Resumo de Física Matemática

Geovanni Fernandes Garcia
geovanni@usp.br

26 de fevereiro de 2024

1 Física Matemática

1.1 Série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \longleftrightarrow c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Se $f(x)$ é par, $b_n = 0$, se $f(x)$ é ímpar, $a_n = 0$.

1.1.1 Série de Fourier de Cossenos

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$g_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Esta será a extensão par de f(x).

1.1.2 Série de Fourier de Senos

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$g_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Esta será a extensão ímpar de f(x).

1.1.3 Relação de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx$$

1.2 Transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

$F(k)$ é chamada de transformada de Fourier de $f(x)$ que, por sua vez, é chamada de transformada inversa de Fourier.

Existe uma forma simétrica para elas:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

1.2.1 Paridade da transformada de Fourier

Se $f(x)$ é par:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(kx)dx$$

Se $f(x)$ é ímpar:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)dx$$

1.2.2 Convolução

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')g(x')dx'$$

Então:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{-ikx}dx$$

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx$$

$$\tilde{f}(k) = \tilde{G}(k)\tilde{g}(k)\sqrt{2\pi}$$

1.2.3 Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk$$

1.3 Função de Green

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = 0$$
$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

Função linearmente independente:

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = 0$$

$$W[y_1(t)y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ se for L.I.}$$

$$G(t,t') = \frac{1}{W[y_1(t)y_2(t)]}[y_2(t')y_1(t)\theta(t'-t) - y_1(t')y_2(t)\theta(t-t')]$$

$$G(t,t') = \begin{cases} y_2(t')y_1(t)\,, \text{ se } \ t < t' \\ y_1(t')y_2(t)\,, \text{ se } \ t > t' \end{cases}$$

1.4 Transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Transformada de Laplace de derivadas:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2F(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sF(s) - x(0)$$