Diagrama de Cama Elástica

Geovanni Fernandes Garcia
geovanni@usp.br
N°USP: 11298560

26 de fevereiro de 2024

O espaço-tempo de Schwarzschild em unidades naturais ($c = 1, G = 1$) possui a métrica:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2)$$

Portanto, o tensor métrico de Schwarzschild é dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Primeiramente, pretendemos reduzir a dimensionalidade do nosso problema considerando o tempo t constante e $\theta = \frac{\pi}{2}$, assim pode-se eliminar os termos dt^2 e $d\theta^2$ da métrica, nos deixando apenas com:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) d\phi^2$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Vamos agora criar um "hiperespaço" através da métrica das coordenadas cilindricas (R, ϕ, z):

$$ds_c^2 = dR^2 + R^2 d\phi^2 + dz^2, \quad z = z(R)$$

Antes de encontrar uma expressão para $z = z(R)$, iremos aplicar uma transformação de coordenadas nesta métrica:

$$ds_c^2 = dR^2 + R^2 d\phi^2 + dz^2$$

$$ds_c^2 = \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 dr^2 + R^2 d\phi^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 dr^2$$

$$ds_c^2 = \left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + R^2 d\phi^2$$

Finalmente, resolveremos para $z = z(R)$ igualando o que foi obtido de ambas as métricas:

$$ds_c^2 = ds^2$$

$$\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + R^2 d\phi^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

$$\begin{cases} \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ R^2 = r^2 \implies R = r \end{cases}$$

$$\therefore \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \implies 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$\frac{dz}{dr} = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$dz = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - 1\right]^{\frac{1}{2}} dr$$

$$z(r) = 2\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - 1\right]^{\frac{1}{2}} (r - 2M)$$