Um estudo sobre o Potencial de Hénon-Heiles

Geovanni Fernandes Garcia, N^o USP: 11298560

26 de fevereiro de 2024

Este trabalho refere-se à função Hamiltoniana apresentada por Hénon e Heiles. A Hamiltoniana de Hénon-Heiles é descrita pela expressão:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3$$

Essa Hamiltoniana tem sido amplamente utilizada na modelagem de sistemas astrofísicos, como estrelas binárias e núcleos galácticos, ajudando a compreender as órbitas e as interações complexas entre os corpos celestes. Além disso, a Hamiltoniana de Hénon-Heiles também tem sido aplicada no estudo de fenômenos caóticos e em sistemas moleculares, fornecendo uma visão valiosa sobre as propriedades dinâmicas e estruturais desses sistemas. O estudo e a análise da Hamiltoniana de Hénon-Heiles são essenciais para explorar as características fundamentais dos sistemas físicos não lineares e compreender os fenômenos complexos que podem surgir nesses sistemas.

Neste estudo, será construído seções de Poincaré para a Hamiltoniana de Hénon-Heiles, que é uma representação gráfica útil para sistemas Hamiltonianos com vários graus de liberdade. O cálculo numérico das seções de Poincaré consiste em duas etapas. Primeiro, precisamos de um método de integração temporal para obter as trajetórias do sistema dinâmico a partir de diferentes condições iniciais. Utilizaremos o método de Euler simplético para realizar essa primeira etapa. A segunda etapa envolve a detecção e o cálculo das interseções entre as trajetórias e uma superfície Σ, que define a seção específica do espaço de fase. Para realizar essa análise, utilizaremos o método de Hénon para avaliar numericamente essas interseções.

Inicialmente, foi implementado computacionalmente o método de Euler simplético para a Hamiltoniana de Hénon-Heiles. Em seguida, foi feito um programa em Python para construir seções de Poincaré no plano $p_2 \times q_2$, considerando $q_1 = 0$ e $p_1 \geq 0$. Sugiro a leitura do código em Python detalhadamente comentado onde os gráficos deste trabalho foram produzidos, ele se encontra no link:

`https://colab.research.google.com/drive/1OZrmA7tqH1IjURp8mGN9pZbLaU901eE8?usp=sharing`.

A seguir, será apresentado uma descrição detalhada de cada gráfico plotado neste código, abordando seus elementos, significados e implicações.

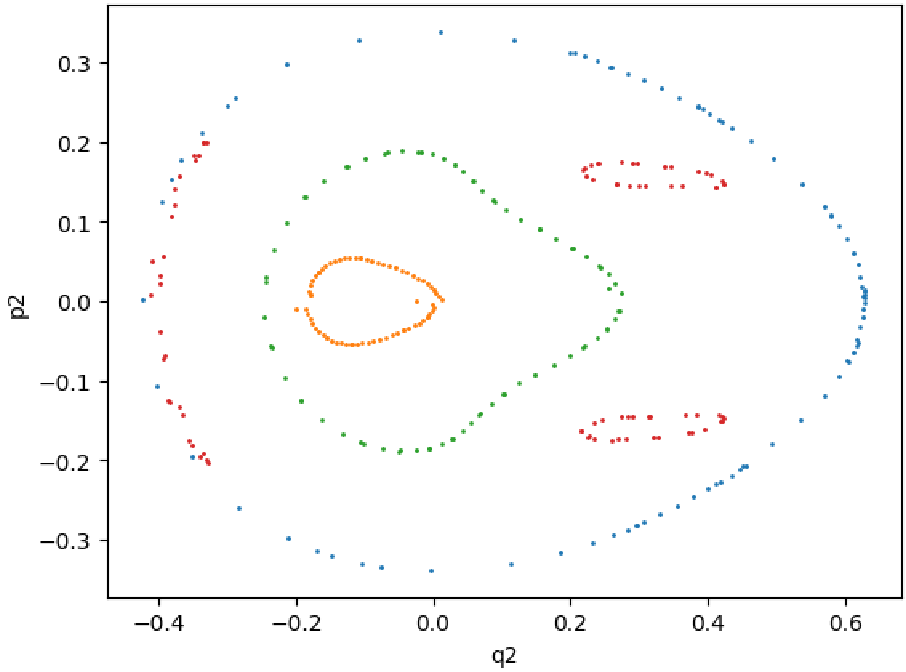

Figura 1: **Mapas de Poincaré com interseção em $q_1 = 0$ com $E = 0,08333$.**

Na Figura 1, são apresentados quatro mapas de Poincaré com a interseção ocorrendo em $q_1 = 0$. Cada mapa é representado por pontos no plano cartesiano, com o eixo x representando a variável q_2 e o eixo y representando a variável p_2. Esses mapas foram gerados com diferentes valores iniciais das variáveis q_1 e q_2.

Os pontos no gráfico representam os estados das variáveis q_2 e p_2 em momentos específicos, quando q_1 atinge o valor de interseção ($q_1 = 0$). A cor dos pontos varia para diferenciar os diferentes mapas. Esses mapas de Poincaré são úteis para visualizar as trajetórias no espaço de fase e identificar regiões com comportamento regular ou caótico.

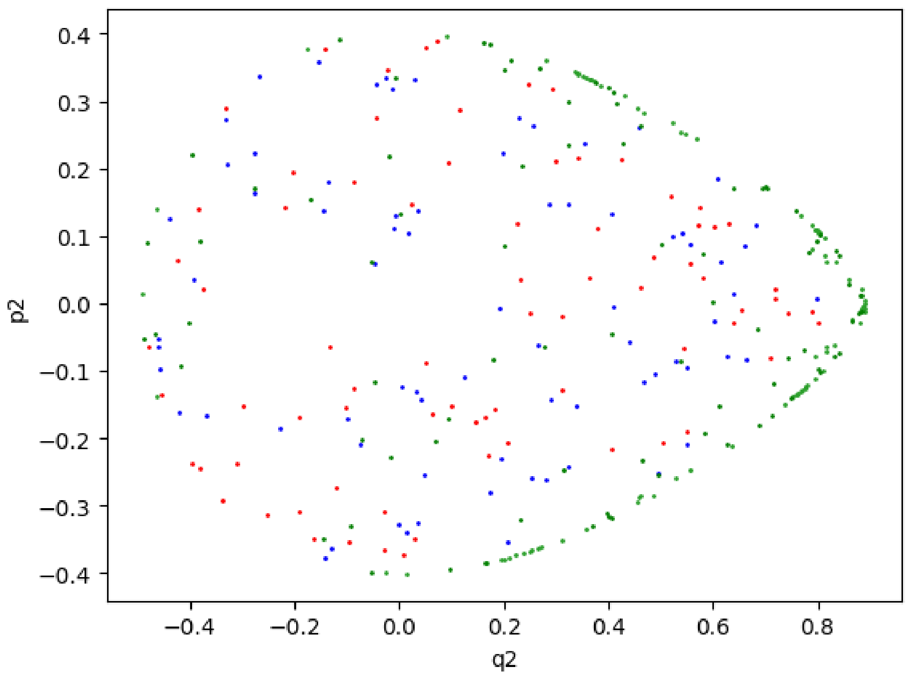

Figura 2: **Mapas de Poincaré com interseção em $q_1 = 0$ com $E = 0,125$.**

Na Figura 2, são apresentados mais quatro mapas de Poincaré com a interseção ocorrendo em $q1 = 0$. Assim como na Figura 1, cada mapa é representado por pontos no plano cartesiano, com o eixo x representando a variável q_2 e o eixo y representando a variável p_2. Novamente, a cor dos pontos varia para diferenciar os diferentes mapas.

Esses mapas adicionais oferecem mais insights sobre as características do sistema Hénon-Heiles com a interseção em $q_1 = 0$. Ao comparar esses mapas com os anteriores, é possível analisar a sensibilidade do sistema às condições iniciais e identificar diferentes regimes dinâmicos. Nesse caso foi modificada apenas o valor da energia, e é possível perceber que as trajetórias aparentam ser bem mais caóticas nesses valores.

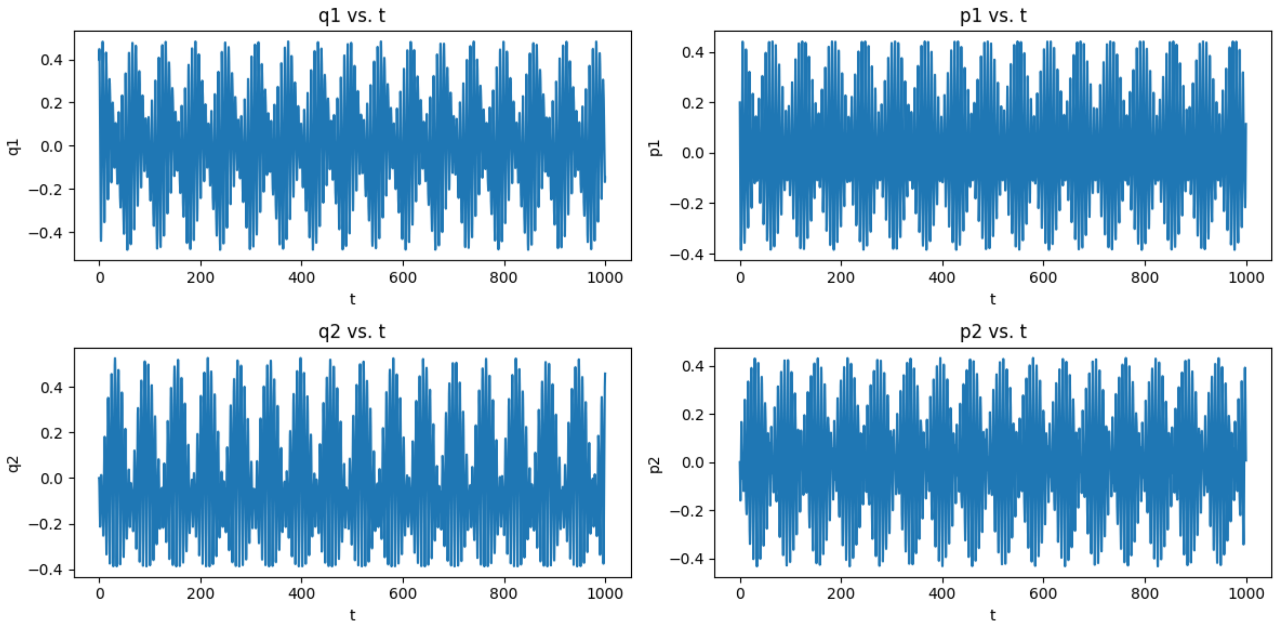

Figura 3: **Curvas q_1, p_1, q_2 e p_2 em função do tempo - trajet. periódica com $E = 0,125$.**

Na Figura 3, foram plotadas as curvas das variáveis q_1, p_1, q_2 e p_2 em função do tempo, para uma condição inicial correspondente a uma trajetória periódica na seção de Poincaré com energia $E = 0,125$. Cada variável é representada em um sub-gráfico separado, como é possível observar.

A curva de q_1 em função do tempo (sub-gráfico superior esquerdo) mostra a evolução temporal da variável q_1. A curva de p_1 em função do tempo (sub-gráfico superior direito) mostra a evolução temporal da variável p_1. Da mesma forma, as curvas de q_2 e p_2 em função do tempo (sub-gráficos inferiores) mostram a evolução temporal das variáveis q_2 e p_2, respectivamente.

Essas curvas fornecem uma representação visual do comportamento da trajetória periódica no espaço de fase ao longo do tempo. É possível observar a periodicidade e a regularidade dessas curvas, indicando um movimento ordenado e previsível do sistema.

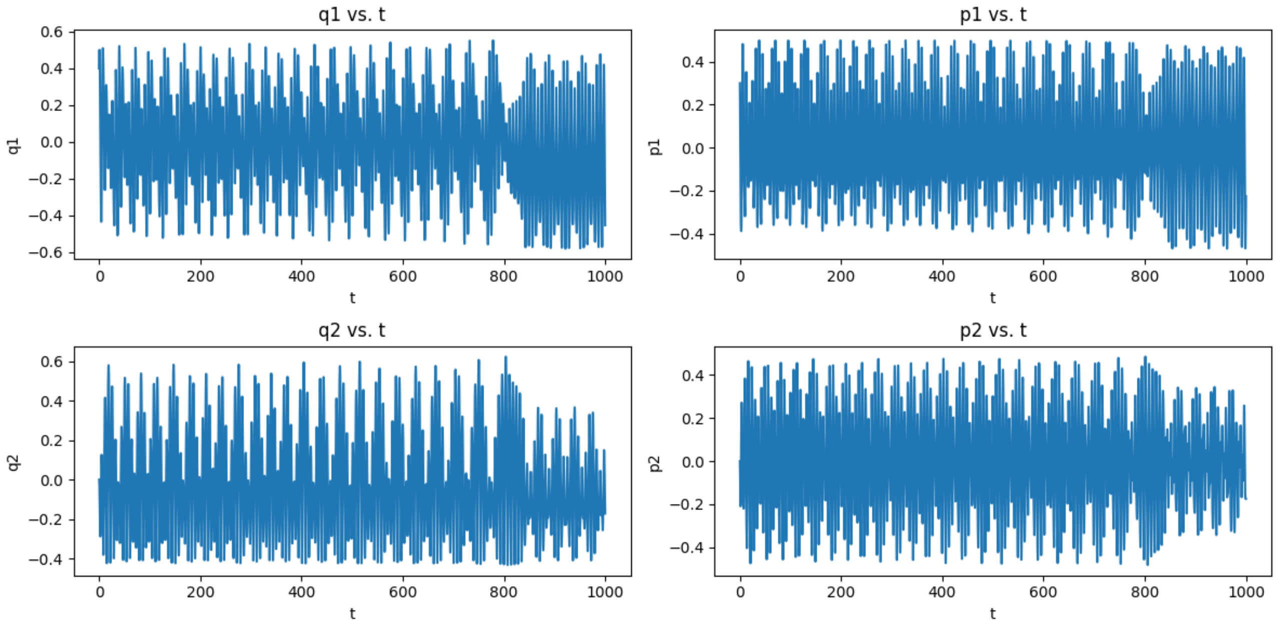

Figura 4: **Curvas q_1, p_1, q_2 e p_2 em função do tempo - trajet. caótica com $E = 0,125$.**

Na Figura 4, de forma análoga à anterior, foram plotadas as curvas das variáveis q_1, p_1, q_2 e p_2 em função do tempo, mas desta vez para uma condição inicial correspondente a uma trajetória caótica na seção de Poincaré com energia $E = 0,125$. Cada variável é representada em um sub-gráfico separado, como é possível observar.

As curvas têm a mesma interpretação que na Figura 3, representando a evolução temporal das variáveis q_1, p_1, q_2 e p_2. No entanto, para uma trajetória caótica, espera-se que essas curvas sejam irregulares e imprevisíveis, sem um padrão claro ou período definido.

Ao analisar essas curvas, é possível perceber o comportamento caótico do sistema Hénon-Heiles. Pequenas variações nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças nas trajetórias ao longo do tempo, caracterizando a sensibilidade do sistema às condições iniciais e a presença do caos determinístico.

Em conclusão, a análise da Hamiltoniana de Hénon-Heiles e a construção de seções de Poincaré oferecem uma abordagem abrangente para investigar os sistemas físicos não-lineares. Através da implementação computacional e da visualização gráfica, foi possível explorar as características dinâmicas, distinguir comportamentos regulares de caóticos e analisar a sensibilidade do sistema às condições iniciais. Esses resultados ampliam nosso conhecimento sobre os fenômenos estudados, fortalecendo a compreensão teórica e possibilitando a visualização dos resultados de forma acessível. O estudo da Hamiltoniana de Hénon-Heiles e das seções de Poincaré desempenha um papel crucial na compreensão de sistemas físicos complexos e na investigação de comportamentos dinâmicos não triviais.