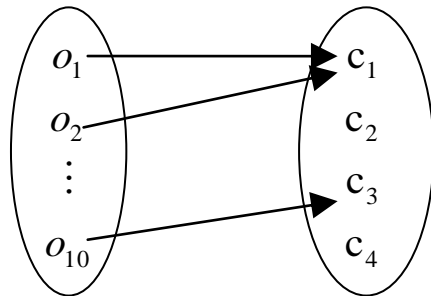
$$A(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 6.5.4.3 = 360$$

- d) a resposta é zero, pois para uma função bijetora de A para B deve-se ter $|A| = |B|$, o que não se tem.

Exemplo 3

De quantas maneiras se pode distribuir 10 objetos distintos em 4 caixas?

Solução



Com a devida observação pode-se notar que se trata de estabelecer o número de funções de $A = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7, o_8, o_9, o_{10}\}$ para $B = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, logo: $AR(4,10) = 4^{10}$

Nota: Como no arranjo com repetição cada elemento pode comparecer mais de uma vez, é possível ter $r > n$, ou seja o tamanho do grupo maior que o número de elementos disponíveis, como no exemplo 3 e no exemplo 2a).

5.1.2 - Permutação com repetição

Um dos problemas clássicos envolvendo permutação com repetição consiste em determinar o número de anagramas que podem resultar de uma palavra. (Anagrama são permutações das letras da palavra). Quando a palavra apresenta letras repetidas o tratamento deve seguir os passos apresentados no exemplo 4.

Exemplo 4:

Quantos anagramas podem ser feitos com as letras da palavra ARRAIAL ?

Solução:

a) número de permutações: $P_7 = 7!$

b) permutando-se os 3 A's não se obtém resultado diferente: 3!

c) permutando-se os 2 R's não se obtém resultados diferentes: 2!

b) e c) devem reduzir o número de anagramas, logo o total de anagramas é $\frac{7!}{3!2!}$.

Desta forma pode-se contar o número de permutações com repetição cuja notação é

$$P_7^{3,2} = \frac{7!}{3!2!} = 420.$$

De modo geral, se de n elementos existem k_1 repetidos iguais a α_1 , k_2 repetidos iguais a α_2, \dots, k_r iguais a α_r , o número de permutações dos n elementos é :

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

Exemplo 5

Dispõem-se de 4 caixas e 13 objetos distintos. De quantos modos os objetos podem ser distribuídos nas caixas de modo que se tenha: 3 objetos na caixa 1, 2 objetos na caixa 2, 6 objetos na caixa 3 e 2 objetos na caixa 4 ?

Solução:

Sejam os objetos elementos do conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$. Uma distribuição é:

$$\begin{array}{cccc} \underline{abc} & \underline{de} & \underline{fghijk} & \underline{lm} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array}$$

Note que a ordem para os elementos dentro de cada caixa não importa.

Tem-se, portanto,

a) possibilidades de preencher a 1ª caixa : $\binom{13}{3}$

b) possibilidades de preencher a 2ª caixa : $\binom{10}{2}$

c) possibilidades de preencher a 3ª caixa: $\binom{8}{6}$

d) possibilidades de preencher a 4ª caixa : $\binom{2}{2}$

E pelo princípio do produto tem-se :

$$\binom{13}{3} \binom{10}{2} \binom{8}{6} \binom{2}{2} = \frac{13!}{3!10!} \cdot \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{2!}{2!0!} \text{ e após simplificar pode-se escrever}$$

$$\binom{13}{3} \binom{10}{2} \binom{8}{6} \binom{2}{2} = \frac{13!}{3!2!6!2!} = P_{13}^{3,2,6,2}$$

5.1.3 - Combinação com repetição

Observando, cuidadosamente, os exemplos 6 e 7 pode-se vislumbrar o raciocínio usado para contar combinações com repetição.

Exemplo 6

Sendo $A = \{a, b, c, d\}$ escreva as combinações 3 à 3 dos elementos de A , repetição permitida, e conte o número de combinações obtidas.

Solução: escrevendo-as em ordem alfabética para melhor visualização, tem-se:

aaa	abb	acd	bbd	ccc
aab	abc	add	bcc	ccd
aac	abd	bbb	bcd	cdd
aad	acc	bbc	bdd	ddd

Número de combinações obtidas: 20

Exemplo 7

Calcule o número de combinações do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, 3 à 3, repetição permitida, sem obter as combinações.

Solução:

- em aaa, tendo sido escrito o elemento a, o mesmo pode ser repetido, no máximo duas vezes.
- o número de elementos que entram na combinação aumenta de 2, ou seja 3-1.
- o número de combinações com repetição é, portanto, igual a número de combinações simples aumentando-se o número de elementos em 3-1 logo:

$$CR(4,3) = C(4+3-1,3) = C(6,3) = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

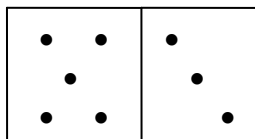
Do raciocínio anterior pode-se obter uma fórmula para o cálculo de combinações com repetição:

$$CR(n,r) = C(n+r-1,r).$$

Exemplo 8

Quantos dominós existem num conjunto completo de dominós.?

Solução



Procura-se o número de subconjuntos com 2 elementos tirados do conjunto $\{0,1, 2, 3, 4, 5,6\}$, podendo haver repetição, ou seja 00, 01, ..., 66, logo:

$$CR(7, 2) = C(7 + 2 - 1, 2) = C(8, 2) = 28.$$

Existem 28 dominós.

Exemplo 9

Quantos resultados podem ser observados no lançamento de dois dados idênticos ?

(Já foi resolvido usando princípio da soma)

Solução:

É semelhante ao exemplo 8, só que o conjunto de escolha é $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, logo

$$CR(6 + 2 - 1, 2) = C(7, 2) = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Exemplo 10

De quantas maneiras se pode distribuir 10 objetos idênticos em 4 caixas?

(Compare com o exemplo 3)

1ª Solução

a) sejam os 10 objetos representados por bolinhas

o o o o o o o o o o

b) para separá-las em 4 grupos são necessárias

$$3 = 4 - 1 \text{ barras}$$

o / o o o o / o o o / o o este caso corresponde à solução (1, 4, 3, 2).

c) agora é só permutar o conjunto, lembrando-se que 3 barras são repetidas e também as 10 bolinhas

d) logo o número de maneiras de se distribuir as bolinhas é $P_{10+3}^{10,3} = P_{13}^{10,3} = \frac{13!}{10!3!}$ que é igual

ainda a $C(13, 10)$ ou $C(13, 3)$

Nota: a solução $P_{13}^{10,3}$ é a mais simples de se compreender pois facilmente pode-se ver que a permutação de barras e bolinhas sempre dará uma solução.

2ª Solução

- a) como na solução anterior sejam as 10 bolinhas e 3 barras para separá-las.
b) existem $11=(10+1)$ posições para se colocar as 3 barras. No desenho as posições estão representados por um ponto e numeradas.

. o . o . o . o . o . o . o . o . o .
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

- c) basta agora escolher um grupo (não ordenado) de 3 posições para colocar as barras, podendo repetir, ou seja pode-se escolher a mesma posição para colocar as 3 barras.
d) logo trata-se de combinação com repetição:

$$\text{Número de soluções} = CR(11,3) = C(11+3-1,3) = C(13,3) = \frac{13!}{10!3!}$$

Pode-se , de modo generalizado, calcular o número de maneiras de distribuir n objetos idênticos em r caixas por :

$$P_{n+r-1}^{n,r-1} \quad \text{ou} \quad b) CR(n+1, r-1)$$

Notas: 1. n (número de objetos idênticos) pode ser maior, menor ou igual a r (número de caixas).

Assim tem-se:

- a) 3 objetos (idênticos) e 15 caixas : $P_{17}^{3,14}$
b) 15 objetos (idênticos) e 15 caixas : $P_{29}^{15,14}$
c) 15 objetos (idênticos) e 3 caixas : $P_{17}^{15,2}$

2 . As caixas serão, neste texto, consideradas sempre distintas.

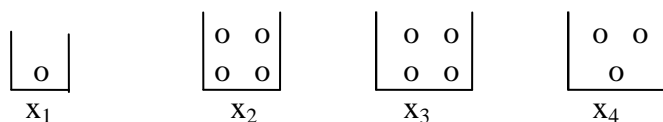
Outro tipo de problema semelhante a distribuir objetos idênticos em caixas, com inúmeras aplicações , é achar o número de soluções inteiras de uma equação $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$, com algumas restrições tratadas nos exemplos a seguir.

Exemplo 11

Determine o número de raízes inteiras, não negativas, da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$.

Solução

Pode-se condiderar cada variável como uma caixa e que dispõem-se de 12 bolinhas idênticas para distribuir nelas.



a figura representa a solução:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 4 \quad \text{e} \quad x_4 = 3.$$

Logo o número de soluções é :

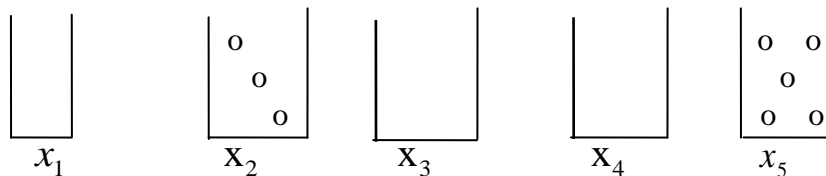
$$P_{12+3}^{12,3} = P_{15}^{12,3} \quad \text{ou} \quad CR(12+1, 4-1) = CR(13, 3) = C(15, 3)$$

Exemplo 12

Determine o número de soluções inteiras, não negativas, da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$ sabendo-se que $x_2 \geq 3$ e $x_5 > 4$.

Solução:

- a) tem-se 5 caixas e 18 bolinhas idênticas, mas devemos colocar, inicialmente, 3 bolinhas na caixa 2 e 5 bolinhas na caixa 5 para satisfazer às condições.



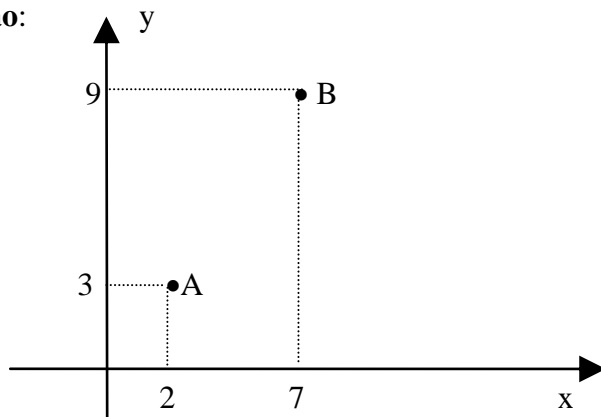
- b) sobraram 10 bolinhas para distribuir para as 5 caixas, ou seja, basta achar as soluções inteiras, não negativas, para a nova equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ que é

$$P_{14}^{10,4} = \frac{14}{10!4!}$$

Exemplo 13

De quantas maneiras pode-se ir do ponto A(2,3) até o ponto B(7,9) do sistema cartesiano, deslocando-se, de cada vez, apenas uma unidade (passo unitário) na direção dos eixos x e y positivos?

Solução:



$$7 - 2 = 5 \text{ passos } x$$

$$9 - 3 = 6 \text{ passos } y$$

- a) devem ser dados 5 passos em direção a x (positivo) e 6 passos em direção a y (positivo).
- b) x x y y x x y y x y y é uma solução e para obter as outras basta permutar o conjunto.
- c) número de caminhos é igual a $P_{11}^{5,6} = \frac{11!}{5!6!}$

Tarefa 9 :

- 01) Uma equipe de basquete é formada por 13 elementos: seis avantes , três centros e quatro guardas. Quantos times podem ser montados com dois avantes, um centro e dois guardas?
- 02) De quantas maneiras 4 pen drives podem ser escolhidos de um estoque com 50 unidades de cada marca A, B, C, e D ?
- 03) Quantas funções poder ser definidas de um conjunto A com n elementos para um conjunto B com n+2 elementos ?
- 04) Quantos números de 3 algarismos podem ser formados com os elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} ?
- 05) Determinar o número de soluções inteiras, não negativas, da equação $x+y+z+t+u = 25$
- 06) Quantos diferentes dominós existem se é permitido marcar os números 0, 1, 2, ... , 12 em cada metade ?
- 07) De quantas maneiras se pode distribuir:
- 10 objetos idênticos em 15 caixas?
 - 9 objetos idênticos em 8 caixas?
 - 10 objetos distintos em 15 caixas?
 - 9 objetos distintos em 8 caixas ?
- 08) Quantos códigos de sete caracteres podem ser formados dispondo-se de seis caracteres diferentes?
- 11) Encontre o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ se $x_1 \geq 2$ e $x_3 > 2$.
- 12) Qual o número de funções injetoras que podem ser definidas de $A = \{1,2,3,4\}$ para $B = \{a,b,c,d,e,f\}$?

- 13) De quantas maneiras pode-se ir do ponto (2,1,3) até ao ponto (5,8,12) do sistema cartesiano, deslocando-se, de cada vez, apenas uma unidade (passo unitário) na direção dos eixos x, y e z positivos?

Respostas:

- 01) 270 02) 35 03) $(n+2)^n$ 04) 216 05) 23.751
 06) 91 07) a) 1.961.256 b) 11.440 c) 15^{10} d) 8^9
 08) 6^7 11) 84 12) 360 13) 11.085.360

5.2 - Coeficientes binomiais

5.2.1-Expansão binomial

Considere as expressões efetuadas e sem reduzir os termos semelhantes:

$$(a+b)^2 = aa + ab + ba + bb$$

$$(a+b)^3 = aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb$$

Nestas condições pode-se facilmente, usando o princípio do produto, calcular o número de termos que irão ocorrer, veja:

$$(a+b)^5 \text{ tem - se:}$$

$$\text{Em } (a+b)^5 = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{5 \text{ fatores.}}$$

Sabe-se que cada termo será formado de 5 elementos, um de cada conjunto cuja cardinalidade é 2, portanto, total de termo é igual a $AR(2,5) = 2^5$.

O problema consiste agora em reduzir os termos semelhantes e contar quantos termos de cada tipo existem. Esse número contado é coeficiente de cada termo.

Obtem-se:

	<u>coeficientes</u>
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

Exemplo 1. Obtenha os coeficientes e expanda $(a + b)^5$.

Solução:

1º) O problema consiste em, por exemplo, como calcular o coeficiente do termo

$$a^3b^2.$$

2º) Basta contar quantos termos podem ser formados com 3 a's e 2 b's, logo é só

$$\text{permutar os elementos de } \underline{aaabb}, \text{ que será } p_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{2}$$

3º) Desta maneira podem-se obter todos os coeficientes e :

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5.$$

Usando o raciocínio desenvolvido no exemplo anterior, pode-se obter uma maneira de expandir o binômio $(a + b)^n$.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n.$$

Nota: Os números $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, \dots , $\binom{n}{n}$ chamados números combinatórios ou coeficientes binomiais.

5.2.2 - Triângulo de Pascal

Pascal desenvolveu um dispositivo prático no qual os coeficientes binomiais podem facilmente ser calculados.

$$\begin{array}{l} n = 0 \quad 1 \\ n = 1 \quad 1 \quad 1 \\ n = 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ n = 3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ n = 4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ n = 5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ n = 6 \quad \dots\dots\dots \leftarrow \text{escreva os números desta linha.} \end{array}$$

Exercícios 2

Encontre o coeficiente do termo em x^7 no desenvolvimento de $(1+3x)^{10}$.

Solução:

$$\binom{10}{3} \cdot 1^3 \cdot (3x)^7 = \binom{10}{3} \cdot 3^7 \cdot x^7 = 262.440x^7, \text{ o coeficiente é } 262.440$$

Exemplo 3

Prove que
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Solução:

Basta considerar o desenvolvimento de $(x+y)^n$:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \dots + \binom{n}{n}x^0 y^n \quad \text{onde aparecem os coeficientes}$$

binomiais.

Considerando $x=1$ e $y=1$ nos dois membros da igualdade tem-se:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n 1^0 + \dots + \binom{n}{n}1^0 1^n \quad \text{logo:}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

Note que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ é o número de subconjuntos de um conjunto com n

elementos.

5.3 - Expansão Multinomial

Considere a expansão de $(x+y+z+t)^{10}$.

Quantos termos aparecerão sem a redução dos termos semelhantes?

Similar ao tratamento binomial tem-se :

$$(x+y+z+t)^{10} = \underbrace{(x+y+z+t) \dots (x+y+z+t)}_{10 \text{ fatores iguais}}$$

O número de termos, sem redução dos termos semelhantes, é $AR(4,10) = 4^{10}$

Após a redução dos termos semelhantes, como calcular cada coeficiente?

Considere o problema de achar o coeficiente do termo $x^3 y^2 z t^4$. O problema é contar quantos termos da forma $xxx yy z tttt$ podem ser formados.

Para isso basta permutar os elementos , logo $P_{10}^{3,2,1,4} = \frac{10!}{3!2!1!4!}$

Exemplo 5

Determine o coeficiente do termo $x^2 y^3 z^2$ em $(x - 2y + z)^7$

Solução:

$$P_7^{2,3,2} \cdot x^2 (-2y)^3 z^2 = \frac{7!}{2!3!2!} \cdot (-8) \cdot x^2 y^3 z^2 = -1680 x^2 y^3 z^2, \text{ coeficiente: } -1680$$

Tarefa 10 :

1) Mostre que:

$$a) \binom{n+m}{n} = P_{n+m}^{n,m}$$

$$b) \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

2) Encontre o coeficiente do termo $x^6 y^2$ em $(y - 2x)^8$.

11) Determine o coeficiente de $x^5 y^5 z^5$ em $(x + 2y - z)^{15}$

12) Quantos termos tem o desenvolvimento de $(x + y + z)^{10}$,

a) sem redução dos termos semelhantes

b) com redução dos termos semelhantes.

13) Prove que no desenvolvimento de $(a + b)^n$ existem $n + 1$ termos.

Respostas:

1) – 2) 1.792 11) -24.216.192 12) a: 59.049 b: 66 13) –