



# Traitement du signal quantique : effets de bruit utile et intrication

Nicolas Gillard

## ► To cite this version:

Nicolas Gillard. Traitement du signal quantique : effets de bruit utile et intrication. Traitement des images [eess.IV]. Université d'Angers, 2019. Français. NNT : 2019ANGE0036 . tel-03220879

HAL Id: tel-03220879

<https://theses.hal.science/tel-03220879v1>

Submitted on 7 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ D'ANGERS  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies*  
*de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Signal, Image, Vision*

Par

**Nicolas GILLARD**

## **Traitemet du signal quantique : Effets de bruit utile et intrication.**

**Thèse présentée et soutenue à Angers, le « 5 novembre 2019 »**

**Unité de recherche :** Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS), EA 7315

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Mme Isabelle ZAQUINE, Professeur, Télécom Paris.

Mr Steeve ZOZOR, Directeur de recherche CNRS, GIPSA-lab, UMR CNRS 5216, Grenoble campus.

### **Composition du Jury :**

Président : Mr Patrice ABRY, Directeur de recherche CNRS, Laboratoire de Physique, ENS Lyon.

Examinateurs : Mme Isabelle ZAQUINE, Professeur, Télécom Paris.

Mr Steeve ZOZOR, Directeur de recherche CNRS, GIPSA-lab, Grenoble campus.

Mr Patrice ABRY, Directeur de recherche CNRS, Laboratoire de Physique, ENS Lyon.

Directeur de thèse : François CHAPEAU-BLONDEAU, Professeur à l'Université d'Angers.

Co-encadrant : Etienne BELIN, Maître de conférences à l'Université d'Angers.



# Remerciements

J'aimerai remercier mes encadrants, messieurs François Chapeau-Blondeau et Etienne Belin, pour avoir été patients avec moi pendant ces trois années et pour m'avoir transmis la méthodologie nécessaire à un travail de recherche.

J'exprime ma gratitude à madame Isabelle Zaquine et à monsieur Steeve Zozor, qui ont bien voulu être rapporteurs et faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie Patrice Abry pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse

Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai partagé mes études et notamment ces années de thèse.

Merci à ma famille pour tout ce qu'elle fait pour moi. Merci à mes parents de m'avoir hébergé et supporté pendant toute la durée de cette thèse.

Merci à ma fiancée qui est toujours auprès de moi et me soutient moralement quand j'en ai besoin.

# Résumé

En traitement de l'information et du signal, on parvient au niveau quantique d'une part via les avancées technologiques vers la miniaturisation et les limites physiques ultimes, d'autre part pour accéder à des propriétés et possibilités radicalement nouvelles inaccessibles en classique. Dans cette thèse, nous examinons des problématiques standards du traitement du signal, comme la détection de signaux dans le bruit, l'estimation paramétrique à partir de signaux bruités, la transmission d'information sur un canal bruité. Toutefois, ces problématiques de référence du traitement du signal sont étudiées ici dans un cadre quantique, et spécialement en présence de bruit quantique qui représente un élément majeur impactant le développement des technologies quantiques et qui offre ici un axe unificateur pour nos études. Pour ces études de traitement du signal quantique, nous suivons plus spécialement un fil conducteur spécifique, déjà bien développé en classique, et constitué par les effets de bruit utile ou phénomène de résonance stochastique. Il s'agit ici de situations de traitement du signal ou de l'information en présence de bruit, où la performance ne se dégrade pas de façon monotone lorsque le niveau du bruit augmente, mais au contraire où l'augmentation du bruit peut se révéler bénéfique au traitement. En présence de signaux et bruits quantiques, nous mettons ainsi en évidence la possibilité de tels effets de résonance stochastique, dans des tâches de détection, d'estimation ou de transmission de signal. Ceci nous permet à la fois (i) de formuler ces tâches standards de traitement du signal spécialement dans un cadre quantique, (ii) d'identifier et d'analyser des possibilités de résonance stochastique quantique, (iii) et ainsi de contribuer, selon une approche "signal", à une meilleure connaissance du bruit ou bien de la décohérence quantique. Dans ces études de traitement du signal quantique, nous rencontrons également une propriété spécifiquement quantique constituée par l'intrication. Nous approfondissons aussi l'apport que peut présenter l'intrication, avec des bénéfices purement quantiques inaccessibles en classique, obtenus pour les tâches de traitement du signal en présence de bruit que nous étudions. Nous considérons aussi des signaux à deux dimensions pouvant s'apparenter à du traitement numérique d'images en quantique. Les études de traitement du signal quantique développées ici sont principalement théoriques et numériques. En complément, nous présentons des mises en œuvre expérimentales que nous avons pu réaliser grâce à un processeur quantique rendu accessible en ligne par la compagnie IBM (processeur IBM Q 14 Melbourne à 14 qubits).

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>1 Motivations pour l'étude de l'information quantique</b>	<b>9</b>
<b>2 Principes d'information quantique</b>	<b>13</b>
2.1 Formalisation d'un état quantique . . . . .	14
2.1.1 Vecteur d'état d'un système quantique . . . . .	14
2.1.2 Du bit au qubit . . . . .	15
2.1.3 Opérateur densité d'un système quantique . . . . .	16
2.1.4 Sphère de Bloch pour le qubit . . . . .	17
2.2 Mesure d'un système quantique . . . . .	19
2.2.1 Mesure de von Neumann . . . . .	19
2.2.2 Mesures généralisées . . . . .	21
2.3 Évolution d'un système quantique . . . . .	22
2.3.1 Évolution unitaire d'un système quantique fermé . . . . .	22
2.3.2 Évolution non unitaire d'un système quantique ouvert . . . . .	23
2.3.3 Bruits quantiques usuels pour le qubit . . . . .	24
<b>3 Détection d'états quantiques</b>	<b>32</b>
3.1 Discrimination entre deux états quantiques . . . . .	33
3.2 Détection d'états quantiques avec des bruits unitaux . . . . .	37
3.3 Détection d'états quantiques aidée par un bruit thermique . . . . .	39
3.3.1 Probabilité d'erreur croissante . . . . .	41
3.3.2 Probabilité d'erreur résonante . . . . .	41
3.3.3 Probabilité d'erreur décroissante . . . . .	42
3.3.4 Discussion et perspectives sur le phénomène de bruit utile pour la détection quantique . . . . .	44
3.4 Détection d'états quantiques aidée par l'intrication . . . . .	45
3.4.1 Présentation de l'intrication quantique pour le traitement du signal . . . . .	45
3.4.2 Protocole à un photon unique . . . . .	45
3.4.3 Protocole à une paire de photons intriquée . . . . .	49
3.4.4 Détection d'états quantiques avec un bruit de bit-flip aidée par l'intrication	53
3.4.5 Discussion et perspectives sur l'apport de l'intrication pour le processus de détection quantique . . . . .	55

<b>4 Estimation d'état quantique</b>	<b>57</b>
4.1 Estimation de phase sur un qubit . . . . .	58
4.2 Estimation de phase sur un qubit bruité . . . . .	61
4.3 Estimation d'état quantique aidée par un bruit thermique . . . . .	62
4.3.1 Information de Fisher classique décroissante avec la température . . . . .	65
4.3.2 Information de Fisher classique antirésonante avec la température . . . . .	66
4.3.3 Information de Fisher classique croissante avec la température . . . . .	68
4.3.4 Robustesse selon le paramètre à estimer . . . . .	69
4.4 Estimation d'état quantique aidée par un bruit unital . . . . .	69
4.4.1 Bruit de phase-flip . . . . .	71
4.4.2 Bruits à trois axes de compression . . . . .	74
4.4.3 Discussion et perspectives sur la résonance stochastique pour l'estimation paramétrique quantique . . . . .	77
4.5 Estimation d'état quantique aidée par l'intrication . . . . .	79
4.5.1 Protocole à un qubit unique . . . . .	79
4.5.2 Protocole à une paire de qubits intriquée . . . . .	81
4.5.3 Estimation d'état quantique avec un bruit thermique . . . . .	86
4.5.4 Discussion sur l'apport de l'intrication pour le processus d'estimation d'état quantique . . . . .	86
<b>5 Transmission quantique d'information</b>	<b>88</b>
5.1 Entropie du qubit . . . . .	89
5.1.1 Entropie croissante . . . . .	92
5.1.2 Entropie résonante . . . . .	93
5.1.3 Entropie décroissante . . . . .	94
5.2 Entropie d'échange . . . . .	96
5.3 Information cohérente et quantités associées . . . . .	102
5.4 Information de Holevo . . . . .	102
5.5 Discussion sur la résonance stochastique pour la transmission d'information . . . . .	105
<b>6 Mise en œuvre expérimentale sur un processeur quantique</b>	<b>107</b>
6.1 Présentation des processeurs quantiques . . . . .	108
6.2 Portes quantiques . . . . .	108
6.3 Circuits quantiques pour la mise en œuvre sur un processeur quantique . . . . .	110
6.3.1 Sous-circuits quantiques . . . . .	110
6.3.2 Incertitudes dans les mises en œuvre sur un processeur quantique . . . . .	115
6.4 Mise en œuvre expérimentale de protocoles quantiques . . . . .	119
6.5 Discussion sur les mises en œuvre expérimentales . . . . .	123
<b>7 Conclusion et perspectives</b>	<b>125</b>
<b>Annexes</b>	<b>129</b>
A Détection d'états quantiques aidée par l'intrication avec un bruit de bit-flip . . . . .	130
B Robustesse selon le paramètre à estimer . . . . .	134
C Estimation d'état quantique aidée par l'intrication avec un bruit thermique . . . . .	141

D	Information cohérente et quantités associées . . . . .	146
D.1	Information cohérente . . . . .	146
D.2	Information mutuelle entrée–sortie . . . . .	147
D.3	Perte d’information . . . . .	149
D.4	Bruit informationnel . . . . .	151
	<b>Liste des publications de la thèse</b>	<b>155</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>157</b>



# Chapitre 1

## Motivations pour l'étude de l'information quantique

Le traitement de l'information est une discipline bien développée et aussi encore en plein essor, à la fois au plan théorique et pour les applications [1–4]. Les dispositifs de traitement de l'information, par les progrès technologiques comme la miniaturisation et autres avancées, se trouvent conduits vers leurs limites physiques ultimes, là où l'on rencontre le niveau quantique. À ce niveau, il devient alors nécessaire de prendre explicitement en compte la nature quantique des effets en jeu lors du traitement de l'information. Mais également, à ce niveau quantique, on atteint des propriétés nouvelles, inaccessibles en classique, et qui apportent des moyens nouveaux et spécifiques exploitables pour le traitement de l'information avec des performances accrues. Parmi les propriétés les plus significatives, spécifiquement quantiques et riches de larges potentialités pour le traitement de l'information, on compte la superposition quantique et l'intrication quantique. La superposition quantique permet par exemple d'envisager du traitement parallèle de l'information, alors que l'intrication quantique offre des possibilités de corrélation ou couplage à distance exploitables pour des bénéfices au traitement de l'information inattendus.

Le domaine de l'information quantique s'est ainsi développé, depuis plusieurs décennies maintenant [5–8], et l'on peut illustrer sa progression et ses apports à travers différents processus emblématiques. Les corrélations quantiques non locales issues de l'intrication, et donnant l'apparence de violer les lois de la causalité relativiste, ont été étudiées en théorie [9, 10] et en pratique [11–13]. Elles donnent lieu à des effets informationnels comme le codage superdense [14, 15] qui permet des débits de communication inatteignables en classique, ou bien comme la téléportation d'un état quantique que l'on détruit lors de sa mesure et l'on reconstitue à distance de façon exacte [16, 17]. Le quantique pour la cryptographie apporte des garanties de protection inaccessibles en classique, où toute observation d'un message par un tiers lors de sa transmission peut être détectée, ou bien a contrario où la garantie que le message n'a pas pu être observé par un tiers lors de sa transmission peut être assurée [18–22]. En exploitant des ressources quantiques, l'algorithme de Grover permet d'accomplir une recherche dans une banque de données non triée avec une complexité algorithmique réduite par rapport aux meilleurs algorithmes classiques [23, 24]. De la même façon, des algorithmes de classification exploitant le quantique bénéficient de performances accrues [25–27]. L'algorithme quantique de Shor permet de factoriser un entier en nombres premiers avec une complexité polynomiale, alors que les meilleurs algorithmes classiques gardent une complexité exponentielle [28–30]. Des approches quantiques du traitement d'images tirent parti de la superposition quantique pour profiter du parallélisme [31–33].

Ces processus informationnels, avec leurs principes établis relativement récemment, démontrent l'apport utile du quantique au traitement de l'information. En complément, pour confirmer l'intérêt et les potentialités du domaine de l'information quantique, on peut observer que, de façon plus récente, plusieurs entreprises phares du secteur des technologies de l'information, comme Microsoft, Google, Intel, Atos, Rigetti, IonQ et autres, travaillent au développement de technologies quantiques [34]. Des développements importants concernent les technologies de communication et cryptographie quantiques, par fibres optiques comme ID Quantique [35] ou par satellite [36], ou bien la conception de processeurs quantiques, selon différentes filières. D'autres ont choisi de développer des langages de programmation pour les processeurs quantiques comme l'entreprise Atos [37, 38]. Il existe aussi des applications commerciales comme les ordinateurs quantiques de l'entreprise D-Wave [39] utilisés par exemple pour le calcul de trajets

optimaux des taxis dans Pékin [34].

Les processus et algorithmes d'information quantique, leurs mises en œuvre expérimentales et les technologies associées sont ainsi actuellement en plein essor et recèlent encore de larges potentialités à explorer et à maîtriser. Il existe toutefois un élément majeur qui impacte de façon cruciale le développement de l'information quantique et des technologies associées. Il s'agit du bruit quantique ou phénomène de décohérence quantique [6–8, 40]. Le phénomène de décohérence résulte du fait qu'un système ou processus quantique, en conditions réalistes de fonctionnement, se trouve très fréquemment couplé à un environnement qui n'est pas entièrement contrôlé. Il en résulte des altérations qui dégradent nombre de propriétés quantiques utiles, et qui s'apparentent ainsi à du bruit quantique. La prise en compte du bruit représente une situation commune, voire constitutive, du traitement du signal classique. Toutefois, on peut dire que cette prise en compte du bruit est beaucoup moins avancée, et a fortiori maîtrisée, dans les développements de l'information quantique. Par exemple, les processus emblématiques de l'information quantique, comme nous les avons retracés plus haut, ne prennent pas en compte, au moins dans leurs principes de base tels qu'ils ont été introduits, ni le bruit quantique ni son impact sur le traitement et sa performance.

Dans ce mémoire de thèse, en adoptant plutôt une approche traitement du signal, nous prendrons en compte le bruit quantique comme un axe unificateur important pour des études d'information quantique. Nous allons considérer des problématiques standards du traitement du signal, comme la détection de signaux dans le bruit dans le chapitre 3, l'estimation paramétrique à partir de signaux bruités dans le chapitre 4, et la transmission d'information sur un canal bruité dans le chapitre 5. Ces problématiques de référence du traitement du signal seront toutefois formulées et étudiées ici dans un cadre quantique. Un fil conducteur privilégié sera constitué par les effets de bruit utile ou phénomène de résonance stochastique. Il s'agit ici de situations de traitement du signal ou de l'information en présence de bruit, où la performance ne se dégrade pas de façon monotone lorsque le niveau du bruit augmente, mais au contraire où l'augmentation du bruit peut se révéler bénéfique à la performance de traitement. Dans le cadre classique, le phénomène de résonance stochastique a été et demeure largement étudié. Par exemple, on observe la résonance stochastique ou des effets de bruit utile dans des systèmes naturels comme les processus sensoriels ou neuronaux [41–43], ou bien dans des systèmes technologiques variés, électroniques, optiques, mécaniques [44–46], où la présence du bruit favorise le fonctionnement. Pour le traitement du signal et de l'information, en classique, on observe la résonance stochastique dans des processus de détection [47–52], d'estimation [46, 53–60], de transmission d'information [44, 61–69], où pour chaque tâche, une mesure de performance pertinente et significative peut se voir améliorée par l'action du bruit. Dans le cadre quantique, spécialement pour le traitement de l'information et du signal, l'étude de la résonance stochastique est beaucoup moins développée. Quelques études récentes existent [70–75], mais le domaine reste encore largement ouvert. Dans ce mémoire, nous mettrons ainsi en évidence et analyserons des possibilités nouvelles d'effets de résonance stochastique quantique, dans des tâches de détection, d'estimation ou de transmission de signal en présence de bruit quantique.

Dans ces études de traitement du signal quantique en présence de bruit, nous considérerons également la propriété spécifiquement quantique constituée par l'intrication. Nous approfondirons aussi l'apport que peut présenter l'intrication, avec des bénéfices purement quantiques inaccessibles en classique qui seront obtenus pour les tâches de traitement du signal en présence

de bruit que nous étudions. Nous considérerons aussi des signaux à deux dimensions, pour des situations pouvant s'apparenter à du traitement numérique d'images en quantique.

Les études de traitement du signal quantique développées ici sont principalement théoriques et numériques. En complément, nous présenterons dans le chapitre 6 des mises en œuvre expérimentales que nous avons pu réaliser grâce à un processeur quantique rendu accessible en ligne par la compagnie IBM (processeur IBM Q 14 Melbourne à 14 qubits). On considérera ainsi un protocole de détection sur des signaux quantiques bruités, en présence d'intrication, avec une confrontation entre l'analyse théorique et la réalisation expérimentale.

## Chapitre 2

# Principes d'information quantique

Dans ce chapitre nous allons mettre en place un formalisme utile à l'étude de l'information quantique. Nous allons montrer comment caractériser un système quantique, comment formaliser sa mesure et enfin quelles évolutions lui sont possibles. Nous en profiterons pour expliciter certaines particularités d'un système quantique par rapport à un système classique. Ce chapitre va donc permettre d'introduire le formalisme et des notions utilisées dans la suite de ce manuscrit. En particulier, nous allons voir un système quantique servant de brique élémentaire à l'information quantique : le qubit. Nous allons plus particulièrement formaliser les évolutions bruitées du qubit qui nous seront utiles dans la suite de ce manuscrit.

## 2.1 Formalisation d'un état quantique

### 2.1.1 Vecteur d'état d'un système quantique

Un système quantique [6] peut être représenté par un vecteur d'état  $|\psi\rangle$ . On utilise dans ce manuscrit la notation de Dirac [76]  $|\cdot\rangle$  (prononcé ket) afin de signifier un vecteur d'état quantique. On utilisera la notation complémentaire  $\langle\cdot|$  (prononcé bra) pour formaliser le vecteur conjugué transposé  $|\cdot\rangle^\dagger = \langle\cdot|$ . Ce vecteur d'état  $|\psi\rangle$  appartient à un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  complexe. De plus, pour des raisons qui seront justifiées dans la suite, on postule qu'un vecteur d'état est de norme unité. On appellera système quantique de dimension  $N$  un système quantique dont le vecteur d'état  $|\psi\rangle$  s'exprime dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_N$  complexe de dimension  $N$ . Un vecteur d'état peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire d'états d'une base orthonormale  $\{|1\rangle, \dots, |N\rangle\}$  de dimension  $N$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_N$  complexe. Une telle combinaison linéaire d'états de base s'écrit

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j |j\rangle, \quad (2.1)$$

avec les coefficients complexes  $\alpha_j$  respectant

$$\sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2 = 1. \quad (2.2)$$

Un système quantique peut donc être dans une superposition quantique d'états.

Un nombre  $M$  de systèmes quantiques de dimension  $N$  à états dans  $\mathcal{H}_N$  qui interagissent constituent un système composite qui peut se décrire au moyen d'un vecteur d'état  $|\psi\rangle$  qui appartient à l'espace de Hilbert produit tensoriel  $\mathcal{H}_N^{\otimes M}$  possédant la dimension  $N^M$  [8]. Un exemple d'état de l'espace  $\mathcal{H}_N^{\otimes M}$  est constitué par le produit tensoriel

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_M\rangle \quad (2.3)$$

des  $M$  états  $|\psi_k\rangle$  de  $\mathcal{H}_N$ , pour  $k = 1$  à  $M$ , et constitue un état dit séparable (factorisable). On pourra noter

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle = |\psi_1\psi_2\rangle \quad (2.4)$$

afin de condenser les expressions mathématiques.

Un type d'états spécialement important de l'espace produit tensoriel  $\mathcal{H}_N^{\otimes M}$  est constitué par les états qui ne peuvent pas se factoriser d'une manière analogue à l'Eq. (2.3). De tels états quantiques constituent des états intriqués [8]. En présence de cette propriété d'intrication, le système composite d'état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_N^{\otimes M}$  se comporte comme un tout délocalisé pour lequel on ne peut pas conférer d'état quantique défini à chacun des sous-systèmes intriqués le composant.

Par exemple, pour deux sous-systèmes quantiques de dimension 2 l'état

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (2.5)$$

n'est pas décomposable en produit tensoriel d'états appartenant à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  complexe de dimension 2. Cet état à deux systèmes quantiques constitue ainsi un état intriqué (non factorisable) du système composite. Il en résulte qu'une modification portant sur l'un des deux sous-systèmes pourra entraîner une modification sur l'autre sous-système, agissant de façon instantanée, même s'ils sont éloignés d'une distance arbitraire. Cette propriété d'intrication a été mise en évidence expérimentalement par exemple au moyen de paires de photons intriqués par [12, 77].

### 2.1.2 Du bit au qubit

Classiquement, la brique élémentaire d'information est le bit avec ses deux états 0 ou 1. L'équivalent quantique au bit est le qubit. On définit une base orthonormée  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2, avec

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

et

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

L'état  $|\psi\rangle$  du qubit appartient à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2. De plus, l'état  $|\psi\rangle$  du qubit est de norme unité, car un état d'un système quantique est de norme unité. L'état d'un qubit peut donc s'écrire

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.8)$$

avec les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  complexes respectant la contrainte de norme unité

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.9)$$

Un qubit, qui constitue une brique élémentaire pour l'information quantique, est un système quantique permettant l'expression de propriétés purement quantiques. En effet, de par son statut de brique élémentaire pour l'information, le qubit permet de mettre en évidence divers phénomènes dans le domaine de l'information quantique.

Un qubit peut être matérialisé, par exemple, par les deux états de polarisation d'un photon [20, 78], les deux états énergétiques d'une jonction de Josephson supraconductrice [79–81], les deux états de spin d'un électron [82, 83] ou les deux états énergétiques accessibles à un ion (un état de repos et un état excité) [84, 85].

### 2.1.3 Opérateur densité d'un système quantique

L'état d'un système quantique pouvant être soumis à des interactions avec un environnement non contrôlé, il sera alors connu de manière probabiliste [6, 86]. On utilise une formalisation adaptée qui consiste à caractériser un système quantique connu de manière probabiliste par un opérateur appelé opérateur densité. Un opérateur densité permet ainsi l'expression d'un système connu de manière probabiliste appelé état mélangé. Un état mélangé est une combinaison statistique d'états décrit par l'ensemble statistique  $\{(P_j, |\psi_j\rangle)\}$ , avec  $j = 1$  à  $J$ , où le système physique pourra se trouver dans l'état  $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}_N$  avec la probabilité  $P_j$ .

On est alors en présence d'un état mélangé qui se décrit au moyen de l'opérateur densité

$$\rho = \sum_{j=1}^J P_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad (2.10)$$

avec la motivation de cette définition qui sera donnée dans la section suivante 2.2.1 quand nous en viendrons à la mesure d'un système quantique. Lorsque le système est connu pour se trouver dans l'état  $|\psi\rangle$  avec la probabilité 1, l'opérateur densité associé est

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (2.11)$$

On parle alors d'un état pur.

De la définition de l'Éq. (2.10) il résulte que tout opérateur densité est hermitien ou auto-adjoint, c'est-à-dire  $\rho^\dagger = \rho$ ; de plus il possède une trace unité. En effet, on définit la trace  $\text{Tr}(\cdot)$  d'un opérateur  $A$  comme la somme des éléments diagonaux  $A_{nn}$  de cet opérateur

$$\text{Tr}(A) = \sum_{n=1}^N A_{nn}. \quad (2.12)$$

Pour deux états  $|\psi\rangle$  et  $|\phi\rangle$  la trace a la propriété suivante

$$\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\phi|) = \langle\phi|\psi\rangle, \quad (2.13)$$

avec le membre de droite qui constitue le produit scalaire hermitien des deux états. Dans la représentation diagonale de l'opérateur  $A$ , la trace  $\text{Tr}(A)$  de cet opérateur est égale à la somme de ses valeurs propres  $\lambda_n$ , on a ainsi

$$\text{Tr}(A) = \sum_{n=1}^N \lambda_n. \quad (2.14)$$

La trace est invariante par changement de base orthonormée. Ainsi, de l'Éq. (2.10), la trace  $\text{Tr}$  étant linéaire, on a

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_{j=1}^J P_j \text{Tr}(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|). \quad (2.15)$$

En utilisant la propriété de l'Éq. (2.13) on peut écrire

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_{j=1}^J P_j \langle\psi_j|\psi_j\rangle. \quad (2.16)$$

Or un état quantique étant de norme  $\sqrt{\langle \psi_j | \psi_j \rangle}$  unité on obtient

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_{j=1}^J P_j = 1. \quad (2.17)$$

Tout opérateur densité est donc de trace unité et les valeurs propres d'un opérateur densité se somment à 1, en effet en utilisant l'Eq. (2.14) on obtient

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n = 1. \quad (2.18)$$

Une autre propriété remarquable des opérateurs densité  $\rho$  est leur positivité. En effet, pour un opérateur densité  $\rho$  et pour un état  $|\phi\rangle$  quelconque, on peut écrire

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_{j=1}^J P_j \langle \phi | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \phi \rangle = \sum_{j=1}^J P_j |\langle \phi | \psi_j \rangle|^2 \geq 0. \quad (2.19)$$

Un opérateur densité  $\rho$  est donc positif. De plus, cet opérateur de dimension  $N \times N$  étant hermitien, il a exactement  $N$  valeurs propres. On en déduit qu'un opérateur densité a exactement  $N$  valeurs propres positives qui se somment à 1.

Pour un qubit, avec  $|\psi\rangle$  le vecteur d'état du système dans un état pur paramétré par l'Eq. (2.8) on obtient la forme générale

$$\rho = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Par exemple, en notant  $I_2$  l'opérateur identité sur  $\mathcal{H}_2$ , l'opérateur densité

$$\frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \quad (2.21)$$

représente un état mélangé, car il ne peut être décomposé en une combinaison linéaire d'états purs. En effet, dans l'Eq. (2.20) il est impossible de choisir  $\alpha$  et  $\beta$  afin d'obtenir l'opérateur densité de l'Eq. (2.21). L'état  $I_2/2$  est appelé état maximalement mélangé, car quelle que soit la base orthonormale  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  de dimension 2 dans laquelle on le représente, il s'écrira comme une combinaison linéaire avec un coefficient  $1/2$  devant les deux opérateurs densité des deux états  $|\phi_1\rangle$  et  $|\phi_2\rangle$  de la base orthonormale

$$\frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_2|. \quad (2.22)$$

#### 2.1.4 Sphère de Bloch pour le qubit

L'opérateur densité d'un qubit peut aussi s'écrire [8]

$$\rho = \frac{1}{2}(I_2 + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z) = \frac{1}{2}(I_2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

avec le vecteur de Pauli

$$\vec{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]^\top, \quad (2.24)$$

et les opérateurs de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad (2.25)$$

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \quad (2.26)$$

et

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \quad (2.27)$$

qui sont tous trois à la fois hermitiens, unitaires et de trace nulle. Le vecteur  $\vec{r} = [r_x, r_y, r_z]^\top$  est appelé vecteur de Bloch. C'est un vecteur réel, de façon que la forme générale de l'Éq. (2.23) donne toujours un opérateur densité  $\rho$  hermitien et de trace unité. Le vecteur de Bloch  $\vec{r}$  d'un qubit est de norme inférieure ou égale à 1. En effet, si on cherche les valeurs propres de l'opérateur densité  $\rho$  on a

$$\det(\rho - \lambda I_2) = 0, \quad (2.28)$$

on obtient ainsi l'expression explicite des deux valeurs propres  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \|\vec{r}\|). \quad (2.29)$$

De la positivité de l'opérateur densité établie à l'Éq. (2.19), les valeurs propres sont positives et d'après l'Éq. (2.18) on peut alors déduire

$$0 \leq \lambda_{\pm} \leq 1. \quad (2.30)$$

On en déduit que

$$\|\vec{r}\| \leq 1, \quad (2.31)$$

le vecteur de Bloch  $\|\vec{r}\|$  est donc à l'intérieur d'une sphère de rayon unité appelée sphère de Bloch. On appellera dans la suite de ce manuscrit boule de Bloch l'intérieur de la sphère de Bloch. Pour un système quantique dans un état pur  $|\psi\rangle$  l'opérateur densité  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  a pour états propres  $|\psi\rangle$  et un vecteur orthogonal  $|\psi\rangle^\perp$  respectivement de valeurs propres 1 et 0. On en déduit qu'un état pur est représenté par un vecteur de Bloch de norme unité et donc appartenant à la surface de la sphère de Bloch. Pour un état mélangé on aura  $\|\vec{r}\| < 1$  pour un vecteur à l'intérieur de la boule de Bloch. Le centre  $\vec{r} = \vec{0}$  de cette sphère correspond à l'état maximalement mélangé  $I_2/2$ .

Pour un qubit dans un état pur, l'état pur  $|\psi\rangle$  d'un qubit étant de norme unité et appartenant à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  complexe de dimension 2, on peut utiliser un paramétrage alternatif du vecteur d'état  $|\psi\rangle$  sous la forme [6],

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|1\rangle, \quad (2.32)$$

avec les deux paramètres réels  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . En développant l'opérateur densité  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  associé, puis en identifiant avec l'Éq. (2.23), on établit que les angles  $\theta$  et  $\varphi$  constituent les coordonnées sphériques du vecteur de Bloch unitaire  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ . La Fig. 2.1 illustre la représentation d'un état  $|\psi\rangle$  avec un vecteur de Bloch  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ .

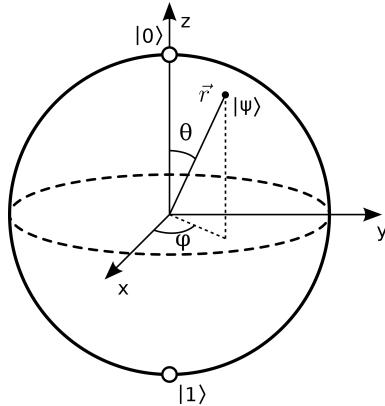


FIGURE 2.1 – Sphère de Bloch servant à la représentation d'un qubit.

La représentation de Bloch de l'Éq. (2.23) revient à exprimer tout opérateur densité  $\rho$  sur la famille des quatre opérateurs  $\{I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  qui constitue une base pour les opérateurs sur  $\mathcal{H}_2$ . De plus, cette base est une base orthonormée au sens d'un produit scalaire usuel pour les opérateurs donné par le produit scalaire de Hilbert-Schmidt [6]. Cette représentation de Bloch nous sera très utile dans la suite pour traiter les états de qubit.

## 2.2 Mesure d'un système quantique

### 2.2.1 Mesure de von Neumann

La mesure d'un système quantique se fait par projection de l'état  $|\psi\rangle$  du système quantique dans une base orthonormée de son espace de Hilbert  $\mathcal{H}_N$  complexe [7]. Une telle mesure projective est appelée mesure de von Neumann. Un état  $|\psi\rangle$  sera alors mesuré de manière certaine dans l'état  $|j\rangle$  si celui-ci fait partie de la base de mesure. Cependant, si le système quantique est dans une combinaison linéaire d'états de base

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j |j\rangle, \quad (2.33)$$

alors pour une mesure dans la base de mesure orthonormale  $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle\}$ , le système a une probabilité  $|\alpha_j|^2$  d'être mesuré (projété) dans l'état  $|j\rangle$ . On en déduit ainsi la condition

$$\sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2 = 1, \quad (2.34)$$

sur les coefficients  $\alpha_j$  justifiant qu'un vecteur d'état est de norme unité. La mesure d'un système quantique n'est alors pas déterministe mais probabiliste. Cette propriété probabiliste de la mesure quantique marque une différence essentielle avec la mesure classique qui est déterministe.

Des exemples communs de combinaisons linéaires d'états décrites à l'Éq. (2.33) sont réalisés pour un qubit dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  des Éqs. (2.6) et (2.7). Lors d'une mesure de von Neumann dans la base de codage  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , le qubit a une probabilité

$$|\alpha|^2 = |\langle 0|\psi \rangle|^2 \quad (2.35)$$

d'être mesuré dans l'état  $|0\rangle$  et une probabilité

$$|\beta|^2 = |\langle 1|\psi \rangle|^2 \quad (2.36)$$

d'être mesuré dans l'état  $|1\rangle$ .

Un cas particulier serait le cas des états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.37)$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.38)$$

qui chacun présente une probabilité  $1/2$  d'être mesuré dans l'état  $|0\rangle$  ou dans l'état  $|1\rangle$ .

La mesure sur un état quantique intriqué peut donner lieu à des comportements contre-intuitifs inattendus [6, 7]. On peut considérer une paire de deux qubits A et B préparée dans l'état intriqué  $|AB\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$  de l'Éq. (2.5). Les deux qubits de la paire sont ensuite éloignés d'une distance arbitraire. Si on mesure localement le qubit A, on le trouve dans l'état  $|0\rangle$  ou dans l'état  $|1\rangle$  aléatoirement avec les probabilités  $1/2$  et  $1/2$ . En mesurant localement le qubit B on obtient le même comportement. Toutefois, la description conjointe des deux qubits indique que si le qubit A est mesuré, par exemple, dans l'état  $|0\rangle$ , alors instantanément le qubit B est projeté aussi dans l'état  $|0\rangle$ , quel que soit son éloignement. A contrario, si la paire de qubits est préparée dans l'état séparable  $|AB\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$ , alors là aussi, si on mesure localement le qubit A on le trouve dans l'état  $|0\rangle$  ou dans l'état  $|1\rangle$  aléatoirement avec les probabilités  $1/2$  et  $1/2$ , et de même lors d'une mesure locale du qubit B. Néanmoins ici, si le qubit A est mesuré dans l'état  $|0\rangle$ , ceci n'affecte en rien l'état du qubit B qui garde les probabilités  $1/2$  et  $1/2$  d'être mesuré dans  $|0\rangle$  ou dans  $|1\rangle$ . Les deux qubits préparés dans un état séparable présentent des comportements indépendants, alors que s'ils sont préparés dans un état intriqué ils réagissent comme un tout délocalisé, pouvant donner lieu à des comportements donnant l'apparence d'une interaction à distance instantanée. Il n'y a cependant rien de physique qui se propage d'un qubit de la paire intriquée à l'autre, ce qui ainsi ne remet nullement en cause les principes de théorie relativiste. La paire intriquée constitue un tout délocalisé, qui réagit comme un tout, d'une façon globale (non locale). En particulier, il n'y a pas moyen d'exploiter cette propriété de l'intrication pour propager ou transmettre de l'information utile du qubit A au qubit B, car le changement d'état lors de la mesure de A qui modifie instantanément B, se produit de façon fondamentalement aléatoire et incontrôlable. Néanmoins, même si la transmission directe d'information n'est pas faisable, l'intrication quantique, comme nous le verrons, permet d'obtenir des effets utiles au traitement de l'information, qui garderont un caractère contre-intuitif inattendu, mais permettront des performances accrues inaccessibles classiquement.

La propriété essentielle qui motive l'introduction de l'opérateur densité  $\rho$  avec sa forme de l'Éq. (2.10), est que, en intégrant les statistiques conditionnelles sur l'ensemble statistique sous-jacent, on trouve que, lors d'une mesure projective, la probabilité de projeter sur un état  $|\phi\rangle$  quelconque de la base orthonormée projective, peut s'exprimer par

$$\Pr\{|\phi\rangle\} = \langle\phi|\rho|\phi\rangle = \text{Tr}(\rho\Pi_\phi), \quad (2.39)$$

avec  $\Pi_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$  le projecteur orthogonal sur  $|\phi\rangle$ . Les statistiques de mesure sont ainsi complètement exprimables au moyen de l'opérateur densité  $\rho$  de l'Éq. (2.10), sans requérir la constitution fine de l'ensemble statistique sous-jacent.

## 2.2.2 Mesures généralisées

Une mesure quantique d'un système de dimension  $N$  peut se réaliser par une projection dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_M$  complexe [7]. En effet, on peut considérer le système de dimension  $N$  comme étant plongé dans un espace de plus grande dimension  $M$ . Une mesure généralisée consiste alors à projeter l'état du système de dimension  $N$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_M$  complexe de dimensions  $M$ , puis de projeter le résultat de mesure dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_N$  complexe de dimension  $N$  du système de dimension  $N$ .

Une telle mesure par projection dans un espace de dimension  $M$  étant supérieure à la dimension  $N$  du système est appelée POVM (Positive Operator Valued Measure). On établit ainsi [6] qu'une telle opération d'un POVM peut se formaliser par un nombre arbitraire  $M$  d'opérateurs hermitiens positifs décomposant l'unité

$$\sum_{k=1}^M M_k = \mathbf{I}_N, \quad (2.40)$$

où  $\mathbf{I}_N$  est l'opérateur identité sur  $\mathcal{H}_N$ . En mesurant ainsi un système de dimension  $N$ , on a accès à  $M$  résultats de mesure possibles dont les probabilités peuvent s'évaluer [6] comme

$$\Pr\{M_k\} = \text{Tr}(\rho M_k), \quad (2.41)$$

pour  $k = 1$  à  $M$ , avec  $\Pr\{M_k\}$  la probabilité que l'opérateur  $M_k$  mesure le système quantique. La condition de l'Éq. (2.40) assure que la somme des probabilités  $\Pr\{M_k\}$  est bien égale à 1. Le POVM est la formalisation d'une mesure générale sur un système quantique.

Pour un qubit les  $M$  opérateurs du POVM peuvent s'écrire

$$M_k = b_k \mathbf{I}_2 + \vec{a}_k \cdot \vec{\sigma}, \quad (2.42)$$

avec  $(\vec{a}_k, b_k)$  réels satisfaisant [6]

$$\sum_{k=1}^M \vec{a}_k = \vec{0} \quad (2.43)$$

et

$$\sum_{k=1}^M b_k = 1, \quad (2.44)$$

afin de vérifier la contrainte de l'Éq. (2.40). En particulier  $\|\vec{a}_k\| \leq b_k \leq 1 - \|\vec{a}_k\|$  est requis pour tout  $k$  afin de garantir  $0 \leq M_k \leq I_2$ , avec  $0 \leq M_k$  la définition d'une matrice positive et  $M_k \leq I_2$  étant équivalent à  $0 \leq I_2 - M_k$ . Un exemple de mesure généralisée pour la mesure d'un système quantique de dimension 2, tel qu'un qubit, est le POVM

pour  $k = 0$  à  $M - 1$ , avec

$$|e_k\rangle = \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right)|1\rangle. \quad (2.46)$$

De tels POVM sont illustrés sur la Fig. 2.2.

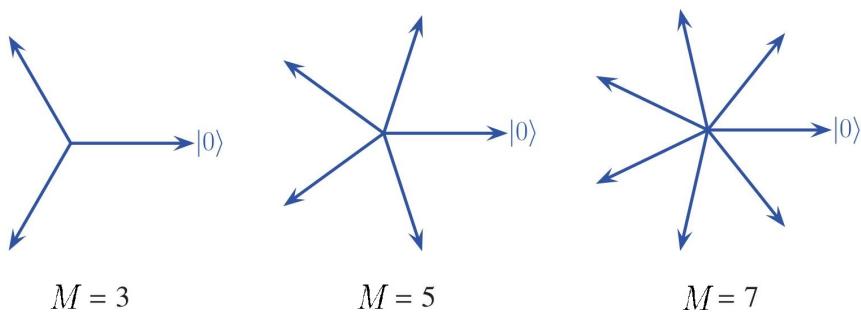


FIGURE 2.2 – Exemple de  $M$  vecteurs de l’Éq. (2.46) définissant un POVM pour le qubit.

Une situation spécialement utile est le cas où  $M = 2$  et où les deux opérateurs de mesure de l'Éq. (2.45) prennent la forme

$$\mathsf{M}_\pm = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_2 \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.47)$$

avec  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$  un vecteur de norme unité. Il s'agit de deux projecteurs projetant orthogonalement sur deux directions orthogonales de  $\mathcal{H}_2$ . Ces deux directions de projection ou bien les deux projecteurs  $M_{\pm}$  sur  $\mathcal{H}_2$  sont paramétrés (complètement identifiés) par le vecteur  $\vec{n}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Les deux opérateurs de mesure  $M_{\pm}$  constituent ce qu'on appelle une mesure de spin sur le qubit dans la direction  $\vec{n}$ .

### 2.3 Évolution d'un système quantique

### 2.3.1 Évolution unitaire d'un système quantique fermé

Un système quantique dans un état  $|\psi\rangle$  peut évoluer par l'application d'un opérateur  $U$  linéaire et unitaire [6]

$$|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle. \quad (2.48)$$

En effet, il a été observé expérimentalement que l'évolution d'un système quantique fermé  $|\psi\rangle$ , c'est-à-dire n'interagissant pas avec d'autres systèmes quantiques, ne pouvait se faire que selon une évolution linéaire unitaire. La condition d'unitarité permet de conserver une norme unité au vecteur d'état  $|\psi\rangle$  comme il se doit lors de son évolution.

L'évolution du vecteur d'état  $|\psi\rangle$  selon l'Éq. (2.48) conduit à une évolution d'un opérateur densité  $\rho$  selon

$$\rho \mapsto U\rho U^\dagger. \quad (2.49)$$

### 2.3.2 Évolution non unitaire d'un système quantique ouvert

Toutefois, dans certaines circonstances un système quantique peut être l'objet d'une évolution non unitaire [6]. Ceci se produit pour des systèmes quantiques ouverts, qui interagissent avec un environnement non contrôlé. Le composite système-environnement évolue de façon unitaire, puis en faisant disparaître les degrés de liberté non contrôlés de l'environnement par une opération de trace partielle, on établit [6] que l'évolution du système ouvert d'opérateur densité  $\rho$  sur  $\mathcal{H}_N$  peut se décrire par l'opération

$$\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho) = \sum_{k=1}^K \Lambda_k \rho \Lambda_k^\dagger. \quad (2.50)$$

Dans l'Éq. (2.50) les opérateurs  $\Lambda_k$  sur  $\mathcal{H}_N$  caractérisent spécifiquement l'interaction du système avec son environnement non contrôlé. On les appelle des opérateurs de Kraus, et ils n'ont pas besoin d'être plus nombreux que  $K = N^2$  pour décrire en toute généralité l'évolution d'un système ouvert de dimension  $N$ . De plus, ces opérateurs de Kraus  $\Lambda_k$  doivent vérifier la condition

$$\sum_{k=1}^K \Lambda_k^\dagger \Lambda_k = I_N, \quad (2.51)$$

qui garantit que l'opérateur transformé  $\mathcal{N}(\rho)$  demeure un opérateur positif et de trace unité et constitue toujours un opérateur densité valide. De façon générale la transformation de l'Éq. (2.50) constitue une transformation linéaire, non unitaire, complètement positive et qui conserve la trace. Elle transforme ainsi tout opérateur densité  $\rho$  positif de trace unité sur  $\mathcal{H}_N$  en un opérateur densité  $\mathcal{N}(\rho)$  positif de trace unité sur  $\mathcal{H}_N$ .

On peut remarquer que l'évolution unitaire de l'Éq. (2.49) pour le système fermé est un cas particulier de l'Éq. (2.50) plus générale pour le système ouvert, dans une forme dégénérée où les opérateurs de Kraus  $\Lambda_k$  se réduisent à un unique opérateur  $U$  unitaire, lequel à lui seul vérifie bien la contrainte  $U^\dagger U = I_N$  de l'Éq. (2.51).

Pour le cas important du qubit de dimension  $N = 2$ , une évolution non unitaire selon l'Éq. (2.50) pourra s'exprimer avec au plus  $N^2 = 4$  opérateurs de Kraus. Ce type d'évolution dans la représentation de Bloch de l'état du qubit se traduit [6] par une transformation affine du vecteur de Bloch sous la forme

$$\vec{r} \longmapsto A\vec{r} + \vec{c}, \quad (2.52)$$

avec  $A$  une matrice réelle de dimension  $3 \times 3$  et  $\vec{c}$  un vecteur réel de  $\mathbb{R}^3$ . Le couple  $(A, \vec{c})$  caractérise l'interaction du qubit avec son environnement non contrôlé. Une telle évolution

transforme un vecteur de la boule de Bloch en un autre vecteur de la boule de Bloch. Les évolutions vérifiant  $\vec{c} = \vec{0}$  sont appelées évolutions unitales. Ces évolutions transforment l'état maximalement mélangé  $I_2/2$  décrit dans la boule de Bloch par  $\vec{r} = \vec{0}$  en lui-même. Les évolutions non unitales au contraire transforment le vecteur de Bloch  $\vec{0}$  en  $\vec{c} \neq \vec{0}$ .

### 2.3.3 Bruits quantiques usuels pour le qubit

Un système quantique pouvant contenir de l'information à travers son état  $|\psi\rangle$ , il peut être utilisé pour transmettre ou extraire de l'information. Cette propriété permet de considérer un système quantique comme support d'un signal [7]. Lors de son interaction avec son environnement, un système quantique peut se voir transformé et cette transformation peut détériorer le signal étudié. Lorsque l'environnement, contenant un grand nombre de degrés de liberté, est incontrôlé, son action sur le qubit peut être interprétée comme un bruit quantique induisant une décohérence. Une telle interaction avec un environnement non contrôlé peut être réalisée par exemple lorsque la température externe au système quantique est non nulle ou encore lorsque différents systèmes quantiques interagissent ensemble de manière non contrôlée.

Ainsi, un bruit agissant sur un système quantique d'opérateur densité  $\rho$  peut se mettre sous la forme de l'Éq. (2.50) quelle que soit la complexité de l'environnement. Nous allons maintenant caractériser différents bruits standards agissant sur le qubit afin de pouvoir dans la suite de ce manuscrit étudier l'impact de ces bruits sur différents processus impliquant des qubits et pouvant s'interpréter comme réalisant des tâches de traitement du signal.

#### Bruits de Pauli

Un bruit de Pauli [7] est un bruit appliquant de façon probabiliste les quatre opérateurs de Pauli  $I_2, \sigma_x, \sigma_z, \sigma_y$  qui forment une base orthonormale de  $\mathcal{H}_2$ . Dans la représentation de Kraus, un bruit de Pauli implémente l'opération quantique

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_{k=1}^K p_k \sigma_k \rho \sigma_k^\dagger, \quad (2.53)$$

avec  $\{p_k\}$  une distribution de probabilité. Ceci donne dans l'Éq. (2.52) la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

avec les coefficients scalaires

$$\alpha_x = p_0 + p_x - p_y - p_z, \quad (2.55)$$

$$\alpha_y = p_0 - p_x + p_y - p_z, \quad (2.56)$$

$$\alpha_z = p_0 - p_x - p_y + p_z, \quad (2.57)$$

se référant au repère  $(Ox, Oy, Oz)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Pour le qubit, les Éqs. (4.37) et (4.38) décrivent en particulier des bruits de Pauli communs comme le bruit de bit-flip, de phase-flip et le bruit

dépolarisant. Les trois paramètres  $\alpha_k$  des Éqs. (4.39), (4.40) et (4.41) sont des facteurs de compression satisfaisant

$$0 \leq |\alpha_k| \leq 1 \quad (2.58)$$

pour tout  $k \in \{x, y, z\}$ , afin de garantir que la boule de Bloch est transformée en elle-même par l'action de l'opérateur  $A$ . De cette façon, la transformation  $\vec{r} \mapsto A\vec{r}$  par le bruit de Pauli compresse les vecteurs de Bloch  $\vec{r}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Le niveau maximum de compression intervient pour  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$ , c'est-à-dire pour un état avec un vecteur de Bloch  $\vec{r} = \vec{0}$  caractérisant l'état maximalement mélangé  $I_2/2$  du qubit identifiable avec l'état maximalement bruité.

Des bruits de Pauli communs et fréquemment pertinents pour l'information quantique sont les suivants.

- Le bruit de bit-flip applique l'opérateur  $\sigma_x$  avec une probabilité  $p$ . Un bruit de bit-flip agissant sur un qubit d'opérateur densité  $\rho$  peut alors être formalisé par l'équation

$$\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho) = (1-p)\rho + p\sigma_x\rho\sigma_x^\dagger. \quad (2.59)$$

Comme  $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$  l'application du bruit de bit-flip échange les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  du qubit avec une probabilité  $p$  et laisse le qubit inchangé sinon. Il s'agit d'une évolution non unitaire selon la forme générale de l'Éq. (2.50), avec deux opérateurs de Kraus  $\Lambda_1 = \sqrt{1-p} I_2$  et  $\Lambda_2 = \sqrt{p} \sigma_x$ .

Dans la représentation de Bloch l'action du bruit de bit-flip s'écrit

$$\vec{r} \mapsto A\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2p & 0 \\ 0 & 0 & 1-2p \end{bmatrix} \vec{r}. \quad (2.60)$$

Donc ce bruit comprime la sphère de Bloch selon les axes  $Oy$  et  $Oz$  et laisse inchangé l'axe  $Ox$ .

- Le bruit de phase-flip applique l'opérateur  $\sigma_z$  avec une probabilité  $p$ . Un bruit de phase-flip agissant sur un qubit d'opérateur densité  $\rho$  peut alors être formalisé par l'équation

$$\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho) = (1-p)\rho + p\sigma_z\rho\sigma_z^\dagger. \quad (2.61)$$

Comme  $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$  l'application du bruit de phase-flip renverse la phase de la composante du qubit selon  $|1\rangle$  avec une probabilité  $p$  et laisse le qubit inchangé sinon. Il s'agit d'une évolution non unitaire selon la forme générale de l'Éq. (2.50), avec deux opérateurs de Kraus  $\Lambda_1 = \sqrt{1-p} I_2$  et  $\Lambda_2 = \sqrt{p} \sigma_z$ .

Dans la représentation de Bloch l'action du bruit de phase-flip s'écrit

$$\vec{r} \mapsto A\vec{r} = \begin{bmatrix} 1-2p & 0 & 0 \\ 0 & 1-2p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r}. \quad (2.62)$$

Donc ce bruit comprime la sphère de Bloch selon les axes  $Ox$  et  $Oy$  et laisse inchangé l'axe  $Oz$ .

- Le bruit de bit-phase-flip applique l'opérateur  $\sigma_y$  avec une probabilité  $p$ . Un bruit de bit-phase-flip agissant sur un qubit d'opérateur densité  $\rho$  peut alors être formalisé par l'équation

$$\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho) = (1-p)\rho + p\sigma_y\rho\sigma_y^\dagger. \quad (2.63)$$

Comme  $\sigma_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$  l'application du bruit de bit-phase-flip échange les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , renverse la phase de la composante du qubit selon  $|1\rangle$  et applique une phase globale de  $i$  au qubit avec une probabilité  $p$  et laisse le qubit inchangé sinon. Il s'agit d'une évolution non unitaire selon la forme générale de l'Éq. (2.50), avec deux opérateurs de Kraus  $\Lambda_1 = \sqrt{1-p} \mathbf{I}_2$  et  $\Lambda_2 = \sqrt{p} \sigma_y$ .

Dans la représentation de Bloch l'action du bruit de bit-phase-flip s'écrit

$$\vec{r} \longmapsto A\vec{r} = \begin{bmatrix} 1-2p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2p \end{bmatrix} \vec{r}. \quad (2.64)$$

Donc ce bruit comprime la sphère de Bloch selon les axes  $Ox$  et  $Oz$  et laisse inchangé l'axe  $Oy$ .

- Le bruit dépolarisant applique chaque des opérateurs de Pauli  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  avec une probabilité  $p/3$ . Un bruit dépolarisant agissant sur un qubit d'opérateur densité  $\rho$  peut alors être formalisé par l'équation

$$\rho \longmapsto \mathcal{N}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{3} (\sigma_x \rho \sigma_x^\dagger + \sigma_y \rho \sigma_y^\dagger + \sigma_z \rho \sigma_z^\dagger). \quad (2.65)$$

L'Éq. (2.65) peut être réécrite [6] sous la forme

$$\rho \longmapsto \mathcal{N}(\rho) = (1-p')\rho + p' \frac{\mathbf{I}_2}{2}, \quad (2.66)$$

avec  $p' = 4p/3$ . L'expression de l'Éq. (2.66) nous permet de remarquer que le bruit dépolarisant peut aussi être compris comme changeant le qubit d'opérateur densité  $\rho$  en l'opérateur densité  $\mathbf{I}_2/2$  avec une probabilité  $p'$  et laissant inchangé le qubit d'opérateur densité  $\rho$  avec une probabilité  $1-p'$ .

Dans la représentation de Bloch l'action du bruit dépolarisant s'écrit

$$\vec{r} \longmapsto A\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{4}{3}p & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{4}{3}p & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{4}{3}p \end{bmatrix} \vec{r}. \quad (2.67)$$

Donc ce bruit comprime la sphère de Bloch dans son intégralité. L'augmentation du niveau de bruit  $p \in [0, 3/4]$  rapproche ainsi le qubit de l'état maximalement mélangé  $\mathbf{I}_2/2$ . Aucun sous-espace n'est alors laissé inchangé par l'application du bruit dépolarisant. L'état maximalement mélangé  $\mathbf{I}_2/2$  donne tous les résultats équiprobables quelle que soit la base de mesure. Le bruit dépolarisant est ainsi en quelque sorte le bruit de Pauli le plus sévère pour le qubit, il constitue une sorte de cas extrême de bruit.

Ces bruits de Pauli peuvent, par exemple, représenter le passage d'un photon, étant considéré comme un qubit avec ses deux états de polarisation, dans un milieu biréfringent. En effet, si on considère un photon et ses deux modes de polarisation orthogonaux à l'axe de propagation, il peut alors être considéré comme un qubit. Le passage du photon à travers un milieu biréfringent peut alors induire un bit-flip, un phase-flip, un bit-phase-flip ou un bruit dépolarisant, le passage à travers un milieu réfringent en mouvement peut alors être interprété comme un bruit de

Pauli [87–89]. Les bruits de Pauli sont des bruits unitaux, car ils compriment la sphère de Bloch sans en déplacer le centre. En effet, dans l'Éq. (2.52) les bruits de Pauli ont un vecteur  $\vec{c}$  nul, par conséquent le centre de la sphère de Bloch n'est pas déplacé par l'effet du bruit. Ces bruits appliquent donc une compression d'autant plus importante que le niveau de bruit  $p$  est important.

Pour les bruits de Pauli présentés ici la probabilité  $p$  peut être considérée comme un niveau de bruit dans la mesure où le qubit subit un changement avec la probabilité  $p$ . Plus la probabilité  $p$  est grande, plus le qubit a de chances d'être modifié aléatoirement. Pour les bruits appliquant un unique opérateur de Pauli, on considère que le niveau de bruit croît lorsque la probabilité  $p$  croît dans  $[0, 1/2]$ . Pour la valeur  $p = 1/2$  la compression de la sphère de Bloch est ainsi maximale. Pour le bruit dépolarisant, on considère que le niveau de bruit croît lorsque la probabilité  $p$  croît dans  $[0, 3/4]$ . Pour la valeur  $p = 3/4$ , la compression de la sphère de Bloch est effectivement maximale.

### Bruit thermique

Le modèle de bruit thermique décrit l'interaction du qubit avec un environnement non contrôlé représenté par un bain thermique à la température  $T$ .

Le bruit thermique est caractérisé [6] par la forme de Kraus de l'Éq. (2.50) avec

$$\Lambda_1 = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

$$\Lambda_3 = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\Lambda_4 = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

avec  $p \in [0, 1]$ . Le paramètre

$$\gamma = 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \in [0, 1] \quad (2.72)$$

est un coefficient d'amortissement qui croît de façon monotone avec la durée  $t$  d'interaction entre le qubit et le bain thermique. Le paramètre  $T_1$  est une constante de temps pour l'interaction pouvant être, par exemple, le temps de relaxation d'un spin en résonance magnétique. Lorsque le temps  $t$  est nul le coefficient d'amortissement  $\gamma$  est nul et le bruit ne modifie pas le qubit, et lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini le coefficient  $\gamma$  tend vers sa valeur maximale 1.

La Fig. 2.3 montre la relation entre le temps  $t$  d'interaction avec le bain thermique et le coefficient d'amortissement  $\gamma$ .

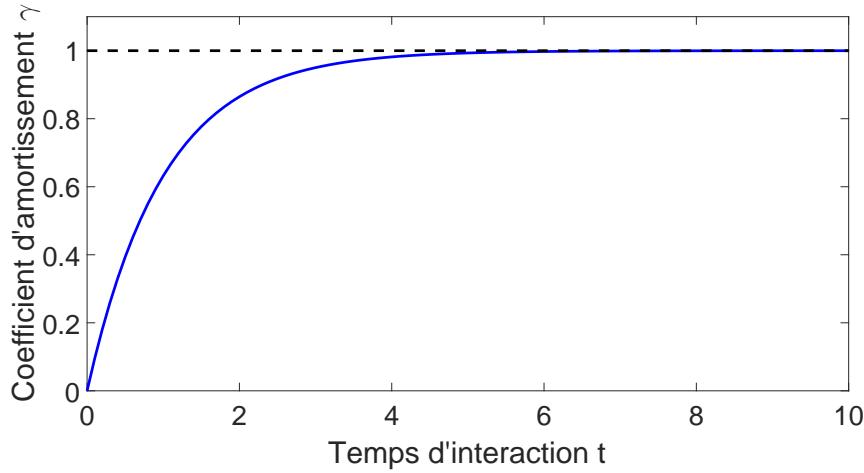


FIGURE 2.3 – Coefficient d'amortissement  $\gamma$  en fonction du temps  $t$  d'interaction avec le bain thermique pour une constante de temps  $T_1 = 1$  de l'Éq. (2.72). La ligne pointillée indique l'asymptote de la courbe lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

On déduit de la Fig. 2.3 que le coefficient d'amortissement  $\gamma$  évolue de façon monotone avec l'augmentation du temps  $t$ .

Pour un temps  $t$  d'interaction infini le bruit thermique fait relaxer le qubit dans l'état

$$\rho_{t \rightarrow \infty} = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|, \quad (2.73)$$

avec la probabilité à l'équilibre

$$p = \frac{\exp\left[-\frac{E_0}{k_B T}\right]}{\exp\left[-\frac{E_0}{k_B T}\right] + \exp\left[-\frac{E_1}{k_B T}\right]} = \frac{1}{1 + \exp\left[-\frac{E_1 - E_0}{k_B T}\right]}, \quad (2.74)$$

gouvernée par la distribution de Boltzmann entre les deux niveaux d'énergie  $E_0$  de l'état  $|0\rangle$  et  $E_1 > E_0$  de l'état  $|1\rangle$ . Pour un bruit thermique quantique, la probabilité  $p$  est alors déterminée par la température  $T$  du bain thermique à travers l'Éq. (2.74).

La Fig. 2.4 illustre la relation entre la température de bruit  $T$  et la probabilité de bruit  $p$  avec les paramètres  $E_0 = 0$ ,  $E_1 = 1$  et  $k_B = 1$ .

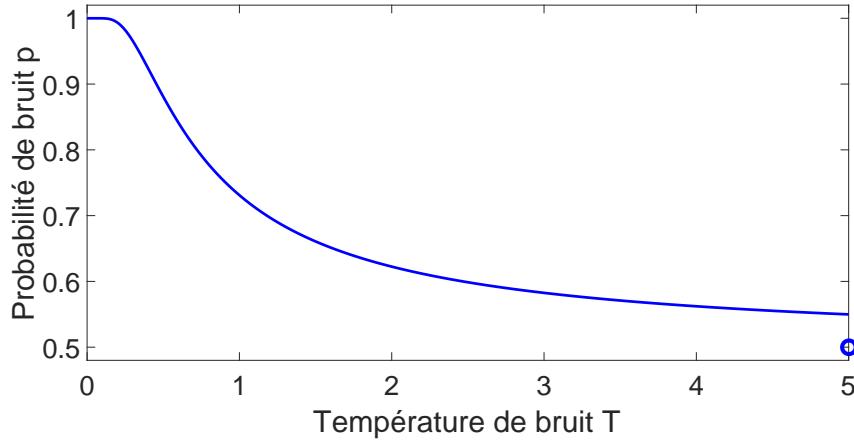


FIGURE 2.4 – Probabilité de bruit  $p$  en fonction de la température de bruit  $T$  pour des paramètres  $E_0 = 0$ ,  $E_1 = 1$  et  $k_B = 1$ , selon l'Éq. (2.74). Le cercle indique la valeur asymptotique  $p = 1/2$  lorsque la température de bruit  $T \rightarrow \infty$ .

On peut voir sur la Fig. 2.4 que la probabilité  $p$  décroît bien de façon monotone lorsque la température  $T$  augmente. En effet, de l'Éq. (2.74), on peut déduire que la probabilité  $p$  est une fonction décroissante en fonction de la température  $T$  comme illustré sur la Fig. 2.4. Pour une température  $T = 0$  la probabilité est  $p = 1$  pour l'état d'équilibre  $|0\rangle$ . Alors que pour  $T \rightarrow \infty$  il y a équiprobabilité avec  $p \rightarrow 1/2$  pour les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , le qubit est alors dans l'état d'équilibre d'opérateur densité  $\rho_{T \rightarrow \infty}$  défini par

$$\rho_{T \rightarrow \infty} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{I_2}{2}. \quad (2.75)$$

On déduit alors de l'Éq. (2.74), que lorsque la température  $T$  augmente de façon monotone de 0 à  $\infty$ , alors la probabilité  $p$  décroît de façon monotone de 1 à  $1/2$ . Ces variations sont préservées pour toutes différences d'énergies  $E_1 - E_0 > 0$  dans l'Éq. (2.74).

Dans la représentation de Bloch l'action du bruit thermique s'écrit [6]

$$\vec{r} \mapsto A\vec{r} + \vec{c} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix} \vec{r} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2p-1)\gamma \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Le bruit thermique est un bruit non unital, car il déplace l'état  $I_2/2$ . En effet, dans l'Éq. (2.52) le bruit thermique a un vecteur  $\vec{c}$  non nul. Ce bruit comprime donc la sphère de Bloch et décale l'état initialement au centre de la sphère de Bloch selon l'axe  $\vec{z}$ .

Le coefficient d'amortissement  $\gamma$  comprime les trois axes de la sphère de Bloch d'autant plus qu'il est élevé. On peut conférer au coefficient d'amortissement  $\gamma$  le statut de niveau de bruit de manière similaire avec le niveau de bruit  $p$  des bruits de Pauli, car plus le coefficient  $\gamma$  est grand plus la sphère de Bloch est compressée. Pour le bruit thermique un deuxième paramètre peut aussi avoir le statut d'un niveau de bruit. En effet, la température de bruit  $T$  est connue en traitement de l'information pour être liée à la dégradation des signaux. En effet, habituellement, plus la température est élevée plus le signal étudié est dégradé. La température

est donc considérée communément comme un niveau de bruit. La probabilité  $p$ , qui est comme on l'a vu en relation monotone avec la température  $T$  du bain thermique, pourra donc constituer aussi une mesure pertinente pour le niveau du bruit thermique.

Dans la suite, ces modèles de bruit quantique pour le qubit, vont nous servir de manière centrale, pour étudier des processus interprétables comme du traitement du signal quantique en présence de bruit.



# Chapitre 3

## Détection d'états quantiques

Nous nous intéressons dans ce chapitre à une tâche de traitement du signal qu'est la détection en présence de bruit. Classiquement, il a été montré que le bruit pouvait être, sous certaines conditions, utile à des tâches de détection classique [47, 49–52, 90–96] via des effets de résonance stochastique. Nous allons étendre les investigations de la résonance stochastique à la détection quantique.

Nous considérons ici une tâche fondamentale du traitement du signal et de la communication quantique consistant en la discrimination (la détection) entre deux états possibles d'un système quantique bruité [5, 97–99]. Nous nous intéressons dans ce chapitre à la détection d'états sur un qubit. Le qubit sert de porteur de l'information du choix entre les deux états possibles. Le signal porteur de l'information est dégradé par un bruit quantique présenté dans la section 2.3.3. Puis, une mesure sur le signal permet de décider entre les deux états initiaux possibles. De tels processus de détection d'états quantiques sont réalisés expérimentalement, par exemple par [100, 101], et montrent la présence de bruit dégradant les processus étudiés.

Nous allons montrer qu'il existe des régimes de comportement non monotone de la probabilité d'erreur de détection en fonction du niveau de bruit. Ces comportements constituent des comportements non standards de l'évolution de cette mesure de performance. Le comportement standard pour une mesure de performance serait une dégradation monotone avec l'augmentation du niveau de bruit. Nous allons montrer ici la possibilité de comportements non standards où la performance ne se dégrade pas de façon monotone avec l'augmentation du niveau de bruit. Cette étude d'effets de bruit utile en détection quantique a fait l'objet dans le cadre de cette thèse d'un article dans une revue scientifique internationale [102].

Dans un second temps nous allons nous intéresser à l'effet de la propriété d'intrication sur un protocole de détection d'états quantiques. En particulier, nous allons étudier son application pour l'imagerie binaire quantique. Cette étude sur l'effet de l'intrication pour la détection d'états quantiques a fait l'objet dans le cadre de cette thèse d'une présentation lors d'un colloque national [103].

### 3.1 Discrimination entre deux états quantiques

Nous utilisons la théorie de la détection quantique introduite dans [5]. Considérons l'espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2. Dans un tel espace, un qubit peut être représenté par un opérateur densité  $\rho$ . Le qubit peut être préparé sous deux hypothèses différentes  $H_0$  ou  $H_1$ . Sous l'hypothèse  $H_0$ , le qubit est préparé dans l'état quantique d'opérateur densité  $\rho = \rho_0$  sur  $\mathcal{H}_2$ . Cette hypothèse  $H_0$  a une probabilité a priori  $P_0$  de se produire. Sous l'hypothèse  $H_1$ , le qubit est préparé dans l'état quantique d'opérateur densité  $\rho = \rho_1$  sur  $\mathcal{H}_2$ . Cette hypothèse  $H_1$  a une probabilité a priori  $P_1$  de se produire. Ces deux hypothèses étant les seules possibles on a donc

$$P_1 = 1 - P_0. \quad (3.1)$$

Nous pouvons considérer le cas où  $P_0 \leq P_1$  sans perte de généralité, car dans le cas contraire il suffit d'inverser la dénomination des états d'opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  afin de retrouver  $P_0 \leq P_1$ . On peut remarquer que la condition générale  $P_0 \leq P_1$  implique  $0 \leq P_1 - P_0 \leq 1$ . Nous utiliserons ici la représentation de Bloch définie par l'Éq. (2.23) avec les vecteurs de Bloch  $\vec{r} = \vec{r}_0$  et  $\vec{r} = \vec{r}_1$  de  $\mathbb{R}^3$  pour respectivement les opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$ .

À partir d'une mesure du qubit d'opérateur densité  $\rho$ , nous devons alors décider si le qubit a été préparé initialement dans l'état d'opérateur densité  $\rho_0$  ou  $\rho_1$ . Pour ce faire, il convient de mesurer le qubit avec un POVM comprenant deux opérateurs, car nous cherchons à obtenir deux résultats différenciant les deux états initiaux d'opérateur densité  $\rho_0$  ou  $\rho_1$  de la préparation. Le qubit est donc mesuré grâce à deux opérateurs de mesures  $M_0$  et  $M_1$ . Ces opérateurs peuvent être vus comme les deux opérateurs d'un POVM et ils réalisent une décomposition de l'identité sur l'espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2, et respectent donc l'équation

$$M_0 + M_1 = \mathbf{I}_2. \quad (3.2)$$

Pour une mesure sur le qubit effectuée à l'aide des deux opérateurs de mesures  $M_0$  et  $M_1$ , le détecteur prendra une décision  $D_0$  ou  $D_1$ . Le détecteur prenant les décisions  $D_0$  ou  $D_1$  décidera que l'état initial était respectivement décrit par l'opérateur densité  $\rho_0$  ou  $\rho_1$ . Une mesure de la performance du processus de détection est alors la probabilité d'erreur de détection

$$P_{\text{er}} = \Pr\{D_1|H_0\}P_0 + \Pr\{D_0|H_1\}P_1. \quad (3.3)$$

L'Éq. (3.3) est valable pour des processus de détection classiques et quantiques. Dans l'Éq. (3.3) la probabilité conditionnelle  $\Pr\{D_1|H_0\}$  est la probabilité de mesurer le qubit avec l'opérateur  $M_1$  s'il a été initialement préparé dans l'état d'opérateur densité  $\rho_0$ . La probabilité conditionnelle  $\Pr\{D_0|H_1\}$  de l'Éq. (3.3) est la probabilité de mesurer le qubit avec l'opérateur  $M_0$  s'il a été initialement préparé dans l'état d'opérateur densité  $\rho_1$ . En quantique, à partir de la définition de l'opérateur  $\text{Tr}(\cdot)$  à l'Éq. (2.12), cette probabilité conditionnelle s'écrit

$$\Pr\{D_1|H_0\} = \text{Tr}(M_1\rho_0). \quad (3.4)$$

L'Éq. (3.4) marque la transition d'un formalisme commun pour les phénomènes classiques et les phénomènes quantiques à un formalisme purement quantique. De la même manière, la probabilité conditionnelle  $\Pr\{D_0|H_1\}$  devient avec le formalisme quantique

$$\Pr\{D_0|H_1\} = \text{Tr}(M_0\rho_1). \quad (3.5)$$

Les Éqs. (3.4) et (3.5) montrent que la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$  de l'Éq. (3.3) est une fonction des opérateurs de mesure  $M_0$  et  $M_1$ . Il convient alors de choisir ces opérateurs de mesure  $M_0$  et  $M_1$  afin de minimiser la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$ . Le processus de détection est donc optimisé lorsque la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$  est minimale.

Nous allons maintenant chercher les opérateurs de mesure minimisant la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$ . Afin de trouver l'opérateur de mesure  $M_1^{\text{opt}}$  optimal, on calcule la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$  en fonction de l'opérateur  $M_1$ , en injectant les Éqs. (3.4) et (3.5) dans l'Éq. (3.3) :

$$P_{\text{er}} = \text{Tr}(\rho_0 M_1)P_0 + \text{Tr}(\rho_1 M_0)P_1. \quad (3.6)$$

D'après l'Éq. (3.2) on a  $M_0 = \mathbf{I}_2 - M_1$  ce qui nous donne :

$$P_{\text{er}} = \text{Tr}[\rho_0 M_1 P_0 + \rho_1 (\mathbf{I}_2 - M_1)P_1]. \quad (3.7)$$

Avec l'Éq. (3.1), de par la linéarité de la trace, on obtient alors

$$P_{\text{er}} = P_1 - \text{Tr}[(P_1\rho_1 - P_0\rho_0)M_1]. \quad (3.8)$$

On définit alors l'opérateur hermitien de test

$$T = P_1\rho_1 - P_0\rho_0, \quad (3.9)$$

qui devient dans la représentation de Bloch :

$$T = \frac{1}{2} [(P_1 - P_0)\mathbf{I}_2 + \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma}], \quad (3.10)$$

caractérisé par le vecteur de test

$$\vec{\tau} = P_1\vec{r}_1 - P_0\vec{r}_0 = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^\top \quad (3.11)$$

de  $\mathbb{R}^3$ . De par le statut de probabilité des variables  $P_0$  et  $P_1$  le vecteur de test  $\vec{\tau}$  de l'Éq. (3.11) appartient à la boule de Bloch, i.e.  $\|\vec{\tau}\| \leq 1$ . Aussi, puisque chacun des trois opérateurs de Pauli est de trace nulle, on a  $\text{Tr}(T) = P_1 - P_0 \geq 0$ .

Par exemple, pour deux vecteurs d'état purs  $|\psi_0\rangle$  et  $|\psi_1\rangle$  orthogonaux, i.e. deux vecteurs de Bloch tels que  $\vec{r}_0 = -\vec{r}_1$ , le vecteur de test  $\vec{\tau}$  est de norme unité. En effet, deux vecteurs d'état orthogonaux ont des vecteurs de Bloch antipodaux et les vecteurs de Bloch d'états purs sont de normes unité.

L'Éq. (3.8) devient dans le cas général

$$P_{\text{er}} = P_1 - \text{Tr}(TM_1). \quad (3.12)$$

Nous cherchons alors l'opérateur de mesure optimal  $M_1^{\text{opt}}$  qui minimise la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}$  de l'Éq. (3.3). Cela est accompli en cherchant l'opérateur de mesure  $M_1^{\text{opt}}$  qui maximise le terme  $\text{Tr}(TM_1)$  de l'Éq. (3.12). On introduit alors la décomposition spectrale de l'opérateur de test  $T$  de l'Éq. (3.9)

$$T = \sum_{n=1}^2 \lambda_n |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|, \quad (3.13)$$

avec les états propres  $|\lambda_n\rangle$  de l'opérateur hermitien de test  $T$  de l'Éq. (3.9) formant une base orthonormale de  $\mathcal{H}_2$ . On obtient alors en utilisant la linéarité de la trace

$$\text{Tr}(TM_1) = \sum_{n=1}^2 \lambda_n \text{Tr}(|\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|M_1). \quad (3.14)$$

Puis, en utilisant la propriété de l'Éq. (2.13), on obtient

$$\text{Tr}(TM_1) = \sum_{n=1}^2 \lambda_n \langle\lambda_n|M_1|\lambda_n\rangle. \quad (3.15)$$

Chaque scalaire  $\langle\lambda_n|M_1|\lambda_n\rangle$  de l'Éq. (3.15) est un réel positif entre 0 et 1, car  $M_1$  est un opérateur positif vérifiant  $0 \leq M_1 \leq \mathbf{I}_2$ . Pour chaque  $n$  la valeur maximale de 1 du scalaire  $\langle\lambda_n|M_1|\lambda_n\rangle$  est atteinte par un opérateur de mesure  $M_1$  étant le projecteur

$$M_1 = |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n| \quad (3.16)$$

sur le sous-espace propre de la valeur propre  $\lambda_n$  engendré par l'état propre  $|\lambda_n\rangle$  de l'opérateur de test  $T$  de l'Éq. (3.9). L'opérateur de mesure  $M_1^{\text{opt}}$  maximisant la partie droite de l'Éq. (3.15) est donc réalisé en sommant les projecteurs  $|\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|$  de rang un pour tous les états propres  $|\lambda_n\rangle$  associés avec une valeur propre positive  $\lambda_n$ , c'est-à-dire

$$M_1^{\text{opt}} = \sum_{\lambda_n > 0} |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|. \quad (3.17)$$

Avec l'opérateur de mesure  $M_1$  de l'Éq. (3.17), la trace  $\text{Tr}(TM_1)$  de l'Éq. (3.15) atteint son maximum de  $\sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n$ . L'opérateur de mesure  $M_1^{\text{opt}}$  est le projecteur sur l'espace des deux ou de l'unique valeur propre positive de l'opérateur de test  $T$  de l'Éq. (3.9). L'opérateur de mesure  $M_0^{\text{opt}} = I_2 - M_1^{\text{opt}}$  est le projecteur complémentaire à  $M_1^{\text{opt}}$  dans  $\mathcal{H}_2$ . Lorsque l'opérateur  $M_1^{\text{opt}}$  mesure le qubit, le détecteur décide alors que le qubit était initialement préparé dans l'état d'opérateur densité  $\rho_1$ . Lorsque l'opérateur  $M_0^{\text{opt}}$  mesure le qubit, le détecteur décide alors que le qubit était préparé dans l'état d'opérateur densité  $\rho_0$ .

La probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$  de l'Éq. (3.3) avec l'opérateur de mesure optimal de l'Éq. (3.17) atteint alors son minimum

$$P_{\text{er}}^{\min} = P_1 - \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n. \quad (3.18)$$

Les valeurs propres  $\lambda_n$  se sommant à

$$\text{Tr}(T) = P_1 - P_0, \quad (3.19)$$

l'Éq. (3.18) devient

$$P_{\text{er}}^{\min} = P_0 - \sum_{\lambda_n < 0} \lambda_n. \quad (3.20)$$

On obtient en combinant les Éqs. (3.18) et (3.20) avec l'Éq. (3.1),

$$P_{\text{er}}^{\min} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{n=1}^2 |\lambda_n| \right), \quad (3.21)$$

$$P_{\text{er}}^{\min} = \frac{1}{2} [1 - \text{Tr}(|T|)]. \quad (3.22)$$

On cherche maintenant les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de l'opérateur de test  $T$  de l'Éq. (3.9). Ces valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  s'écrivent

$$\lambda_1 = \frac{||\vec{\tau}|| + P_1 - P_0}{2}, \quad (3.23)$$

$$\lambda_2 = \frac{-||\vec{\tau}|| + P_1 - P_0}{2} \quad (3.24)$$

associées aux états propres

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + (\tau_z + ||\vec{\tau}||)^2}} [\tau_x^2 + \tau_y^2, -(\tau_x + i\tau_y)||\vec{\tau}|| - (\tau_x + i\tau_y)\tau_z]^\top \quad (3.25)$$

et

$$|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + (\|\vec{\tau}\| - \tau_z)^2}} [\tau_x^2 + \tau_y^2, (\tau_x + i\tau_y)||\vec{\tau}|| - (\tau_x + i\tau_y)\tau_z]^\top \quad (3.26)$$

de  $T$  si  $\{\tau_x, \tau_y\} \neq \{0, 0\}$ . Pour  $\{\tau_x, \tau_y\} = \{0, 0\}$  les vecteurs propres sont alors  $[0 \ 1]^\top$  et  $[1 \ 0]^\top$  et les valeurs propres associées sont celles des Éqs. (3.23) et (3.24).

Afin de connaître le signe des valeurs propres, on utilise le déterminant de l'opérateur de test  $T$  de l'Éq. (3.9) :

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(T) = \frac{1}{4} [(P_1 - P_0)^2 - \|\vec{\tau}\|^2]. \quad (3.27)$$

Il y a donc deux régimes de fonctionnement pour la probabilité d'erreur de détection minimale  $P_{\text{er}}^{\min}$  de l'Éq. (3.22). Le premier régime est réalisé lorsque  $\det(T) < 0$ , c'est-à-dire lorsque  $(P_1 - P_0)^2 < \|\vec{\tau}\|^2$ , la valeur propre positive est alors  $\lambda_1$  de l'Éq. (3.23) et  $\lambda_2$  de l'Éq. (3.24) est alors négative. L'Éq. (3.22) devient donc :

$$P_{\text{er}}^{\min} = \frac{1}{2}(1 - \|\vec{\tau}\|), \text{ quand } \|\vec{\tau}\| \geq P_1 - P_0. \quad (3.28)$$

Dans le régime de fonctionnement de l'Éq. (3.28), on a en particulier  $P_{\text{er}}^{\min} < P_0$ . Dans le second régime vérifiant  $\det(T) \geq 0$ , c'est-à-dire lorsque  $(P_1 - P_0)^2 \geq \|\vec{\tau}\|^2$ , les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont le même signe. De plus, comme  $P_1 - P_0 > 0$  les deux valeurs propres sont positives et se somment à

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(T) = P_1 - P_0. \quad (3.29)$$

Ceci amène avec l'Éq. (3.22) à

$$P_{\text{er}}^{\min} = P_0, \text{ quand } \|\vec{\tau}\| < P_1 - P_0. \quad (3.30)$$

L'Éq. (3.30) décrit un régime où les états  $\rho_0$  et  $\rho_1$  sont trop proches l'un de l'autre pour être distingués par la mesure. Le détecteur optimal possède alors une probabilité d'erreur minimale de  $P_{\text{er}}^{\min} = P_0$ . Cette probabilité d'erreur est atteinte avec un opérateur de mesure optimal  $M_1^{\text{opt}} = I_2$  qui se réalise avec une probabilité de 1 et décide toujours que le qubit initial était dans l'état d'opérateur densité  $\rho_1$ , car il projette sur tout l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2. L'opérateur de mesure  $M_0^{\text{opt}}$  est alors l'application complémentaire dans  $\mathcal{H}_2$  et donc l'application nulle qui se réalise avec une probabilité 0. L'erreur commise par cette stratégie est alors la probabilité a priori  $P_0$  que l'état d'opérateur densité  $\rho_0$  soit préparé.

## 3.2 Détection d'états quantiques avec des bruits unitaux

Nous allons maintenant nous intéresser à la détection à partir d'états quantiques bruités, quand se trouve impliqué un bruit caractérisé explicitement et qui va affecter le qubit sur lequel porte la détection. Et nous allons analyser l'influence des propriétés du bruit quantique sur la performance de détection. Cette détection à partir d'états quantiques bruités constitue une approche spécifique, non explicitement abordée dans la théorie générale de [5]. Nous considérons

donc que le qubit, préparé dans l'état  $\rho = \rho_0$  ou  $\rho = \rho_1$ , n'est pas directement accessible à la mesure, mais qu'il le devient après l'action d'un bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$  modélisé comme à la section 2.3.3. La détection doit donc se faire à partir de l'état bruité  $\mathcal{N}(\rho)$  qui peut se trouver dans l'une ou l'autre des deux configurations.

$$\mathcal{N}(\rho_0) = \rho'_0 \quad (3.31)$$

et

$$\mathcal{N}(\rho_1) = \rho'_1. \quad (3.32)$$

Le détecteur devra donc décider entre un état initial d'opérateur densité  $\rho_0$  ou  $\rho_1$  à partir d'une mesure sur les états bruités d'opérateur densité  $\rho'_0$  ou  $\rho'_1$ . Le vecteur de test  $\vec{\tau}$  de l'Éq. (3.11) devient après action d'un bruit modélisé par l'Éq. (2.52)

$$\vec{\tau}' = A\vec{\tau} + (P_1 - P_0)\vec{c} = [\tau'_x, \tau'_y, \tau'_z]^\top. \quad (3.33)$$

Ce bruit a pour effet de compresser la boule de Bloch à travers la matrice  $A$ , et de déplacer le centre de la boule de Bloch à travers le vecteur  $\vec{c}$ . L'évolution de la performance  $P_{\text{er}}^{\min}$  du détecteur optimal des Éqs. (3.28) et (3.30) avec l'évolution du niveau d'un bruit quelconque est contrôlée par l'évolution de la norme  $\|\vec{\tau}'\|$  du vecteur de test bruité  $\vec{\tau}'$  de l'Éq (3.33).

Nous allons considérer pour commencer les bruits de Pauli, qui se caractérisent en particulier par  $\vec{c} = \vec{0}$ . Un bruit de Pauli, étant un bruit unital, il compresse la boule de Bloch d'autant plus que le niveau du bruit est élevé. Un bruit de Pauli a donc pour effet de diminuer la norme  $\|\vec{\tau}'\|$  d'autant plus que le niveau de bruit augmente. Or d'après l'Éq. (3.28) la probabilité d'erreur minimale  $P_{\text{er}}^{\min}$  évolue de façon opposée à la norme  $\|\vec{\tau}'\|$ . Une augmentation du niveau de bruit  $p$  faisant décroître la norme  $\|\vec{\tau}'\|$ , elle implique aussi une augmentation de la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{\min}$ . On a alors pour un bruit de Pauli, mais aussi pour tous bruits unitaux, une dégradation de la performance du processus de détection avec l'augmentation du niveau de bruit.

Pour deux états  $\rho_0$  et  $\rho_1$  à détecter, la performance de détection est complètement déterminée par le vecteur de test  $\vec{\tau}$  tel qu'il résulte des deux états à détecter. Dans les illustrations des Figs. 3.1–3.4, on montrera ainsi l'impact sur la performance des deux états à détecter via leur vecteur de test  $\vec{\tau}$ . Les illustrations des Figs. 3.1–3.4 sont obtenues avec des vecteurs de Bloch  $\vec{r}_1 = \vec{n}$  et  $\vec{r}_0 = -\vec{n}$ , avec  $\vec{n}$  un vecteur unitaire arbitraire de  $\mathbb{R}^3$ . Le vecteur de test  $\vec{\tau}$  de l'Éq. (3.11) est alors égal au vecteur  $\vec{n}$ . Les deux vecteurs de Bloch antipodaux  $\vec{r}_0$  et  $\vec{r}_1$  représentent les états initiaux  $\rho_0$  et  $\rho_1$  qui sont deux états purs orthogonaux de l'espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}_2$ . Ces deux états pourraient être distingués sans erreur sans l'action du bruit. L'action du bruit peut induire comme montré dans cette section une probabilité d'erreur non nulle.

La Fig. 3.1 montre l'évolution de la probabilité d'erreur minimale  $P_{\text{er}}^{\min}$  en fonction du niveau de bruit  $p$  pour différents bruits de Pauli. Les illustrations de la Fig. 3.1 sont obtenues avec le vecteur de test  $\vec{\tau}$  prenant une valeur différente pour chaque illustration ( $\vec{\tau} = [0.8, 0, 0.6]^\top$  à gauche et  $\vec{\tau} = [0.8, 0, 0.3]^\top$  à droite).

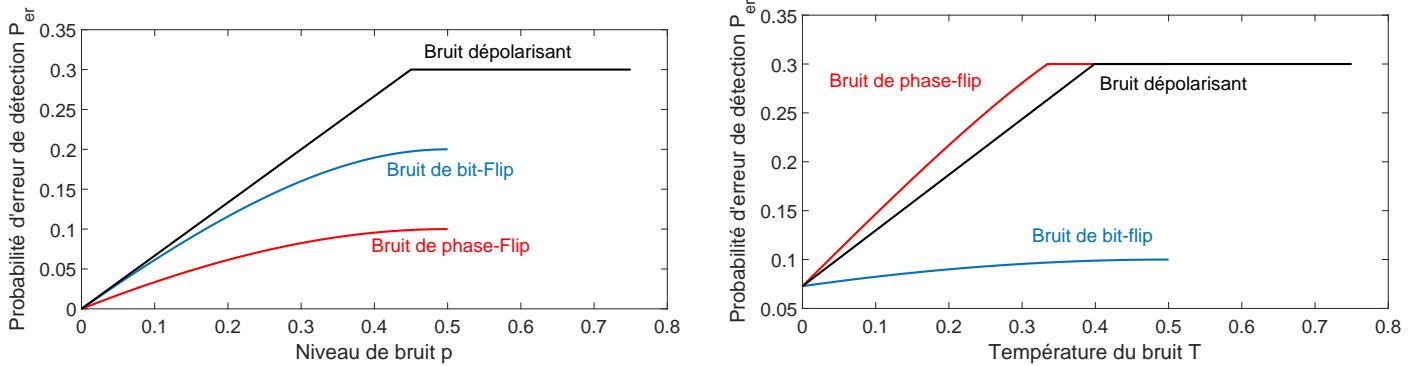


FIGURE 3.1 – Comportement croissant attendu de la probabilité d'erreur de détection  $P_{er}$  des Éqs. (3.28) et (3.30) avec l'augmentation d'un niveau de bruit  $p$  pour différents bruits unitaux communs. À gauche, un vecteur de test  $\vec{r} = [0.8, 0, 0.6]^\top$ , pour une probabilité a priori  $P_0 = 0.3$ . À droite, un vecteur de test  $\vec{r} = [0.8, 0, 0.3]^\top$ , pour une probabilité a priori  $P_0 = 1/2$ . Pour ces bruits communs la performance du processus de détection quantique est moindre lorsque le niveau du bruit  $p$  est plus élevé.

La Fig. 3.1 montre que l'action du bruit peut induire une probabilité d'erreur  $P_{er}^{\min}$  non nulle. De plus, on constate une augmentation de la probabilité d'erreur  $P_{er}$  de l'Éq. (3.28) avec une augmentation du niveau de bruit  $p$ . La performance du processus de détection quantique est donc moindre avec l'augmentation du niveau de bruit  $p$ , ce qui est un comportement standard pour une mesure de performance.

### 3.3 Détection d'états quantiques aidée par un bruit thermique

Le bruit thermique défini dans la section 2.3.3 par l'équation

$$\vec{r}' \longmapsto A\vec{r}' + \vec{c} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix} \vec{r}' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2p-1)\gamma \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

a un comportement différent de celui des bruits de Pauli, le bruit thermique n'étant pas un bruit unital. Nous allons étudier ici l'évolution de la performance lorsque le bruit affectant le processus de détection quantique est un bruit thermique. Le coefficient d'amortissement  $\gamma$  est un coefficient d'interaction entre le qubit et un bain thermique. Plus ce coefficient  $\gamma \in [0, 1]$  est élevé, plus grande sera l'influence du bain thermique sur le qubit. La probabilité  $p$  dépend de la température  $T$  du bain thermique à travers l'Éq. (2.74). De l'Éq. (2.74), on déduit que la probabilité  $p$  est une fonction décroissante en fonction de la température  $T$ . Nous nous intéresserons dans cette section à l'étude de l'évolution de la probabilité d'erreur de détection  $P_{er}$  en fonction de la température de bruit  $T$ .

L'étude de l'évolution du carré de la norme

$$\|\vec{r}'\|^2 = \sqrt{(1-\gamma)(\tau_x^2 + \tau_y^2) + [(1-\gamma)\tau_z + (P_1 - P_0)(2p-1)\gamma]^2} \quad (3.35)$$

est équivalente pour connaître le sens de variation de la norme  $\|\vec{\tau}'\|$  de l'Éq. (3.35) à l'étude de l'évolution de la norme elle-même. Nous nous intéresserons donc au carré de cette norme dans la suite. Pour le bruit thermique, l'influence de la température est portée uniquement par la composante  $\tau'_z$  de l'Éq. (3.33) via le paramètre  $p$  de l'Éq. (2.74). On a alors :

$$\tau_z'^2 = [(1 - \gamma)\tau_z + (P_1 - P_0)(2p - 1)\gamma]^2. \quad (3.36)$$

Cette composante  $\tau_z'^2$  de l'Éq. (3.36) est une parabole en forme de  $\cup$  de variable  $p$ . Le minimum de cette parabole est 0 et est réalisé lorsque

$$(1 - \gamma)\tau_z = -(P_1 - P_0)(2p - 1)\gamma, \quad (3.37)$$

pour une valeur critique  $p_c$ , limitée par la condition  $p \in [1/2, 1]$  déduite à partir de la condition sur la température  $T \in [0, \infty[$  de l'Éq. (2.74) :

$$p_c = \frac{1}{2}(1 - \alpha_c), \quad (3.38)$$

avec le paramètre scalaire

$$\alpha_c = \frac{1}{P_1 - P_0} \frac{1 - \gamma}{\gamma} \tau_z. \quad (3.39)$$

Pour des probabilités inégales  $P_0 \neq P_1$ , l'évolution de  $\tau_z'^2$  de l'Éq. (3.36), et par conséquent de la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  des Éqs. (3.28) et (3.30), avec la température  $T$  va se faire à partir d'une valeur pour une température  $T = 0$  et une probabilité  $p = 1$  déterminée par l'Éq. (3.36) :

$$\tau_z'^2(T = 0) = [(1 - \gamma)\tau_z + (P_1 - P_0)\gamma]^2. \quad (3.40)$$

L'Éq. (3.40) fixe la valeur de  $P_{\text{er}}^{\min}(T = 0)$ . L'évolution de  $\tau_z'^2$  se fait jusqu'à une valeur pour une température  $T = \infty$  et une probabilité 1/2 donnant

$$\tau_z'^2(T = \infty) = [(1 - \gamma)\tau_z]^2 \quad (3.41)$$

fixant la valeur de  $P_{\text{er}}^{\min}(T = \infty)$ . On peut alors avoir selon les conditions soit  $P_{\text{er}}^{\min}(T = 0) < P_{\text{er}}^{\min}(T = \infty)$ , qui est une évolution naturelle de la performance qui se détériore avec l'augmentation du niveau de bruit. Mais le contraire  $P_{\text{er}}^{\min}(T = 0) > P_{\text{er}}^{\min}(T = \infty)$  est aussi possible montrant le rôle bénéfique du bruit pour le processus de détection, lorsque la performance à une température de bruit tendant vers l'infini  $T = \infty$  est meilleure qu'à une température de bruit nulle  $T = 0$ . Nous allons maintenant analyser les trois régimes possibles de l'évolution de la performance  $P_{\text{er}}^{\min}$  des Éqs. (3.28) et (3.30) entre les deux valeurs extrêmes de température  $T = 0$  et  $T = \infty$ .

Pour les illustrations des Figs. 3.2-3.4 nous prendrons les valeurs de différence d'énergie  $E_1 - E_0 = 1$  et des unités où  $k_B = 1$ .

### 3.3.1 Probabilité d'erreur croissante

Dans l'Éq. (3.39), la condition  $\alpha_c \geq 0$  est obtenue par  $\tau_z \geq 0$ . Cette condition produit dans l'Éq. (3.38) une valeur critique du niveau de bruit  $p_c \leq 1/2$  précédent l'intervalle  $[1/2, 1] \ni p$ . Dans une telle configuration la parabole en forme de  $\cup$  de  $\tau_z'^2$  de l'Éq. (3.36) croît lorsque  $p$  croît dans  $[1/2, 1]$ . Cela est équivalent à une probabilité de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  de l'Éq. (3.28) qui croît avec l'augmentation de la température  $T$ . La performance du processus de détection se dégrade donc avec l'augmentation du niveau de bruit quantifié par la température de bruit  $T$ . Cela est le comportement attendu pour une mesure de performance qui se dégrade lorsque la température du bruit thermique augmente. La condition  $\alpha_c \geq 0$  assure un tel régime de croissance de la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}$ . Cette condition  $\alpha_c \geq 0$  est assurée pour la moitié de la sphère de Bloch représentée par  $\tau_z \geq 0$ . Ce régime est illustré avec la Fig. 3.2.

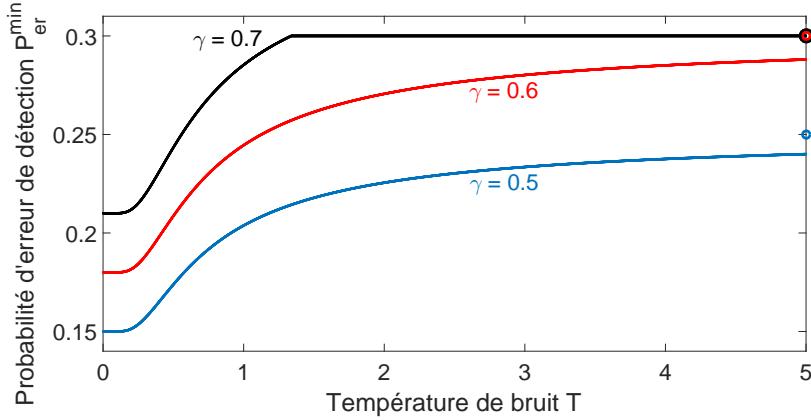


FIGURE 3.2 – Probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  des Éqs. (3.28) et (3.30) croissante avec l'augmentation de la température de bruit  $T$  de l'Éq (2.74), pour un vecteur de test  $\vec{\tau} = [0, 0, 1]^T$ , avec la probabilité a priori  $P_0 = 0.3$  à différentes valeurs de l'amortissement  $\gamma$ . Dans ce régime la performance du processus de détection quantique se dégrade lorsque la température de bruit  $T$  augmente. Les cercles ( $\circ$ ) sont les valeurs asymptotiques  $P_{\text{er}}^{\min}(T = \infty)$ .

### 3.3.2 Probabilité d'erreur résonante

Dans l'Éq. (3.39) une valeur du paramètre scalaire  $\alpha_c$  dans l'intervalle  $]-1, 0[$  donne dans l'Éq. (3.38) une valeur critique  $p_c$  interne à l'intervalle  $[1/2, 1] \ni p$ . Dans une telle configuration, lorsque  $p$  augmente la parabole en forme de  $\cup$  de  $\tau_z'^2$  de l'Éq. (3.36) passe par son minimum en  $p = p_c \in ]1/2, 1[$ . La probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  de l'Éq. (3.28) évolue alors en forme de  $\cap$  lorsque la température  $T$  augmente de 0 à  $\infty$ . En particulier, la valeur maximale de  $P_{\text{er}}$  correspondant au zéro de  $\tau_z'^2$ , est réalisée pour une température  $T_c$  reliée à  $p = p_c$  via l'Éq. (2.74). Un tel régime est obtenu avec des conditions garantissant  $\alpha_c \in ]-1, 0[$ , ce qui, dans l'Éq. (3.39), requiert  $\tau_z < 0$ , et des valeurs appropriées de l'amortissement  $\gamma$  ainsi que de la différence  $P_1 - P_0$ . Ce régime est illustré sur la Fig. 3.3.

Cette évolution résonante est une propriété non standard du bruit thermique. Dans un tel régime il existe une valeur ou un intervalle de valeurs de température  $T$  pour lesquels le bruit est maximalement néfaste au processus de détection. Il existe donc des températures de bruit

$T$  plus faibles, mais aussi plus élevées, qui sont plus favorables au processus de détection. Un tel phénomène où un niveau de bruit plus élevé est plus favorable au processus de détection, peut s'interpréter comme un effet de résonance stochastique. L'existence d'une température de bruit finie où la performance est minimisée peut s'interpréter comme un effet d'antirésonance stochastique.

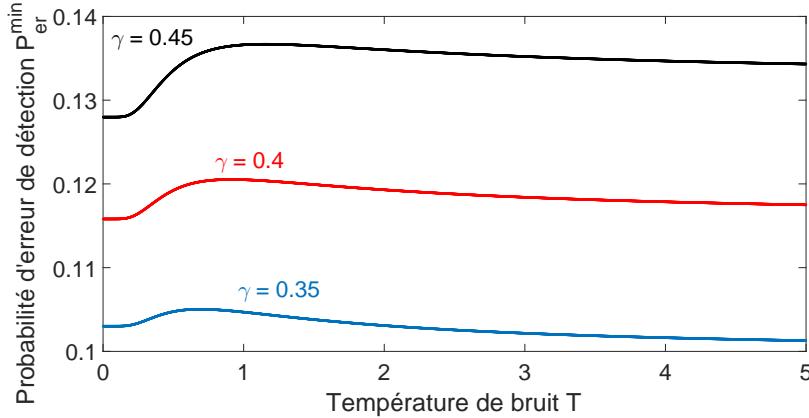


FIGURE 3.3 – Probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  des Éqs. (3.28) et (3.30) résonante avec l'augmentation de la température de bruit  $T$  de l'Éq (2.74), pour un vecteur de test  $\vec{\tau} = [\sqrt{1 - 0.2^2}, 0, -0.2]^T$ , avec la probabilité a priori  $P_0 = 0.2$  à différentes valeurs de l'amortissement  $\gamma$ . La performance du processus de détection quantique est alors au plus faible pour une valeur finie de la température de bruit  $T$ . Pour un niveau de bruit plus faible ou plus élevé la performance est alors meilleure.

### 3.3.3 Probabilité d'erreur décroissante

Dans l'Éq. (3.39) une valeur de  $\alpha_c \leq -1$  donne dans l'Éq. (3.38) une valeur critique  $p_c$  arrivant après l'intervalle  $[1/2, 1] \ni p$ . Dans une telle configuration la parabole en forme de  $\cup$  de  $\tau_z'^2$  de l'Éq. (3.36) décroît lorsque  $p$  augmente dans  $[1/2, 1] \ni p$ . Ceci est équivalent à une probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  de l'Éq. (3.28) qui décroît avec l'augmentation de la température  $T$ . Ce comportement est aussi non standard et montre la possibilité d'un régime où une augmentation du niveau de bruit est toujours profitable au processus de détection. Ce régime montre la possibilité d'un phénomène de bruit utile comme dans la section 3.3.2. Ici, plus la température  $T$  du bruit est élevée, plus la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  est faible. Toutefois, en pratique la température devra être limitée afin de ne pas détériorer le système quantique. Un tel régime décroissant de la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  est obtenue avec la condition  $\alpha_c \leq 1$ , réalisable dans l'Éq. (3.39) avec  $\tau_z < 0$  et des valeurs appropriées de l'amortissement  $\gamma$  ainsi que de la différence  $P_1 - P_0$ . Ce régime est illustré avec la Fig. 3.4.

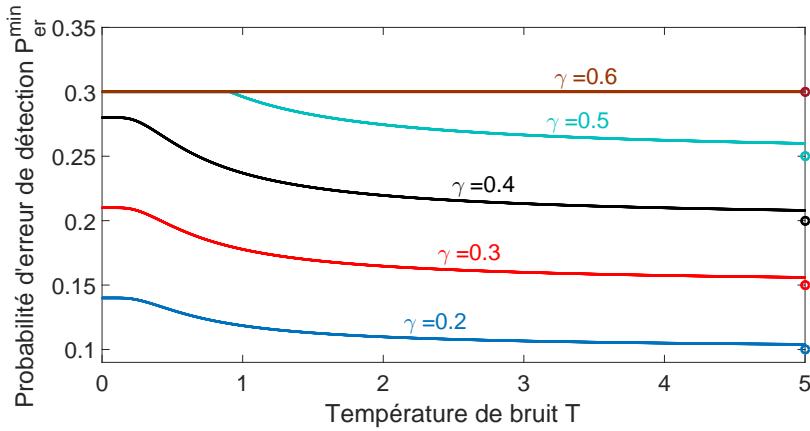


FIGURE 3.4 – Probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  des Éqs. (3.28) et (3.30) décroissante avec l'augmentation de la température de bruit  $T$  de l'Éq (2.74), pour un vecteur de test  $\vec{\tau} = [0, 0, -1]^T$ , avec la probabilité a priori  $P_0 = 0.3$  à différentes valeurs de l'amortissement  $\gamma$ . La performance du processus de détection quantique est ainsi plus élevée lorsque la température de bruit  $T$  augmente. Les cercles ( $\circ$ ) sont les valeurs asymptotiques  $P_{\text{er}}^{\min}(T = \infty)$ .

La Fig. 3.5 représente les trois domaines dans le plan  $(\gamma, \tau_z)$  correspondant aux trois régimes de variation possible de la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  en fonction de la température  $T$  de bruit, contrôlée par la position de  $p_c$  dans l'Éq. (3.38) en relation avec l'intervalle  $[1/2, 1]$ .

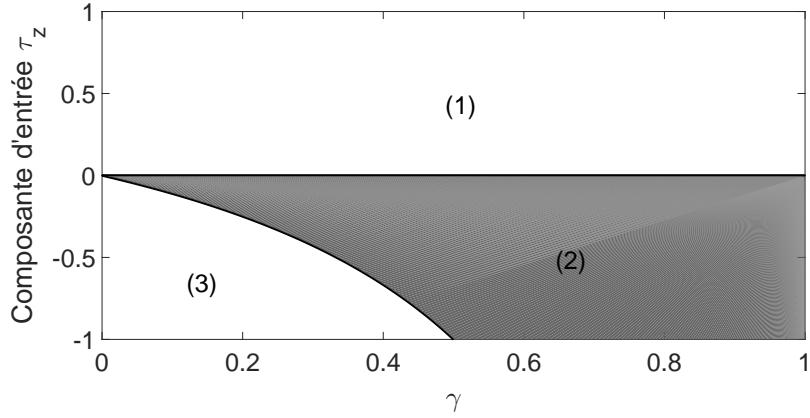


FIGURE 3.5 – Pour  $(\gamma, \tau_z) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ , les trois domaines de variation, en fonction de la température de bruit  $T$ , de la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  de l'Éq. (3.28) avec un bruit thermique. Le domaine (1) est une probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  croissante lorsque  $\tau_z \geq 0$ ; le domaine (2) en gris est une probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  résonante lorsque  $-(P_1 - P_0)(1 - \gamma)/\gamma < \tau_z < 0$ ; le domaine (3) est une probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  décroissante lorsque  $\tau_z \leq -(P_1 - P_0)(1 - \gamma)/\gamma$ . La courbe séparant les domaines (2) et (3) a pour équation  $\tau_z = -(P_1 - P_0)(1 - \gamma)/\gamma$ .

Cette analyse montre en particulier qu'il n'existe pas un quatrième régime de variation, où une probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$  non monotone puisse antirésonner à un mini-

mum pour une température  $T$  critique, identifiant une température non nulle particulièrement bénéfique où la discrimination entre les états d'opérateurs densité  $\mathcal{N}(\rho_0)$  et  $\mathcal{N}(\rho_1)$  serait minimisée. Pour les variations non monotones de la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{\min}$ , il existe seulement des configurations comme montrées sur la Fig. 3.3, où  $P_{\text{er}}^{\min}$  résonne à son maximum pour une température  $T$  critique.

### 3.3.4 Discussion et perspectives sur le phénomène de bruit utile pour la détection quantique

Nous avons montré la possibilité d'évolutions non standards de la performance du processus de détection d'états quantiques. Ceci se produit avec du bruit thermique, pour différentes configurations des deux états  $\rho_0$  et  $\rho_1$  à détecter et selon les paramètres du bruit. Il existe ainsi des conditions, que nous pouvons caractériser avec notre analyse, où une température de bruit plus élevée conduit à une meilleure performance de détection. De telles évolutions non standards illustrent la possibilité de comportements non triviaux du phénomène de décohérence. Le phénomène de décohérence n'est pas forcément toujours néfaste au processus de détection. En effet, il est possible qu'une configuration avec un niveau de bruit supérieur soit plus performante pour la détection d'état sur un qubit bruité. Le phénomène de résonance stochastique améliore ainsi, sous certaines configurations, la détection d'états quantiques. Nous avons ainsi montré qu'un processus de détection quantique pouvait, comme des processus de détection classique [47, 49, 50, 90, 92], profiter de processus de résonance stochastique.

De plus, nous avons montré que les bruits unitaux donnent un comportement standard de la probabilité d'erreur de détection dans le cas que nous avons étudié. En effet, pour un bruit unital, l'augmentation du niveau de bruit conduit toujours à une dégradation de la performance du processus de détection étudié dans ce chapitre.

D'autres mesures de performance sont accessibles au processus de détection comme, par exemple, l'index de détectabilité [104] et le taux de faux positifs [105]. De telles mesures de performance devraient elles aussi être sujettes aux phénomènes de résonance stochastique provoqués par le bruit thermique. En effet, ce bruit favorise la détection de certains états, ce qui serait favorable aussi à ces mesures de performance.

## 3.4 Détection d'états quantiques aidée par l'intrication

### 3.4.1 Présentation de l'intrication quantique pour le traitement du signal

L'étude de l'information quantique donne accès à des phénomènes purement quantiques inaccessibles classiquement pouvant améliorer des processus de traitement du signal quantique comme la détection. En présence de bruit, nous avons montré dans la section précédente les effets de la résonance stochastique pour améliorer la détection d'états quantiques. Une autre propriété utile pour l'information quantique est l'intrication quantique [6, 106]. Cette propriété est exploitée dans plusieurs applications, comme la cryptographie quantique [14, 107] et la téléportation quantique [16]. Des expériences de ghost imaging [108, 109] et d'intrication quantique pour la détection et l'estimation [110–112] ont été réalisées basées sur la propriété d'intrication, montrant la possibilité pour un photon, n'ayant pas interagi avec un objet, de porter une information sur celui-ci grâce à la propriété d'intrication. Nous allons étudier ici l'intérêt d'une exploitation de la propriété d'intrication quantique pour la détection quantique, et spécialement en présence de bruit, ce qui constitue un secteur encore largement ouvert pour l'exploration. Cette étude a fait l'objet d'une présentation lors d'un colloque national [103].

### 3.4.2 Protocole à un photon unique

Nous considérons une situation qui peut se décrire comme un protocole d'imagerie quantique. Un photon sonde à deux états de polarisation, se comportant comme un qubit générique, est envoyé sur une scène à imager afin d'agir comme une sonde. En chaque pixel, le photon sonde interagit avec la scène à imager d'une façon qui peut modifier (ou non) son état de polarisation. Le photon sonde est préparé initialement dans l'état  $|+\rangle$  de  $\mathcal{H}_2$  de l'Eq. (2.37). Ce photon subit ensuite le protocole de la Fig. 3.6.

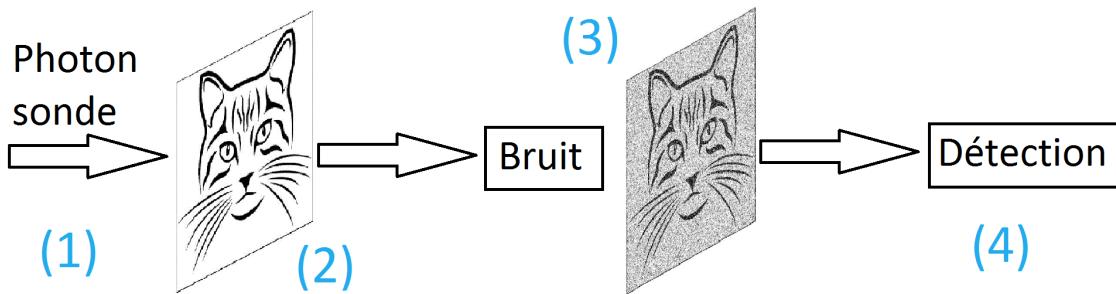


FIGURE 3.6 – Protocole d'imagerie quantique binaire avec un photon unique par pixel. (1) : Un photon est préparé dans un état de référence. (2) : Le photon est ensuite envoyé sur un pixel de la scène à imager avec lequel il va interagir ou non selon la valeur du pixel. (3) : Puis, le photon va subir un bruit dû à l'environnement. (4) : Finalement, une mesure est réalisée sur le photon afin de déduire la valeur du pixel.

Un balayage spatial, de pixel à pixel, du faisceau de photons incidents sur la scène à imager, permet de former une image bidimensionnelle. Dans la suite nous nous concentrerons sur l'inter-

action du photon avec la scène en chaque pixel, puis sa détection, pour la formation de l'image qui se construira par l'assemblage spatial de tels pixels (photons).

On considère une scène à imager à réponse binaire de type objet homogène sur fond homogène. L'interaction d'un photon avec un pixel de l'objet se fait à travers l'opérateur  $\sigma_z$ . Ainsi, lors de la formation de l'image binaire, en chaque pixel le photon :

- reste dans l'état  $|+\rangle$  si le photon interagit avec un pixel du fond.
- est transformé dans l'état

$$\sigma_z|+\rangle = |-\rangle \quad (3.42)$$

de l'Éq. (2.38) si le photon interagit avec un pixel de l'objet.

On a alors les opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  après la formation de l'image :

$$\rho_0 = I_2|+\rangle\langle+|I_2^\dagger = |+\rangle\langle+| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ sur un pixel du fond,} \quad (3.43)$$

$$\rho_1 = \sigma_z|+\rangle\langle+|\sigma_z^\dagger = |-\rangle\langle-| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ sur un pixel de l'objet.} \quad (3.44)$$

Ces deux états donnés par les Éqs. (3.43) et (3.44) sont ainsi les deux états initiaux à distinguer intervenant avec une probabilité  $P_0$  sur un pixel du fond et une probabilité  $P_1$  pour un pixel de l'objet avec

$$P_1 = 1 - P_0. \quad (3.45)$$

Les probabilités a priori  $P_0$  et  $P_1$  s'apparentent aux proportions, respectivement, de pixels de fond et d'objet sur l'image. La probabilité  $P_0$  est ainsi la probabilité que l'on se trouve dans l'hypothèse  $H_0$  où le photon sert à sonder un pixel appartenant au fond. La probabilité  $P_1$  est ainsi la probabilité que l'on se trouve dans l'hypothèse  $H_1$  où le photon sert à sonder un pixel appartenant à l'objet.

Ensuite le photon est affecté par un bruit quantique. Ce bruit modélise l'interaction non contrôlée entre le photon et son environnement. Le bruit, appliqué ici après la formation de l'image et avant la mesure, modélise le bruit agissant sur le qubit lors de chaque étapes du protocole. On choisit ici de considérer un bruit quantique commun, le bruit dépolarisant défini dans la section 2.3.3 par l'équation

$$\rho \longmapsto \mathcal{N}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{3} (\sigma_x\rho\sigma_x^\dagger + \sigma_y\rho\sigma_y^\dagger + \sigma_z\rho\sigma_z^\dagger). \quad (3.46)$$

La probabilité  $p$  sera ainsi le paramètre quantifiant le niveau de bruit.

On a ainsi les opérateurs densité  $\mathcal{N}(\rho_0)$  et  $\mathcal{N}(\rho_1)$  du photon après l'action du bruit dans les deux cas correspondant aux deux valeurs possibles du pixel :

$$\mathcal{N}(\rho_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 - \frac{4}{3}p \\ 1 - \frac{4}{3}p & 1 \end{bmatrix}, \text{ sur un pixel du fond,} \quad (3.47)$$

$$\mathcal{N}(\rho_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3}p - 1 \\ \frac{4}{3}p - 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ sur un pixel de l'objet.} \quad (3.48)$$

Afin d'obtenir les détecteurs optimaux et donc la probabilité d'erreur minimale, on calcule l'opérateur de test  $T$  de l'Éq. (3.9) :

$$T = (1 - P_0)\mathcal{N}(\rho_1) - P_0\mathcal{N}(\rho_0). \quad (3.49)$$

Pour cet opérateur  $T$  on obtient les valeurs propres

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}p - P_0 \quad (3.50)$$

et

$$\lambda_2 = 1 - \frac{2}{3}p - P_0 \quad (3.51)$$

et les vecteurs propres

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = |-\rangle \quad (3.52)$$

et

$$|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = |+\rangle. \quad (3.53)$$

Le photon dans les états  $\mathcal{N}(\rho_0)$  ou  $\mathcal{N}(\rho_1)$  des Éqs. (3.47) et (3.48) est ensuite projeté dans la base orthonormale  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  afin de réaliser la mesure. De par la théorie de la section 3.1 nous savons de plus qu'il s'agit là de la mesure optimale qui minimise la probabilité d'erreur de détection (au moins aux niveaux de bruit pas trop élevés où le détecteur optimal ne décide pas toujours pour l'hypothèse a priori la plus probable). À partir du résultat de cette mesure quantique, le détecteur peut alors prendre une décision binaire afin de déduire la valeur du pixel sondé. La détection du photon dans les états  $|+\rangle$  ou  $|-\rangle$  est décodée respectivement comme un pixel du fond ou un pixel de l'objet. Ces deux possibilités de décodage correspondent respectivement aux décisions  $D_0$  ou  $D_1$ . Cette déduction est cependant rendue imparfaite par la présence de bruit comme montré à la section 3.2. En effet, lors de la mesure on a les probabilités de détection suivantes :

- sur un pixel du fond, le photon décrit par l'Éq. (3.47) est détecté dans l'état  $|+\rangle$  avec une probabilité

$$\langle +|\mathcal{N}(\rho_0)|+\rangle = 1 - \frac{2p}{3} \quad (3.54)$$

et dans l'état  $|-\rangle$  avec une probabilité

$$\langle -|\mathcal{N}(\rho_0)|-\rangle = \frac{2p}{3}. \quad (3.55)$$

- sur un pixel de l'objet, le photon décrit par l'Éq. (3.48) est détecté dans l'état  $|+\rangle$  avec une probabilité

$$\langle +|\mathcal{N}(\rho_1)|+\rangle = \frac{2p}{3} \quad (3.56)$$

et dans l'état  $|-\rangle$  avec une probabilité

$$\langle -|\mathcal{N}(\rho_1)|-\rangle = 1 - \frac{2p}{3}. \quad (3.57)$$

La performance du processus de détection est évaluée par la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}$  de l'Éq. (3.3). Ici, l'erreur de détection est de

$$P_{\text{er}} = \Pr\{D_1|H_0\}P_0 + \Pr\{D_0|H_1\}P_1, \quad (3.58)$$

avec  $H_0$  et  $H_1$  respectivement les hypothèses d'un état initial d'opérateur densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$ . En remplaçant dans l'Éq. (3.58) les probabilités conditionnelles

$$\Pr\{D_1|H_0\} = \langle -|\mathcal{N}(\rho_0)|-\rangle, \quad (3.59)$$

et

$$\Pr\{D_0|H_1\} = \langle +|\mathcal{N}(\rho_1)|+\rangle, \quad (3.60)$$

on obtient

$$P_{\text{er}} = P_{\text{er}}^{(1)} = \langle -|\mathcal{N}(\rho_0)|-\rangle P_0 + \langle +|\mathcal{N}(\rho_1)|+\rangle P_1. \quad (3.61)$$

En remplaçant les Éq. (3.55) et (3.56) dans l'Éq. (3.61) on arrive donc à l'équation

$$P_{\text{er}}^{(1)} = \frac{2p}{3}. \quad (3.62)$$

La probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(1)}$  du détecteur optimal de l'Éq. (3.62) saturera à une probabilité maximale de  $P_{\text{er}}^{(1)} = \min(P_0, P_1)$ , comme prévu par l'Éq. (3.30).

On constate que, comme montré à la section 3.2, une augmentation du niveau de bruit  $p$  entraîne une dégradation de la performance du processus de détection quantique. La Fig. 3.7 représente la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{(1)}$  de l'Éq. (3.62) en fonction du niveau de bruit  $p$  pour le protocole de la Fig. 3.6.

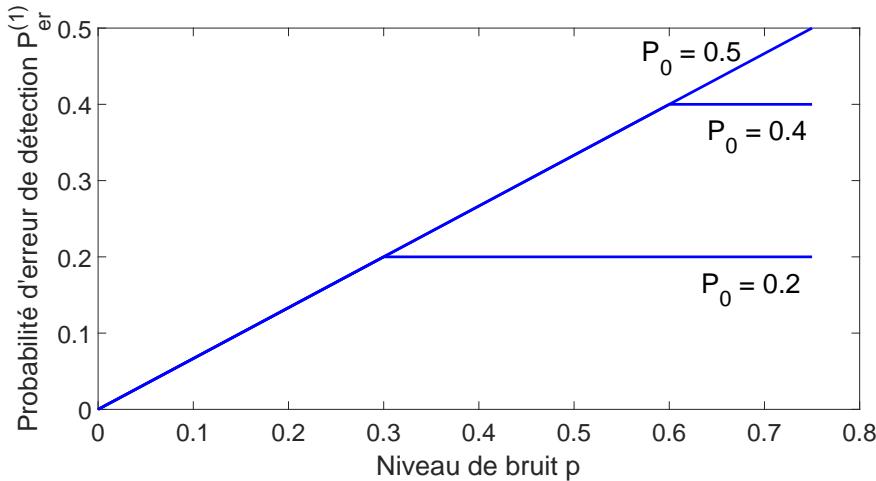


FIGURE 3.7 – Probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{(1)}$  de l'Éq. (3.62) pour le processus de détection avec un bruit dépolarisant de probabilité  $p$  pour différentes valeurs de la probabilité  $P_0$ . La probabilité d'erreur croît de façon linéaire avec l'augmentation de la probabilité du bruit  $p$ .

De façon naturelle, comme dans la section 3.2, l'augmentation du niveau de bruit  $p$  entraîne une augmentation de la probabilité d'erreur de détection  $P_{\text{er}}^{(1)}$  de l'Éq. (3.62).

### 3.4.3 Protocole à une paire de photons intriquée

On s'intéresse maintenant à un protocole utilisant une paire de photons intriquée. Les paires de photons intriquées constituent des systèmes essentiels de l'information quantique, fréquemment mises à profit dans de nombreuses situations, mais dont la maîtrise complète, à la fois expérimentale et théorique, reste encore un enjeu important [11, 16, 19, 113]. Ici, nous allons montrer qu'elles offrent des possibilités contre-intuitives pour améliorer la performance d'un traitement en présence de bruit quantique.

Dans notre protocole, la paire de photons intriquée sera constituée d'un photon sonde et d'un photon auxiliaire. Le photon sonde et le photon auxiliaire sont d'abord intriqués afin de constituer la paire de photons intriquée. La paire de photons intriquée suit ensuite le protocole décrit à la Fig. 3.8.

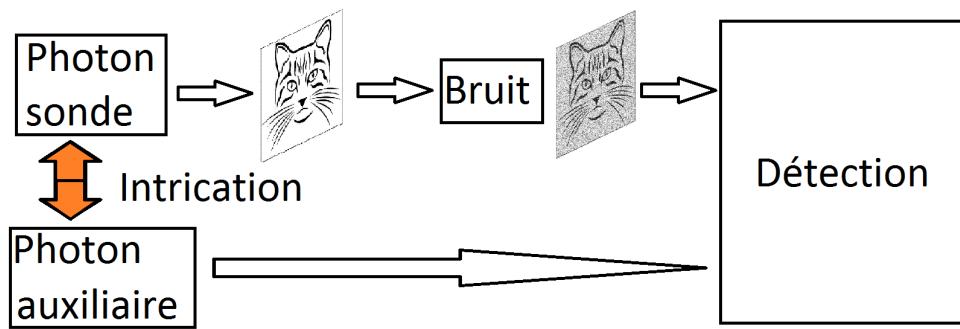


FIGURE 3.8 – Protocole d'imagerie quantique binaire avec une paire de photons intriquée par pixel. Une paire de photons est préparée dans un état intriqué de référence. Le photon sonde est ensuite envoyé sur un pixel de la scène à imager avec lequel il va interagir ou non selon la valeur du pixel. Puis, le photon sonde va subir un bruit dû à l'environnement. Finalement, une mesure est réalisée sur la paire de photons afin de déduire la valeur du pixel sondé. Le photon auxiliaire n'interagit ni avec la scène à imager ni avec le bruit subi par le photon sonde.

L'état initial  $|\psi_0\rangle$  du système à une paire de photons intriquée est choisi comme étant

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\beta_{00}\rangle. \quad (3.63)$$

Cet état  $|\psi_0\rangle$  appartient à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ . Après formation de l'image, l'état du système quantique à une paire de photons intriquée devient :

$$|\psi_0\rangle = (I_2 \otimes I_2)|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\beta_{00}\rangle \text{ avec une probabilité } P_0 \text{ sur le fond}, \quad (3.64)$$

$$|\psi_1\rangle = (I_2 \otimes \sigma_z)|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\beta_{10}\rangle \text{ avec une probabilité } 1 - P_0 \text{ sur l'objet}. \quad (3.65)$$

Ces deux états  $|\psi_0\rangle$  et  $|\psi_1\rangle$  donnés par les Éqs. (3.64) et (3.65) sont ainsi les deux états initiaux à distinguer. Ces états ont une probabilité a priori  $P_0$  sur un pixel du fond pour l'état d'opérateur

densité  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  et une probabilité a priori  $P_1$  lié à  $P_0$  par l'Éq. (3.45) sur un pixel de l'objet pour l'état d'opérateur densité  $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ . La probabilité  $P_0$  est ainsi la probabilité que l'on se trouve dans l'hypothèse  $H_0$  où le photon sert à sonder un pixel appartenant au fond. La probabilité  $P_1$  est ainsi la probabilité que l'on se trouve dans l'hypothèse  $H_1$  où le photon sert à sonder un pixel appartenant à l'objet.

Le photon sonde est ensuite affecté par un bruit dépolarisant selon l'Éq. (3.46), on a alors les opérateurs densité  $\mathcal{N}(\rho_0)$  et  $\mathcal{N}(\rho_1)$  suivants :

$$\mathcal{N}(\rho_0) = (\mathbf{I}_2 \otimes \mathcal{N}) \rho_0 (\mathbf{I}_2 \otimes \mathcal{N})^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3}p & 0 & 0 & 1 - \frac{4p}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}p & 0 \\ 1 - \frac{4p}{3} & 0 & 0 & 1 - \frac{2}{3}p \end{bmatrix}, \text{ sur un pixel du fond } (3.66)$$

$$\mathcal{N}(\rho_1) = (\mathbf{I}_2 \otimes \mathcal{N}) \rho_1 (\mathbf{I}_2 \otimes \mathcal{N})^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3}p & 0 & 0 & -(1 - \frac{4p}{3}) \\ 0 & \frac{2}{3}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}p & 0 \\ -(1 - \frac{4p}{3}) & 0 & 0 & 1 - \frac{2}{3}p \end{bmatrix}, \text{ sur un pixel de l'objet. } (3.67)$$

On calcule alors l'opérateur de test  $T$  de l'Éq. (3.9) qui, pour une paire de photons intriquée, a pour états propres

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |\beta_{00}\rangle, \quad (3.68)$$

$$|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = |\beta_{10}\rangle, \quad (3.69)$$

$$|\lambda_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et} \quad (3.70)$$

$$|\lambda_4\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

La base de mesure du détecteur optimal est alors la base  $\{|\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle, |\lambda_3\rangle, |\lambda_4\rangle\}$ . Sur un pixel du fond, la paire de photons intriquée est dans l'état de l'Éq. (3.66) et les probabilités de mesure sont :

$$\langle \lambda_1 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_1 \rangle = 1 - p, \quad (3.72)$$

$$\langle \lambda_2 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_2 \rangle = \frac{p}{3}, \quad (3.73)$$

$$\langle \lambda_3 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_3 \rangle = \frac{p}{3} \quad (3.74)$$

et

$$\langle \lambda_4 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_4 \rangle = \frac{p}{3}. \quad (3.75)$$

Sur un pixel de l'objet, la paire de photons intriquée est dans l'état de l'Éq. (3.67) et les probabilités de mesure sont :

$$\langle \lambda_1 | \mathcal{N}(\rho_1) | \lambda_1 \rangle = \frac{p}{3}, \quad (3.76)$$

$$\langle \lambda_2 | \mathcal{N}(\rho_1) | \lambda_2 \rangle = 1 - p, \quad (3.77)$$

$$\langle \lambda_3 | \mathcal{N}(\rho_1) | \lambda_3 \rangle = \frac{p}{3} \quad (3.78)$$

et

$$\langle \lambda_4 | \mathcal{N}(\rho_1) | \lambda_4 \rangle = \frac{p}{3}. \quad (3.79)$$

Si on décode les résultats  $|\lambda_1\rangle$  et  $|\lambda_3\rangle$  comme un pixel du fond et  $|\lambda_2\rangle$  et  $|\lambda_4\rangle$  comme un pixel de l'objet, alors on obtient une probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  :

$$P_{\text{er}}^{(2)} = \langle \lambda_2 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_2 \rangle P_0 + \langle \lambda_4 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_4 \rangle P_0 + \langle \lambda_1 | \mathcal{N}(\rho_1) | \lambda_1 \rangle P_1 + \langle \lambda_3 | \mathcal{N}(\rho_1) | \lambda_3 \rangle P_1. \quad (3.80)$$

Cette probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  est identique au cas du photon unique de l'Éq. (3.62)

$$P_{\text{er}}^{(2)} = \frac{2}{3}p. \quad (3.81)$$

Si on interprète les résultats  $|\lambda_1\rangle$  comme un pixel du fond et  $|\lambda_2\rangle$ ,  $|\lambda_3\rangle$  et  $|\lambda_4\rangle$  comme un pixel de l'objet, alors on obtient, pour  $P_1 > P_0$ , c'est-à-dire  $P_0 < 1/2$ , une probabilité d'erreur :

$$P_{\text{er}}^{(2)} = \langle \lambda_1 | \mathcal{N}(\rho_1) | \lambda_1 \rangle P_1 + \langle \lambda_2 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_2 \rangle P_0 + \langle \lambda_3 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_3 \rangle P_0 + \langle \lambda_4 | \mathcal{N}(\rho_0) | \lambda_4 \rangle P_0, \quad (3.82)$$

et donc

$$P_{\text{er}}^{(2)} = \frac{2}{3}p \left( P_0 + \frac{1}{2} \right). \quad (3.83)$$

Pour  $P_0 < 1/2$  on obtient ainsi une probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  de l'Éq. (3.83) inférieure à celle pour un photon unique de l'Éq. (3.62) quelle que soit la valeur du niveau de bruit  $p$ . Pour  $P_0 \geq 1/2$  cette amélioration reste valable, il suffit d'échanger les dénominations relatives aux états d'opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$ .

La Fig. 3.9 représente les probabilités d'erreur minimales  $P_{\text{er}}$  des Éqs. (3.62) et (3.83) en fonction du niveau de bruit  $p$ .

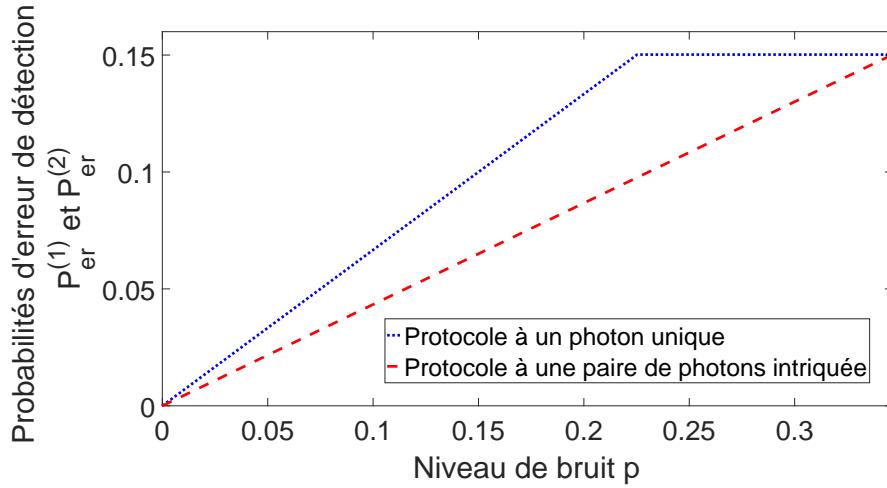


FIGURE 3.9 – Probabilités d'erreur de détection minimales  $P_{\text{er}}^{(1)}$  et  $P_{\text{er}}^{(2)}$  en fonction du niveau de bruit  $p$  pour un bruit dépolarisant, pour le protocole à un photon unique (3.62) (ligne en pointillés) et celui à une paire de photons intriquée (3.83) (ligne en tirets). Cette figure est réalisée pour une probabilité  $P_0 = 0.1502$  correspondant à l'image bruitée sur la Fig. 3.11.

On constate sur la Fig. 3.9 que la propriété d'intrication permet toujours une amélioration du processus de détection d'états quantiques. En effet, le protocole à une paire de photons intriquée possède une probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  de l'Éq. (3.83) inférieure à celle de l'Éq. (3.62) du protocole à un photon unique.

La Fig. 3.10 représente le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  des probabilités d'erreur des protocoles à un photon unique et à une paire de photons intriquée respectivement des Éqs. (3.62) et (3.83) en fonction de la probabilité  $P_0$ .

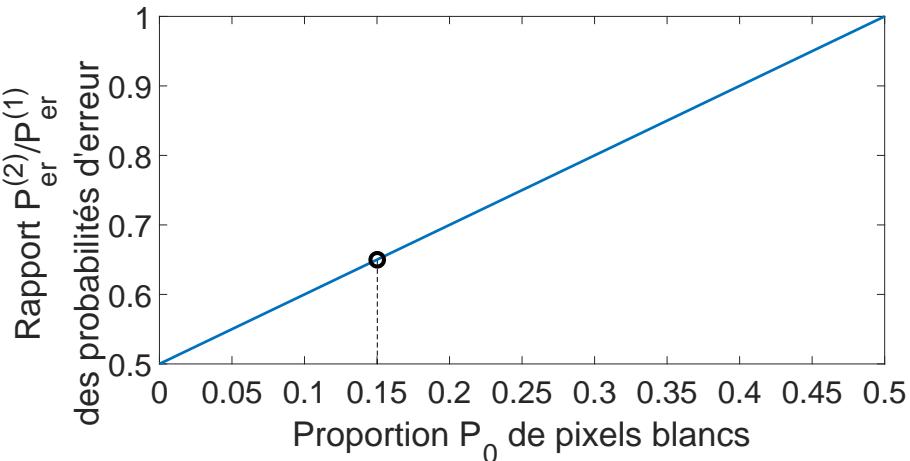


FIGURE 3.10 – Rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  entre les probabilités d'erreur des Éqs. (3.83) et (3.62) en fonction de la probabilité  $P_0$ , indépendant du niveau de bruit  $p$ . La probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  du protocole à une paire de photons intriquée est toujours inférieure à celle  $P_{\text{er}}^{(1)}$  du protocole à un photon unique. Le cercle indique le cas correspondant à l'image bruitée sur la Fig. 3.11.

La figure 3.10 permet de constater que le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  est toujours inférieur à 1. On peut donc en conclure que la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  avec le protocole à une paire de photons intriquée est toujours inférieure à la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(1)}$  avec le protocole à un photon unique. La probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  est jusqu'à deux fois inférieure quand  $P_0$  tend vers 0. Ainsi, bien que le photon auxiliaire n'interagisse jamais avec la scène à imager ni avec le bruit, la proportion de pixels erronés  $P_{\text{er}}^{(2)}$  de l'Éq. (3.83) est inférieure avec le protocole à une paire de photons intriquée par rapport à celle de l'Éq. (3.62) pour un protocole à un photon unique.

La Fig. 3.11 représente une image binaire de probabilité  $P_0$  de trouver un pixel à 0 (proportion  $P_0$  de pixels noirs). Cette même image a été acquise par nos deux protocoles d'imagerie quantique des Figs. 3.6 et 3.8.

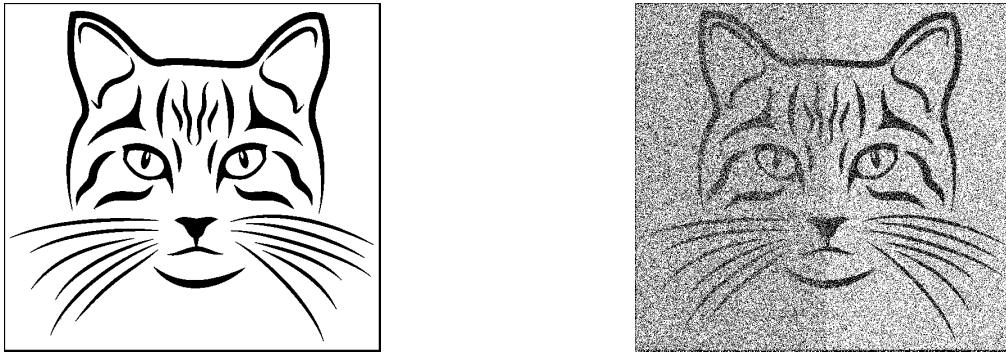


FIGURE 3.11 – L'image de gauche est une image binaire avec une proportion de pixels à 0 (pixels noirs) de  $P_0 = 0.1502$ . L'image de droite est la même image binaire, bruitée avec un bruit dépolarisant de niveau de bruit  $p = 1/2$ , acquise par un photon unique (moitié gauche) de probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(1)} = 0.3333$  et par une paire de photons intriquée (moitié droite) de probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)} = 0.2167 < P_{\text{er}}^{(1)}$ .

On peut voir sur la Fig. 3.11 qu'une image acquise avec le protocole à une paire de photons intriquée est plus fidèle à l'image non bruitée que l'image acquise par un protocole à un photon unique. Le protocole à une paire de photons intriquée est donc pertinent pour l'amélioration de l'imagerie binaire. Ce résultat est surprenant de par le fait que le photon interagissant avec la scène à imager suit, après préparation du système dans un état initial contrôlé, des évolutions identiques pour les deux protocoles. En effet, le photon auxiliaire n'interagit pas avec la scène à imager ni avec le bruit agissant sur le photon sonde, mais sa présence produit toutefois une amélioration nette du processus de détection.

### 3.4.4 Détection d'états quantiques avec un bruit de bit-flip aidée par l'intrication

Nous venons de montrer la possibilité d'exploiter l'intrication quantique afin d'améliorer la performance d'un protocole de détection sur une image binaire bruitée. Le bruit quantique considéré est un bruit très commun en pratique, notamment en photonique, constitué par un bruit dépolarisant. Toutefois, nous visons aussi de pouvoir faire, dans le chapitre 6,

une mise en œuvre expérimentale sur un processeur quantique, de notre présent protocole de détection sur une image binaire bruitée. Pour cela, il nous faudra pouvoir mettre en œuvre expérimentalement un générateur de bruit quantique de propriétés contrôlées. Le processeur quantique que nous utiliserons est limité à 14 qubits. Aussi, nous allons traiter théoriquement ici un deuxième bruit quantique, plus simple (moins coûteux en termes de circuits quantiques) à simuler expérimentalement que le bruit dépolarisant. Il s'agira d'un bruit comparable à un bruit de Pauli de bit-flip par exemple. De plus nous n'avons pas choisi d'utiliser un bruit de Pauli simple, car celui-ci aurait une action dégénérée ne permettant pas de mettre en évidence l'amélioration de la détection quantique par l'intrication.

L'analyse de cette situation avec ce bruit différent apparenté au bit-flip, suit une approche similaire à celle des sections 3.4.2 et 3.4.3 avec le bruit dépolarisant. Cette analyse est détaillée dans l'annexe A. Nous reproduisons ici dans la suite les résultats essentiels de l'annexe A qui serviront de base à la confrontation avec l'expérimentation du chapitre 6.

On obtient ainsi, pour le protocole de détection à un photon unique la probabilité d'erreur, faisant le pendant à l'Éq. (3.62), et donnée par l'Éq. (A.15) de l'annexe A comme

$$P_{\text{er}}^{(1)} = \frac{3p}{4}. \quad (3.84)$$

Pour le protocole de détection à une paire de photons intriquée, la probabilité d'erreur faisant le pendant à l'Éq. (3.83), est donnée par l'Éq. (A.27) de l'annexe A comme

$$P_{\text{er}}^{(2)} = (1 - P_0) \frac{p}{4}. \quad (3.85)$$

La Fig. 3.12 montre une comparaison des probabilités d'erreur des protocoles à un photon unique  $P_{\text{er}}^{(1)}$  et à une paire de photons intriquée  $P_{\text{er}}^{(2)}$  en fonction du niveau de bruit  $p$ .

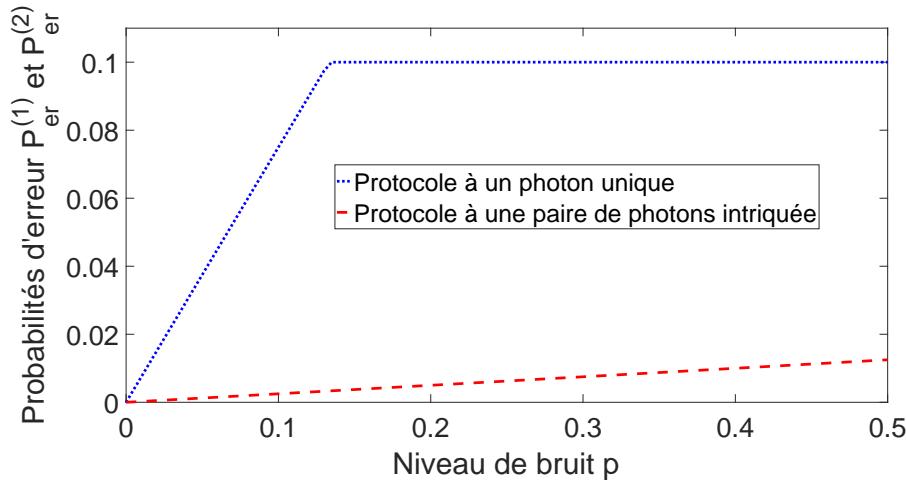


FIGURE 3.12 – Probabilités d'erreur du protocole à une paire de photons intriquée  $P_{\text{er}}^{(2)}$  de l'Éq. (3.85) (ligne en tirets) et d'un protocole à un photon unique  $P_{\text{er}}^{(1)}$  de l'Éq. (3.84) (ligne en pointillés) en fonction du niveau de bruit  $p$  pour un bruit de bit-flip selon l'Éq. (A.2).

Cette comparaison nous permet de remarquer que le protocole à une paire de photons

intriquée a toujours une probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  inférieure à celle du protocole à un photon unique  $P_{\text{er}}^{(1)}$ .

La Fig. 3.13 montre le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  des probabilités d'erreur des Éqs. (3.84) et (3.85) en fonction de la probabilité  $P_0$ .

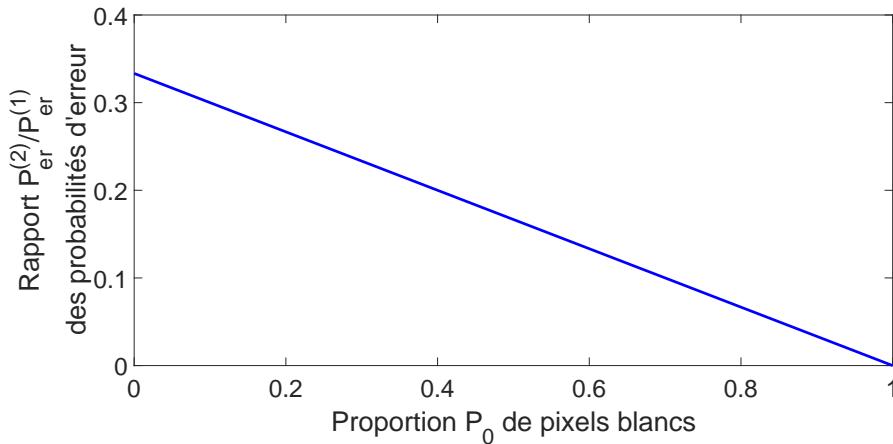


FIGURE 3.13 – Rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  des probabilités d'erreur des Éqs. (3.85) et (3.84) en fonction de la probabilité  $P_0$ , indépendant du paramètre de bruit  $p$ , pour un bruit de bit-flip selon l'Éq. (A.2).

Le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  de ces deux probabilités d'erreur est toujours inférieur à 1 quelle que soit la probabilité  $P_0$ . On peut confirmer à partir de la Fig. 3.13 que la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  pour un protocole à une paire de photons intriquée est toujours inférieure à la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(1)}$  pour un protocole à un photon unique.

Nous avons montré ici que, comme avec le bruit dépolarisant, l'intrication du photon sonde avec un photon auxiliaire qui n'interagit pas avec la scène à imager, permet toujours une amélioration nette de la détection en présence de ce bruit de bit-flip.

### 3.4.5 Discussion et perspectives sur l'apport de l'intrication pour le processus de détection quantique

Nous avons étudié ici un protocole d'imagerie binaire bruitée. Nous avons examiné l'utilisation d'un qubit auxiliaire tirant parti de la propriété d'intrication quantique afin d'améliorer le processus. Nous avons montré que la propriété d'intrication permet bien d'améliorer la performance du processus de détection. En effet, bien que le photon auxiliaire n'interagisse jamais avec la scène à imager ni avec le bruit, il permet d'améliorer la performance de détection. Cette amélioration du processus de détection d'états quantiques pourrait être aussi valable pour d'autres mesures de performance comme l'index de détectabilité [104] et le taux de faux positifs [105].



# **Chapitre 4**

## **Estimation d'état quantique**

Dans cette section, nous nous concentrerons spécifiquement sur la tâche fondamentale de traitement du signal qu'est l'estimation d'un paramètre en présence de bruit. L'estimation d'un paramètre traite de l'exploitation efficace de mesures afin de connaître au mieux les valeurs de quantités physiques d'intérêt.

Pour l'estimation classique, le phénomène de bruit utile ou résonance stochastique a été mis en évidence [54–60, 114–116]. Mais peu d'études ont traité le cas de la résonance stochastique pour l'estimation quantique. Récemment, [75] a montré la possibilité d'un effet de bruit utile pour l'estimation de la norme d'un vecteur de Bloch caractérisant l'état d'un qubit. Nous étendons ici de telles analyses à des phénomènes de résonance stochastique pour l'estimation quantique.

L'étude de la résonance stochastique pour l'estimation quantique a fait l'objet dans le cadre de cette thèse de deux articles dans des revues scientifiques internationales [117, 118].

Dans un second temps nous étudierons l'application de la propriété d'intrication quantique pour l'estimation quantique. En particulier, nous étudierons l'apport de la présence d'intrication quantique pour le processus d'estimation quantique. Cette étude a fait l'objet dans le cadre de cette thèse d'une présentation lors d'un colloque national [119].

## 4.1 Estimation de phase sur un qubit

Nous considérons ici le problème fondamental de métrologie quantique qu'est l'estimation d'une phase  $\xi$  d'un qubit. Ce problème d'estimation de phase a des applications pour, par exemple les horloges atomiques, l'interférométrie et la magnétométrie [120]. Un qubit avec son espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2 est préparé dans un état initial représenté par l'opérateur densité  $\rho_0$  :

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_2 + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma}). \quad (4.1)$$

Les coordonnées de  $\rho_0$  sont spécifiées par le vecteur de Bloch  $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ . Le qubit est ensuite transformé par un opérateur unitaire  $U_\xi$ . Cet opérateur  $U_\xi$  dépend d'un paramètre  $\xi$  inconnu que l'on veut estimer. Le qubit subit ainsi la transformation

$$\rho_1(\xi) = U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger. \quad (4.2)$$

Nous choisirons dans la suite de ce chapitre de nous intéresser à un opérateur  $U_\xi$  définie par l'opérateur unitaire

$$U_\xi = \exp(i\theta) \exp\left(-i\xi \vec{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right), \quad (4.3)$$

où  $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]^\top$  est un vecteur unité connu de  $\mathbb{R}^3$  considéré comme connu. Cet opérateur décrit une transformation générique sur le qubit souvent rencontrée et utile. Deux états quantiques différant par un facteur de phase global  $\exp(i\theta)$  n'étant pas distinguables physiquement, cette phase globale n'a pas d'impact sur le processus d'estimation étudié dans cette section. L'opérateur  $U_\xi$  peut donc s'écrire

$$U_\xi = \exp\left(-i\xi \vec{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right), \quad (4.4)$$

sans perte de généralité. Dans la représentation de Bloch [6] l'opérateur  $U_\xi$  de l'Éq. (4.4) effectue une rotation d'axe  $\vec{n}$  et d'angle  $\xi$  du vecteur de Bloch  $\vec{r}$  du qubit dans  $\mathbb{R}^3$ . L'état transformé  $\rho_1(\xi)$  de l'Éq. (4.2) est spécifié par le vecteur de Bloch  $\vec{r}_1(\xi)$  formé par  $\vec{r}_0$  ayant subi une rotation d'angle  $\xi$  autour de l'axe  $\vec{n}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Il s'agit d'une opération dont une implémentation photonique peut être accomplie par un interféromètre optique, qui pour un photon à deux états de polarisation, laisse invariant un état de polarisation de référence et ajoute un déphasage de  $\xi$  sur l'autre état de polarisation, comme représenté sur la Fig. 4.1. On veut alors estimer le déphasage  $\xi$  de l'interféromètre.

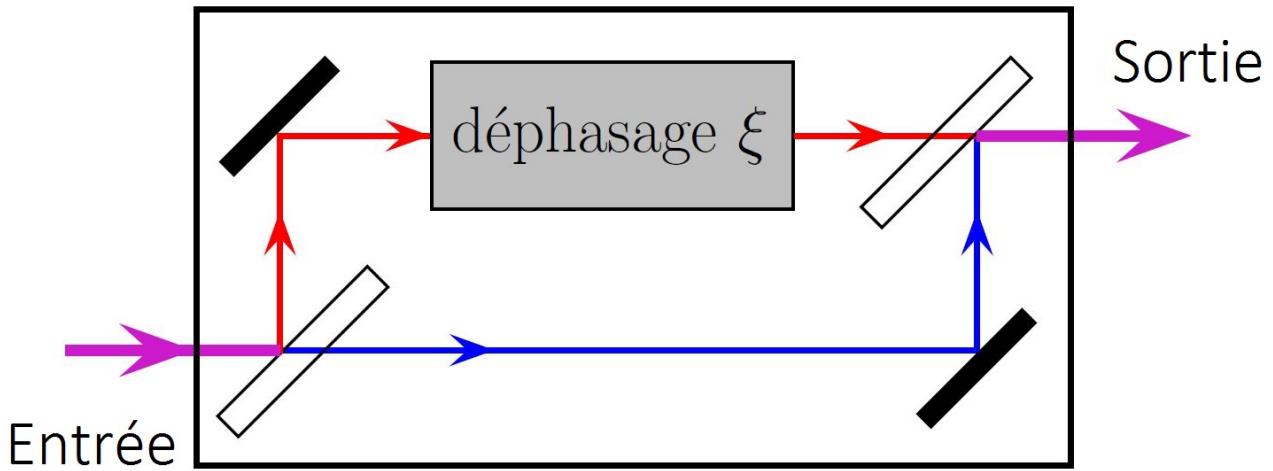


FIGURE 4.1 – Interféromètre réalisant entre l'entrée et la sortie une implémentation photonique de la transformation  $U_\xi$  de l'Éq. (4.3) dont on veut estimer le déphasage  $\xi$ .

Une mesure quantique est ensuite implantée sur le qubit dans l'état  $\rho_1(\xi)$  dans le but d'estimer la valeur inconnue de la phase  $\xi$ . Sur plusieurs expériences indépendantes répétées, la même préparation  $\rho_0$  conduit au même état transformé  $\rho_1(\xi)$  qui est mesuré. On obtient ainsi successivement plusieurs résultats de mesure indépendants, chacun ayant le statut d'une variable aléatoire classique, à partir de quoi un estimateur  $\hat{\xi}$  est mis au point pour la phase  $\xi$ .

D'après la théorie classique de l'estimation [2, 3], tout estimateur  $\hat{\xi}$  estimant la valeur de  $\xi$  (et dont l'espérance de  $\hat{\xi}^2$  ne diverge pas) est pourvu d'une erreur quadratique moyenne  $\langle (\hat{\xi} - \xi)^2 \rangle$  qui est bornée inférieurement par la borne de Cramér-Rao impliquant l'inverse de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$ . Plus l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  est grande, plus l'efficacité de l'estimation peut être importante. L'estimateur du maximum de vraisemblance [3] est connu pour atteindre la meilleure performance donnée par la borne de Cramér-Rao et l'information de Fisher  $F_c(\xi)$ , au moins dans un régime asymptotique d'un grand nombre de mesures indépendantes. L'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  est de cette manière une mesure fondamentale quantifiant la meilleure performance atteignable pour le processus d'estimation. Il est ainsi intéressant d'identifier les conditions optimales maximisant l'information de Fisher  $F_c(\xi)$ . Il existe alors en général une borne supérieure [121–124] formée par l'information de Fisher quantique  $F_q(\xi)$  qui limite l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  en imposant  $F_c(\xi) \leq F_q(\xi)$ . Pour l'estimation de phase  $\xi$  d'un qubit dans un état  $\rho_1(\xi)$  de l'Éq. (4.2) spécifié par le

vecteur de Bloch  $\vec{r}_1(\xi)$  de  $\mathbb{R}^3$ , l'information de Fisher quantique  $F_q(\xi)$  peut s'exprimer comme [125]

$$F_q(\xi) = \frac{[\vec{r}_1(\xi) \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_1(\xi))]^2}{1 - \|\vec{r}_1(\xi)\|^2} + \|\vec{n} \times \vec{r}_1(\xi)\|^2. \quad (4.5)$$

En particulier, l'information de Fisher quantique  $F_q(\xi)$  est maximisée [126] en l'absence de bruit à  $F_q(\xi)^{\max} = 1$  par un vecteur sonde  $\vec{r}_0$  orthogonal à l'axe de rotation  $\vec{n}$ . Ainsi pour l'estimation de phase sur un qubit, l'information de Fisher quantique  $F_q(\xi)$  et l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  sont bornées par un maximum  $F_q(\xi)^{\max} = 1$ . L'information de Fisher quantique  $F_q(\xi)$  de l'Éq. (4.5) est intrinsèque à l'état quantique  $\rho_1(\xi)$  et sa relation au paramètre  $\xi$ , et ne fait référence à aucun protocole de mesure. Par contraste, l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  caractérise un protocole de mesure explicite qui est requis pour une réalisation pratique de l'estimation.

Une mesure quantique généralisée sur un qubit est représentée par un POVM défini par

$$M_k = b_k \mathbf{I}_2 + \vec{a}_k \cdot \vec{\sigma} \quad (4.6)$$

comme décrit dans la section 2.2.2, avec  $k = 1, \dots, K \geq 2$  et  $\sum_{k=1}^K M_k = \mathbf{I}_N$ . Quand une telle mesure généralisée est appliquée au qubit dans l'état  $\rho_1(\xi)$  de l'Éq. (4.2) la probabilité de mesurer l'opérateur  $M_k$  de ce POVM est

$$P(k) = \text{Tr}(\rho_1(\xi) M_k) = b_k + \vec{r}_1(\xi) \cdot \vec{a}_k. \quad (4.7)$$

La meilleure performance atteignable pour l'estimation de la phase  $\xi$  est contrôlée par l'information de Fisher classique définie par

$$F_c(\xi) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{P(k)} (\partial_\xi P(k))^2, \quad (4.8)$$

avec  $\partial_\xi$  la dérivée partielle par rapport à  $\xi$ .

À partir de l'Éq. (4.7) on obtient la dérivée

$$\partial_\xi P(k) = \vec{a}_k \cdot \partial_\xi \vec{r}_1(\xi). \quad (4.9)$$

L'information de Fisher classique de l'Éq. (4.8) peut ainsi s'écrire [117, 125]

$$F_c(\xi) = \sum_{k=1}^K \frac{(\vec{a}_k \cdot \partial_\xi \vec{r}_1(\xi))^2}{b_k + \vec{a}_k \cdot \vec{r}_1(\xi)}. \quad (4.10)$$

Pour un vecteur d'état  $\vec{r}_0$  dans  $\mathbb{R}^3$  on peut écrire

$$\vec{r}_0 = r_{0\parallel} \vec{n} + r_{0\perp} \vec{n}_\perp, \quad (4.11)$$

définissant le vecteur  $\vec{n}_\perp$  de norme unité orthogonal à  $\vec{n}$  dans le plan  $(\vec{n}, \vec{r}_0)$ . Le vecteur de Bloch ayant subi la rotation d'angle  $\xi$  et d'axe de rotation  $\vec{n}$  s'écrit alors

$$\vec{r}_1(\xi) = r_{0\parallel} \vec{n} + r_{0\perp} \cos(\xi) \vec{n}_\perp + r_{0\perp} \sin(\xi) \vec{n}'_\perp, \quad (4.12)$$

avec  $\vec{n}'_{\perp}$  un vecteur de norme unité défini par le produit vectoriel

$$\vec{n}'_{\perp} = \vec{n} \times \vec{n}_{\perp}. \quad (4.13)$$

La dérivée est alors

$$\partial_{\xi} \vec{r}_1(\xi) = -r_{0\perp} \sin(\xi) \vec{n}_{\perp} + r_{0\perp} \cos(\xi) \vec{n}'_{\perp} = \vec{n} \times \vec{r}_1(\xi). \quad (4.14)$$

Les Éqs. (4.10) et (4.14) donnent ainsi [117, 125]

$$F_c(\xi) = \sum_{k=1}^K \frac{[\vec{a}_k \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_1(\xi))]^2}{b_k + \vec{a}_k \cdot \vec{r}_1(\xi)}. \quad (4.15)$$

Pour un qubit, la mesure la plus accessible expérimentalement consiste à mesurer en implémentant une mesure projective de von Neumann définie par les  $K = 2$  opérateurs de mesure de l'Éq. (2.47)

$$M_{\pm} = \frac{I_2 \pm \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad (4.16)$$

avec  $\|\vec{\omega}\| = 1$ , formant deux projecteurs sur deux directions orthonormales de  $\mathcal{H}_2$ . Dans ces circonstances, l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.15) est réduite à [117, 125]

$$F_c(\xi) = \frac{[\vec{\omega} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_1(\xi))]^2}{1 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_1(\xi))^2}. \quad (4.17)$$

À cause de la grande importance pratique de la mesure de von Neumann de l'Éq. (4.16), dans la suite nous nous concentrerons essentiellement sur l'estimation réalisée à partir de mesures de von Neumann dont l'information de Fisher classique est définie à l'Éq. (4.17). L'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.17) constitue une mesure de performance pour l'estimation d'état quantique, car elle constitue une borne inférieure atteignable de l'erreur quadratique moyenne. Par conséquent, plus l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  est élevée plus l'estimation du phase pourra être précise. Nous allons maintenant étudier l'impact d'un bruit sur cette mesure de performance.

## 4.2 Estimation de phase sur un qubit bruité

L'effet d'un environnement incontrôlé induisant un phénomène de décohérence est représenté par un bruit avec l'équation

$$\vec{r}_1(\xi) \longmapsto \vec{r}_2(\xi) = A \vec{r}_1(\xi) + \vec{c}. \quad (4.18)$$

L'état  $\rho_1(\xi)$ , représenté par le vecteur de Bloch  $\vec{r}_1(\xi)$  de l'Éq. (4.2), avant de devenir accessible à la mesure pour l'estimation de la phase  $\xi$ , est affecté par un bruit quantique de l'Éq. (4.18). Une mesure quantique selon l'Éq. (4.16) est ensuite implémentée sur le qubit bruité de vecteur de Bloch  $\vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$  de l'Éq. (4.18) dans le but d'estimer la valeur inconnue de la phase  $\xi$ . L'information de Fisher de l'Éq. (4.17) devient alors [117, 125] :

$$F_c(\xi) = \frac{[\vec{\omega} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_2(\xi))]^2}{1 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_2(\xi))^2}. \quad (4.19)$$

Dans la suite de ce chapitre nous étudierons donc l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.19) comme mesure de performance de l'estimation en présence de bruit. En particulier, nous étudierons l'impact de différents bruits sur cette mesure de performance, et montrerons la possibilité d'effets de bruit utile ou résonance stochastique.

### 4.3 Estimation d'état quantique aidée par un bruit thermique

Avec un bruit thermique quantique, comme explicité dans la section 2.3.3, le vecteur de Bloch après action du bruit  $\vec{r}_2$  est

$$\vec{r}_1(\xi) \longmapsto \vec{r}_2(\xi) = A\vec{r}_1(\xi) + \vec{c} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix} \vec{r}_1(\xi) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2p-1)\gamma \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Le coefficient d'amortissement  $\gamma$  est un coefficient d'interaction entre le qubit et un bain thermique. Plus ce coefficient  $\gamma \in [0, 1]$  est élevé plus grande sera l'influence du bain thermique sur le qubit. La probabilité  $p$  dépend de la température  $T$  du bain thermique à travers l'Éq. (2.74). La température de bruit  $T$  sera le niveau de bruit servant à l'étude du processus d'estimation quantique dans cette section. Nous rappelons que d'après l'Eq. (2.74), lorsque la température de bruit  $T$  augmente de 0 à  $+\infty$ , alors la probabilité  $p$  décroît de 1 à  $1/2$ .

D'après [126] l'information de Fisher quantique  $F_q(\xi)$  de l'Éq. (4.5) est maximisée par un état initial  $\rho_0$  pur spécifié par un vecteur de Bloch unité  $\|\vec{r}_0\| = 1$  orthogonal à l'axe de rotation  $\vec{n}$ . Dans la suite de notre raisonnement nous prendrons donc un vecteur de Bloch  $\vec{r}_0$  unité orthogonal à l'axe de rotation  $\vec{n}$ . La référence [126] nous donne aussi un maximum atteignable de l'information de Fisher quantique et donc de l'information de Fisher classique

$$F_c(\xi) \leq F_q^{\max} = 1 - \gamma. \quad (4.21)$$

Dans la représentation de Bloch le problème est symétrique par rotation autour de l'axe de rotation  $\vec{e}_z$  du bruit thermique. Pour analyser l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.19), sans perte de généralité il est donc possible de choisir dans  $\mathbb{R}^3$  le vecteur de base  $\vec{e}_x$  orthogonal à l'axe de rotation  $\vec{n}$ . Il en résulte que  $\vec{n}$  est dans le plan  $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , avec pour coordonnées  $\vec{n} = [0, n_y, n_z]^\top$  satisfaisant  $n_y^2 + n_z^2 = 1$ , et il est suffisant de considérer  $n_y \in [0, 1]$  à cause de la symétrie de la situation. Pour la base orthonormale  $\{\vec{n}, \vec{n}_\perp \equiv \vec{e}_x, \vec{n}'_\perp = \vec{n} \times \vec{n}_\perp\}$  de  $\mathbb{R}^3$  liée à l'axe de rotation  $\vec{n}$ , on a alors

$$\vec{n}'_\perp = \vec{n} \times \vec{e}_x = [0, n_z, -n_y]^\top. \quad (4.22)$$

Le vecteur de Bloch de l'état  $\rho_1(\xi)$  est alors

$$\vec{r}_1(\xi) = \cos(\xi)\vec{n}_\perp + \sin(\xi)\vec{n}'_\perp = [\cos(\xi), \sin(\xi)n_z, -\sin(\xi)n_y]^\top. \quad (4.23)$$

D'après [126] nous savons que l'optimisation de la mesure requiert un vecteur  $\vec{\omega}$  dans l'Éq. (4.19) orthogonal à  $\vec{n}$ , que nous choisissons de paramétriser comme

$$\vec{\omega} = \cos(\phi)\vec{n}_\perp + \sin(\phi)\vec{n}'_\perp = [\cos(\phi), \sin(\phi)n_z, -\sin(\phi)n_y]^\top. \quad (4.24)$$

Sachant qu'une mesure de von Neumann selon l'Éq. (4.16) est réalisée par deux projecteurs définis par les deux vecteurs unitaires  $\pm\vec{\omega}$  de  $\mathbb{R}^3$ , il est suffisant de considérer  $\phi \in [0, \pi[$ . Un vecteur de Bloch initial  $\vec{r}_0$  orthogonal à l'axe de rotation  $\vec{n}$  est dans le plan  $(\vec{n}_\perp, \vec{n}'_\perp)$ . La configuration des vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  est donnée par la Fig. 4.2.

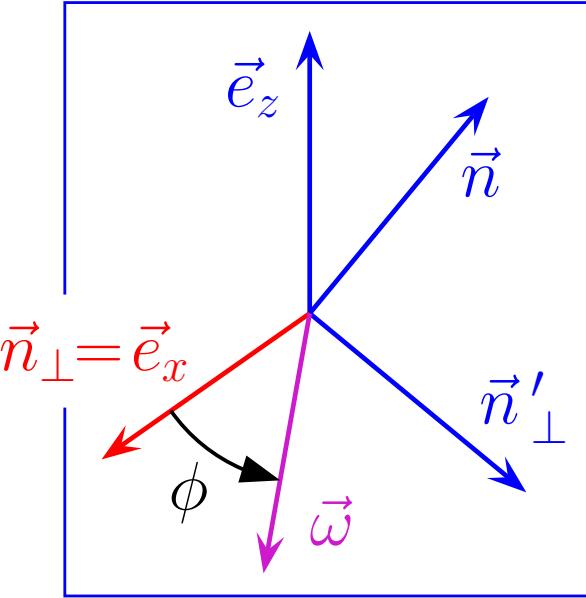


FIGURE 4.2 – Les vecteurs unitaires dans  $\mathbb{R}^3$  contrôlant l'estimation quantique. Les vecteurs  $\vec{e}_z$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'_\perp = \vec{n} \times \vec{n}_\perp$  sont dans le même plan orthogonal à  $\vec{n}_\perp$ , lorsque  $\vec{\omega}$  tourne dans le plan  $(\vec{n}_\perp, \vec{n}'_\perp)$  selon l'angle  $\phi$ .

Pour  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.19), il en suit alors que [117]

$$\vec{\omega} \cdot A(\vec{n} \times \vec{r}_1) = \sqrt{1-\gamma} \left[ \sin(\phi - \xi) - (1 - \sqrt{1-\gamma}) \sin(\phi) \cos(\xi) n_y^2 \right], \quad (4.25)$$

et

$$\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 = \sqrt{1-\gamma} \left[ \cos(\phi - \xi) - (1 - \sqrt{1-\gamma}) \sin(\phi) \sin(\xi) n_y^2 \right], \quad (4.26)$$

lorsque

$$\vec{\omega} \cdot \vec{c} = \omega_z c_z = -\sin(\phi) n_y (2p - 1) \gamma. \quad (4.27)$$

En remplaçant les Éqs. (4.25)–(4.27) dans l'Éq. (4.17), on obtient l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  en tant que fonction des variables caractéristiques du problème d'estimation dans des conditions génériques.

Nous sommes spécialement intéressés par l'étude de l'influence de la température de bruit  $T$  définie à l'Éq. (2.74) sur l'information de Fisher  $F_c(\xi)$ . Une température  $T$  croissante du bain thermique agissant comme un bruit thermique, et donc une augmentation du niveau de bruit, implique intuitivement une dégradation du processus d'estimation. Nous voulons examiner si une augmentation du niveau de bruit implique effectivement toujours une dégradation de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$ . La température  $T$  agit sur la probabilité  $p$  via l'Éq. (2.74) ; en retour

$p$  agit sur  $\vec{c}$  et  $\vec{c}$  agit sur l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  via le produit scalaire  $\vec{\omega} \cdot \vec{c}$  de l'Éq. (4.27).

L'Éq. (4.27) identifie deux configurations spéciales où l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  est trouvée indépendante de la température  $T$ . Lorsque  $\sin(\phi) = 0$ , i.e. pour un vecteur de mesure  $\vec{\omega} = \vec{e}_x$ , alors à partir de l'Éq. (4.19) on a

$$F_c(\xi) = \frac{(1 - \gamma) \sin^2(\xi)}{1 - (1 - \gamma) \cos^2(\xi)}, \quad (4.28)$$

qui est maximisé à  $1 - \gamma$  pour  $\xi = \pm\pi/2$  et minimisé à 0 pour  $\xi = 0$  ou  $\pi$ . Une rotation d'un angle nul ou bien une symétrie par rapport à l'axe  $\vec{n}$  constituent les cas où l'information de Fisher devient nulle et donc où la mesure ne permet pas l'estimation de l'angle  $\xi$ . En revanche, pour des angles  $\xi = \pm\pi/2$  l'information de Fisher serait maximum et l'estimation de l'angle  $\xi$  est la plus précise possible. De façon similaire, lorsque  $n_y = 0$ , i.e. pour un axe de rotation  $\vec{n} = \vec{e}_z$ , alors il résulte de l'Éq. (4.19) que

$$F_c(\xi) = \frac{(1 - \gamma) \sin^2(\phi - \xi)}{1 - (1 - \gamma) \cos^2(\phi - \xi)}, \quad (4.29)$$

qui est maximisé à  $1 - \gamma$  pour  $\phi - \xi = \pm\pi/2$  et minimisé à 0 pour  $\phi - \xi = 0$  ou  $\pi$ .

En général lorsque  $\sin(\phi)n_y \neq 0$ , la température  $T$  influence l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  seulement par le terme  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$  dans le dénominateur de l'Éq. (4.17) via  $\vec{\omega} \cdot \vec{c}$  de l'Éq. (4.27). De plus, lorsque  $T$  varie,  $F_c(\xi)$  et  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$  varient tous les deux dans le même sens en fonction de  $T$ . En particulier, le minimum de  $F_c(\xi)$  intervient au minimum de  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$ . Basé sur l'Éq. (4.27), le terme  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$  est une parabole en forme de  $\cup$  en fonction de  $p$ . Donc également,  $F_c(\xi)$  est attendu comme ayant aussi une évolution en forme de  $\cup$  en fonction de  $p$ , cependant limitée dans l'intervalle  $p \in [1/2, 1]$  parcouru lorsque  $T \in [0, \infty[$  dans l'Éq. (2.74). La valeur minimum possiblement atteinte pour  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$  est 0, produit par  $\vec{\omega} \cdot \vec{c} = -\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1$ , et cela survient à la valeur critique  $p_c$  de la probabilité  $p$  qui s'exprime à partir de l'Éq. (4.27)

$$p_c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha_c, \quad (4.30)$$

avec le paramètre scalaire

$$\alpha_c = \frac{\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1}{\sin(\phi)n_y\gamma} \quad (4.31)$$

qui est connu à partir de l'Éq. (4.26) comme

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{1 - \gamma}}{\gamma} \left[ \frac{\cos(\phi - \xi)}{n_y \sin(\phi)} - (1 - \sqrt{1 - \gamma})n_y \sin(\xi) \right]. \quad (4.32)$$

Il est alors important, pour l'évolution de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  en fonction de  $p$  (et par conséquence en fonction de la température de bruit  $T$ ), de localiser la position de la valeur critique  $p_c$  de l'Éq. (4.30) par rapport à l'intervalle autorisé  $[1/2, 1] \ni p$ . Cela est équivalent à localiser le paramètre scalaire  $\alpha_c$  de l'Éq. (4.32) par rapport à l'intervalle  $[0, 1]$ .

Il en résulte qu'il existe trois régimes accessibles, qui mènent à trois évolutions qualitatives distinctes de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  en fonction de la température  $T \in [0, \infty]$  du bain thermique, que nous allons analyser dans la suite.

Auparavant, il est utile d'identifier les deux valeurs extrêmes de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  aux deux températures extrêmes  $T = 0$  et  $T = \infty$ . À partir des Éqs. (4.19) et (4.27), comme à  $T = 0$  on a  $p = 1$ , il en suit que

$$F_c(\xi; T = 0) = \frac{[\vec{\omega} \cdot A(\vec{n} \times \vec{r}_1)]^2}{1 - [\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 - \sin(\phi)n_y\gamma]^2}, \quad (4.33)$$

lorsque  $T = \infty$ , comme on a  $p = 1/2$  il en suit que

$$F_c(\xi; T = \infty) = \frac{[\vec{\omega} \cdot A(\vec{n} \times \vec{r}_1)]^2}{1 - [\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1]^2}. \quad (4.34)$$

Les deux valeurs extrêmes pour l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  dans les Éqs. (4.33) et (4.34) diffèrent par le terme  $-\sin(\phi)n_y\gamma$  au dénominateur. Dans le cas où  $\sin(\phi)n_y\gamma \leq 2\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1$  l'information de Fisher  $F_c(\xi; T = 0)$  pour une température nulle est plus grande que l'information de Fisher  $F_c(\xi; T = \infty)$  pour une température tendant vers l'infini. Ce comportement est un comportement standard où un bruit nul est plus favorable qu'un bruit maximal.

Cependant, pour  $\sin(\phi)n_y\gamma > 2\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1$  l'information de Fisher  $F_c(\xi; T = 0)$  pour une température nulle est plus faible que l'information de Fisher  $F_c(\xi; T = \infty)$  pour une température tendant vers l'infini. Ce comportement où un bruit maximal est plus favorable qu'un bruit nul est non standard. Ce phénomène de bruit utile est ainsi possible en estimation pour l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  comme il a été montré possible pour la probabilité d'erreur de détection dans la section 3.3.

Par conséquent, en général plus le terme  $-\sin(\phi)n_y\gamma$  est éloigné de 0 plus la différence entre  $F_c(\xi; T = 0)$  et  $F_c(\xi; T = \infty)$  sera grande. En particulier, pour un coefficient d'amortissement  $\gamma$  fixé par le bruit thermique,  $\sin(\phi)n_y = \pm 1$  maximise cette différence. Une telle configuration peut ne pas être atteignable en pratique sachant que  $n_y$  est imposé par l'axe de rotation  $\vec{n}$ , cependant elle forme une référence utile exprimant l'excursion maximale de  $F_c$ . L'excursion entre les valeurs extrêmes  $F_c(\xi; T = 0)$  et  $F_c(\xi; T = \infty)$  à la température  $T$  croissant de 0 à  $\infty$  peut cependant se dérouler selon trois régimes distincts, comme anticipé précédemment. Ces trois régimes d'évolution de la performance d'estimation font le parallèle aux trois régimes d'évolution de la performance de détection démontrés à la section 3.3.

### 4.3.1 Information de Fisher classique décroissante avec la température

Dans l'Éq. (4.30) pour  $p_c \leq 1/2$  (i.e. pour  $\alpha_c \leq 0$ ) le zéro de  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$  à  $p_c$  intervient avant l'intervalle  $[1/2, 1] \ni p$ , et ainsi pour tout  $p \in [1/2, 1]$  la parabole  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$ , ou de manière équivalente l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.17), croît avec un  $p \in [1/2, 1]$  croissant. Ceci est équivalent à une information de Fisher  $F_c(\xi)$  décroissante lorsque la température de bruit  $T$  croît de 0 vers  $\infty$ . Ceci est le comportement attendu de cette mesure de performance. En effet, lorsque la température  $T$  du bruit thermique croît, la performance d'estimation quantifiée par  $F_c(\xi)$  se dégrade de façon monotone.

Un tel régime décroissant de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  est obtenu par toutes combinaisons de conditions assurant  $\alpha_c \leq 0$  dans l'Éq. (4.32). Ceci peut être réalisé dans diverses configurations de l'axe de rotation via  $n_y$ , des opérateurs de mesure via  $\phi$ , du bruit thermique via l'amortissement  $\gamma$ , pour l'estimation de phase  $\xi$ . Des conditions illustratives de ce type sont montrées sur la Fig. 4.3.

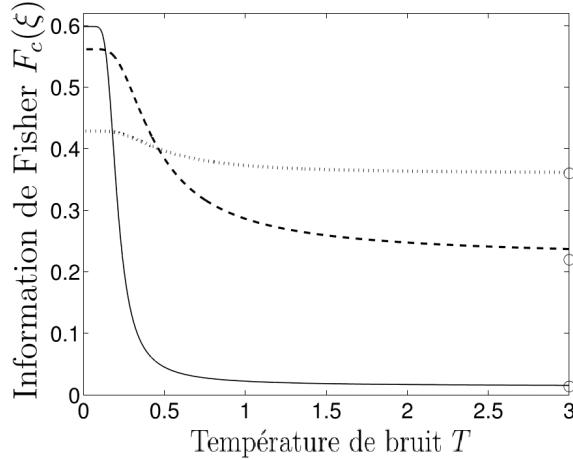


FIGURE 4.3 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.17) en fonction de la température de bruit  $T$  à  $n_y = 1$  et  $\phi = \pi/2$ . Les cercles ( $\circ$ ) sont les valeurs asymptotiques  $F_c(\xi; T = \infty)$  de l'Éq. (4.34).  $F_c(\xi)$  décroissant avec  $\gamma = 0.4$ , à  $\xi = 0$  (ligne pointillée),  $\xi = -0.25\pi$  (ligne en tirets),  $\xi = -0.45\pi$  (ligne pleine).

### 4.3.2 Information de Fisher classique antirésonante avec la température

Dans l'Éq. (4.30) pour  $p_c \in ]1/2, 1[$  (i.e. pour  $\alpha_c \in ]0, 1[$ ), le zéro de  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$  à  $p_c$  intervient dans l'intervalle  $[1/2, 1] \ni p$ . Cela implique que pour tout  $p \in [1/2, 1]$  la parabole  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$ , ou de manière équivalente, l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.17), subit une évolution en forme de  $\cup$  avec un  $p \in [1/2, 1]$  croissant passant par un minimum à  $p = p_c$ . Cela est équivalent à une évolution de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  en forme de  $\cup$  lorsque la température de bruit  $T$  augmente de 0 vers  $\infty$ , avec  $F_c(\xi)$  passant par un minimum à la température critique  $T_c$  liée à  $p_c$  via l'Éq. (2.74). Un tel régime antirésonant en forme de  $\cup$  de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  est obtenu par tous groupes de conditions donnant  $\alpha_c \in ]0, 1[$  dans l'Éq. (4.32). Quelques conditions illustratives de ce type de régime sont montrées sur la Fig. 4.4.

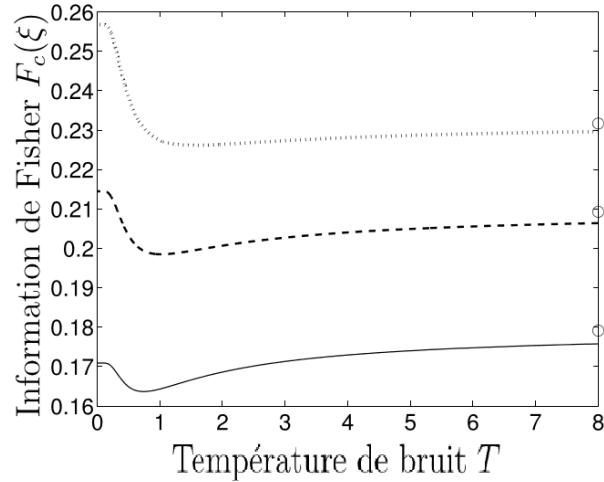


FIGURE 4.4 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l’Éq. (4.17) en fonction de la température de bruit  $T$  à  $n_y = 1$  et  $\phi = \pi/2$ . Les cercles ( $\circ$ ) sont les valeurs asymptotiques  $F_c(\xi; T = \infty)$  de l’Éq. (4.34).  $F_c(\xi)$  antirésonant avec  $\gamma = 0.5$ , à  $\xi = 0.1\pi$  (ligne pointillée),  $\xi = 0.15\pi$  (ligne en tirets),  $\xi = 0.2\pi$  (ligne pleine).

De telles évolutions antirésonantes de l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  montrées sur la Fig. 4.4 sont caractéristiques d’un effet de résonance stochastique, où une mesure de performance significative pour certaines tâches de traitement de l’information subie une évolution non monotone lorsque le niveau de bruit augmente, au lieu de se dégrader de façon monotone [44, 46, 92]. Le plus souvent, l’évolution non monotone observée pour un phénomène de résonance stochastique intervient sous la forme d’un pic où la performance culmine à un maximum pour une valeur non nulle du niveau de bruit comme dans la section 3.3.2.

L’évolution non monotone illustrée par la Fig. 4.4 intervient plutôt sous forme d’une vallée où la performance est minimisée par une quantité non nulle de bruit particulièrement défavorable à la performance d’estimation. Ce minimum de la performance pour une valeur critique du niveau de bruit est appelé antirésonance stochastique. Cela manifeste une action non standard, antirésonante, du bruit, présente dans le domaine classique [127–130], mais aussi pour des processus quantiques [131, 132]. C’est cependant ici et dans [117] la première fois qu’un tel phénomène d’antirésonance stochastique est montré pour l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  mesurant la performance d’un processus quantique d’estimation de phase. Au delà de cette valeur critique, quand la température de bruit continue de s’élèver, la performance d’estimation s’améliore graduellement. Ceci montre des aspects non standards de l’action du bruit quantique ou décohérence, qui n’est pas nécessairement uniformément plus défavorable lorsque sa quantité augmente.

La Fig. 4.4 montre des variations non monotones de l’information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  en fonction de la température de bruit  $T$ . Les évolutions antirésonantes en forme de  $\cup$  de l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  de la Fig. 4.4 indiquent que des configurations existent où les conditions à  $T = 0$  et à  $T \rightarrow \infty$  sont plus favorables pour l’estimation qu’une température  $T$  intermédiaire. Dans de telles évolutions antirésonantes en forme de  $\cup$ , pour des températures importantes  $T \rightarrow \infty$ , comme illustré sur la Fig. 4.4, l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  suit la même tendance croissante jusqu’à la limite asymptotique  $F_c(\xi; T = \infty)$  de l’Éq. (4.34) matérialisée par les cercles ( $\circ$ ) sur la Fig. 4.4. En particulier, comme montré sur la Fig. 4.4, des configurations

existent où  $F_c(\xi; T = \infty)$  est plus grand que  $F_c(\xi; T = 0)$ . Cela est atteint, en se basant sur les Éqs. (4.33) et (4.34), lorsque  $|\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 - \sin(\phi)n_y\gamma| < |\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1|$  ce qui intervient lorsque  $\sin(\phi)n_y\gamma$  est entre 0 et  $2\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1$ . Dans de telles configurations, en principe, des grandes températures  $T \rightarrow \infty$  sont alors plus favorables au processus d'estimation. Cependant, en pratique, cela doit être mitigé par la nécessité de limiter la température  $T$  avant qu'elle ne détériore le système quantique comme indiqué dans la section 2.3.3.

### 4.3.3 Information de Fisher classique croissante avec la température

Finalement, dans l'Éq. (4.30) pour  $p_c \geq 1$  (i.e. pour  $\alpha_c \geq 1$ ), le zéro de  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$  à  $p_c$  intervient après l'intervalle  $[1/2, 1] \ni p$ . Cela implique que pour tout  $p \in [1/2, 1]$  la parabole  $(\vec{\omega} \cdot A\vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{c})^2$ , ou de manière équivalente l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.17), décroît avec l'augmentation de  $p \in [1/2, 1]$ . Cela est équivalent à une croissance de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  lorsque la température  $T$  croît de 0 vers  $\infty$ . Un tel régime croissant de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  est obtenu pour toutes configurations de conditions satisfaisant  $\alpha_c \geq 1$  dans l'Éq. (4.32). Des conditions illustrant ce type de régime sont montrées sur la Fig. 4.5.

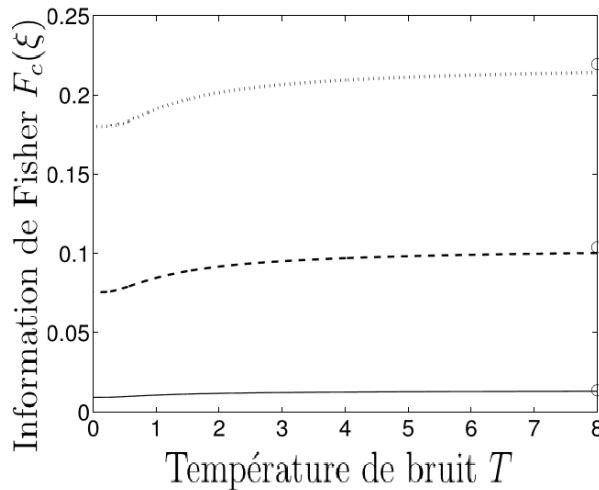


FIGURE 4.5 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.17) en fonction de la température de bruit  $T$  à  $n_y = 1$  et  $\phi = \pi/2$ . Les cercles ( $\circ$ ) sont les valeurs asymptotiques  $F_c(\xi; T = \infty)$  de l'Éq. (4.34).  $F_c(\xi)$  croissant avec  $\gamma = 0.4$ , à  $\xi = 0.25\pi$  (ligne pointillée),  $\xi = 0.35\pi$  (ligne en tirets),  $\xi = 0.45\pi$  (ligne pleine).

Pour des telles évolutions croissantes, la valeur asymptotique  $F_c(\xi; T = \infty)$  matérialisée par les cercles ( $\circ$ ) sur la Fig. 4.5 est toujours plus grande que  $F_c(\xi; T = 0)$ , et la performance d'estimation croît de façon monotone avec la croissance de la température  $T$ . Cela est un autre comportement contre-intuitif possible dans des conditions définies avec le bruit ou décohérence, où une plus grande quantité de bruit est alors plus favorable à la tâche de traitement de l'information. En particulier, ici aussi la température devra être limitée avant de détériorer le système quantique étant estimé.

#### 4.3.4 Robustesse selon le paramètre à estimer

Les évolutions de la performance d'estimation via l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  obtenues jusqu'à présent, avec leurs trois régimes, dépendent comme on peut le constater des valeurs ou domaines du paramètre à estimer  $\xi$ . Ceci constitue une propriété commune pour l'estimation de paramètre, où la performance et ses conditions d'optimalité peuvent dépendre de la valeur ou de l'intervalle de valeurs du paramètre à estimer, et ceci est vrai aussi pour l'estimation quantique [125, 126, 133]. Dans de telles circonstances, il pourra être utile de posséder une connaissance a priori sur l'intervalle de valeurs du paramètre à estimer afin de mieux contrôler la performance accessible.

Toutefois, il est également possible d'obtenir une caractérisation pertinente de la performance d'estimation qui ne dépend pas en ce sens du paramètre à estimer  $\xi$ . Ceci peut être accompli par une approche bayésienne où en l'absence de connaissance a priori réduisant le domaine du paramètre  $\xi$  à estimer, on postule une distribution de probabilité  $p_\xi(\xi)$  pour  $\xi$ , par exemple uniforme sur  $]-\pi, \pi]$ . On peut alors évaluer et étudier la performance moyenne selon  $p_\xi(\xi)$ , par exemple comme l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  moyennée selon  $p_\xi(\xi)$ . Nous abordons ce type de caractérisation complémentaire dans l'annexe B.

Au delà des résultats de détail de l'annexe B, un enseignement principalement significatif est que, sur l'information de Fisher moyennée en  $\xi$ , les trois régimes d'évolution possibles précédemment observés sont préservés. Selon les configurations et le bruit thermique quantique, on observe, pour la performance globale d'estimation évaluée par l'information de Fisher moyennée en  $\xi$ , des évolutions soit décroissantes, soit antirésonantes, soit croissantes, lorsque la température de bruit  $T$  augmente. Ces observations montrent que les effets de bruit utile où la performance de l'estimation quantique s'améliore à des températures de bruit plus élevées persistent dans des conditions et sous des formes étendues.

### 4.4 Estimation d'état quantique aidée par un bruit unital

Pour un bruit thermique comme étudié dans les sections 4.3-4.3.4 le vecteur  $\vec{c}$  était non nul et ce bruit avait donc un degré de symétrie moindre que les bruits unitaux. Ce caractère non unital est essentiel aux formes de résonance stochastiques étudiées dans les sections 4.3-4.3.4. Pour des bruits unitaux le vecteur  $\vec{c}$  de l'Éq. (2.52) est le vecteur nul  $\vec{0}$ . Nous allons étudier dans cette section les régimes d'évolution de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  en fonction du niveau d'un bruit unital, comme nous l'avons rapporté dans [118].

Pour un bruit unital l'Éq. (4.15) devient alors

$$F_c(\xi) = \sum_{k=1}^K \frac{[\vec{a}_k \cdot (-\sin(\xi)A\vec{n}_\perp + \cos(\xi)A\vec{n}'_\perp)]^2}{b_k + \vec{a}_k \cdot (\cos(\xi)A\vec{n}_\perp + \sin(\xi)A\vec{n}'_\perp)}. \quad (4.35)$$

Lors d'une mesure de von Neumann définie par les opérateurs de mesure  $M_\pm = (I_2 \pm \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma})/2$  de l'Éq. (2.47), l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.17) devient

$$F_c(\xi) = \frac{[\vec{\omega} \cdot (-\sin(\xi)A\vec{n}_\perp + \cos(\xi)A\vec{n}'_\perp)]^2}{1 - (\vec{\omega} \cdot [\cos(\xi)A\vec{n}_\perp + \sin(\xi)A\vec{n}'_\perp])^2}. \quad (4.36)$$

Nous nous intéresserons ici à l'utilisation d'une mesure indépendante de la valeur de  $\xi$  comme étudiée dans la section 4.3.4 pour un bruit thermique. Dans la section 4.3 nous avons étudié l'évolution de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  avec la température d'un bruit thermique. Nous considérerons, pour l'étude de l'évolution de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  avec le niveau de bruit, une classe de bruits quantiques unitaux agissant sur le qubit et formée par les bruits de Pauli [8]. Un bruit de Pauli agit par l'application aléatoire des quatre opérateurs de Pauli  $\{\sigma_0 \equiv I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  qui forment une base orthonormale de  $\mathcal{H}_2$ . Dans la représentation de Kraus, un bruit de Pauli implémente l'opération quantique

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_{k=\{0,x,y,z\}} p_k \sigma_k \rho \sigma_k^\dagger, \quad (4.37)$$

avec  $\{p_k\}$  une distribution de probabilité. Ceci donne dans l'Éq. (2.52) la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

avec les coefficients scalaires

$$\alpha_x = p_0 + p_x - p_y - p_z, \quad (4.39)$$

$$\alpha_y = p_0 - p_x + p_y - p_z, \quad (4.40)$$

$$\alpha_z = p_0 - p_x - p_y + p_z, \quad (4.41)$$

se référant au repère  $(Ox, Oy, Oz)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Pour le qubit, les Éqs. (4.37) et (4.38) décrivent en particulier des bruits de Pauli communs comme le bruit de bit-flip, de phase-flip et le bruit dépolarisant. Les trois paramètres  $\alpha_k$  des Éqs. (4.39), (4.40) et (4.41) sont des facteurs de compression satisfaisant

$$0 \leq |\alpha_k| \leq 1 \quad (4.42)$$

pour tout  $k \in \{x, y, z\}$ , afin de garantir que la boule de Bloch est transformée en elle-même par l'action de l'opérateur  $A$ . De cette façon, la transformation  $\vec{r} \mapsto A\vec{r}$  par le bruit de Pauli compresse les vecteurs de Bloch  $\vec{r}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Une augmentation du niveau de bruit donne une compression plus importante. Le niveau maximum de compression intervient pour  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$ , c'est-à-dire pour un état avec un vecteur de Bloch  $\vec{r} = \vec{0}$  caractérisant l'état maximalement mélangé  $I_2/2$  du qubit identifiable avec l'état maximalement bruité. Lorsque le niveau de bruit augmente, la variation de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  des Éqs. (4.35) et (4.36) est alors contrôlée par la configuration géométrique des vecteurs de mesure  $\vec{a}_k$  ou  $\vec{\omega}$  par rapport à l'axe de rotation  $\vec{n}$  et aux axes de compression du bruit de Pauli dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans cette section nous utilisons l'angle d'élévation  $\theta_n \in [0, \pi]$  par rapport à l'axe  $O_z$  et l'angle d'azimut  $\phi_n \in [0, 2\pi]$  autour de l'axe  $O_z$  pour paramétriser le vecteur  $\vec{n} = [\sin(\theta_n) \cos(\phi_n), \sin(\theta_n) \sin(\phi_n), \cos(\theta_n)]^\top$  et l'angle d'élévation  $\theta_\omega \in [0, \pi]$  par rapport au vecteur  $\vec{n}$  et l'angle d'azimut  $\phi_\omega \in [0, 2\pi]$  autour du vecteur  $\vec{n}$  pour le vecteur  $\vec{\omega}$ .

#### 4.4.1 Bruit de phase-flip

Pour un premier exemple, nous allons considérer un important bruit de Pauli qu'est le bruit de phase-flip. Le bruit de phase-flip est obtenu à partir de l'Eq. (4.38) avec les quatre probabilités

$$p_0 = 1 - p, \quad (4.43)$$

$$p_x = p_y = 0 \quad (4.44)$$

et

$$p_z = p. \quad (4.45)$$

Ceci donne dans les Éqs. (4.39), (4.40) et (4.41) les trois facteurs de compression

$$\alpha_x = \alpha_y = 1 - 2p \quad (4.46)$$

et

$$\alpha_z = 1, \quad (4.47)$$

indiquant que le bruit de phase-flip compresse la sphère de Bloch seulement selon les deux directions ( $Ox, Oy$ ) de  $\mathbb{R}^3$ . À  $p = 0$ , la matrice  $A$  de l'Eq. (4.38) est l'identité  $I_3$  de  $\mathbb{R}^3$  et caractérise une situation sans bruit. Lorsque le niveau de bruit augmente, la probabilité  $p$  croît au dessus de 0, et la compression selon ( $Ox, Oy$ ) augmente graduellement afin d'être maximisée à  $\alpha_x = \alpha_y = 0$  lorsque  $p = 1/2$ .

Nous allons maintenant examiner l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  des Éqs. (4.35) et (4.36) caractérisant l'efficacité du processus d'estimation de phase sur le qubit bruité, lorsque le niveau du bruit de phase-flip augmente d'un bruit nul défini par  $p = 0$  à un bruit maximal défini par  $p = 1/2$ . La variation de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  des Éqs. (4.35) et (4.36) est contrôlée par la configuration géométrique des vecteurs de mesure  $\vec{a}_k$  ou  $\vec{\omega}$  par rapport à l'axe de rotation  $\vec{n}$  et les deux axes de compression ( $Ox, Oy$ ) du bruit de phase-flip.

Les Fig. 4.6 et 4.7 illustrent les trois régimes de variation accessibles à l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$ . La Fig. 4.6 pour  $\theta_\omega = 0.6\pi$  et  $\theta_\omega = 0.5\pi$  montre le régime standard attendu où l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  décroît lorsque la probabilité  $p$  augmente. Ceci manifeste la situation habituelle pour une mesure de performance du processus d'estimation quantique qui se détériore avec l'augmentation du niveau de bruit.

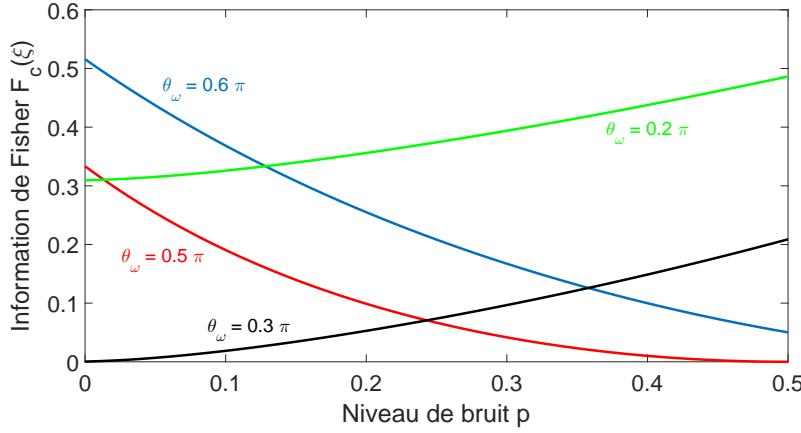


FIGURE 4.6 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l’Éq. (4.36) en fonction du niveau de bruit  $p$  du bruit de phase-flip, avec un axe de rotation  $\vec{n} = [1, 0, 0]^\top$ , pour un angle  $\xi = \pi/4$ . Le vecteur de mesure  $\vec{\omega}$  est tel que  $\phi_\omega = \pi/4$  et prend différentes valeurs de  $\theta_\omega$  (ici  $0.2\pi$ ,  $0.3\pi$ ,  $0.5\pi$  et  $0.6\pi$  comme illustrées).

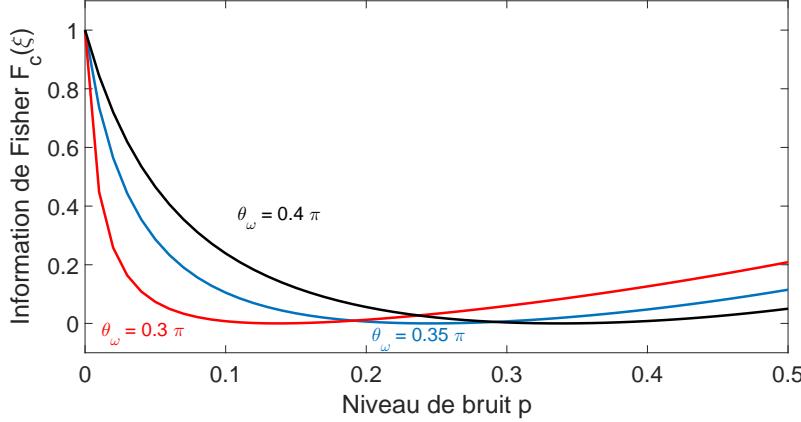


FIGURE 4.7 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  antirésonante de l’Éq. (4.36) en fonction du niveau de bruit  $p$  du bruit de phase-flip, avec un axe de rotation  $\vec{n} = [1, 0, 0]^\top$ , pour un angle  $\xi = \pi/4$ . Le vecteur de mesure  $\vec{\omega}$  est tel que  $\phi_\omega = \pi/2$  et prend différentes valeurs de  $\theta_\omega$  (ici  $0.3\pi$ ,  $0.35\pi$  et  $0.4\pi$  comme illustrées).

Par contraste, la Fig. 4.6 pour  $\theta_\omega = 0.2\pi$  et  $\theta_\omega = 0.3\pi$  montre la possibilité d’un régime non standard où l’information de Fisher croît lorsque le niveau de bruit  $p$  augmente. Dans de telles configurations, des niveaux de bruit plus élevés, lorsqu’ils sont accessibles, sont plus favorables au processus d’estimation. Ce régime est aussi accessible pour un bruit thermique comme montré dans la section 4.3.

De plus, la Fig. 4.7 montre un autre régime non standard, avec les variations non monotones de l’information de Fisher classique  $F_c(\xi)$ . Sur la Fig. 4.7, selon les conditions, il existe une valeur critique de la probabilité de bruit  $p \in [0, 1/2]$  où l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  est minimisée.

Ceci identifie un niveau de bruit ou un intervalle de niveaux de bruit spécialement défavorable au processus d'estimation quantique. Ainsi, faire fonctionner le processus au dessous, mais aussi au dessus, d'une telle valeur critique du niveau de bruit est plus favorable pour l'estimation quantique. Un traitement de l'information plus efficace avec l'augmentation du niveau de bruit  $p$  est identifiable avec un phénomène de résonance stochastique. Ainsi, la forme de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  sur la Fig. 4.7 avec un niveau de bruit fini étant spécifiquement défavorable, est identifiable avec un régime d'antirésonance stochastique, comme rapporté dans la section 4.3 avec un bruit thermique.

Les Figs. 4.6 et 4.7 représentent les divers régimes de variation de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Eq. (4.36) caractérisant l'efficacité d'estimation pour des valeurs proches de  $\xi = \pi/4$ . De tels comportements de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  sont génériques et peuvent être trouvés de manière analogue pour d'autres valeurs du paramètre  $\xi$ . De plus, il est possible d'obtenir une caractérisation de l'efficacité d'estimation indépendante de  $\xi$ . Ceci peut être accompli en moyennant l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  à partir des Éqs. (4.35) et (4.36) sur l'angle inconnu  $\xi$  pris uniforme sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$ . Cette distribution de probabilité uniforme pour l'angle  $\xi$  n'est cependant pas critique, et est une supposition raisonnable lorsque strictement aucune connaissance a priori n'est disponible pour l'intervalle dans lequel  $\xi$  doit être estimé. Une telle information de Fisher moyennée sur  $\xi$  obtenue à partir de  $F_c(\xi)$  de l'Eq. (4.36) est représentée sur les Figs. 4.8 et 4.9.

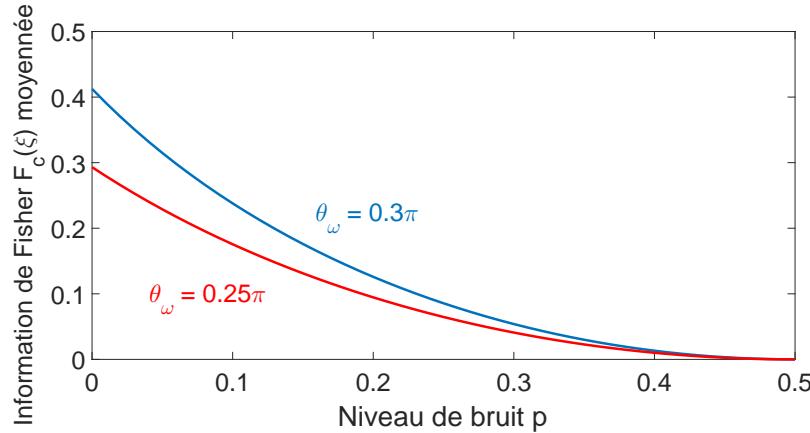


FIGURE 4.8 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l'Eq. (4.36) moyennée sur l'angle  $\xi$  pris uniformément dans  $[0, 2\pi[$ , en fonction du niveau de bruit  $p$  du bruit de phase-flip. Pour un axe de rotation  $\vec{n}$  avec  $\theta_n = 0$  et  $\phi_n = \pi/4$ , le vecteur de mesure  $\vec{\phi}$  est tel que  $\phi_\omega = 1.5\pi$  et prend deux valeurs de  $\theta_\omega$  (ici illustrées  $\theta_\omega = 0.3\pi$  et  $\theta_\omega = 0.25\pi$ ).

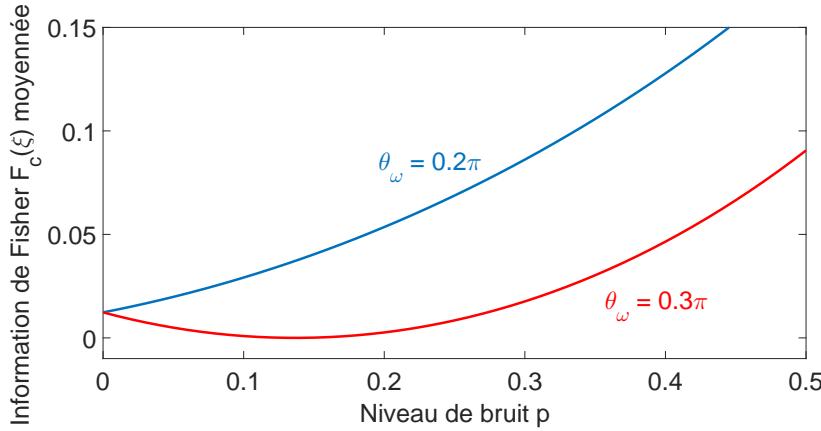


FIGURE 4.9 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l’Éq. (4.36) moyennée sur l’angle  $\xi$  pris uniformément dans  $[0, 2\pi[$ , en fonction du niveau de bruit  $p$  du bruit de phase-flip. Pour un axe de rotation  $\vec{n}$  avec  $\theta_n = \pi/4$  et  $\phi_n = 0$ , le vecteur de mesure  $\vec{\phi}$  est tel que  $\phi_\omega = 0\pi$  et prend deux valeurs de  $\theta_\omega$  (ici illustrées  $\theta_\omega = 0.2\pi$  et  $\theta_\omega = 0.3\pi$ ).

L’information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  moyennée sur  $\xi$  des Figs. 4.8 et 4.9 illustre que les trois régimes de variation sont préservés pour la performance moyenne du processus d’estimation quantique. En particulier, dans certaines conditions, le processus d’estimation peut être plus efficace, en moyenne, lorsqu’opérant à un niveau de bruit  $p$  plus élevé.

Le bruit de phase-flip testé dans cette section est un bruit unital important pour le qubit, qui a, comme indiqué, l’axe  $Oz$  invariant dans la compression par la matrice de bruit  $A$  de l’Éq. (4.38). Le bruit de bit-flip et le bruit de bit-phase-flip sont deux autres bruits unitaux importants pour le qubit, qui de manière analogue montrent un axe de compression invariant, l’axe  $Ox$  et  $Oy$  respectivement. Par conséquent, des variations non standards et non monotones où des effets de résonance stochastique se manifestent seront aussi obtenues pour un processus d’estimation quantique en présence d’un bruit de bit-flip et de bit-phase-flip. De plus, un axe invariant du bruit n’est pas une propriété critique requise pour qu’un effet de résonance stochastique se manifeste, comme nous allons le montrer dans la suite.

#### 4.4.2 Bruits à trois axes de compression

Nous utiliserons dans cette section un bruit de Pauli décrit par les Éqs. (4.37)-(4.41) qui est capable de compresser la sphère de Bloch selon les trois directions de  $\mathbb{R}^3$ . Afin d’avoir le contrôle du niveau de bruit ou de la compression de bruit à travers un seul paramètre scalaire  $p$  nous choisissons dans l’Éq. (4.37) les quatre probabilités

$$p_0 = 1 - p, \quad (4.48)$$

$$p_x = 0.5p, \quad (4.49)$$

$$p_y = 0.3p \quad (4.50)$$

et

$$p_z = 0.2p. \quad (4.51)$$

Ceci donne dans les Éqs. (4.39)-(4.41) les trois facteurs de compression

$$\alpha_x = 1 - p, \quad (4.52)$$

$$\alpha_y = 1 - 1.4p \quad (4.53)$$

et

$$\alpha_z = 1 - 1.6p \quad (4.54)$$

exprimant comment le bruit de Pauli compresse la sphère de Bloch selon les trois axes ( $Ox, Oy, Oz$ ) de  $\mathbb{R}^3$ . À  $p = 0$  avec aucune compression, on se trouve dans une situation sans bruit. Lorsque le niveau de bruit augmente, la probabilité  $p$  croît au dessus de 0, et la compression la plus prononcée intervient selon l'axe  $Oz$  et est maximisée pour  $\alpha_z = 0$  lorsque  $p = 1/1.6 = 0.625$ . Avec un tel bruit de Pauli avec trois directions effectives de compression de  $\mathbb{R}^3$ , nous montrons que les variations non monotones et non standards de la performance d'estimation quantique sont toujours possibles lorsque le niveau de bruit  $p$  augmente. La variation de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  des Éqs. (4.35) ou (4.36) va dépendre comme précédemment de la configuration géométrique des vecteurs de mesure  $\vec{a}_k$  ou  $\vec{\omega}$  par rapport à l'axe de rotation  $\vec{n}$  et des trois axes de compression du bruit de Pauli dans  $\mathbb{R}^3$ .

Les Figs. 4.10 et 4.11 montrent les divers régimes de variation de l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.36), caractérisant la performance du processus d'estimation quantique dans un intervalle autour de  $\xi = \pi/4$  lors d'une mesure de von Neumann définie par les opérateurs de mesure  $M_{\pm} = (I_2 \pm \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma})/2$  de l'Éq. (2.47).

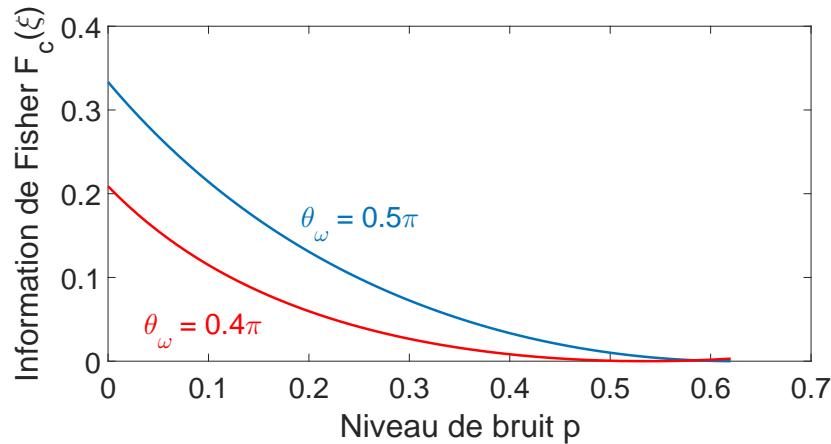


FIGURE 4.10 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (4.36) décroissante en fonction du niveau de bruit  $p$  du bruit de Pauli, avec un axe de rotation  $\vec{n}$  tel que  $\theta_n = 0.5\pi$ ,  $\phi_n = 0.5\pi$ , pour un angle  $\xi = \pi/4$ . Le vecteur de mesure  $\vec{\omega}$  est tel que  $\phi_\omega = 0.75\pi$  et prend différentes valeurs de  $\theta_\omega$  (ici  $0.4\pi$  et  $0.5\pi$  comme illustrées).

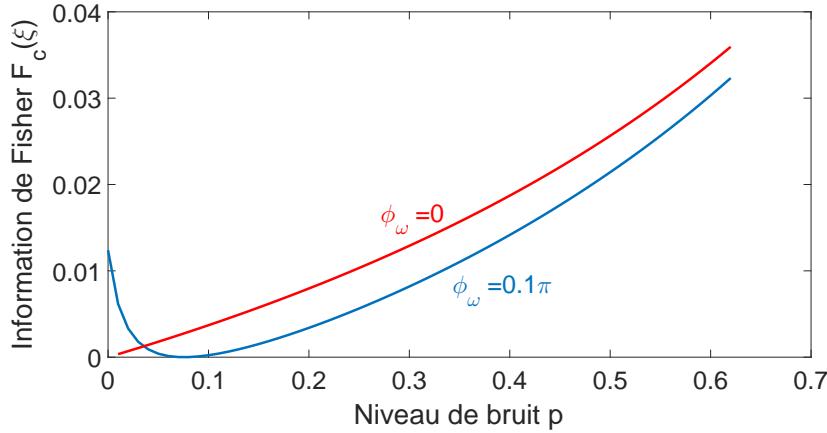


FIGURE 4.11 – Régimes non standards de l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l’Éq. (4.36) en fonction du niveau de bruit  $p$  du bruit de Pauli, avec un axe de rotation  $\vec{n}$  tel que  $\theta_n = 0.5\pi$ ,  $\phi_n = 0.5\pi$ , pour un angle  $\xi = \pi/4$ . Le vecteur de mesure  $\vec{\omega}$  est tel que  $\theta_\omega = 0.75\pi$  et prend différentes valeurs de  $\phi_\omega$  (ici 0 et  $0.1\pi$  comme illustrées).

Sur les Figs. 4.10 et 4.11, selon la configuration du vecteur de mesure  $\vec{\omega}$  par rapport à l’axe de rotation  $\vec{n}$ , les mêmes trois régimes de variation de l’information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  décrits à la section 4.4.1 sont observés, lorsque le niveau  $p$  du bruit de Pauli augmente. Par exemple, la Fig. 4.10 montre une situation standard où  $F_c(\xi)$  décroît de façon monotone lorsque le niveau de bruit  $p$  augmente. En contraste, la Fig. 4.11 présente une variation non monotone de la performance du processus d’estimation quantique lorsque le niveau de bruit  $p$  augmente. Ceci montre à nouveau l’existence d’un niveau de bruit critique, autour de  $p \approx 0.1$  sur la Fig. 4.11, où l’information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  est minimisée. Un tel niveau de bruit critique est spécifiquement défavorable pour la performance du processus d’estimation, comme illustré sur la Fig. 4.11. Finalement, la Fig. 4.11 montre aussi la possibilité pour l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  de croître de façon monotone avec l’augmentation du niveau de bruit  $p$ , indiquant que l’augmentation du niveau de bruit est dans ce cas toujours bénéfique pour le processus d’estimation.

De plus, la Fig. 4.12 montre que les comportements de variations non standards et non monotones sont encore accessibles pour l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  moyennée sur  $\xi$ , lorsque  $F_c(\xi)$  de l’Éq. (4.36) est moyennée sur l’angle  $\xi$  pris uniforme dans l’intervalle  $[0, 2\pi[$ . Lorsque le niveau de bruit  $p$  augmente, la Fig. 4.12 montre une variation non monotone antirésonante et une variation monotone croissante, pour l’information de Fisher moyennée sur l’angle  $\xi$ .

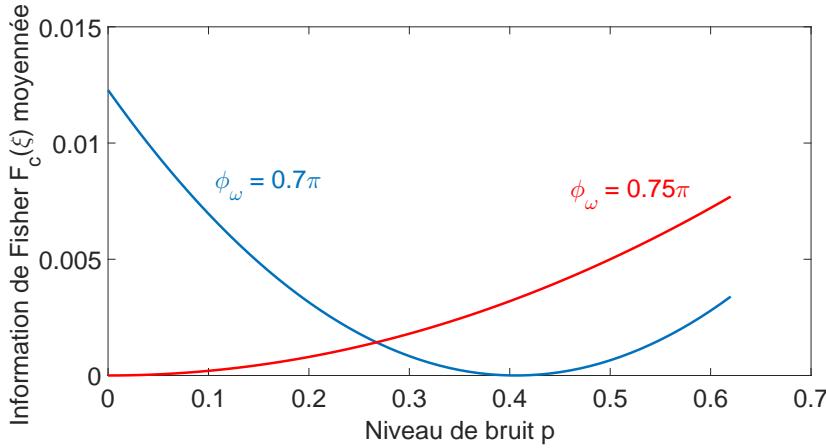


FIGURE 4.12 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  moyennée sur la phase  $\xi \in [0, 2\pi[$  de l’Éq. (4.36) en fonction du niveau de bruit  $p$  du bruit de Pauli, avec un axe de rotation  $\vec{n}$  tel que  $\theta_n = 0.5\pi$ ,  $\phi_n = 0.75\pi$ , pour un angle  $\xi = \pi/4$ . Le vecteur de mesure  $\vec{\omega}$  est tel que  $\theta_\omega = 0.5\pi$  et prend différentes valeurs de  $\phi_\omega$  (ici  $0.7\pi$  et  $0.75\pi$  comme illustrées).

Dans de telles configurations, les variations non standards de l’information de Fisher moyennée sur l’angle  $\xi$  indiquent la possibilité d’un bénéfice pour l’estimation lorsque le niveau de bruit augmente. Ces régimes non standards sont en ce sens globalement accessibles, et non restreints à des valeurs spécifiques ou un intervalle pour l’angle de phase  $\xi$  à estimer.

On peut noter en particulier sur la Fig. 4.12 que les niveaux impliqués pour l’information de Fisher sont relativement faibles comparés au maximum global de 1 indiqué dans la section 4.1 pour l’estimation de phase d’un qubit. Ce maximum global de l’information de Fisher de 1 peut uniquement être atteint sans bruit, avec une sonde d’entrée  $\vec{r}_0$  optimale et des vecteurs de mesures  $\vec{\omega}$  ou  $\vec{a}_k$  optimaux correspondant à l’axe de rotation  $\vec{n}$ . Les conditions de la Fig. 4.12 par exemple sont très éloignées de ces conditions optimales. De telles situations pourraient être imposées par le contexte externe, qui pourrait forcer d’opérer à une information de Fisher  $F_c(\xi)$  faible. Cependant, l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  peut être augmentée par la croissance du niveau de bruit  $p$  dans des configurations définies comme nous avons montré. Bien que l’amélioration résultante soit faible, nous trouvons ceci faisable en pratique. De manière intrinsèque des niveaux faibles de l’information de Fisher classique  $F_c(\xi)$  peuvent aussi être compensés par un nombre croissant du nombre de répétitions du processus d’estimation quantique. Le processus d’estimation quantique impliquant la mesure d’un qubit peut être répété sur un grand nombre de qubits indépendant, des photons ou électrons indépendants par exemple, qui pourraient être accessibles en nombre. Dans de telles conditions l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  est additive et peut être augmentée à des niveaux plus élevés.

#### 4.4.3 Discussion et perspectives sur la résonance stochastique pour l’estimation paramétrique quantique

Nous avons montré la possibilité d’évolutions non standards de la performance du processus d’estimation paramétrique quantique. Le processus d’estimation a été analysé en présence de décohérence représentée par un bruit thermique quantique à une température  $T$  arbitraire. Nous

avons montré la possibilité pour une performance d'estimation  $F_c(\xi)$  de ne pas forcément se dégrader de façon uniforme avec l'augmentation de la température de bruit  $T$ . En particulier, deux régimes d'évolution inhabituels de la performance ont été montrés possibles. Dans des conditions définies, il existe une température de bruit finie spécialement défavorable à l'estimation où la performance antirésonne à un minimum. Dans ce cas un niveau de bruit inférieur ou supérieur est toujours préférable. Un tel régime d'évolution antirésonante montre l'existence d'une valeur de température finie ou d'un intervalle de température qui doit être évité pour une estimation efficace. Dans d'autres conditions, nous avons montré que l'augmentation de la température de bruit améliore toujours la performance d'estimation. Découvrir de telles possibilités contre-intuitives montre le rôle sophistiqué du phénomène de décohérence. Le phénomène de décohérence peut devenir bénéfique pour le traitement de l'information, menant à des moyens inhabituels d'améliorer la performance en augmentant la décohérence.

Nous avons aussi considéré la tâche d'estimation de la phase  $\xi$  du qubit affecté d'un bruit de Pauli quantique. Nous avons montré qu'un bruit unital tel que le bruit de Pauli pouvait aussi provoquer un phénomène de résonance stochastique pour le processus d'estimation paramétrique quantique. Ceci est d'autant plus surprenant que contrairement au bruit thermique, un bruit de Pauli n'induit pas de cassure de symétrie, car dans la représentation de Bloch  $\vec{c} = \vec{0}$ . Dans cette section, avec la quantification générique de la performance par l'information de Fisher classique  $F_c(\xi)$ , nous avons montré que, lorsque le niveau de bruit  $p$  augmente, la performance d'estimation ne se dégrade pas nécessairement de façon monotone. Au contraire la performance d'estimation peut suivre des régimes de variation non standards et non monotones où les hauts niveaux de bruit peuvent être plus favorables pour le processus d'estimation. Ces régimes de variation non standards et non monotones de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  sont représentés dans les Figs. 4.6-4.12 lorsque l'on utilise une mesure de von Neumann définie par les opérateurs de mesure  $M_{\pm} = (I_2 \pm \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma})/2$  de l'Eq. (2.47). Cependant, cette condition n'est pas critique, et des régimes similaires de résonance stochastique peuvent aussi être obtenus lorsque l'on utilise des mesures généralisées pour le processus d'estimation, et ils seraient régis par l'Eq. (4.35) au lieu de l'Eq. (4.36).

## 4.5 Estimation d'état quantique aidée par l'intrication

Nous venons de montrer la possibilité d'effets de bruit utile pour l'estimation de phase sur un système quantique. Dans cette section nous allons étudier l'apport de la propriété d'intrication quantique [106, 134] pour cette tâche fondamentale en traitement de l'information qu'est l'estimation d'un paramètre. Nous cherchons ici à savoir si un protocole tirant parti de la propriété d'intrication permet une amélioration du processus d'estimation quantique, spécialement en présence de bruit, comme il a été montré possible pour un processus de détection d'états quantiques dans la section 3.4. Cette étude a fait l'objet dans le cadre de cette thèse d'une présentation lors d'un colloque national [119].

### 4.5.1 Protocole à un qubit unique

Nous considérons un protocole dans lequel un qubit, matérialisé par un photon, voit sa phase  $\xi$  modifiée lors de son interaction avec un milieu de propagation matérialisant l'évolution unitaire  $U_\xi$ . La Fig. 4.13 illustre le protocole d'estimation d'état quantique à un qubit unique que nous allons étudier dans cette section.

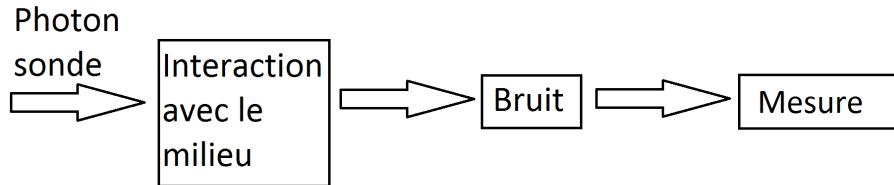


FIGURE 4.13 – Protocole d'estimation de l'angle de phase  $\xi$  acquis par un photon unique lors de son interaction avec un milieu modélisé par l'opérateur unitaire  $U_\xi$ .

Afin d'estimer le changement de phase induit par un milieu, on prépare le signal sonde dans l'état pur :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

d'opérateur densité :

$$\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Cet état quantique  $|\psi_0\rangle$  constitue une sonde optimale [126] pour l'estimation considérée ici. Ce qubit d'opérateur densité  $\rho_0$  constitue le signal sonde. Celui-ci est appliqué à l'entrée d'un processus quantique représenté par l'opérateur unitaire

$$U_\xi = |0\rangle\langle 0| + e^{i\xi}|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

L'opérateur densité du qubit transformé par l'opérateur unitaire  $U_\xi$  devient alors après interaction avec le milieu :

$$\rho_1(\xi) = U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^{-i\xi} \\ e^{i\xi} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

L'état quantique du qubit n'est accessible à la mesure qu'une fois affecté par un bruit dépolarisant  $\mathcal{N}(\cdot)$  défini dans la section 2.3.3 par l'équation :

$$\mathcal{N}(\rho_1) = \rho_2(\xi) = (1-p)\rho_1 + \frac{p}{3} \sum_{j=\{x,y,z\}} \sigma_j \rho_1 \sigma_j^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{e^{-i\xi}(4p-3)}{3} \\ -\frac{e^{i\xi}(4p-3)}{3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

La probabilité  $p \in [0, 1]$  est le niveau de bruit du bruit dépolarisant. Contrairement à l'état quantique initial  $|\psi_0\rangle$  du signal décrit par l'Éq. (4.56) et celui du signal transformé de l'Éq. (4.58), cet état n'est en général pas un état pur mais plutôt un état mélangé, représentant un ensemble statistique d'états purs. Cet état peut aussi être décrit par l'opérateur densité suivant :

$$\rho_2(\xi) = \frac{1}{2} \left[ |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + \left(1 - \frac{4p}{3}\right) (e^{-i\xi}|0\rangle\langle 1| + e^{i\xi}|1\rangle\langle 0|) \right]. \quad (4.60)$$

Notons qu'il est possible de montrer que l'action du bruit dépolarisant  $\mathcal{N}(\cdot)$  commute avec l'action de l'opérateur unitaire  $U_\xi$ , ce qui fait que le bruit  $\mathcal{N}(\cdot)$  sur la Fig. 4.13 pourrait équivalement être placé avant  $U_\xi$ . On peut même envisager un bruit dépolarisant distribué, avec une part agissant avant  $U_\xi$  et une après, le tout étant équivalent à un unique bruit  $\mathcal{N}(\cdot)$  comme sur la Fig. 4.13.

C'est donc ce signal sonde transformé bruité  $\mathcal{N}[\rho_1(\xi)] = \rho_2(\xi)$  qui est accessible pour estimer la phase  $\xi$ . Pour ce faire, on considère une mesure projective du qubit dans la base orthonormale  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_2$ . On obtient ainsi les probabilités des différents résultats de mesure suivantes :

$$\langle +|\rho_2|+\rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos(\xi) \frac{(4p-3)}{3} \right], \quad (4.61)$$

$$\langle -|\rho_2|- \rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(\xi) \frac{(4p-3)}{3} \right]. \quad (4.62)$$

Une stratégie standard d'estimation de  $\xi$  consiste à répéter  $N$  fois l'expérience où le signal sonde est préparé dans le même état d'opérateur densité  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  et le signal transformé bruité  $\rho_2(\xi)$  résultant est mesuré dans la base  $\{|\psi_0\rangle, |\psi_0^\perp\rangle\}$ , avec ici  $|\psi_0^\perp\rangle = |-\rangle$ . On enregistre alors un nombre  $n_+$  de résultats projetant sur  $|\psi_0\rangle = |+\rangle$  selon la probabilité de l'Éq. (4.61), et  $N - n_+$  projetant sur  $|-\rangle$  selon la probabilité de l'Éq. (4.62). On a alors la probabilité  $L$  d'obtenir exactement  $n_+$  qubits dans l'état  $|+\rangle$  sur  $N$  qubits :

$$L = \binom{N}{n_+} (\langle +|\rho_2|+\rangle)^{n_+} (\langle -|\rho_2|- \rangle)^{N-n_+}. \quad (4.63)$$

Afin d'obtenir le meilleur estimateur pour l'angle  $\xi$ , on dérive cette probabilité  $L$  de l'Eq. (4.63) par rapport à  $\xi$  et on annule cette expression. Ceci fournit l'estimateur du maximum de vraisemblance qui est donc :

$$\hat{\xi} = \arccos \left( 3 \frac{N - 2n_+}{N(4p - 3)} \right). \quad (4.64)$$

La performance du protocole d'estimation d'état quantique peut être évaluée par l'erreur quadratique moyenne

$$E_{rr} = \mathbb{E} \left[ (\hat{\xi} - \xi)^2 \right], \quad (4.65)$$

avec  $\mathbb{E}(\cdot)$  notant l'espérance. Cette performance va être évaluée numériquement en fonction du niveau de bruit dans la suite de ce chapitre. Mais avant d'évaluer la performance du protocole à un qubit unique, nous allons envisager un autre protocole d'estimation d'état quantique utilisant la propriété d'intrication, afin de possiblement améliorer la performance du protocole d'estimation d'état quantique.

#### 4.5.2 Protocole à une paire de qubits intriquée

Nous allons maintenant décrire un protocole d'estimation quantique utilisant la propriété d'intrication quantique avant de le comparer au protocole à un photon unique. La Fig. 4.14 illustre le protocole d'estimation d'état quantique à une paire de qubits intriquée que nous allons étudier dans cette section.

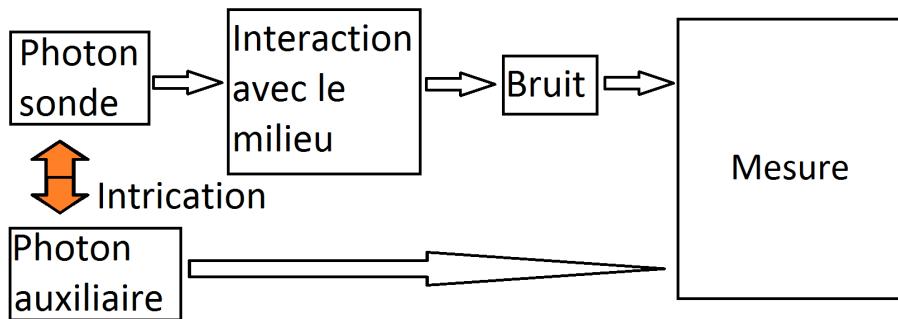


FIGURE 4.14 – Protocole d'estimation de l'angle de phase  $\xi$  acquis par un photon lors de son interaction avec un milieu modélisé par l'opérateur unitaire  $U_\xi$  et avec la présence d'un photon auxiliaire intriqué.

Pour servir de sonde, on prépare maintenant une paire de photons (qubits) intriquée dans l'état d'opérateur densité  $\rho_0$  qui est à présent un état sur l'espace produit tensoriel  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ . La paire de qubits interagit avec le processus  $\xi$ -dépendant  $U_\xi$  à estimer selon la Fig. 4.14. Ainsi, seul le premier qubit de la paire est exposé au processus  $U_\xi$  et au bruit, alors que le second qubit est laissé intouché. D'une façon concrète, le premier qubit représente par exemple un photon qui est conduit par une fibre optique vers l'entrée de l'interféromètre de la Fig. 4.1, où il pénètre puis ressort pour être reconduit par une autre fibre optique vers l'appareil de mesure au laboratoire, et ce faisant se charge de bruit ; alors que le second qubit, lui, reste bien

à l'abri au laboratoire et ne voit rien ni du processus  $U_\xi$  ni du bruit. Toutefois, de façon très contre-intuitive, ce second qubit, s'il est quantiquement intriqué au premier, permet un bénéfice net pour l'estimation, comme nous allons le montrer.

On prépare le signal sonde dans l'état d'opérateur densité

$$\rho_0 = |\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}| \quad (4.66)$$

avec l'état maximalement intriqué à deux qubits

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (4.67)$$

Le signal sonde à deux qubits d'opérateur densité  $\rho_0$  est donc transformé par le processus  $\xi$ -dépendant via l'opérateur produit tensoriel  $U_\xi \otimes I_2$ , pour donner l'état d'opérateur densité  $\rho_1(\xi) = (U_\xi \otimes I_2)\rho_0(U_\xi \otimes I_2)^\dagger$  donnant

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\xi} \end{bmatrix} \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-i\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\xi} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

Le bruit dépolarisant, qui lui aussi n'affecte que le premier qubit de la paire, délivre l'état transformé bruité à deux qubits pouvant s'exprimer par :

$$\rho_2 = (1-p)\rho_1 + \frac{p}{3} \sum_{j=\{x,y,z\}} (\sigma_j \otimes I_2)\rho_1(\sigma_j \otimes I_2)^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2p}{3} & 0 & 0 & -\frac{e^{-i\xi}(4p-3)}{3} \\ 0 & \frac{2p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2p}{3} & 0 \\ -\frac{e^{i\xi}(4p-3)}{3} & 0 & 0 & 1 - \frac{2p}{3} \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Cet état peut aussi être mis sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho_2 = & \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2p}{3}\right) (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{4p}{3}\right) (e^{-i\xi}|00\rangle\langle 11| + e^{i\xi}|11\rangle\langle 00|) + \frac{2p}{3}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \right]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Pour la mesure de l'état bruité d'opérateur densité  $\rho_2(\xi)$  en vue d'estimer  $\xi$ , on considère une mesure projective de la paire de qubits intriquée dans la base orthonormale  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$ , de  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ , avec

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.71)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.72)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.73)$$

et

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (4.74)$$

Cette base projective de  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$  est formée des 4 états dits de Bell qui sont 4 états orthogonaux maximalement intriqués à deux qubits [6]. Cette base est connue sous le nom de base de Bell et constitue une base souvent utile en information quantique [6]. Les probabilités de projeter sur chacun des 4 états de base sont alors les suivantes :

$$\langle \beta_{00} | \rho_2 | \beta_{00} \rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\cos(\xi)(4p - 3)}{3} - \frac{2p}{3} \right], \quad (4.75)$$

$$\langle \beta_{10} | \rho_2 | \beta_{10} \rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\cos(\xi)(4p - 3)}{3} - \frac{2p}{3} \right], \quad (4.76)$$

$$\langle \beta_{01} | \rho_2 | \beta_{01} \rangle = \frac{2p}{6}, \quad (4.77)$$

$$\langle \beta_{11} | \rho_2 | \beta_{11} \rangle = \frac{2p}{6}. \quad (4.78)$$

Pour estimer  $\xi$ , on reproduit la stratégie standard d'estimation de la Section 4.5.1 consistant à répéter  $N$  fois l'expérience où le signal sonde à deux qubits est préparé dans le même état d'opérateur densité  $\rho_0 = |\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}|$  de l'Éq. (4.66) et le signal transformé bruité d'opérateur densité  $\rho_2(\xi)$  de l'Éq. (4.70) résultant est mesuré dans la base  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$ . On enregistre ainsi un nombre  $n_{00}$  de résultats projetant sur  $|\beta_{00}\rangle$ , un nombre  $n_{01}$  de résultats projetant sur  $|\beta_{01}\rangle$ , un nombre  $n_{10}$  sur  $|\beta_{10}\rangle$  et un nombre  $n_{11}$  sur  $|\beta_{11}\rangle$ , avec  $n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11} = N$ .

On a alors la probabilité  $L$  d'obtenir exactement  $n_{00}$  paires de qubits dans l'état  $|\beta_{00}\rangle$ ,  $n_{01}$  paires de qubits dans l'état  $|\beta_{01}\rangle$ ,  $n_{10}$  paires de qubits dans l'état  $|\beta_{10}\rangle$  et  $n_{11}$  paires de qubits dans l'état  $|\beta_{11}\rangle$  sur  $N$  paires de qubits :

$$L = \binom{N}{n_{00}} \binom{N - n_{00}}{n_{01}} \binom{N - n_{00} - n_{01}}{n_{10}} (\langle \beta_{00} | \rho_2 | \beta_{00} \rangle)^{n_{00}} (\langle \beta_{01} | \rho_2 | \beta_{01} \rangle)^{n_{01}} (\langle \beta_{10} | \rho_2 | \beta_{10} \rangle)^{n_{10}} (\langle \beta_{11} | \rho_2 | \beta_{11} \rangle)^{n_{11}}. \quad (4.79)$$

Comme précédemment on dérive alors cette vraisemblance  $L$  de l'Éq. (4.79) par rapport au paramètre  $\xi$ , et on déduit la valeur du paramètre  $\xi$  qui maximise la probabilité  $L$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance est donc pour  $0 < \xi < \pi$  :

$$\hat{\xi} = \arccos \left( \frac{(n_{01} - n_{00}) \left( 1 - \frac{2p}{3} \right)}{(n_{01} + n_{00}) \frac{4p - 3}{3}} \right); \quad (4.80)$$

sa performance est évaluée par l'erreur quadratique moyenne

$$E_{rr} = \langle (\hat{\xi} - \xi)^2 \rangle. \quad (4.81)$$

La Fig. 4.15 montre les erreurs quadratiques obtenues avec les protocoles des Figs. 4.13 et 4.14 pour un bruit dépolarisant. Ces courbes sont obtenues par simulation numérique des deux protocoles pour différentes valeurs de  $\xi$ .

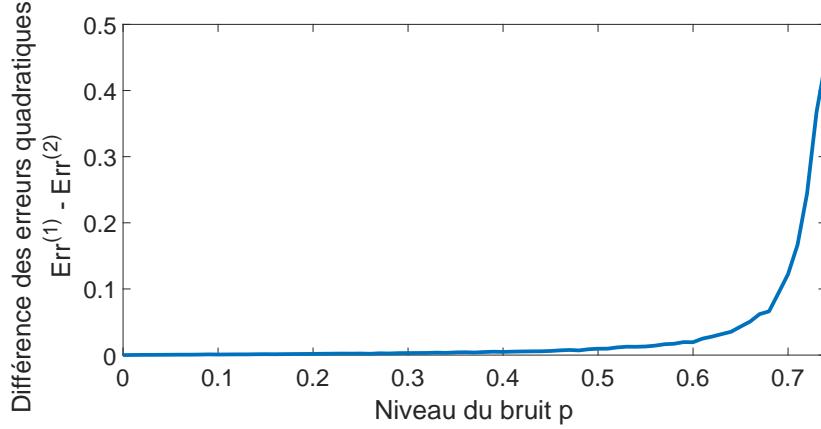


FIGURE 4.15 – Différence des erreurs quadratiques moyennes  $E_{rr}^{(1)}$  de l’Éq. (4.64) pour le protocole à un qubit unique et  $E_{rr}^{(2)}$  de l’Éq. (4.80) pour le protocole à une paire de qubits intriquée, pour une simulation sur des signaux à 10 000 valeurs de  $\xi$  prises au hasard et pour 1 000 itérations par valeur du niveau de bruit  $p$ .

La Fig. 4.15 montre que l’erreur quadratique moyenne  $E_{rr}$  est toujours inférieure pour un protocole à une paire de qubits intriquée que pour protocole à un qubit unique. Ceci démontre la possibilité d’utiliser un qubit auxiliaire intriqué, qui même s’il n’interagit jamais avec le processus à estimer, permet toujours d’améliorer l’estimation de phase en présence de bruit.

Il est possible d’envisager une application de ce scénario d’estimation de phase quantique améliorée par l’intrication à des images numériques. On peut considérer une image numérique en niveaux de gris, où en chaque pixel l’intensité de gris est codée par une phase  $\xi$ . Pour la formation de l’image, en chaque pixel un photon (qubit) sonde interagit avec le milieu à imager et voit ainsi sa phase  $\xi$  affectée selon les propriétés locales de ce milieu. On reproduit alors pour chaque pixel de l’image, l’approche d’estimation de la phase  $\xi$  en présence de bruit que nous venons d’analyser. Le photon sonde, qui interagit avec le milieu à imager, pourra être assisté, en chaque pixel, par un photon auxiliaire intriqué mais n’interagissant nullement avec le milieu à imager. La Fig. 4.16 illustre la simulation numérique d’une telle application avec un bruit dépolarisant.



FIGURE 4.16 – À gauche, l'image en niveaux de gris originale. Au centre, l'image en niveaux de gris, bruitée avec un bruit dépolarisant, acquise pour  $N = 10^3$  qubits uniques par pixel avec le niveau de bruit  $p = 0.72$ . L'erreur quadratique moyenne  $E_{rr}$  pour cette image est de  $E_{rr} = 0.1451$  pour des niveaux de gris codés par une phase  $\xi$  entre 0 et  $\pi$ . À droite, l'image en niveaux de gris, bruitée avec un bruit dépolarisant, acquise pour  $N = 10^3$  paires intriquées par pixel avec le niveau de bruit  $p = 0.72$ . L'erreur quadratique moyenne pour cette image est de  $E_{rr} = 0.1159$  pour des niveaux de gris codés par une phase  $\xi$  entre 0 et  $\pi$ .

On constate sur la Fig. 4.16 que bien que le qubit auxiliaire n'interagisse jamais avec le processus  $U_\xi$  à estimer, son utilisation à travers la propriété d'intrication permet l'amélioration de ce protocole d'estimation d'un paramètre. La dégradation de l'erreur quadratique  $E_{rr}$  avec l'augmentation du niveau de bruit  $p$  est ainsi réduite avec la paire de qubits intriquée.

La Fig. 4.17 montre l'erreur quadratique moyenne  $E_{rr}$  pour un protocole à un qubit unique et pour un protocole à une paire de qubits intriquée en fonction de la phase à estimer  $\xi/\pi$ .

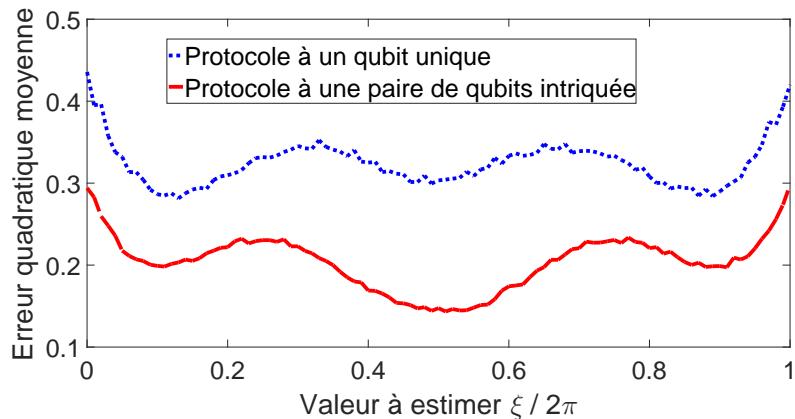


FIGURE 4.17 – Erreur quadratique moyenne  $E_{rr}$  en fonction de la valeur à estimer  $\xi$  pour les protocoles à un qubit unique de l'Éq. (4.64) et à une paire de qubits intriquée de l'Éq. (4.80), pour une simulation avec 1 000 itérations par valeur de  $\xi$  et au niveau de bruit  $p = 0.7$ .

La Fig. 4.17 nous montre que le protocole à une paire intriquée entraîne une erreur quadratique  $E_{rr}$  plus faible que le protocole à un qubit unique. Cette amélioration est plus importante pour des valeurs de  $\xi$  proche de  $\pi/2$ . Pour un bruit dépolarisant la propriété d'intrication quantique peut donc permettre l'amélioration du processus d'estimation quantique. De plus, cette

amélioration se fait sans que le qubit auxiliaire interagisse directement ni avec l'opérateur  $U_\xi$  à estimer ni avec le bruit de manière similaire à l'amélioration en détection étudiée dans la section 3.4.

### 4.5.3 Estimation d'état quantique avec un bruit thermique

Nous venons de présenter un processus d'estimation de phase amélioré par l'intrication en présence de bruit dépolarisant. Pour étendre l'analyse des bénéfices de l'intrication, il est possible de traiter le même processus d'estimation en présence d'un autre type de bruit quantique. C'est ce qui est accompli dans l'annexe C avec un bruit thermique quantique. Les résultats de l'annexe C montrent que le bénéfice de l'intrication pour améliorer la performance d'estimation est préservé à l'identique, qualitativement. Ceci permet d'étendre les bénéfices de l'intrication pour contribuer au traitement du signal quantique.

### 4.5.4 Discussion sur l'apport de l'intrication pour le processus d'estimation d'état quantique

Dans cette section 4.5 nous avons montré la possibilité d'un apport bénéfique de l'intrication quantique pour l'estimation d'état quantique en présence de bruit. En effet, grâce à la propriété d'intrication quantique l'erreur quadratique moyenne est moindre pour un protocole à une paire de qubits intriquée que pour un protocole à un qubit unique. La propriété d'intrication quantique peut donc, comme le phénomène de résonance stochastique, améliorer le processus d'estimation quantique. Cet apport est surprenant à cause de l'absence d'interaction directe entre le qubit auxiliaire et le processus introduisant la variable  $\xi$  ou le bruit. En effet, de manière similaire à la section 3.4 pour la détection, nous avons montré que la propriété d'intrication permet l'amélioration d'un processus de traitement du signal (estimation ici) grâce à un système auxiliaire intriqué n'interagissant pas avec le signal à détecter ou à estimer (ni avec le bruit).



# Chapitre 5

## Transmission quantique d'information

Le domaine de la transmission d'information à travers un canal de transmission [1, 2, 135] traite de la capacité qu'a un moyen de transmission appelé canal à transmettre de l'information d'un émetteur à un récepteur. Un canal pouvant être bruité, la quantité d'information qu'il peut transmettre dépend donc du niveau de bruit. Bien que le comportement standard de la transmission d'information à travers un canal soit une diminution de la quantité d'information transmissible par le canal avec l'augmentation du niveau de bruit, la transmission d'information classique peut être soumise à des effets de bruit utile ou résonance stochastique [62–69, 136, 137].

Divers effets purement quantiques ont été montrés pour les canaux d'information quantiques comme un effet nommé superactivation, consistant en la possibilité pour deux canaux quantiques de capacité informationnelle nulle d'être utilisés ensemble pour obtenir une capacité informationnelle strictement positive [138, 139]. Pour la transmission d'information à travers un canal quantique bruité, que nous allons étudier dans ce chapitre, plusieurs études ont mis en évidence le phénomène de résonance stochastique. Il a été montré pour le canal de Pauli [70, 140, 141], i.e. un canal appliquant l'un des bruits de Pauli, que le phénomène de bruit utile était dépendant de la mesure informationnelle étudiée. En particulier, certaines mesures informationnelles couramment utilisées ne permettaient pas ce genre de phénomène. La référence [73] a montré la possibilité de résonance stochastique dans une combinaison convexe entre un canal de phase-flip et un canal d'amortissement d'amplitude.

Dans ce chapitre, pour montrer la possibilité de résonance stochastique dans la transmission quantique d'information, nous nous intéresserons au bruit thermique défini dans la section 2.3.3. Nous analyserons ici des quantités informationnelles basées sur l'entropie de von Neumann.

Nous allons montrer dans cette section la possibilité d'un phénomène de bruit utile pour ces quantités informationnelles. Cette étude a fait l'objet dans le cadre de cette thèse d'un article dans une revue scientifique internationale [142] et de deux présentations lors de séminaires [143] et [144].

## 5.1 Entropie du qubit

Un qubit de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2 est préparé dans un état quantique représenté par l'opérateur densité  $\rho$ . Ce qubit est paramétré dans la représentation de Bloch définie dans la section 2.1.4 comme

$$\rho = \frac{1}{2} \left( I_2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \right). \quad (5.1)$$

Dans la théorie de l'information classique la quantité d'information peut être quantifiée utilement par l'entropie de Shannon  $H$ . Pour un système prenant deux états possibles avec pour probabilités  $P_0$  et  $P_1 = 1 - P_0$  alors l'entropie de Shannon s'écrit [1, 2] :

$$H = -P_0 \log_2(P_0) - P_1 \log_2(P_1). \quad (5.2)$$

L'entropie de Shannon  $H$  prend son minimum en 0 pour un système avec un état de probabilité  $P_0$  ou  $P_1$  égale à 1. L'entropie de Shannon  $H$  croît jusqu'à 1 lorsque les deux états sont équiprobables, i.e.  $P_0 = P_1 = 1/2$ . L'entropie de Shannon  $H$  est ainsi maximale lorsque l'état du système est le plus imprévisible. Dans la théorie de l'information quantique l'entropie d'un

système quantique d'opérateur densité  $\rho$  est définie par son entropie de von Neumann [8, 145]

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2(\rho)]. \quad (5.3)$$

Un qubit avec un vecteur de Bloch  $\vec{r}$  a un opérateur densité  $\rho$  dans l'Éq. (5.1) avec deux valeurs propres

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \|\vec{r}\|}{2}. \quad (5.4)$$

L'entropie de von Neumann  $S(\rho)$  de l'Éq. (5.3) peut alors s'écrire

$$S(\rho) = h\left(\frac{1 + \|\vec{r}\|}{2}\right) + h\left(\frac{1 - \|\vec{r}\|}{2}\right), \quad (5.5)$$

avec la fonction auxiliaire

$$h(u) = -u \log_2(u). \quad (5.6)$$

L'entropie de von Neumann  $S(\rho)$  de l'Éq. (5.5) est une fonction monotone décroissante non négative de la norme du vecteur de Bloch  $\|\vec{r}\|$ . Un qubit dans un état pur a une norme  $\|\vec{r}\| = 1$  et une entropie  $S(\rho) = 0$ . Un état mélangé a une norme  $\|\vec{r}\| < 1$  et une entropie  $S(\rho) > 0$ , qui atteint son maximum  $S(\rho) = 1$  quand  $\|\vec{r}\| = 0$  pour l'état maximalement mélangé d'opérateur densité  $\rho = I_2/2$ . Il en résulte que l'entropie  $S(\rho)$  est interprétable comme une mesure du désordre ou de l'imprédictibilité de l'état quantique d'opérateur densité  $\rho$ , avec  $S(\rho)$  monotone décroissant lorsque l'opérateur densité  $\rho$  passe d'un état quantique pur à l'état maximalement mélangé d'opérateur densité  $\rho = I_2/2$ . L'entropie de von Neumann permet l'expression de différentes mesures informationnelles permettant de quantifier les performances de divers processus de transmission quantique d'information comme nous allons le voir dans la suite.

Nous considérons que le qubit dans l'état d'opérateur densité  $\rho$  est transmis par un canal de communication bruité généralement représentable par un superopérateur  $\mathcal{N}(\cdot)$  défini positif et préservant la trace implémentant la transformation entrée-sortie définie dans la section 2.1.3 par l'équation

$$\rho \longmapsto \rho' = \mathcal{N}(\rho) = \sum_{k=1}^K \Lambda_k \rho \Lambda_k^\dagger, \quad (5.7)$$

caractérisé par les  $k$  opérateurs de Kraus  $\Lambda_k$  satisfaisant

$$\sum_{k=1}^K \Lambda_k^\dagger \Lambda_k = I_2. \quad (5.8)$$

Cela est équivalent à transformer le vecteur de Bloch du qubit par la transformation affine [6, 146]

$$\vec{r} \longmapsto \vec{r}' = A\vec{r} + \vec{c}, \quad (5.9)$$

avec  $A$  une matrice réelle  $3 \times 3$  et  $\vec{c}$  un vecteur réel dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous nous intéressons particulièrement à l'étude de l'impact d'un canal quantique bruité  $\mathcal{N}(\cdot)$  très important pour le qubit, qu'est le bruit thermique quantique défini dans la section 2.3.3. Un tel bruit thermique, contrairement à d'autres modèles de bruits quantiques moins sophistiqués, engendre des effets

de bruit non triviaux se manifestant par des variations non standards de l'entropie de von Neumann et de quantités informationnelles associées, comme nous allons le montrer ici. Le bruit quantique thermique [6, 146] est caractérisé par l'Éq. (5.7) et les  $K = 4$  opérateurs de Kraus des Éq. (2.68)–(2.71).

La température de bruit  $T$  servira dans cette étude de niveau de bruit. Le vecteur de Bloch d'entrée du canal de communication  $\vec{r} = [r_x, r_y, r_z]^\top$  est transformé par l'Éq. (2.76) qui donne le vecteur de Bloch en sortie du canal  $\vec{r}' = A\vec{r} + \vec{c}$  ayant pour norme au carré

$$\|\vec{r}'\|^2 = (1 - \gamma)(r_x^2 + r_y^2) + r_z'^2. \quad (5.10)$$

La composante en  $z$  élevée au carré

$$r_z'^2 = [(1 - \gamma)r_z + (2p - 1)\gamma]^2 \quad (5.11)$$

porte à travers la probabilité  $p$  la dépendance de  $\|\vec{r}'\|^2$  avec la température de bruit  $T$  selon l'Éq. (2.74). L'entropie de von Neumann  $S(\rho')$  de l'état de sortie d'opérateur densité  $\rho'$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r}'$  est contrôlée par la norme  $\|\vec{r}'\|$  insérée dans l'Éq. (5.5). Afin d'analyser l'influence de la température de bruit  $T$  sur l'entropie  $S(\rho')$  de l'état de sortie bruité, nous utilisons le fait que  $S(\rho')$  est une fonction monotone décroissante de la norme  $\|\vec{r}'\|$ . De plus,  $\|\vec{r}'\|$ , ou  $\|\vec{r}'\|^2$  dans l'Éq. (5.10), est influencé par la température  $T$  uniquement à travers la probabilité  $p$  dans  $r_z'^2$  de l'Éq. (5.11). La composante en  $z$  élevée au carré  $r_z'^2$  de l'Éq. (5.11) est une parabole en forme de  $\cup$  en fonction de la variable  $p$ . Cette évolution en parabole de  $r_z'^2$  est limitée par l'intervalle de définition  $p \in [1/2, 1]$  couvert par la probabilité  $p$  lorsque la température de bruit  $T$  dans l'Eq. (2.74) décroît de l'infini à zéro. Le minimum de cette parabole est zéro et est atteint quand  $(1 - \gamma)r_z = -(2p - 1)\gamma$ , correspondant pour la variable  $p$  à la valeur critique

$$p_c = \frac{1}{2} - \frac{1 - \gamma}{2\gamma}r_z. \quad (5.12)$$

Lorsque la température  $T$  augmente de 0 vers  $\infty$ , produisant une décroissance de  $p$  de 1 à  $1/2$ , il en résulte trois régimes de variation possible de  $\|\vec{r}'\|^2$  dans l'Éq. (5.10), à  $\gamma \in [0, 1[$  constant. Par conséquent l'entropie de sortie  $S(\rho')$  de l'Éq. (5.5) peut suivre trois régimes de variation différents dépendant de la situation de  $p_c$  de l'Éq. (5.12) par rapport à l'intervalle de définition  $[1/2, 1] \ni p$ . Ces variations vont se produire entre deux valeurs extrêmes. À  $T = 0$  (i.e. à  $p = 1$ ) la composante  $r_z'^2$  est déterminée dans l'Éq. (5.11) par

$$r_z'^2(T = 0) = [(1 - \gamma)r_z + \gamma]^2 \quad (5.13)$$

fixant l'entropie  $S(\rho'; T = 0)$  via l'Éq. (5.5). À  $T = \infty$  (i.e. à  $p = 1/2$ ) la composante  $r_z'^2$  est déterminée par

$$r_z'^2(T = \infty) = [(1 - \gamma)r_z]^2 \quad (5.14)$$

fixant  $S(\rho'; T = \infty)$ . En particulier, selon les conditions, on peut avoir  $S(\rho'; T = 0) < S(\rho'; T = \infty)$ . Ce comportement d'augmentation de l'entropie d'un qubit de sortie bruité à haute température est attendu de façon naturelle. Cependant, le comportement opposé est aussi possible.  $S(\rho'; T = 0) > S(\rho'; T = \infty)$  peut aussi être trouvé, comme nous allons le montrer, manifestant une propriété contre-intuitive d'entropie plus faible pour des températures de bruit supérieures.

Entre les deux extrêmes à  $T = 0$  et  $T = \infty$ , comme indiqué précédemment trois régimes de variation sont possibles pour l'entropie  $S(\rho')$  d'un qubit bruité, que nous allons maintenant analyser [142].

### 5.1.1 Entropie croissante

Quand l'état d'entrée d'opérateur densité  $\rho$  est tel que  $r_z \geq 0$ , alors dans l'Éq. (5.12) on a  $p_c \leq 1/2$ . La valeur critique  $p_c$  est telle que le minimum de la parabole  $r_z'^2$  de l'Éq. (5.11) en forme de  $\cup$  localisé en  $p_c$  intervient toujours avant l'intervalle de définition  $[1/2, 1] \ni p$ . Par conséquent,  $r_z'^2$  de l'Éq. (5.11) augmente lorsque la probabilité  $p$  augmente dans  $[1/2, 1]$ . La même chose est vraie pour  $\|\vec{r}'\|^2$  dans l'Éq. (5.10). Cela implique une entropie de sortie décroissante  $S(\rho')$  dans l'Éq. (5.5) lorsque  $p$  croît dans  $[1/2, 1]$ . De façon équivalente l'entropie de sortie  $S(\rho')$  décroît lorsque la température  $T$  décroît de  $\infty$  vers 0. Par conséquent, lorsque la température  $T$  du bruit thermique augmente de 0 à  $\infty$ , la probabilité  $p$  résultant de l'Éq. (2.74) décroît de 1 à  $1/2$ , et l'entropie de sortie  $S(\rho')$  de l'Éq. (5.5) croît de  $S(\rho'; T = 0)$  vers  $S(\rho'; T = \infty) > S(\rho'; T = 0)$ . Ce régime est naturellement attendu. L'entropie  $S(\rho')$  de l'état de sortie  $\rho'$  du canal bruité, croît lorsque la température  $T$  croît. Une illustration typique de ce régime d'entropie croissante est présentée sur la Fig. 5.1.

L'influence de la température de bruit  $T$  est montrée sur la Fig. 5.1 et sur les figures comparables de ce chapitre, comme une fonction de la variable auxiliaire

$$T_p = 2(1 - p) \quad (5.15)$$

interprétée comme une température de bruit réduite. De cette façon, à partir de l'Éq. (2.74), la température réduite  $T_p$  est une fonction monotone croissante de la température  $T$ , pour toutes valeurs de la différence d'énergie  $E_1 - E_0 > 0$ . Lorsque la température  $T$  est égale à 0 alors la probabilité  $p$  est égale à 1 et la température réduite  $T_p$  est égale à 0, alors que lorsque la température  $T$  tend vers  $\infty$  alors la probabilité  $p$  tend vers  $1/2$  et la température réduite  $T_p$  tend vers 1. Une température  $T$  croissante de 0 à  $\infty$  est alors transformée de façon monotone en une température réduite  $T_p$  croissante de 0 vers 1. Cela permet la praticité d'un intervalle fini pour la température réduite  $T_p \in [0, 1]$  afin de montrer l'influence de la température de bruit  $T \in [0, \infty[$ , et aussi d'éviter que l'analyse quantitative dépende de la valeur exacte de la différence d'énergie  $E_1 - E_0 > 0$ , celle-ci n'étant pas significativement importante.

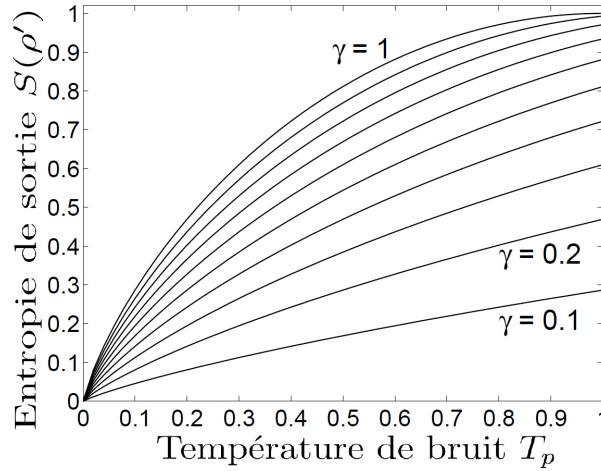


FIGURE 5.1 – Entropie de sortie croissante  $S(\rho')$  comme une fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour le facteur d'amortissement  $\gamma$  croissant de  $\gamma = 0.1$  à  $\gamma = 1$  par pas de 0.1, pour un état d'entrée  $\rho = |0\rangle\langle 0|$  caractérisé par  $\vec{r} = [0, 0, 1]^\top$ .

### 5.1.2 Entropie résonante

Lorsque l'état d'entrée d'opérateur densité  $\rho$  est tel que  $-\gamma < (1 - \gamma)r_z < 0$  ou de façon équivalente  $-\gamma/(1 - \gamma) < r_z < 0$ , alors dans l'Éq. (5.12),  $p_c \in ]1/2, 1[$ . La valeur critique  $p_c$  appartenant à l'intervalle  $]1/2, 1[$ , le minimum de la parabole  $r_z'^2$  de l'Éq. (5.11) en forme de  $\cup$  localisé à  $p_c$  intervient toujours dans l'intervalle  $[1/2, 1] \ni p$ . Par conséquent,  $r_z'^2$  de l'Éq. (5.11) ainsi que  $\|\vec{r}'\|^2$  de l'Éq. (5.10) subissent des variations en forme de  $\cup$  lorsque  $p$  augmente dans  $[1/2, 1]$  et atteignent leur minimum en  $p = p_c$ . Cela implique que l'entropie de sortie  $S(\rho')$  de l'Éq. (5.5) suit une variation résonante en forme de  $\cap$  lorsque  $p$  croît dans  $[1/2, 1]$  avec  $S(\rho')$  atteignant son maximum en  $p = p_c$ . Cela est équivalent à une entropie de sortie  $S(\rho')$  suivant une variation résonante en forme de  $\cap$  lorsque la température de bruit  $T$  croît de 0 vers  $\infty$ . L'entropie de sortie  $S(\rho')$  atteint son maximum pour une température critique  $T_c$  liée à  $p_c$  par l'Éq. (2.74). Des illustrations typiques de ce régime résonant pour l'entropie sont présentées sur la Fig. 5.2.

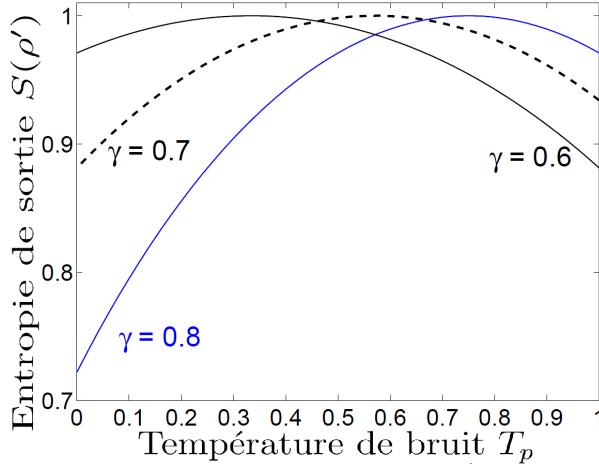


FIGURE 5.2 – Entropie de sortie résonante  $S(\rho')$  en fonction de la température de bruit  $T_p$ , avec un facteur d'amortissement  $\gamma = 0.6, 0.7$  et  $0.8$ , pour un état d'entrée  $\rho = |1\rangle\langle 1|$  avec son vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -1]^\top$ .

Les variations résonantes de la Fig. 5.2 montrent en particulier que lorsque l'entropie de sortie  $S(\rho')$  est interprétée comme une mesure du désordre ou d'une propriété d'imprédictibilité de l'état quantique  $\rho'$ , alors il peut exister, en fonction des paramètres, un intervalle de températures finies où une telle mesure d'imprédictibilité de l'opérateur densité  $\rho'$  est maximale. Il existe donc des intervalles de températures finies étant spécifiquement défavorables à la pureté de l'état quantique, et des températures inférieures, mais aussi supérieures seront moins dégradantes pour l'état quantique. Ce phénomène de résonance stochastique où un niveau de bruit fini entraîne un extremum d'une mesure informationnelle est comparable à ceux rencontrés en détection dans le chapitre 3 et en estimation dans le chapitre 4.

### 5.1.3 Entropie décroissante

Lorsque l'état d'entrée d'opérateur densité  $\rho$  est tel que  $(1 - \gamma)r_z \leq -\gamma$  ou de façon équivalente  $r_z \leq -\gamma/(1 - \gamma)$ , alors dans l'Éq. (5.12) la valeur critique est telle que  $p_c \geq 1$ . Le minimum de la parabole  $r_z'^2$  de l'Éq. (5.11) en forme de  $\cup$  positionné en  $p_c$  intervient ainsi toujours après l'intervalle de définition  $[1/2, 1] \ni p$ . Par conséquent,  $r_z'^2$  de l'Éq. (5.11) ainsi que  $\|\vec{r}'\|^2$  de l'Éq. (5.10) décroissent lorsque  $p$  croît dans  $[1/2, 1]$ . Ce qui implique une entropie de sortie  $S(\rho')$  de l'Éq. (5.5) croissante quand  $p$  croît dans  $[1/2, 1]$  ou de façon équivalente lorsque la température  $T$  décroît de  $\infty$  vers  $0$ . Autrement dit, lorsque la température  $T$  du bruit thermique croît de  $0$  vers  $\infty$ , alors l'entropie de sortie  $S(\rho')$  décroît de  $S(\rho'; T = 0)$  vers  $S(\rho'; T = \infty) < S(\rho'; T = 0)$ . Des illustrations typiques de ce régime d'entropie décroissante sont présentées sur la Fig. 5.3.

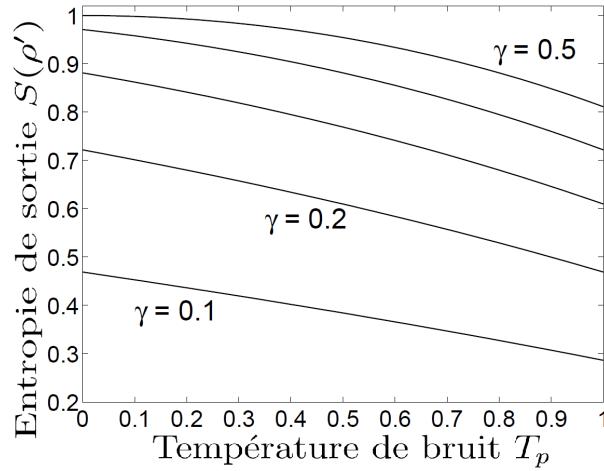


FIGURE 5.3 – Entropie de sortie  $S(\rho')$  décroissante en fonction de la température de bruit  $T_p$ , pour un facteur d'amortissement  $\gamma$  croissant de  $\gamma = 0.1$  vers  $\gamma = 0.5$  par pas de 0.1, pour un état d'entrée  $\rho = |1\rangle\langle 1|$  avec un vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -1]^\top$ .

Un état d'entrée d'opérateur densité  $\rho$  a un vecteur de Bloch  $\vec{r}$  avec une composante en  $z$  nécessairement limitée à  $r_z \in [-1, 1]$ , et le bruit thermique a un facteur d'amortissement  $\gamma \in [0, 1]$ . À travers ces conditions réalisables, la Fig. 5.4 représente les trois domaines dans le plan  $(\gamma, r_z)$  correspondant aux trois régimes de variation possible de l'entropie de sortie  $S(\rho')$  en fonction de la température  $T$  de bruit, contrôlée par la position de  $p_c$  dans l'Eq. (5.12) en relation avec l'intervalle  $[1/2, 1]$ .

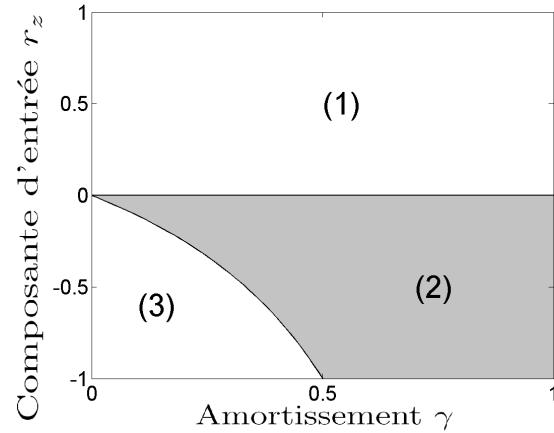


FIGURE 5.4 – Pour  $(\gamma, r_z) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ , les trois domaines de variation, en fonction de la température de bruit  $T$ , de l'entropie  $S(\rho')$  de l'état de sortie  $\rho'$  de l'Eq. (5.5) pour le canal avec un bruit thermique. Le domaine (1) est une entropie de sortie  $S(\rho')$  croissante lorsque  $r_z \geq 0$ ; le domaine (2) en gris est une entropie  $S(\rho')$  résonante lorsque  $-\gamma/(1-\gamma) < r_z < 0$ ; le domaine (3) est une entropie  $S(\rho')$  décroissante lorsque  $r_z \leq -\gamma/(1-\gamma)$ . La courbe séparant les domaines (2) et (3) a pour équation  $r_z = -\gamma/(1-\gamma)$ .

Cette analyse montre en particulier qu'il n'existe pas un quatrième régime de variation, où

une entropie  $S(\rho')$  non monotone puisse antirésonner à un minimum pour une température  $T$  critique, identifiant une température non nulle particulièrement bénéfique où l'imprédictibilité de l'état d'opérateur densité  $\rho'$  serait minimisée. Pour les variations non monotones de l'entropie de sortie  $S(\rho')$ , il existe seulement des configurations comme montrées sur la Fig. 5.2, où  $S(\rho')$  résonne à son maximum pour une température  $T$  critique.

Nous allons maintenant examiner d'autres mesures utiles liées à la mesure fondamentale qu'est l'entropie de von Neumann. Ces mesures informationnelles caractérisent le flux d'entropie avec l'environnement et la performance pour la communication d'information à travers un canal bruité. Nous allons étudier leurs variations avec la température de bruit  $T$ .

## 5.2 Entropie d'échange

Une autre quantité informationnelle est l'entropie d'échange  $S(\rho, \mathcal{N})$  [6, 147], qui représente la quantité d'entropie générée dans l'environnement par l'action du canal quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$  implémentant la transmission bruitée d'un état d'opérateur densité  $\rho$ . D'un point de vue informationnel, l'entropie d'échange  $S(\rho, \mathcal{N})$  quantifie l'information échangée entre le système quantique initialement dans l'état d'opérateur densité  $\rho$  et l'environnement durant l'évolution par  $\mathcal{N}(\cdot)$ .

Lorsque l'environnement est dans un état pur  $|\psi\rangle$  à l'entrée du canal (cela est toujours possible, via une étape de purification), après l'action du canal bruité  $\mathcal{N}(\cdot)$  sur l'état d'opérateur densité  $\rho$ , l'environnement est en sortie dans l'état mélangé d'opérateur densité  $\rho'_E$  que l'on peut exprimer [6, 147] avec la représentation matricielle  $\rho'_E = [W_{k\ell}]$  d'éléments de matrice

$$W_{k\ell} = \text{Tr}(\Lambda_k \rho \Lambda_\ell^\dagger) , \quad (5.16)$$

pour  $k, \ell = 1$  à  $K$ . L'entropie d'échange  $S(\rho, \mathcal{N})$  est l'équivalent de l'entropie de sortie de l'environnement, i.e.  $S(\rho, \mathcal{N}) = S(\rho'_E)$ . Lorsque l'état d'entrée d'opérateur densité  $\rho$  est exprimé comme une matrice  $2 \times 2$  en fonction des trois composantes du vecteur de Bloch  $\vec{r} = [r_x, r_y, r_z]^\top$  :

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{bmatrix} , \quad (5.17)$$

alors en utilisant les Éqs. (2.68)–(2.71) dans l'Éq. (5.16) on obtient l'état de sortie de l'environnement [142] :

$$\rho'_E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p[2 - \gamma(1 - r_z)] & p\sqrt{\gamma}(r_x - ir_y) & \sqrt{p(1-p)}\sqrt{1-\gamma} & \sqrt{p(1-p)}\sqrt{\gamma(1-\gamma)}(r_x + ir_y) \\ p\sqrt{\gamma}(r_x + ir_y) & p\gamma(1 - r_z) & \sqrt{p(1-p)}\sqrt{\gamma(1-\gamma)}(r_x + ir_y) & 0 \\ \sqrt{p(1-p)}\sqrt{1-\gamma} & \sqrt{p(1-p)}\sqrt{\gamma(1-\gamma)}(r_x - ir_y) & (1-p)[2 - \gamma(1 + r_z)] & (1-p)\sqrt{\gamma}(r_x + ir_y) \\ \sqrt{p(1-p)}\sqrt{\gamma(1-\gamma)}(r_x - ir_y) & 0 & (1-p)\sqrt{\gamma}(r_x - ir_y) & (1-p)\gamma(1 + r_z) \end{bmatrix} . \quad (5.18)$$

Ensuite afin d'évaluer l'entropie  $S(\rho'_E)$ , les quatre valeurs propres de l'opérateur densité  $\rho'_E$  de l'Éq. (5.18) sont déterminées. Les expressions analytiques exactes peuvent être déterminées sous leurs formes générales, mais sont trop volumineuses pour être écrites ici. Cependant, pour

le coefficient d'amortissement  $\gamma = 0$  lorsqu'il n'y a pas de bruit, l'état d'opérateur densité  $\rho'_E$  de l'Éq. (5.18) est réduit à

$$\rho'_E = \begin{bmatrix} p & 0 & \sqrt{p(1-p)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{p(1-p)} & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

avec les quatre valeurs propres 0 et 1 ayant pour multiplicités 3 et 1. Lorsqu'il n'y a pas de bruit l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  s'annule comme prévu.

Aussi, lorsque l'état d'entrée d'opérateur densité  $\rho$  pour le qubit est un état pur, avec l'environnement en entrée dans un état pur lui aussi, le système conjoint qubit-environnement subit une évolution unitaire où l'état conjoint reste pur. On peut en déduire [6] qu'en sortie du canal induisant une interaction avec l'environnement matérialisant l'effet du bruit sur le qubit, l'état de sortie d'opérateur densité  $\rho'$  du qubit bruité et l'état de sortie d'opérateur densité  $\rho'_E$  de l'environnement ont la même entropie. En d'autres termes, lorsque l'état d'entrée d'opérateur densité  $\rho$  est pur, l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  coïncide avec l'entropie de sortie  $S(\rho')$ , assurant que l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  puisse aussi subir les trois mêmes régimes de variation (décroissant, résonant et croissant) que l'entropie de sortie  $S(\rho')$  lorsque la température de bruit  $T$  croît.

De plus, afin de trouver les mêmes possibilités de variations que l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  avec un état d'entrée mélangé (non pur) d'opérateur densité  $\rho$ , nous considérons des classes réduites où l'opérateur densité  $\rho$  est caractérisé par le vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, r_z]^\top$  avec  $r_z \in [-1, 1]$ . Ce vecteur de Bloch particulier donne avec l'Éq. (5.18) l'opérateur densité de l'état de sortie de l'environnement

$$\rho'_E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p[2 - \gamma(1 - r_z)] & 0 & 2\sqrt{p(1-p)}\sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & p\gamma(1 - r_z) & 0 & 0 \\ 2\sqrt{p(1-p)}\sqrt{1-\gamma} & 0 & (1-p)[2 - \gamma(1 + r_z)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-p)\gamma(1 + r_z) \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Afin d'évaluer l'entropie de sortie  $S(\rho'_E)$ , les 4 valeurs propres de  $\rho'_E$  de l'Éq. (5.20) sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left[ (2p-1)\gamma r_z + 2 - \gamma - \sqrt{\Gamma} \right], \quad (5.21)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \left[ (2p-1)\gamma r_z + 2 - \gamma + \sqrt{\Gamma} \right], \quad (5.22)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(1-p)\gamma(1+r_z), \quad (5.23)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}p\gamma(1-r_z), \quad (5.24)$$

avec

$$\Gamma = \gamma^2 r_z^2 + 2(2p-1)\gamma(2-\gamma)r_z + (2p-1)^2\gamma^2 + 4(1-\gamma). \quad (5.25)$$

Dans le cas où  $r_z = -1$ , les 4 valeurs propres des Éqs. (5.21)–(5.24) sont réduites à  $p\gamma$ ,  $1-p\gamma$  et 0 avec pour multiplicités respectives 1, 1 et 2. Lorsque  $r_z = 1$ , elles sont réduites à

$(1-p)\gamma$ ,  $1-(1-p)\gamma$  et 0 avec pour multiplicités respectives 1, 1 et 2. C'est une configuration où l'opérateur densité  $\rho$  en entrée est pur, et comme discuté précédemment, l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  coïncide exactement avec l'entropie de sortie  $S(\rho')$ . L'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  subit donc aussi les trois mêmes régimes de variation que  $S(\rho')$  lorsque la température de bruit  $T$  croît. Nous illustrons dans les Figs. 5.5–5.9, d'autres conditions avec des états d'entrée d'opérateurs densité  $\rho$  mélangés, aussi régies par les Éqs. (5.21)–(5.24), où l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  ne coïncide plus avec l'entropie de sortie  $S(\rho')$ . Bien que ces deux entropies ne coïncident pas, les trois régimes de variation de  $S(\rho'_E)$  peuvent bien être observés lorsque la température de bruit  $T$  croît.

Les Figs. 5.5 et 5.6 montrent le comportement plus standard, où l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  représentant l'entropie de l'environnement, croît lorsque la température de bruit  $T$  croît. Cela peut être obtenu lorsque l'état d'entrée d'opérateur densité  $\rho$  est pur comme sur la Fig. 5.5, mais aussi avec un état d'entrée mélangé d'opérateur densité  $\rho$ , comme illustré sur la Fig. 5.6.

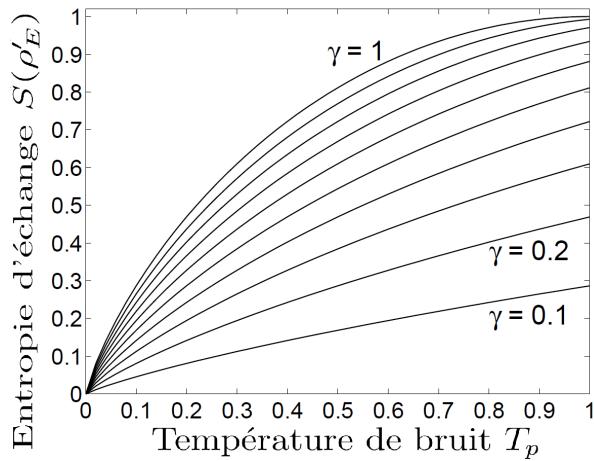


FIGURE 5.5 – Entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  croissante en fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour un facteur d'amortissement  $\gamma$  croissant de  $\gamma = 0$  vers  $\gamma = 1$  par pas de 0.1 pour un état d'entrée  $\rho = |0\rangle\langle 0|$  pur de vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, 1]^\top$ .

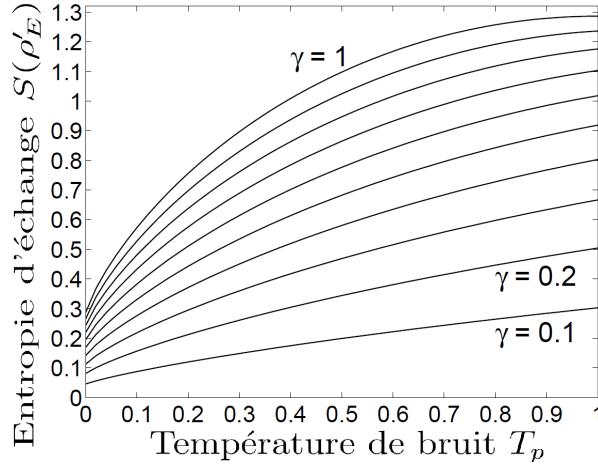


FIGURE 5.6 – Entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  croissante en fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour un facteur d'amortissement  $\gamma$  croissant de  $\gamma = 0$  vers  $\gamma = 1$  par pas de 0.1 pour un état d'entrée  $\rho$  mélangé avec un vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, 0.9]^\top$ .

Afin de comparer les différents comportements, les Figs. 5.7–5.10 montrent la possibilité d'un comportement moins standard, où l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  résonne ou décroît lorsque la température de bruit  $T$  augmente, cela avec des états d'entrée purs et mélangés d'opérateur densité  $\rho$ . Les Figs. 5.7 et 5.8 montrent des variations résonantes, où  $S(\rho'_E)$  atteint son maximum pour une valeur critique finie de la température de bruit  $T$ .

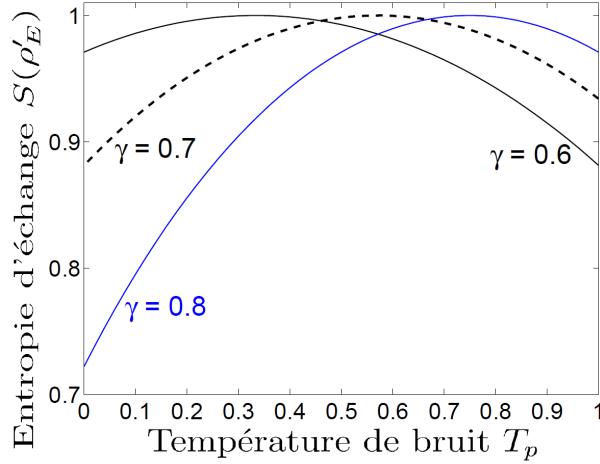


FIGURE 5.7 – Entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  résonante en fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour un facteur d'amortissement  $\gamma$  prenant les valeurs 0.6, 0.7 et 0.8 pour un état d'entrée  $\rho = |1\rangle\langle 1|$  pur avec vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -1]^\top$ .

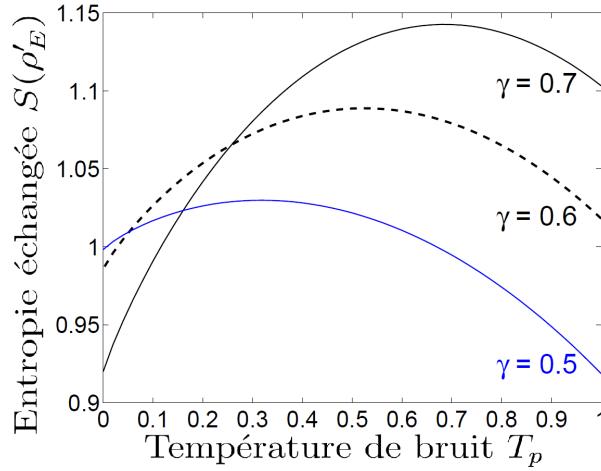


FIGURE 5.8 – Entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  résonante en fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour un facteur d'amortissement  $\gamma$  prenant les valeurs 0.5, 0.6 et 0.7 pour un état d'entrée  $\rho$  mélangé avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

Les Figs. 5.9 et 5.10 montrent les variations décroissantes, où l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  est réduite lorsque la température de bruit  $T$  croît.

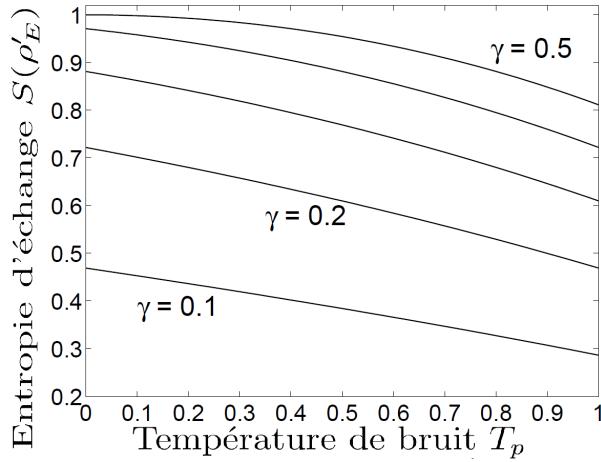


FIGURE 5.9 – L'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  décroît en fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour un facteur d'amortissement  $\gamma$  croissant de  $\gamma = 0.1$  vers  $\gamma = 0.5$  par pas de 0.1 pour un état d'entrée pur d'opérateur densité  $\rho = |1\rangle\langle 1|$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -1]^\top$ .

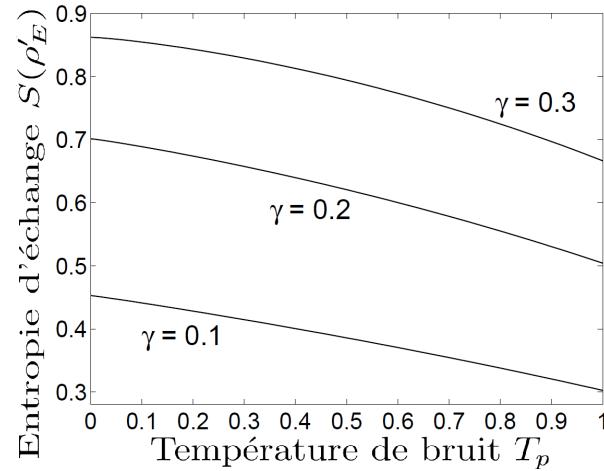


FIGURE 5.10 – L’entropie d’échange  $S(\rho'_E)$  décroît en fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour un facteur d’amortissement  $\gamma$  croissant de  $\gamma = 0.1$  vers  $\gamma = 0.5$  par pas de 0.1 pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

### 5.3 Information cohérente et quantités associées

D'autres quantités informationnelles peuvent être définies en quantique avec des significations et pertinences spécifiques [7, 8]. Pour compléter les analyses d'effets de bruit utile en quantique, nous étudions dans l'annexe D, les comportements avec le bruit d'une quantité informationnelle quantique importante qui est l'information cohérente, ainsi que de trois autres quantités associées [7, 8]. Les résultats de l'annexe D confirment et étendent pour ces quantités informationnelles, les possibilités d'effets de bruit utile [142, 143] observées dans les sections 5.1 et 5.2.

### 5.4 Information de Holevo

Les quantités informationnelles précédentes caractérisent le comportement du canal quantique lors de la transmission d'un seul état d'entrée générique. Une quantité informationnelle fondamentale plus évoluée caractérise la communication d'information à travers le canal au moyen d'un ensemble statistique d'états d'entrée. Une transmission d'information avec un ensemble statistique d'états d'entrée décrit par exemple une communication de symboles aléatoires encodés par des états quantiques. Par conséquent, nous considérons que le canal prend pour état d'entrée les opérateurs densité  $\rho_j$  sélectionnés avec la probabilité  $p_j$  dans un ensemble de  $J$  états quantiques. Le canal bruité délivre les états de sortie d'opérateurs densité  $\rho'_j = \mathcal{N}(\rho_j)$  pour  $j = 1$  à  $J$ . Une quantité fondamentale pour accéder à la performance informationnelle est l'information de Holevo, définie à partir de l'entropie de von Neumann comme [6, 8]

$$\chi(\rho') = S(\rho') - \sum_{j=1}^J p_j S(\rho'_j), \quad (5.26)$$

avec l'état de sortie moyen

$$\rho' = \sum_{j=1}^J p_j \rho'_j. \quad (5.27)$$

L'information de Holevo  $\chi(\rho')$  de l'Éq. (5.26) forme une borne inférieure au taux de compression pour un codage sans pertes d'une séquence d'états quantiques indépendants [148, 149] d'opérateurs densité  $\rho'_j$ . Aussi,  $\chi(\rho')$  est une borne supérieure à l'information mutuelle entrée–sortie pour la transmission classique d'information via des usages indépendants successifs du canal de transmission quantique. De plus,  $\chi(\rho')$  représente un débit atteignable pour la transmission d'information classique, habituellement atteignable en encodant de longs blocs indépendants successifs d'états d'entrée d'opérateurs densité  $\rho_j$ . Par conséquent,  $\chi(\rho')$  représente le débit maximum du canal quantique pour la transmission d'information classique via des utilisations successives indépendantes du canal [8, 150, 151].

Comme nous allons le montrer, il est intéressant de remarquer que, lorsque la température de bruit augmente, l'information de Holevo  $\chi(\rho')$  de l'Éq. (5.26) ne décroît pas forcément. Au contraire,  $\chi(\rho')$  peut accéder aux trois régimes de variation [142] que nous avons montrés dans la Section 5.1 accessibles à l'entropie de von Neumann d'un état quantique bruité.

L'information de Holevo  $\chi(\rho')$  de l'Éq. (5.26) dépend des  $J$  états d'entrée d'opérateurs densité  $\rho_j$  et de leur probabilités  $p_j$ , et considérés conjointement ces paramètres offrent une large variété de configurations. Pour illustrer les variations non standards de l'information de Holevo  $\chi(\rho')$  de l'Éq. (5.26) en fonction de la température  $T$  du bruit thermique, nous considérons un protocole de transmission avec  $J = 2$  états d'entrée d'opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  purs choisis de façon équiprobable avec  $p_0 = p_1 = 1/2$ . La Fig. 5.11 montre des configurations avec les deux états d'opérateurs densité  $(\rho_0, \rho_1)$  ayant une information de Holevo  $\chi(\rho')$  suivant une décroissance monotone lorsque la température de bruit  $T$  croît.

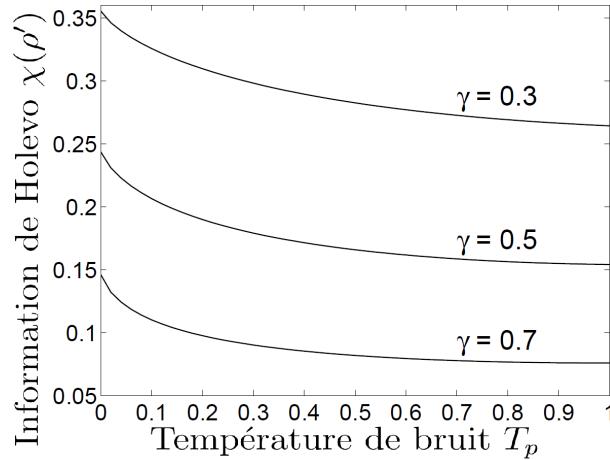


FIGURE 5.11 – Information de Holevo  $\chi(\rho')$  de l'Éq. (5.26) en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour trois valeurs du facteur d'amortissement  $\gamma$ , pour deux états d'entrée purs avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r}_0 = [0, 0, 1]^\top$  et  $\vec{r}_1 = [1, 0, 0]^\top$  et pour probabilités  $p_0 = p_1 = 1/2$ .

Avec une information de Holevo  $\chi(\rho')$  décroissante, la Fig. 5.11 illustre le comportement standard du canal quantique pour la transmission d'information avec une dégradation monotone lorsque la température de bruit  $T$  augmente. Par contraste, la Fig. 5.12 révèle la possibilité de configurations où les deux états d'opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  possèdent une information de Holevo  $\chi(\rho')$  qui ne décroît pas de façon monotone lorsque la température de bruit  $T$  croît.

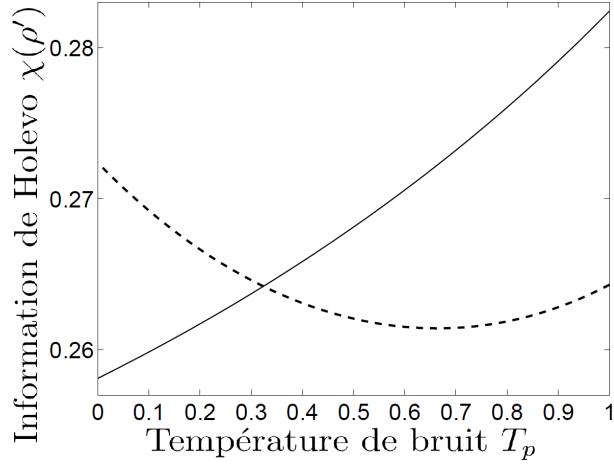


FIGURE 5.12 – Information de Holevo  $\chi(\rho')$  de l’Éq. (5.26) en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour deux états d’entrée purs avec vecteurs de Bloch  $\vec{r}_0$  et  $\vec{r}_1$  et pour probabilités  $p_0 = p_1 = 1/2$ . La ligne en tirets :  $\vec{r}_0 = [0, 0, -1]^\top$  et  $\vec{r}_1 = [1, 0, 0]^\top$  avec un amortissement de  $\gamma = 0.3$ . La ligne continue :  $\vec{r}_0 = [0, 0, -1]^\top$  et  $\vec{r}_1 = [\sqrt{0.84}, 0, -0.4]^\top$  avec un amortissement de  $\gamma = 0.1$ .

La Fig. 5.12 illustre différents régimes de l’information de Holevo  $\chi(\rho')$  en fonction de la température de bruit  $T$ . La ligne en tirets montre des configurations des états de codage  $(\rho_0, \rho_1)$  menant à une variation antirésonante de l’information de Holevo  $\chi(\rho')$ . Ici, il existe une température critique finie autour de  $T_p \approx 0.7$  sur la Fig. 5.12 où le bruit thermique est spécialement défavorable pour la transmission d’information. Cette caractéristique défavorable est manifestée par un minimum de l’information de Holevo  $\chi(\rho')$ . Dans de telles configurations, une utilisation du canal à une température  $T$  plus faible, mais aussi plus élevée, est plus efficace pour la transmission d’information comme montré par  $\chi(\rho')$ . Cette variation antirésonante de la performance  $\chi(\rho')$  pour la transmission d’information, est identifiable avec un effet d’antirésonance stochastique, où un niveau de bruit fini existe tel que la performance est minimisée et où le canal opérant à un niveau de bruit plus faible, ou plus élevé, est plus favorable. Une telle antirésonance stochastique a été aussi observée dans d’autres situations, quantiques [117, 131, 132] ou classiques [127–130], cependant avec d’autres mesures de performances que celles étudiées ici. De plus, une antirésonance stochastique comparable de la performance a été observée ici, dans le chapitre 3 en détection et dans le chapitre 4 en estimation.

La ligne continue de la Fig. 5.12 montre aussi une configuration d’états de codage  $(\rho_0, \rho_1)$  où l’information de Holevo  $\chi(\rho')$  croît de façon monotone lorsque la température de bruit  $T$  croît. Ceci constitue un comportement non standard, où une température de bruit  $T$  supérieure permet toujours une meilleure performance de transmission d’information. La possibilité d’un tel régime où une température de bruit  $T$  croissante est toujours bénéfique à la performance de transmission d’information, a aussi été observée pour la détection d’états quantiques [102, 152] et l’estimation [75, 117]. Cela montre la possibilité pour la décohérence quantique de ne pas nécessairement être défavorable, mais aussi de se révéler bénéfique comme montré pour des processus de détection quantique dans le chapitre 3 et d’estimation quantique dans le chapitre 4 en estimation.

## 5.5 Discussion sur la résonance stochastique pour la transmission d'information

Dans ce chapitre nous avons considéré des quantités informationnelles caractérisant le qubit. Ces quantités informationnelles ont été analysées en présence d'un bruit thermique quantique modélisant le processus de décohérence causé par une interaction avec un environnement non contrôlé.

Nous avons montré que les quantités informationnelles étudiées ne se dégradent pas nécessairement de façon monotone lorsque la température de bruit  $T$  augmente. Au contraire, elles peuvent évoluer selon des variations non monotones et non standards où une température de bruit  $T$  supérieure peut être plus favorable pour l'information. De telles variations non standards ont été démontrées pour l'entropie de von Neumann  $S(\rho')$  d'un qubit bruité d'opérateur densité  $\rho'$ . D'autres quantités informationnelles reliées à l'entropie de von Neumann ont aussi été examinées, comme l'entropie d'échange ou entropie générée dans l'environnement  $S(\rho, \mathcal{N}) = S(\rho'_E)$ , l'information cohérente  $I_c(\rho, \mathcal{N})$ , l'information mutuelle quantique  $I(\rho, \mathcal{N})$ , la perte d'information  $L(\rho, \mathcal{N})$ , et le bruit informationnel  $N(\rho, \mathcal{N})$ . Toutes ces quantités sont aussi capables de régimes de variation non monotones et non standards lorsque la température de bruit  $T$  augmente. De plus, lorsqu'un ensemble statistique d'états de qubit est utilisé pour la communication d'information à travers un canal quantique bruité, la quantité fondamentale qu'est l'information de Holevo  $\chi(\rho')$  est elle aussi sujette à de tels régimes de variation non standards. En particulier, cela montre qu'il existe certaines configurations où la transmission d'information à travers le canal bruité peut être améliorée en appliquant un bruit thermique de température supérieure. Des régimes d'antirésonance pour les mesures de performance sont aussi observés, identifiant d'autres configurations où des valeurs spécifiques de la température de bruit  $T$  sont maximalement défavorables.

Les quantités analysées ici sont basées sur l'entropie de von Neumann et portent une signification informationnelle. Cette signification peut être étendue en considérant des versions généralisées basées sur des entropies quantiques généralisées, non additives ou non extensives [153–158]. De telles entropies ont trouvé des applications pour l'information quantique en particulier en relation avec la corrélation quantique par intrication [159–163]. Il serait intéressant d'examiner si de telles quantités informationnelles généralisées peuvent aussi, en présence de bruit quantique, suivre des variations non standards, c'est-à-dire autres qu'une dégradation monotone avec l'augmentation du niveau de bruit.

Les régimes de variation non standards mis en évidence ici pour des quantités informationnelles lors de l'augmentation de la température de bruit démontrent des propriétés sophistiquées du phénomène de décohérence quantique. Un niveau de décohérence n'engendre pas toujours des performances informationnelles dégradées. Ce chapitre identifie et analyse de nouvelles situations où de tels comportements contre-intuitifs du phénomène de décohérence prennent place. De tels résultats sont intéressants afin de contribuer à une meilleure compréhension et contrôle du phénomène de décohérence quantique.



# **Chapitre 6**

## **Mise en œuvre expérimentale sur un processeur quantique**

## 6.1 Présentation des processeurs quantiques

Les progrès de la technologie quantique permettent la mise au point d'équivalents quantiques aux processeurs digitaux classiques. Les processeurs digitaux classiques sont entre autres utilisés afin de mettre en œuvre des processus de traitement du signal.

L'équivalent quantique au processeur digital classique est le processeur quantique. Ce processeur quantique permet la mise en œuvre expérimentale de processus quantiques. En laboratoire des expériences ont montré l'applicabilité de diverses propriétés purement quantiques pour le traitement de l'information quantique [14–16, 20, 107], ainsi que différents algorithmes tirant parti de propriétés spécifiques à l'information quantique [23–26, 33].

Les processeurs quantiques ont de plus trouvé des applications avec des ordinateurs commerciaux comptabilisant plusieurs milliers de qubits commercialisés par D-Wave [39, 164]. Cependant, ces ordinateurs quantiques ne sont pas programmables de manière universelle, ils peuvent résoudre une classe spécifique de problèmes contrairement aux ordinateurs classiques qui présentent un caractère universel. Les ordinateurs quantiques de D-Wave sont par conséquent utilisés pour des applications spécifiques.

Parallèlement IBM a mis à disposition via internet son premier processeur quantique permettant la réalisation de circuits quantiques à 5 qubits en mai 2016. Les processeurs quantiques permettant la réalisation de circuits quantiques les plus puissants en 2019, date de rédaction de ce manuscrit, sont composés d'environ 50 qubits. Ces processeurs quantiques permettent la mise en œuvre expérimentale de divers protocoles de traitement de l'information [165, 166] et la vérification de phénomènes d'abord démontrés théoriquement [167]. Nous allons dans ce chapitre tirer parti de la possibilité d'utiliser en ligne ces processeurs quantiques d'IBM afin de mettre en œuvre expérimentalement un protocole de traitement du signal quantique.

## 6.2 Portes quantiques

Ces processeurs quantiques d'IBM permettent d'effectuer toutes les évolutions unitaires possibles sur un qubit grâce à une famille de portes quantiques logiques autorisant l'ensemble de ces évolutions. On a ainsi accès à une porte à un qubit de forme paramétrique générale [168] :

$$U_3 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\exp(i\lambda)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \exp(i\phi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \exp(i\lambda+i\phi)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

avec  $\theta \in [0, \pi[$ ,  $\phi \in [0, \pi/2[$  et  $\lambda \in [0, 2\pi[$ . En particulier on peut reconstruire des opérateurs communs du qubit avec la porte  $U_3$ . L'opérateur  $\sigma_x$  est réalisable avec  $\lambda = \pi$ ,  $\phi = 0$  et  $\theta = \pi$ , l'opérateur  $\sigma_y$  avec  $\lambda = \pi/2$ ,  $\phi = \pi/2$  et  $\theta = \pi$  et l'opérateur  $\sigma_z$  avec  $\lambda = 0$ ,  $\phi = \pi$  et  $\theta = 0$ . Des opérateurs comme l'opérateur de rotation

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & -\sin(\Theta) \\ \sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

peuvent aussi être réalisés avec  $\theta = 2\Theta$ ,  $\phi = 0$  et  $\lambda = 0$ .

La Fig. 6.1 montre une porte à un qubit permettant de faire évoluer le qubit selon toutes les transformations unitaires lui étant accessibles.

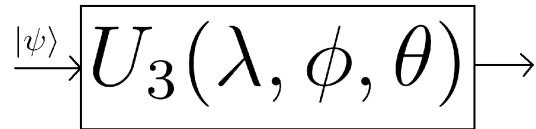


FIGURE 6.1 – Porte quantique à un qubit formant une forme paramétrique pour les évolutions unitaires à un qubit.

Cette porte paramétrable  $U_3$  est réalisable sur le processeur quantique IBM Q 14 que nous utilisons, et toutes les valeurs possibles des trois paramètres  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\lambda$  sont accessibles expérimentalement.

De plus, on peut accéder à une porte à deux qubits, la porte  $CNOT$ , définie par la transformation unitaire à deux qubits

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

La porte  $CNOT$ , suivant le schéma de la Fig. 6.1, applique sur le qubit cible  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  l'opérateur  $\sigma_x$  si le qubit de commande  $|\psi_{\text{commande}}\rangle$  est dans l'état  $|1\rangle$ . Si le qubit de commande  $|\psi_{\text{commande}}\rangle$  est dans l'état  $|0\rangle$  le qubit cible reste inchangé.

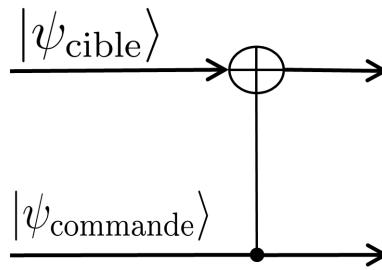


FIGURE 6.2 – Porte quantique à deux qubits  $CNOT$  ou encore Controlled-NOT.

La Fig. 6.2 représente l'opérateur  $CNOT$  qui notamment permet de réaliser l'intrication de deux qubits. En effet, par exemple, si la paire de qubits en entrée de la porte  $CNOT$  est préparée dans l'état séparable  $|\psi_{\text{cible}}\rangle|\psi_{\text{commande}}\rangle = |0\rangle(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ , alors on obtient en sortie l'état quantique  $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$  qui est un état intriqué à deux qubits.

Avec ces deux portes  $U_3$  et  $CNOT$  on établit qu'il est possible de réaliser l'ensemble des évolutions unitaires possibles d'un nombre quelconque de qubits [6, 168]. Ces deux portes forment donc ensemble une famille universelle de portes quantiques permettant de réaliser tous les circuits quantiques imaginables.

Dans cette approche, la mise en œuvre pratique de traitements quantiques de l'information peut donc se voir comme la conception d'algorithmes de traitement qui s'exprimeront comme des évolutions unitaires sur des ensembles de qubits, et qui recevront une implémentation matérielle sous forme de circuits et portes quantiques.

## 6.3 Circuits quantiques pour la mise en œuvre sur un processeur quantique

Pour la mise en œuvre expérimentale de traitements quantiques nous utiliserons un processeur quantique permettant la réalisation universelle de circuits quantiques. Ce processeur quantique est accessible en ligne et mis au point par IBM. Ce processeur fait partie d'un groupe de processeurs quantiques accessibles par internet regroupés sous le nom IBM Quantum Experience project ("<https://www.research.ibm.com/ibm-q/>", "<https://github.com/Qiskit/qiskit-backend-information>"). Nous utiliserons ici le processeur quantique IBM Q 14 Melbourne, composé de 14 qubits. L'architecture de ce processeur est représentée sur la Fig. 6.3. Pour ce processeur quantique les qubits sont réalisés physiquement par des boucles magnétiques supraconductrices. Le processeur quantique IBM Q 14 Melbourne rend accessibles les portes  $U_3$  et  $CNOT$  et peut donc ainsi construire des circuits quantiques employant jusqu'à 14 qubits. Ce processeur quantique permet une vérification de différents travaux théoriques utilisant des systèmes quantiques et ainsi les traitements quantiques analysés dans ces travaux. Ces processeurs ont ainsi servi à la mise en œuvre expérimentale de différents traitements quantiques [169, 170].

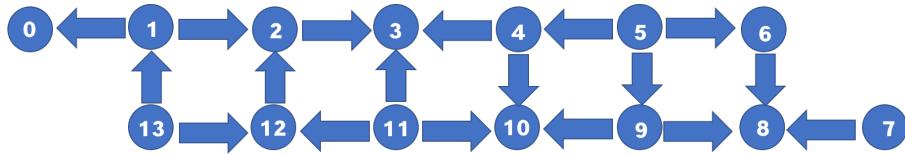


FIGURE 6.3 – Architecture du processeur quantique IBM Q 14 Melbourne à 14 qubits numérotés de 0 à 13. Les flèches montrent les portes CNOT utilisables sur ce processeur quantique, le début de la flèche montrant le qubit de contrôle et la pointe donnant le qubit cible.

### 6.3.1 Sous-circuits quantiques

Dans cette section nous allons utiliser différents circuits quantiques utiles pour la mise en œuvre de processus de traitement du signal en présence de bruit quantique étudiés ici. Ces circuits quantiques utilisent des sous-circuits communs que l'on va détailler ici.

#### Application probabiliste d'un opérateur

Nous cherchons ici à mettre en œuvre différents générateurs de bruit quantique de propriétés contrôlées. Pour ce faire il nous faut appliquer un opérateur de manière probabiliste sur un qubit. Afin d'appliquer un opérateur sur un qubit cible d'état  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  avec une certaine probabilité

$p$  on utilise un qubit de commande d'état  $|\psi_{\text{commande}}\rangle$ . L'opérateur  $\sigma_x$  est appliqué à l'aide de l'opérateur  $CNOT$ . Afin d'appliquer l'opérateur  $\sigma_x$  avec une certaine probabilité  $p$  sur le qubit cible d'état  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  on calcule un opérateur  $U_3$ . Une fois appliqué au qubit de commande d'opérateur densité  $\rho_{\text{commande}}$  initialement dans l'état  $|0\rangle$ , cet opérateur permet d'obtenir le qubit de commande dans un état vérifiant

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} U_3 \rho_{\text{commande}} U_3^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p, \quad (6.4)$$

avec l'opérateur densité  $\rho_{\text{commande}} = |0\rangle\langle 0|$ . On calcule alors

$$U_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_3^\dagger = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-i\phi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(i\phi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

L'Éq. (6.4) devient alors

$$\exp(2i\phi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = p. \quad (6.6)$$

On en déduit ainsi l'angle  $\theta = 2\arcsin(\sqrt{p})$ , et on peut choisir les paramètres  $\lambda$  et  $\phi$  de l'Éq. (6.1) sans impact pour le circuit. Nous choisirons  $\lambda = 0$  et  $\phi = 0$  dans la suite de ce manuscrit pour les circuits quantiques appliquant un opérateur avec une probabilité contrôlée. Le circuit de la Fig. 6.4 est constitué d'une porte  $U_3$  dont les paramètres sont calculés grâce à l'Éq. (6.6) et d'une porte  $CNOT$  à deux qubits. Ce circuit permet l'application sur le qubit cible d'un opérateur  $\sigma_x$  avec une probabilité  $p$ . Ce circuit comporte une porte  $U_3$  paramétrée à partir de l'Éq. (6.6) permettant d'obtenir le qubit de commande d'état  $|\psi_{\text{commande}}\rangle$  dans un état  $|1\rangle$  avec une probabilité  $p$ . L'application de la porte  $CNOT$  sur le qubit cible  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  contrôlée par le qubit de commande permet alors l'application de la porte quantique  $\sigma_x$  avec une probabilité  $p$ .

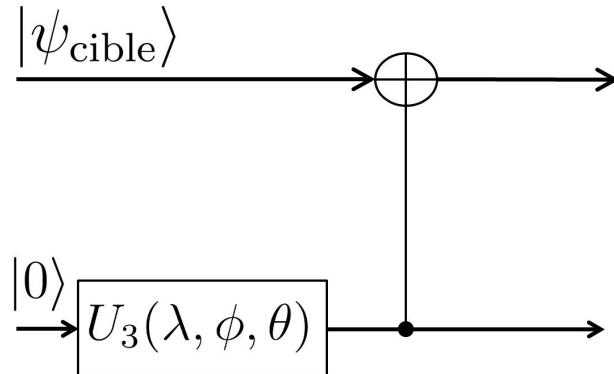


FIGURE 6.4 – Circuit quantique permettant l'implémentation d'une porte  $\sigma_x$  sur un qubit cible d'état  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  avec une probabilité  $p$ . Pour la porte  $U_3$  les paramètres sont choisis comme étant  $\theta = 2\arcsin(\sqrt{p})$ ,  $\phi = 0$  et  $\lambda = 0$ .

Afin d'appliquer d'autres opérateurs sur le qubit cible d'état  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  on peut calculer un opérateur  $U_3$  permettant d'effectuer un changement de base. Ainsi cet opérateur couplé au circuit de la Fig. 6.4 permet l'application de l'opérateur voulu avec une probabilité  $p$ . Par exemple, pour appliquer un opérateur  $\sigma_z$  avec une probabilité  $p$  on utilise un opérateur paramétré comme suit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

avec  $a, b, c$  et  $d$  des variables appartenant à  $\mathbb{C}$ . On calcule ensuite

$$A\sigma_x A = \sigma_z \quad (6.8)$$

qui devient en remplaçant l'Éq. (6.7) dans l'Éq. (6.8)

$$\begin{bmatrix} 2ab & ad + cb \\ cb + da & 2cd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Un opérateur valide  $A$  agissant sur un système quantique étant unitaire, l'équation

$$AA^\dagger = I_2 \quad (6.10)$$

doit être vérifiée. En combinant les Éqs. (6.9) et (6.10) on obtient alors l'opérateur unitaire

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = H. \quad (6.11)$$

L'opérateur  $H$  (connu sous le nom de porte de Hadamard) peut être réalisé à partir de la porte  $U_3$  avec  $\lambda = -\pi$ ,  $\phi = \pi$  et  $\theta = \pi/3$ . Le circuit de la Fig. 6.5 représente ainsi l'application sur le qubit cible d'un opérateur  $\sigma_z$  avec une probabilité  $p$ . Ce circuit comporte une porte  $U_3$  paramétrée à partir de l'Éq. (6.6) avec  $\theta = 2\arcsin(\sqrt{p})$ ,  $\phi = 0$  et  $\lambda = 0$  permettant d'obtenir le qubit de commande d'état  $|\psi_{\text{commande}}\rangle$  dans un état  $|1\rangle$  avec une probabilité  $p$ . L'application de la porte CNOT sur le qubit cible d'état  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  contrôlée par le qubit de commande permet alors l'application de l'opérateur  $\sigma_x$  avec une probabilité  $p$ . Les deux opérateurs unitaires  $H$  sur la Fig. 6.5 permettent le changement de base transformant l'opérateur  $\sigma_x$  en opérateur  $\sigma_z$ .

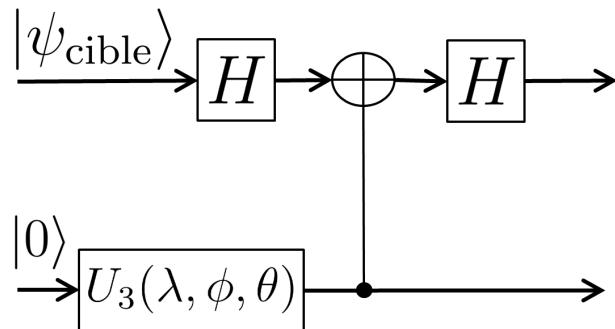


FIGURE 6.5 – Circuit quantique permettant l'implémentation d'une porte  $\sigma_z$  sur un qubit cible d'état  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  avec une probabilité  $p$ . Pour la porte  $U_3$  les paramètres sont choisis comme étant  $\theta = 2\arcsin(\sqrt{p})$ ,  $\phi = 0$  et  $\lambda = 0$ .

Ces circuits quantiques peuvent permettre par exemple la mise en œuvre de bruits quantiques. La Fig. 6.4 permet la mise en œuvre d'un bruit de bit-flip de l'Eq. (2.59) de probabilité  $p$  appliqué sur le qubit cible. La Fig. 6.5 permet la mise en œuvre d'un bruit de phase-flip de l'Eq. (2.61) de probabilité  $p$  appliqué sur le qubit cible. Pour mettre en œuvre un bruit de bit-phase-flip on reprend la même démarche que pour les bruit de bit-flip et de phase-flip avec

$$A\sigma_x A = \sigma_y. \quad (6.12)$$

On obtient finalement

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1+i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{I_2}. \quad (6.13)$$

Cet opérateur unitaire  $A$  peut être réalisé à partir de la porte  $U_3$  avec  $\lambda = -\pi/4$ ,  $\phi = \pi/4$  et  $\theta = \pi$ . Le circuit réalisant un bruit de bit-phase-flip de probabilité  $p$  à un qubit est montré sur la Fig. 6.6.

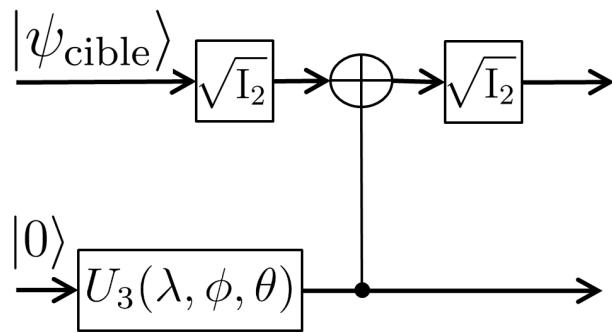


FIGURE 6.6 – Circuit quantique permettant l'implémentation d'une porte  $\sigma_y$  sur un qubit cible d'état  $|\psi_{\text{cible}}\rangle$  avec une probabilité  $p$ . Pour la porte  $U_3$  les paramètres sont choisis comme étant  $\theta = 2\arcsin(\sqrt{p})$ ,  $\phi = 0$  et  $\lambda = 0$ .

### Changement de base de mesure

Pour le processeur quantique que nous allons utiliser la base de mesure disponible est  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  et n'est pas modifiable physiquement. Il peut cependant être utile de mesurer les qubits dans une base différente de la base de mesure disponible. Pour ce faire nous allons ramener une mesure dans la base voulue à une mesure dans la base de mesure accessible expérimentalement. Nous allons utiliser un opérateur  $U$  agissant sur autant de qubit que comporte la base de mesure voulue. Afin de changer la base de mesure  $\{|0\rangle, |1\rangle\}^{\otimes N}$  en une base de mesure quelconque il convient de trouver l'opérateur  $U$  vérifiant :

$$U \prod_{k=1}^N |a_{kj}\rangle = |b_j\rangle, \quad (6.14)$$

avec  $|a_{kj}\rangle$  les vecteurs de la base de mesure disponible que l'on veut faire correspondre avec le vecteur  $|b_j\rangle$  de la base de mesure voulue. Par exemple, pour mesurer dans la base de Bell  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  des Éqs. (4.71)–(4.74) lorsque l'on a accès à la base de mesure  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  on calcule un opérateur  $U$  vérifiant

$$U \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = |00\rangle, \quad (6.15)$$

$$U \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = |01\rangle, \quad (6.16)$$

$$U \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} = |10\rangle \quad (6.17)$$

et

$$U \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = |11\rangle. \quad (6.18)$$

En résolvant ce système d'équations on trouve

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

On peut décomposer l'opérateur  $U$  de l'Éq. (6.19) en portes quantiques de la manière suivante

$$U = (H \otimes I_2)CNOT. \quad (6.20)$$

La Fig. 6.7 donne ainsi un circuit implémentant l'opérateur unitaire  $U$  de l'Eq. (6.20) et permettant la mesure dans la base de Bell  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  des Éqs. (4.71)–(4.74).

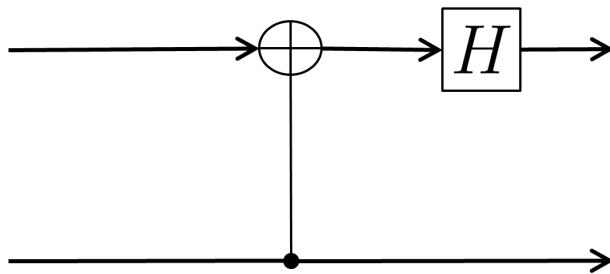


FIGURE 6.7 – Circuit quantique implémentant l'opérateur unitaire  $U$  de l'Eq. (6.20) et permettant la mesure dans la base de Bell  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  des Éqs. (4.71)–(4.74).

### 6.3.2 Incertitudes dans les mises en œuvre sur un processeur quantique

Les processeurs quantiques utilisés constituent des dispositifs technologiques sophistiqués, dont le fonctionnement pratique implique nécessairement des incertitudes et imprécisions. Celles-ci vont intervenir dans les traitements accomplis sur ces processeurs. Pour illustration, nous allons dans cette section chercher à quantifier certains aspects de ces incertitudes et imprécisions. Pour ce faire nous allons réaliser des circuits quantiques simples et mesurer le taux d'erreur obtenu par rapport au résultat théorique attendu. Afin de quantifier les erreurs commises pour différents circuits nous allons utiliser la mesure de proximité entre deux états quantiques [171] qu'est la fidélité  $F$ . Nous allons mesurer la proximité entre un qubit attendu théoriquement d'opérateur densité  $\rho_0$  et un qubit obtenu expérimentalement d'opérateur densité  $\rho_1$ . La fidélité pour deux qubits d'opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  s'écrit :

$$F(\rho_0, \rho_1) = \text{Tr}(\rho_0 \rho_1) + 2\sqrt{\det(\rho_0) \det(\rho_1)}. \quad (6.21)$$

La fidélité  $F(\rho_0, \rho_1)$  est bornée entre 0 et 1 et atteint son maximum de 1 lorsque les deux opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  sont égaux. Cette quantité peut ainsi être considérée comme une mesure de ressemblance entre deux états quantiques.

Afin de mesurer la ressemblance entre le qubit théorique et le qubit expérimental grâce à la fidélité  $F(\rho_0, \rho_1)$  il nous faut donc connaître l'opérateur densité du qubit expérimental. Afin d'estimer l'opérateur densité du qubit expérimental nous allons utiliser une méthode appelée tomographie d'états quantiques [172]. Cette méthode consiste à mesurer le qubit dans plusieurs bases de mesure de  $\mathcal{H}_2$ . Nous choisirons ici de mesurer le qubit dans les bases  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ,  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  et  $\{(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}, (|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}\}$  avec des mesures de von Neumann. Dans la représentation de Bloch ces bases de mesures correspondent à des projections sur les axes respectivement  $O_z$ ,  $O_x$  et  $O_y$ . Lors de la mesure d'un état  $\rho_1$  dans l'une ou l'autre de ces trois bases, on a alors des résultats de probabilités suivantes :

$$P_H = \langle 0 | \rho_1 | 0 \rangle, \quad (6.22)$$

$$P_B = \langle 1 | \rho_1 | 1 \rangle, \quad (6.23)$$

$$P_P = \langle + | \rho_1 | + \rangle, \quad (6.24)$$

$$P_M = \langle - | \rho_1 | - \rangle, \quad (6.25)$$

$$P_D = \langle (|0\rangle - i|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} | \rho_1 | (|0\rangle + i|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \quad (6.26)$$

et

$$P_G = \langle (|0\rangle + i|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} | \rho_1 | (|0\rangle - i|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle. \quad (6.27)$$

Les probabilités  $P_H$  et  $P_B$  sont les probabilités de mesure selon l'axe  $Oz$  de la sphère de Bloch. On a alors, pour un état de vecteur de Bloch  $\vec{r} = [r_x, r_y, r_z]^\top$ ,

$$P_H = \frac{1}{2}(1 + r_z) \quad (6.28)$$

et

$$P_B = \frac{1}{2}(1 - r_z). \quad (6.29)$$

De manière similaire les probabilités  $P_P$  et  $P_M$  sont les probabilités de mesure selon l'axe  $Ox$  de la sphère de Bloch et les probabilités  $P_D$  et  $P_G$  sont les probabilités de mesure selon l'axe  $Oy$ . On a les probabilités

$$P_P = \frac{1}{2}(1 + r_x), \quad (6.30)$$

$$P_M = \frac{1}{2}(1 - r_x), \quad (6.31)$$

$$P_D = \frac{1}{2}(1 + r_y) \quad (6.32)$$

et

$$P_G = \frac{1}{2}(1 - r_y). \quad (6.33)$$

Par des mesures successives sur des préparations identiques, les trois bases de mesure permettent donc d'estimer les trois composantes de l'état du qubit dans la représentation de Bloch. On déduit alors les coordonnées du vecteur de Bloch de l'opérateur densité  $\rho_1$

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} P_P - P_M \\ P_D - P_G \\ P_H - P_B \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

On reconstruit ensuite l'opérateur densité  $\rho_1$  en appliquant

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_2 + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z). \quad (6.35)$$

Dans la suite nous utiliserons cette méthode afin de reconstruire l'opérateur densité expérimental décrivant le qubit d'opérateur densité  $\rho_1$  afin d'évaluer la fidélité  $F(\rho_0, \rho_1)$  entre le qubit expérimental et le qubit théorique.

Pour estimer l'opérateur densité  $\rho$  d'un qubit ayant subi une porte à un qubit nous avons utilisé le circuit de la Fig. 6.8 implémentant la porte de Hadamard sur l'état d'entrée  $|0\rangle$ .

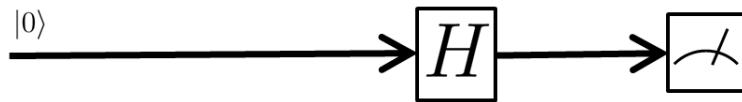


FIGURE 6.8 – Circuit quantique permettant une évaluation de l'erreur commise lors de l'application d'une porte  $H$  à un qubit.

Pour estimer l'opérateur densité  $\rho$  d'un qubit ayant subi une porte  $CNOT$  à deux qubits nous avons utilisé le circuit de la Fig. 6.9 avec un qubit de commande d'état  $|\psi_{\text{commande}}\rangle$  dans l'état  $|0\rangle$  puis  $|1\rangle$ .

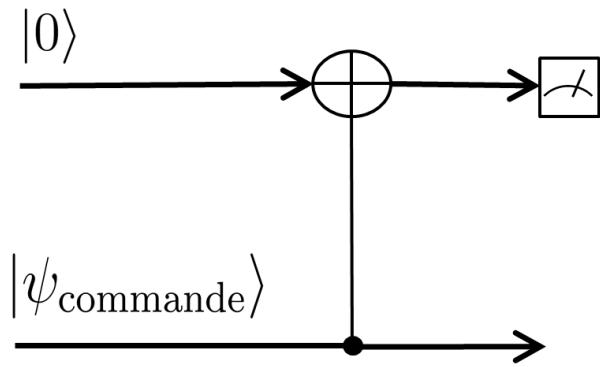


FIGURE 6.9 – Circuit quantique permettant une évaluation de l'erreur commise lors de l'application d'une porte *CNOT*.

Après mise en œuvre expérimentale des circuits des Figs. 6.8 et 6.9 sur le processeur quantique IBMQX14 pour 8192 itérations, on obtient les résultats résumés dans le tableau 6.1. Le tableau 6.1 donne les résultats des différentes expériences de mesure afin d'estimer la fidélité de l'opérateur densité expérimental par rapport à l'opérateur densité théorique.

Circuit testé	$\rho_0$	$\rho_1$	$F$
Porte $H$	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.489 & 0.409 + 0.019i \\ 0.409 - 0.019i & 0.511 \end{bmatrix}$	0.909
Porte $CNOT$ commande à $ 0\rangle$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.827 & 0.317 + 0.129i \\ 0.317 - 0.129i & 0.173 \end{bmatrix}$	0.827
Porte $CNOT$ commande à $ 1\rangle$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.211 & 0.294 + 0.099i \\ 0.294 - 0.099i & 0.789 \end{bmatrix}$	0.789

TABLE 6.1 – Résultats expérimentaux de la reconstruction tomographique des états de sortie pour différents circuits quantiques. L’opérateur densité  $\rho_0$  est l’opérateur attendu théoriquement. L’opérateur densité  $\rho_1$  est l’opérateur mesuré expérimentalement. La fidélité  $F$  est calculée pour chacun de ces couples  $(\rho_0, \rho_1)$ . Chacune des expériences consistent en 8192 exécutions du circuit quantique correspondant pour chacune des trois bases de mesure.

On constate dans le tableau 6.1 que le circuit testé avec une porte à un qubit a une fidélité  $F(\rho_0, \rho_1)$  de 0.909. Cependant, pour la porte testée à deux qubits comme la porte  $CNOT$  la fidélité  $F(\rho_0, \rho_1)$  est comprise entre 0.789 et 0.827. Ces résultats donnent une estimation quantitative de la fiabilité de circuits avec des portes à un qubit, les circuits avec des portes à deux qubits étant moins fiables que ceux à un qubit. Ces résultats illustrent donc d’une façon quantitative qu’il peut exister des incertitudes non négligeables dans les mesures obtenues expérimentalement. Elles seront possiblement à prendre en compte lors de la confrontation avec une prédition théorique.

## 6.4 Mise en œuvre expérimentale de protocoles quantiques

Nous allons maintenant mettre en œuvre expérimentalement sur un processeur quantique, les protocoles de détection quantique à un qubit unique et à une paire de qubits intriquée analysés théoriquement dans la section 3.4 et l'annexe A. Afin de mettre en œuvre expérimentalement sur des processeurs quantiques les protocoles de détection bruités à un qubit et à une paire intriquée, nous utiliserons ici un bruit de bit-flip caractérisé par l'Éq. (A.2). Ce bruit a été choisi pour des raisons d'architecture du processeur quantique utilisé représenté sur la Fig. 6.3. En effet, cette architecture permet la mise en œuvre expérimentale de bruit décrit par deux opérateurs apparentés au bruit de bit-flip de l'Éq. (A.2). Avec ce bruit le processus de détection atteint les probabilités d'erreur des Éqs. (3.84) et (3.85) :

$$P_{\text{er}}^{(1)} = \frac{3p}{4}, \text{ pour un qubit unique,} \quad (6.36)$$

$$P_{\text{er}}^{(2)} = (1 - P_0) \frac{p}{4}, \text{ pour une paire intriquée.} \quad (6.37)$$

Les circuits quantiques utilisés pour la mise en œuvre expérimentale sont ceux des Figs. 6.10 à un qubit et 6.11 à une paire de qubits intriquée implémentant respectivement les protocoles des Figs. 3.6 et 3.8. L'étape (1) du circuit de la Fig. 6.10 permet de préparer le qubit sonde simulant le photon sonde dans l'état  $|+\rangle$  de l'Éq. (2.37). Le circuit de la Fig. 6.11 permet l'intrication des deux qubits simulant les deux photons (étape (1)). Cette étape prépare la paire de photons intriquée dans l'état de l'Éq. (3.63). Puis, l'étape (2) des Figs. 6.10 et 6.11 permet le choix avec une probabilité  $P_0$  de la valeur du pixel par l'application ou non de l'opérateur  $\sigma_z$ . L'opérateur  $U(P_0)$  est calculé à partir de l'Éq. (6.6). Ce choix se fait donc grâce au circuit de la Fig. 6.4 et à l'opérateur  $U_3(P_0)$  avec  $\theta = 2\arcsin(\sqrt{P_0})$ . Ensuite un qubit de service permet la mise en œuvre expérimentale d'un bruit de bit-flip selon l'Éq. (A.2) dont le niveau de bruit  $p$  est contrôlé par un opérateur  $U_3(p)$  calculé à partir de l'Éq. (6.6) donnant un opérateur  $U_3(p)$  avec  $\theta = 2\arcsin(\sqrt{p})$  et deux opérateurs  $R(\pi/3)$  et  $R(-\pi/3)$  permettant d'effectuer un changement de base (étape (3) sur les Figs. 6.10 et 6.11). Finalement, l'étape (4) de la Fig. 6.10 est une mesure du qubit sonde unique dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ . L'étape (4) de la Fig. 6.11 est une mesure de la paire intriquée dans la base de Bell  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  des Éqs. (4.71)–(4.74). Les circuits des étapes (4) sont basés sur l'Éq. (6.14).

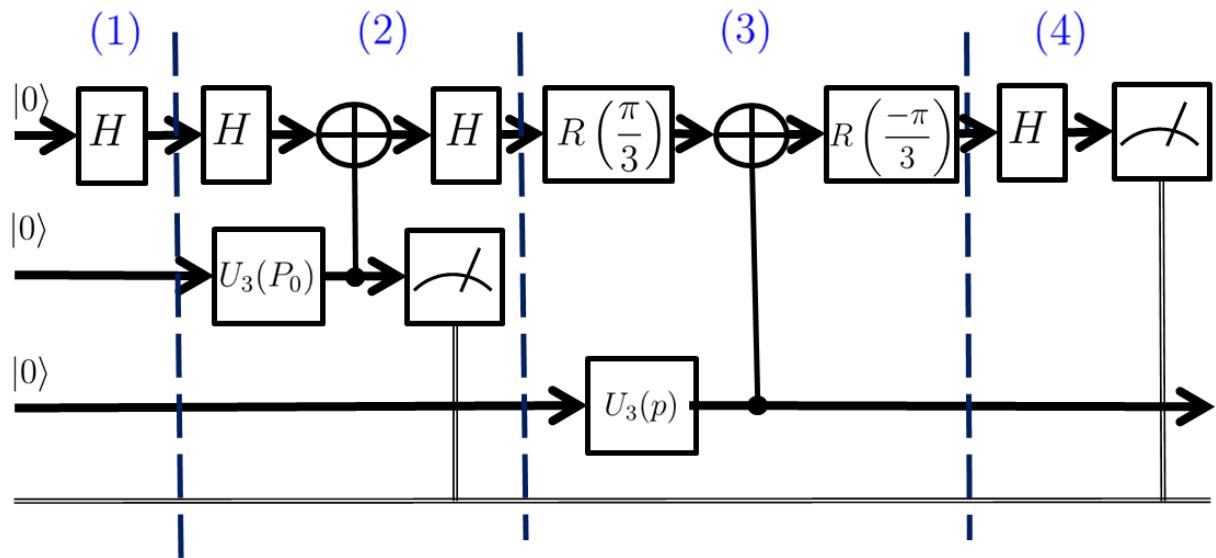


FIGURE 6.10 – Circuit comportant les portes quantiques permettant la mise en œuvre expérimentale du processus de détection à un photon unique bruité par un bruit de bit-flip. Ce circuit permet l’application de l’opérateur  $\sigma_z$  sur le qubit sonde (1). Puis, le choix de la valeur du pixel par l’application ou non de l’opérateur  $\sigma_z$  avec une probabilité  $P_0$  (2). Ensuite un qubit de service permet la mise en œuvre expérimentale d’un bruit de bit-flip dont le niveau de bruit est contrôlé par un opérateur  $U_3$  (3). Finalement, le qubit sonde bruité est mesuré dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  (4).

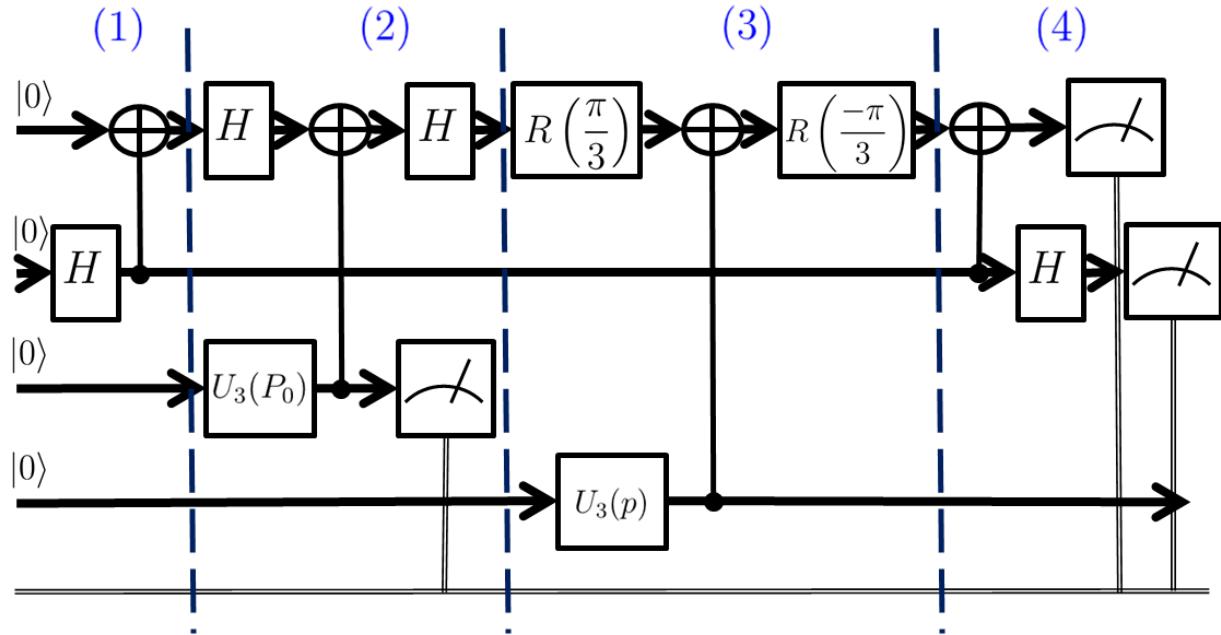


FIGURE 6.11 – Circuit comportant les portes quantiques permettant la mise en œuvre expérimentale du processus de détection à une paire de photons intriquée bruitée par un bruit de bit-flip. Ce circuit permet l'intrication des deux qubits simulant une paire de photons (1). Puis, le choix de la valeur du pixel par l'application ou non de l'opérateur  $\sigma_z$  avec une probabilité  $P_0$  (2). Ensuite un qubit de service permet la mise en œuvre expérimentale d'un bruit de bit-flip dont le niveau de bruit est contrôlé par un opérateur  $U_3$  (3). Finalement, la paire intriquée est mesurée dans la base de Bell  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  (4).

Pour la performance de détection des deux protocoles, la Fig. 6.12 montre la comparaison entre les résultats théoriques issus de la section 3.4.4 et les mises en œuvre expérimentales faites sur le processeur quantique IBM Q 14.

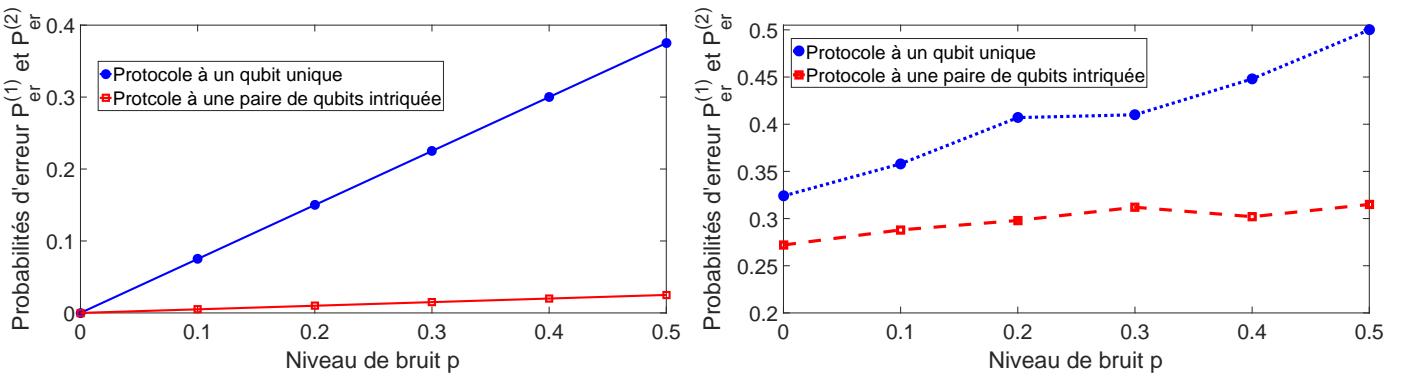


FIGURE 6.12 – Probabilités d’erreur  $P_{\text{er}}^{(1)}$  et  $P_{\text{er}}^{(2)}$  des Éqs. (6.36) et (6.37) pour des protocoles de détection à un qubit unique et à une paire de qubits intriquée pour  $P_0 = 0.2$ . Les valeurs théoriques à gauche sont issues de la section 3.4.4. Les valeurs expérimentales à droite proviennent de 8192 mises en œuvre expérimentales sur le processeur quantique IBM Q 14 pour chaque niveau de bruit  $p$  testé.

Sur la Fig. 6.12, on constate que la probabilité d’erreur  $P_{\text{er}}$  est toujours croissante lorsque le niveau de bruit  $p$  croît, et ceci à la fois sur les évolutions théoriques calculées à la section 3.4.4 et sur les évolutions expérimentales. De plus, le protocole à une paire de qubits intriquée possède toujours une probabilité d’erreur  $P_{\text{er}}$  inférieure à celle du protocole à un qubit unique, à la fois sur les résultats théoriques et sur les résultats expérimentaux. L’apport bénéfique de la propriété d’intrication quantique pour un processus de détection d’états quantiques montré théoriquement dans la section 3.4.4 est donc confirmé expérimentalement ici. La mise en œuvre expérimentale confirme donc l’apport bénéfique de ce protocole à une paire de qubits intriquée pour la détection sur des états bruités.

La Fig. 6.13 représente le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  expérimental entre les probabilités d’erreur  $P_{\text{er}}$  pour un protocole à une paire de qubits intriquée et un qubit unique.

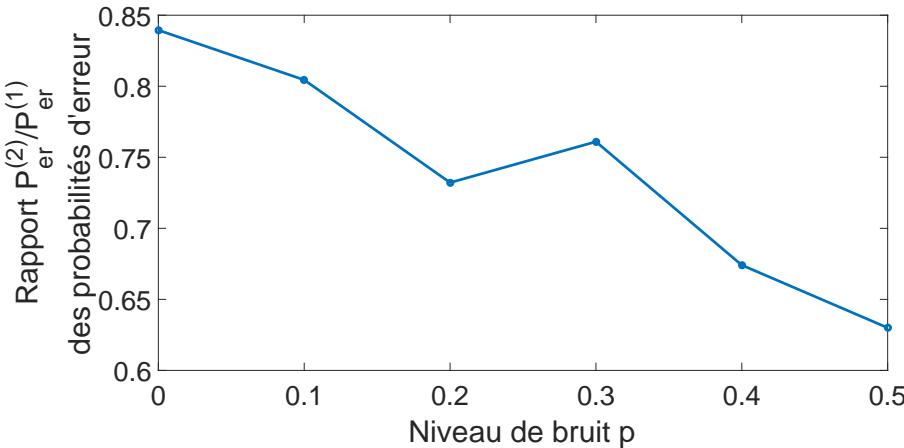


FIGURE 6.13 – Rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  entre les probabilités d’erreur expérimentales  $P_{\text{er}}^{(2)}$  et  $P_{\text{er}}^{(1)}$  pour un protocole à une paire de qubits intriquée et un qubit unique en fonction du niveau de bruit  $p$  pour une probabilité  $P_0 = 0.2$ .

La Fig. 6.13 montre que le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  est toujours inférieur à 1, pour tout niveau de bruit  $p$ . Ce résultat est en accord avec ce que montre l'analyse théorique de la section 3.4.4. Dans les deux cas (théorique et expérimental), le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  est toujours inférieur à 1. Les courbes expérimentales et théoriques ne se superposent pas parfaitement à cause du fait que le processeur quantique utilisé est imparfait. En effet on peut voir que pour un niveau de bruit  $p$  nul les probabilités d'erreur de détection sont non nulles. La Fig. 6.13 confirme bien que le protocole à une paire de qubits intriquée permet toujours une probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  inférieure au protocole à un qubit unique de probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(1)}$ .

La différence entre les points de mise en œuvre expérimentales et les courbes théoriques peut s'expliquer par les incertitudes intrinsèques à l'expérience décrites dans la section 6.3.2 et par l'erreur commise à cause du nombre fini de mesures réalisées. En effet, les erreurs intrinsèques décrites dans la section 6.3.2 nous permettent de calculer une probabilité d'erreur théorique pour un niveau de bruit nul  $p = 0$  de  $P_{\text{er}} \approx 0.33$  pour un protocole à un qubit unique et de  $P_{\text{er}} \approx 0.26$  pour une paire de qubit intriquée. Ces valeurs expliquent la valeur non nulle de la probabilité d'erreur pour un bruit nul et aussi la pente avec l'augmentation du niveau de bruit plus faible pour les courbes expérimentales.

## 6.5 Discussion sur les mises en œuvre expérimentales

Dans cette section nous avons testé l'utilisation d'un processeur quantique afin de réaliser une mise en œuvre expérimentale des protocoles de détection quantique avec un qubit unique et une paire de qubits intriquée. Nous avons ainsi réalisé un traitement du signal illustrant un apport significatif de l'intrication quantique, et confronté théorie et expérimentation. Cette mise en œuvre nous a permis de valider les effets théoriques mis en évidence dans la section 3.4. En effet, cette mise en œuvre expérimentale nous a permis de montrer l'apport de la propriété d'intrication pour un protocole de détection d'états quantiques. Cet apport est non standard, car un qubit n'interagissant pas avec la scène à imager permet l'amélioration du processus de détection d'états quantiques.

Cette mise en œuvre expérimentale montre la faisabilité de telles validations expérimentales des études de ce manuscrit. Afin de compléter le travail effectué dans ce manuscrit il serait donc intéressant de mettre en œuvre les autres protocoles qui y sont décrits.

**Acknowledgement :** We acknowledge use of the IBM Q Quantum Experience for this work. The views expressed are those of the authors and do not reflect the official policy or position of IBM or the IBM Q team.

<https://www.research.ibm.com/ibm-q/>



# **Chapitre 7**

## **Conclusion et perspectives**

Dans ce manuscrit nous avons étudié des problématiques standards du traitement du signal en présence de bruit, mais dans un cadre quantique. En particulier, nous avons étudié la détection de signaux dans le bruit, l'estimation paramétrique à partir de signaux bruités et la transmission d'information dans un canal bruité. Nous avons identifié des situations de traitement du signal quantique pouvant profiter d'effets non standards. En particulier, nous avons montré pour ces trois processus de traitement du signal que, bien que le comportement standard pour ces processus soit une dégradation de leur performance avec l'augmentation du niveau de bruit, ce comportement n'est pas le seul possible. Nous avons montré la possibilité d'effets de bruit utile ou de résonance stochastique pour ces processus de traitement du signal quantique. En effet, il est possible en augmentant le niveau de bruit d'obtenir une amélioration de la performance de ces trois processus. En particulier pour un bruit quantique thermique, il existe pour ces trois processus un régime où l'augmentation de la température de bruit permet toujours une amélioration de leurs performances respectives. En plus de ce régime où le bruit est toujours bénéfique nous avons montré des régimes de résonance et d'antirésonance stochastiques où les trois processus de traitement du signal quantique voient leur performance minimisée pour une valeur critique finie de la température de bruit, et à partir de là une augmentation de la température de bruit améliore graduellement la performance. Ces régimes non standards de ces trois processus de traitement du signal ont été mis en évidence ici, et les conditions permettant ces régimes de résonance stochastique ont été définies et analysées.

De plus, nous avons montré que, bien que le bruit thermique soit un bruit sophistiqué de par son caractère non unitaire, un bruit plus simple pouvait aussi induire des régimes de résonance stochastique pour le processus d'estimation d'état quantique. En effet, pour des bruits de Pauli nous avons aussi montré la possibilité des mêmes régimes non standards que ceux induits par un bruit thermique. Le processus d'estimation d'état quantique peut donc profiter des régimes non standards de résonance stochastique lorsqu'il est soumis à certains bruits de Pauli. Ces analyses sur les possibilités de phénomènes de bruit utile dans des processus de traitement du signal contribuent à une meilleure connaissance des propriétés du bruit dans le domaine quantique.

En plus d'étudier les régimes de variation de la performance des trois processus de traitement du signal, nous avons étudié l'apport de l'intrication quantique pour les processus de détection d'états quantiques et d'estimation d'état quantique. Nous avons montré que l'exploitation d'une paire de systèmes quantiques dans un état intriqué permet une amélioration de la performance de ces deux processus de traitement du signal. De plus, il est remarquable de constater que cette amélioration se produit alors que le système auxiliaire intriqué n'interagit pas avec le processus à détecter ou à estimer, ni avec le bruit. Sa présence améliore toutefois la performance de la détection ou de l'estimation en présence de bruit. Ces possibilités illustrent l'utilité de l'intrication pour contribuer au traitement du signal quantique.

Finalement, nous avons mis au point des circuits quantiques afin de mettre en œuvre les protocoles de détection aidée par l'intrication sur un processeur quantique. Cette mise en œuvre nous a permis de montrer la possibilité de tester les protocoles de traitement du signal quantique décrits dans ce manuscrit. De plus, cette mise en œuvre a permis de confirmer expérimentalement l'apport bénéfique de la propriété d'intrication pour le processus de détection d'état quantique.

Afin de continuer le travail réalisé pendant cette thèse il serait intéressant d'étudier la

possibilité d'obtenir les effets de bruit utile et d'amélioration par l'intrication montrés dans ce manuscrit avec des mesures de performance différentes. En particulier, étudier la détection d'états quantiques avec l'index de détectabilité et le taux de faux positifs comme mesures de performance et étudier la transmission d'information à travers un canal quantique avec des mesures de performance mises au point à partir d'entropies généralisées. Il serait aussi intéressant de mettre en œuvre des protocoles permettant de montrer expérimentalement les effets de bruit utile et d'amélioration par l'intrication mis en évidence dans ce manuscrit. De plus, il serait intéressant de montrer si les effets de bruit utile sont toujours possibles lors de l'utilisation de la propriété d'intrication. Par exemple, vérifier si le bruit sur un qubit sonde ou un autre bruit sur le qubit auxiliaire peut provoquer une résonance stochastique. Ou encore vérifier si un type de bruit quantique commun ou distinct pour les deux qubits de la paire intriquée peut permettre un phénomène de résonance stochastique.

Les études de cette thèse apportent donc des éléments pour contribuer à une meilleure connaissance et un meilleur contrôle du bruit ou de la décohérence quantique, qui constitue un élément majeur impactant crucialement le traitement du signal et de l'information quantiques et les technologies quantiques, et dont la maîtrise peut encore progresser largement.



## **Annexes**

## A Détection d'états quantiques aidée par l'intrication avec un bruit de bit-flip

Pour le processus de détection quantique sur une image binaire bruitée abordé à la section 3.4, nous analysons ici l'effet d'un bruit quantique différent du bruit dépolarisant des sections 3.4.2 et 3.4.3. Le bruit dépolarisant étant trop sophistiqué pour montrer l'apport de l'intrication sur le processeur quantique que nous avons utilisé, à cause des imperfections de ce processeur. De plus un bruit de bit-flip ayant un effet dégénéré, il ne permettant pas non plus de mettre en évidence l'apport de l'intrication. Nous nous intéresserons donc ici au bruit de bit-flip dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  tournée de  $\pi/3$ . Le bruit de bit-flip est caractérisé par l'Éq. (2.59) et détaillé dans la section 2.3.3. Ce bruit est caractérisé par l'Éq. (2.59) dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Nous allons faire agir ce bruit dans une base différente, tournée, en utilisant l'opérateur unitaire de rotation

$$R = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

au lieu de faire agir le bruit dans la base initiale  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . L'action du bruit s'écrit donc ainsi

$$\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho) = (1-p)\rho + p(R^\dagger \sigma_x R) \rho (R^\dagger \sigma_x R)^\dagger. \quad (\text{A.2})$$

L'expression du bruit à l'Éq. (A.2) est bien de la forme générale de l'Éq. (2.50), avec ses opérateurs de Kraus

$$\Lambda_1 = \sqrt{1-p} \mathbf{I}_2 \quad (\text{A.3})$$

et

$$\Lambda_2 = \sqrt{p} R^\dagger \sigma_x R = \sqrt{p} \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

comme les bruits à deux opérateurs de Pauli définis dans la section 2.3.3. De tels bruits quantiques qui appliquent de façon probabiliste un opérateur unitaire comme dans l'Éq. (A.4), sont par exemple considérés dans [173].

Si le photon passe à travers la scène à imager sans rencontrer d'objet, il reste alors dans l'état  $\rho_0$  de l'Éq. (3.43) :

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Considérons le cas où le passage du photon à travers un objet lui applique l'opérateur  $\sigma_z$ , l'opérateur densité du photon devient alors

$$\rho_1 = \sigma_z \rho_0 \sigma_z^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Les opérateurs densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  des Éqs. (A.5) et (A.6) sont transformés par le bruit comme explicité à l'Éq. (A.2). On calcule  $\mathcal{N}(\rho)$  pour les cas où le photon est passé sur le fond et sur l'objet :

$$\mathcal{N}(\rho_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{p}{4}(\sqrt{3}-1)^2 + 1 - p & -\frac{p}{2} + 1 - p \\ -\frac{p}{2} + 1 - p & \frac{p}{4}(\sqrt{3}+1)^2 + 1 - p \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{N}(\rho_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{p}{4}(\sqrt{3}+1)^2 + 1 - p & \frac{p}{2} + 1 - p \\ \frac{p}{2} + 1 - p & \frac{p}{4}(\sqrt{3}-1)^2 + 1 - p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Afin d'obtenir le détecteur optimal, on calcule l'opérateur de test  $T$  de l'Éq. (3.9) donnant pour états propres

$$|\lambda_1\rangle = \frac{(3p-2)^2}{8(p\sqrt{3} + \sqrt{3p^2 - 3p + 1})\sqrt{3p^2 - 3p + 1}} \left[ -\frac{1}{2\sqrt{3p^2 - 3p + 1} + \sqrt{3}p} \right], \quad (\text{A.9})$$

et

$$|\lambda_2\rangle = \frac{(3p-2)^2}{8(\sqrt{3p^2 - 3p + 1} - p\sqrt{3})\sqrt{3p^2 - 3p + 1}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{3p^2 - 3p + 1} - \sqrt{3}p} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Nous constatons donc que le détecteur optimal est en général dépendant du niveau de bruit  $p$ . Là aussi, puisque nous visons la possibilité d'une mise en œuvre expérimentale, nous allons analyser la performance d'un détecteur sous-optimal plus simple. Ce détecteur sous-optimal plus simple (moins coûteux en termes de circuits quantiques) à simuler expérimentalement, sera toutefois, comme nous allons le voir, suffisant pour l'observation de la propriété quantique spécialement significative que l'intrication (avec un second qubit qui n'interagit pas avec la scène à imager) permet d'améliorer la performance de détection.

On mesure ainsi le photon dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  avec les probabilités de détection suivantes

$$\langle + | \mathcal{N}(\rho_0) | + \rangle = 1 - \frac{3p}{4}, \quad (\text{A.11})$$

$$\langle - | \mathcal{N}(\rho_0) | - \rangle = \frac{3p}{4}, \quad (\text{A.12})$$

$$\langle + | \mathcal{N}(\rho_1) | + \rangle = \frac{3p}{4}, \quad (\text{A.13})$$

$$\langle - | \mathcal{N}(\rho_1) | - \rangle = 1 - \frac{3p}{4}. \quad (\text{A.14})$$

On obtient une probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$  :

$$P_{\text{er}}^{(1)} = \frac{3p}{4}, \quad (\text{A.15})$$

également reprise comme l'Éq. (3.84) dans la section 3.4.4.

On intrigue maintenant le photon sonde avec un photon auxiliaire que l'on garde à l'abri en interagissant à nouveau ni avec la scène à imager ni avec le bruit. La paire de photons est préparée dans l'état intriqué de l'Éq. (3.63). Après formation de l'image, l'état du système quantique à une paire de photons intriquée a pour opérateur  $\rho_0$  de l'Éq. (3.66) sur un pixel du fond et  $\rho_1$  de l'Éq. (3.67) sur un pixel de l'objet. Afin d'obtenir la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$ , on calcule les opérateurs densité  $\mathcal{N}(\rho_0)$  et  $\mathcal{N}(\rho_1)$  de la paire de photons intriquée pour les cas où le photon est passé sur le fond et sur l'objet :

$$\mathcal{N}(\rho_0) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4-p & -\sqrt{3}p & -\sqrt{3}p & 4-7p \\ -\sqrt{3}p & p & p & \sqrt{3}p \\ -\sqrt{3}p & p & p & \sqrt{3}p \\ 4-7p & \sqrt{3}p & \sqrt{3}p & 4-p \end{bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{N}(\rho_1) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4-p & -\sqrt{3}p & \sqrt{3}p & 7p-4 \\ -\sqrt{3}p & p & -p & -\sqrt{3}p \\ \sqrt{3}p & -p & p & \sqrt{3}p \\ 7p-4 & -\sqrt{3}p & \sqrt{3}p & 4-p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

On mesure ensuite la paire intriquée dans la base de Bell  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  définie via les Éqs. (4.71)–(4.74). Pour les différents résultats de mesure possibles, on obtient alors les probabilités

$$\langle \beta_{00} | \mathcal{N}(\rho_0) | \beta_{00} \rangle = 1-p, \quad (\text{A.18})$$

$$\langle \beta_{01} | \mathcal{N}(\rho_0) | \beta_{01} \rangle = \frac{p}{4}, \quad (\text{A.19})$$

$$\langle \beta_{10} | \mathcal{N}(\rho_0) | \beta_{10} \rangle = \frac{3p}{4}, \quad (\text{A.20})$$

$$\langle \beta_{11} | \mathcal{N}(\rho_0) | \beta_{11} \rangle = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\langle \beta_{00} | \mathcal{N}(\rho_1) | \beta_{00} \rangle = \frac{3p}{4}, \quad (\text{A.22})$$

$$\langle \beta_{01} | \mathcal{N}(\rho_1) | \beta_{01} \rangle = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\langle \beta_{10} | \mathcal{N}(\rho_1) | \beta_{10} \rangle = 1-p, \quad (\text{A.24})$$

$$\langle \beta_{11} | \mathcal{N}(\rho_1) | \beta_{11} \rangle = \frac{p}{4}. \quad (\text{A.25})$$

Si on interprète les résultats  $|\beta_{00}\rangle$  et  $|\beta_{11}\rangle$  comme un pixel du fond et  $|\beta_{01}\rangle$  et  $|\beta_{10}\rangle$  comme un pixel de l'objet, alors on obtient une probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}$  égale à celle de l'Éq. (A.15) pour un protocole à un photon unique

$$P_{\text{er}}^{(1)} = \frac{3p}{4}. \quad (\text{A.26})$$

Si on interprète les résultats  $|\beta_{01}\rangle$  comme un pixel du fond et  $|\beta_{00}\rangle$ ,  $|\beta_{10}\rangle$  et  $|\beta_{11}\rangle$  comme un pixel de l'objet, alors on obtient une probabilité d'erreur

$$P_{\text{er}}^{(2)} = (1-P_0) \frac{p}{4}, \quad (\text{A.27})$$

également reprise comme l'Éq. (3.85) dans la section 3.4.4.

La Fig. 3.12 de la section 3.4.4 montre une comparaison des probabilités d'erreur des protocoles à un photon unique  $P_{\text{er}}^{(1)}$  de l'Éq. (A.15) et à une paire de photons intriquée  $P_{\text{er}}^{(2)}$  de l'Éq. (A.27) en fonction du niveau de bruit  $p$ . Cette comparaison nous permet de remarquer que le protocole à une paire de photons intriquée a toujours une probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  inférieure à celle du protocole à un photon unique  $P_{\text{er}}^{(1)}$ .

La Fig. 3.13 de la section 3.4.4 montre le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  des probabilités d'erreur des Éqs. (A.27) et (A.15) en fonction de la probabilité  $P_0$ . Le rapport  $P_{\text{er}}^{(2)}/P_{\text{er}}^{(1)}$  de ces deux probabilités d'erreur est toujours inférieur à 1 quelle que soit la probabilité  $P_0$ . On peut ainsi conclure de la Fig. 3.13 que la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(2)}$  pour un protocole à une paire de photons intriquée est toujours inférieure à la probabilité d'erreur  $P_{\text{er}}^{(1)}$  pour un protocole à un photon unique. L'apport du protocole à une paire de photons intriquée est donc toujours bénéfique pour améliorer la détection.

## B Robustesse selon le paramètre à estimer

Dans cette annexe nous examinons de façon plus poussée comment la performance d'estimation donnée par l'information de Fisher  $F_c(\xi)$ , avec ses trois régimes d'évolution observés à la section 4.3, varie avec le paramètre  $\xi$  à estimer, et comment il est possible d'obtenir une caractérisation de la performance indépendante en ce sens de  $\xi$  et montrant que les trois régimes d'évolution de la performance avec la température de bruit – spécialement les régimes de bruit utile – persistent dans des conditions et sous des formes étendues.

Comme montré précédemment dans l'Éq. (4.17), l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  et le paramètre scalaire  $\alpha_c$  dépendent du paramètre  $\xi$ . En considérant un vecteur de mesure  $\omega$  placé à  $\phi = \pi/2$ , on peut alors exprimer l'information de Fisher telle que

$$F_c(\xi; \phi = \pi/2) = \frac{(1 - \gamma) \cos^2(\xi) [1 - (1 - \sqrt{1 - \gamma}) n_y^2]^2}{1 - (\sqrt{1 - \gamma} \sin(\xi) [1 - (1 - \sqrt{1 - \gamma}) n_y^2] - \gamma n_y (2p - 1))^2}, \quad (\text{B.1})$$

et le paramètre scalaire  $\alpha_c$  tel que

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{1 - \gamma}}{\gamma} \sin(\xi) \left[ \frac{1}{n_y} - (1 - \sqrt{1 - \gamma}) n_y \right]. \quad (\text{B.2})$$

Cela peut être visualisé sur les Figs. B.1 et B.2 qui montrent dans le plan  $(\xi, n_y)$  les trois domaines d'évolution de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  en fonction de la température de bruit  $T$  contrôlée via le paramètre scalaire  $\alpha_c$  de l'Éq. (B.2) pour deux valeurs de l'amortissement  $\gamma$ .

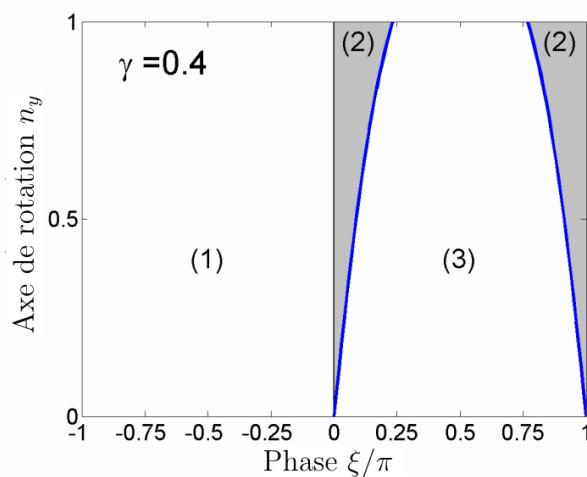


FIGURE B.1 – Pour  $(\xi, n_y) \in [-\pi, \pi] \times [0, 1]$  et un amortissement  $\gamma = 0.4$ , les trois domaines d'évolution de l'information de Fisher  $F_c(\xi; \phi = \pi/2)$  de l'Éq. (B.1) avec la température  $T$ , contrôlés par  $\alpha_c$  de l'Éq. (B.2). Le domaine (1) donne une information de Fisher  $F_c(\xi)$  croissante lorsque  $\alpha_c \leq 0$ ; Le domaine (2) en gris donne une information de Fisher  $F_c(\xi)$  antirésonante lorsque  $\alpha_c \in ]0, 1[$ ; Le domaine (3) donne une information de Fisher  $F_c(\xi)$  décroissante lorsque  $\alpha_c \geq 1$ .

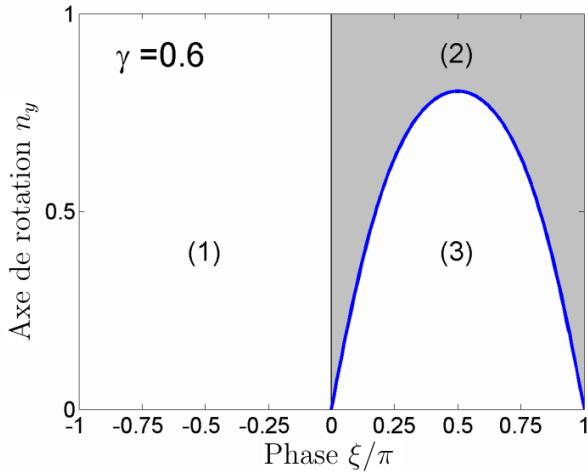


FIGURE B.2 – Pour  $(\xi, n_y) \in [-\pi, \pi] \times [0, 1]$  et un amortissement  $\gamma = 0.6$ , les trois domaines d'évolution de l'information de Fisher  $F_c(\xi; \phi = \pi/2)$  de l'Éq. (B.1) avec la température  $T$ , contrôlés par  $\alpha_c$  de l'Éq. (B.2). Le domaine (1) donne une information de Fisher  $F_c(\xi)$  croissante lorsque  $\alpha_c \leq 0$ ; Le domaine (2) en gris donne une information de Fisher  $F_c(\xi)$  antirésonante lorsque  $\alpha_c \in ]0, 1[$ ; Le domaine (3) donne une information de Fisher  $F_c(\xi)$  décroissante lorsque  $\alpha_c \geq 1$ .

Les Figs. B.1 et B.2 montrent comment les trois régimes d'évolution de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  avec la température  $T$  sont préservés dans des conditions larges notamment selon la phase  $\xi$  inconnue, et comment ils sont traversés en variant les conditions. De plus, la Fig. B.3 représente l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  comme une fonction de l'angle de phase  $\xi \in [-\pi, \pi]$  dans la rotation autour de l'axe  $\vec{n}$  à  $n_y = 1$ , lorsque l'Éq. (B.1) est réduite à

$$F_c(\xi; \phi = \pi/2, n_y = 1) = \frac{(1 - \gamma)^2 \cos^2(\xi)}{1 - [(1 - \gamma) \sin(\xi) - \gamma(2p - 1)]^2}. \quad (\text{B.3})$$

Le bruit thermique de la Fig. B.3 a un amortissement  $\gamma = 0.4$  et trois températures  $T$  sont testées. Dans les conditions de la Fig. B.3, les trois régimes sont gouvernés à partir de l'Éq. (B.2) par  $\alpha_c = (\gamma^{-1} - 1) \sin(\xi) = 1.5 \sin(\xi)$ , tel que  $\alpha_c = 1$  lorsque que  $\xi = \xi_c = 0.23\pi$ . Pour  $\xi \in [-\pi, 0]$ , alors  $\alpha_c \leq 0$  fixe le régime de décroissance de  $F_c(\xi)$  avec l'augmentation de la température  $T$ , marquée comme la région (1) sur la Fig. B.3. Pour  $\xi \in [\alpha_c, \pi - \alpha_c]$ , alors  $\alpha_c \geq 1$  fixe le régime croissant de  $F_c(\xi)$  avec l'augmentation de  $T$ , marqué comme la région (3) sur la Fig. B.3. Pour un  $\xi$  autre, alors  $\alpha_c \in ]0, 1[$  fixe un régime antirésonant de  $F_c(\xi)$  avec  $T$ , marqué comme la région (2) sur la Fig. B.3 .

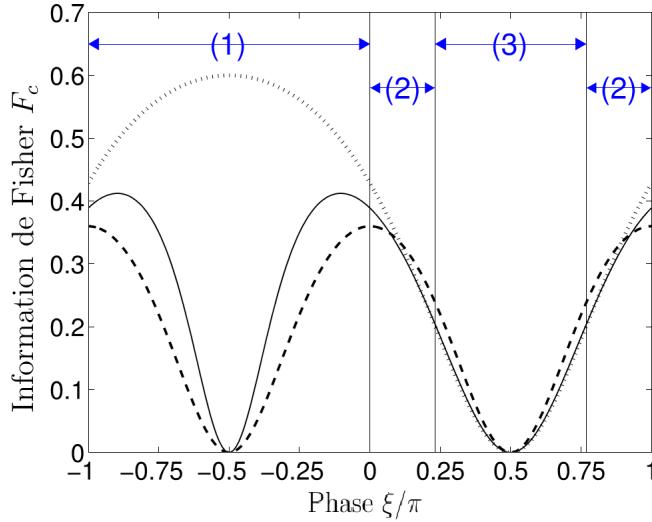


FIGURE B.3 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l’Éq. (B.3) comme une fonction de l’angle de phase  $\xi$ , pour un amortissement  $\gamma = 0.4$ , à trois différentes températures  $T$ , la courbe en pointillés est à  $T = 0$  avec  $p = 1$ , la courbe pleine à  $T = 0.6$  avec  $p \approx 0.841$  déduit de l’Éq. (2.74), la courbe en tirets à  $T = \infty$  avec  $p = 1/2$ . Les lignes verticales séparent les trois régimes d’évolution pour l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  avec  $T$ .

Les Figs. B.1-B.3 montrent la dépendance avec  $\xi$  des valeurs de l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  et ses trois régimes d’évolution. En général, l’Éq. (4.25) est aussi

$$\vec{\omega}A(\vec{n} \times \vec{r}_1) = \sqrt{1-\gamma} \left( -\cos(\phi) \sin(\xi) + [1 - (1 - \sqrt{1-\gamma}) n_y^2] \sin(\phi) \cos(\xi) \right), \quad (\text{B.4})$$

telle que pour tout  $n_y$ , i.e. tout axe de rotation  $\vec{n}$ , et toute orientation  $\phi$  du vecteur de mesure  $\vec{\omega}$ , il existe aussi une phase  $\xi$  réalisant  $\vec{\omega}A(\vec{n} \times \vec{r}_1) = 0$  et de cette manière atteignant une information de Fisher  $F_c(\xi)$  s’annulant dans l’Éq. (4.16). Cela est accompli à partir de l’Éq. (B.4) par  $\xi$  solution de

$$\tan(\xi) = [1 - (1 - \sqrt{1-\gamma}) n_y^2] \tan(\phi) \quad (\text{B.5})$$

qui existe toujours. De plus, pour  $\xi \in ]-\pi, \pi]$  il existe toujours deux solutions séparées par  $\pi$ . Ces deux solutions forment généralement deux zéros de l’information de Fisher  $F_c(\xi)$ , excepté dans la configuration spéciale ( $\phi = \pi/2, n_y = 1, p = 1$ ) où les deux solutions sont  $\xi = \pm\pi/2$ , mais comme le dénominateur de l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  qui est réduite à l’Éq. (B.3) s’annule aussi en  $\xi = -\pi/2$ , seulement  $\xi = \pi/2$  forme un zéro de l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  ici. Une telle information de Fisher  $F_c(\xi)$  s’annulant signifie que, pour tout axe de rotation  $\vec{n}$  et tout vecteur de mesure  $\vec{\omega}$ , il existe toujours deux (rarement, une) valeurs de  $\xi \in ]-\pi, \pi]$  où la mesure est complètement inopérante pour l’estimation de  $\xi$ . Par exemple, à  $\phi = \pi/2$ , l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l’Éq. (B.1) s’annule généralement à  $\xi = \pm\pi/2$ , excepté  $\xi = -\pi/2$  dans la configuration spéciale ( $n_y = 1, p = 1$ ) de l’Éq. (B.3) où elle atteint  $1 - \gamma$ , comme montré sur la Fig. B.3.

Maintenant, comme nous allons l’expliquer, il y a une possibilité d’éviter de telles conditions inopérantes où l’information de Fisher  $F_c(\xi)$  s’annule. Comme montré sur la Fig. 4.2, dans le

plan orthogonal à l'axe de rotation  $\vec{n}$ , le vecteur de mesure  $\vec{\omega}$  avec l'orientation  $\phi$  doit suivre la rotation d'angle  $\xi$  pour l'estimation. Comme illustré sur la Fig. B.3, il est habituellement mieux pour une estimation efficace d'avoir  $\phi$  et  $\xi$  séparés par  $\pm\pi/2$  plutôt que par 0 ou  $\pi$ ; mais comme  $\xi$  est inconnu, tout  $\phi$  fixé va habituellement mener à une performance d'estimation  $F_c(\xi)$  variant avec  $\xi$ ; et comme expliqué précédemment, pour tout  $\phi$  il existe toujours des valeurs de  $\xi$  où  $F_c(\xi)$  s'annule. Pour un meilleur suivi de  $\xi$ , au lieu d'utiliser un vecteur unité  $\vec{\omega}$  défini afin d'effectuer une mesure de von Neumann selon l'Éq. (4.16), nous avons la possibilité d'utiliser deux vecteurs unités  $\vec{\omega}_1$  et  $\vec{\omega}_2$  afin de définir une mesure généralisée avec  $K = 4$  opérateurs de mesure  $(I_2 \pm \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\sigma})/4$  et  $(I_2 \pm \vec{\omega}_2 \cdot \vec{\sigma})/4$ . Basé sur l'Éq. (4.15), l'information de Fisher globale d'une telle mesure généralisée est la moyenne

$$F_c(\xi) = \frac{[F_c(\xi; \vec{\omega}_1) + F_c(\xi; \vec{\omega}_2)]}{2}, \quad (\text{B.6})$$

où  $F_c(\xi; \vec{\omega}_1)$  et  $F_c(\xi; \vec{\omega}_2)$  sont les deux informations de Fisher données par l'Éq. (4.17) à  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$  et  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2$ . De plus, pour un suivi efficace de  $\xi$  il est intéressant de prendre  $\vec{\omega}_1$  et  $\vec{\omega}_2$  à angle droit dans le plan orthogonal de l'axe de rotation  $\vec{n}$ , assurant que  $F_c(\xi; \vec{\omega}_1)$  et  $F_c(\xi; \vec{\omega}_2)$ , et par conséquent l'information de Fisher globale  $F_c(\xi)$  ne s'annule pas pour le même  $\xi$  de façon à ce que l'estimation reste opérationnelle pour tout  $\xi$ . En placant  $\vec{\omega}_1$  à  $\phi = 0$  et  $\vec{\omega}_2$  à  $\phi = \pi/2$ , l'information de Fisher de l'Éq. (4.15) devient

$$F_c(\xi) = \frac{[F_c(\xi; \phi = 0) + F_c(\xi; \phi = \frac{\pi}{2})]}{2}. \quad (\text{B.7})$$

L'information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (B.7) est illustrée sur la Fig. B.4.

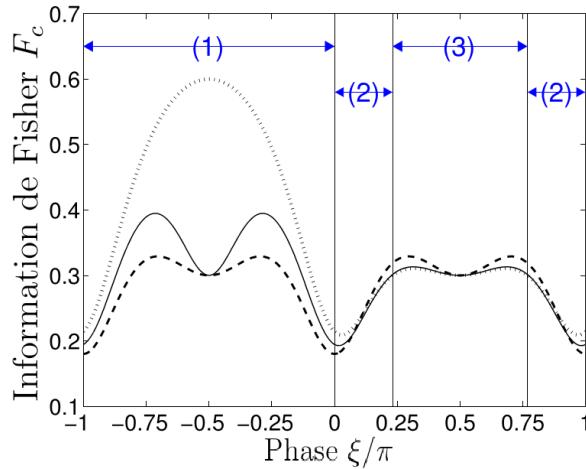


FIGURE B.4 – Information de Fisher  $F_c(\xi)$  à partir des Éqs. (4.28) et (B.3) à  $n_y = 1$ , pour une mesure avec  $K = 4$  opérateurs en fonction de l'angle de phase  $\xi$ . Pour un amortissement  $\gamma = 0.4$ , à trois différentes températures  $T$ . La courbe en pointillés est à  $T = 0$  avec  $p = 1$ , la courbe pleine à  $T = 0.6$  avec  $p \approx 0.841$  déduit de l'Éq. (2.74), la courbe en tirets à  $T = \infty$  avec  $p = 1/2$ . Les lignes verticales séparent les trois régimes d'évolution pour l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  avec  $T$ .

Comme prévu, l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  de la Fig. B.4 obtenue par la mesure généralisée avec  $K = 4$  opérateurs, ne s'annule jamais, et de cette manière maintient l'efficacité de l'estimation pour toute phase  $\xi$ . Aussi, sachant que l'information de Fisher  $F_c(\xi; \phi = 0)$  de l'Éq. (4.28) est indépendante de la température de bruit  $T$ , cette information de Fisher  $F_c(\xi)$  de la Fig. B.4 possède la même dépendance avec la température de bruit  $T$  que de l'information de Fisher  $F_c(\xi; \phi = \pi/2)$  de la Fig. B.3. De cette façon, l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  de la Fig. B.4 a accès aux trois régimes de dépendance avec  $T$ , comme montré sur la Fig. B.4.

Il est même possible d'éliminer complètement la dépendance en  $\xi$  de la caractérisation de la performance d'estimation. Cela peut être obtenu en prenant la moyenne de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  sur l'angle de phase  $\xi$  considéré uniforme sur  $]-\pi, \pi]$ . Cela caractérise la performance moyenne, après des expériences d'estimation répétées impliquant des valeurs de  $\xi$  couvrant de manière uniforme  $]-\pi, \pi]$ . Les Figs. B.5 et B.6 montrent une telle information de Fisher moyennée sur la phase  $\xi$  provenant de l'information de Fisher  $F_c(\xi)$  de l'Éq. (B.1).

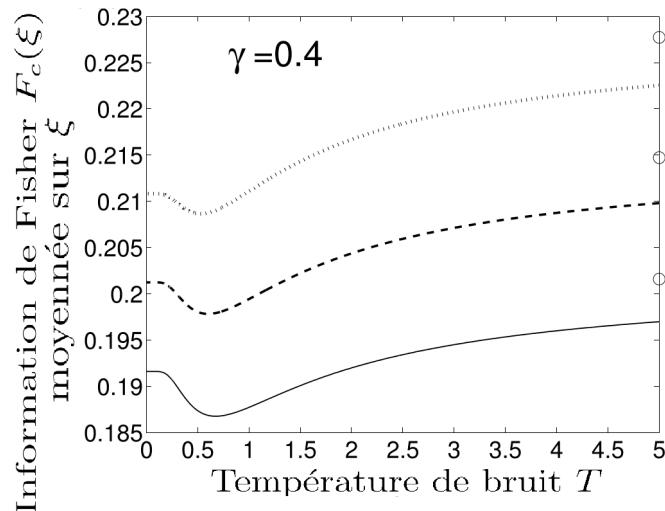


FIGURE B.5 – L'information de Fisher  $F_c(\xi; \phi = \pi/2)$  de l'Éq. (B.1) moyennée sur la phase  $\xi$ , comme une fonction de la température de bruit  $T$ ; avec  $n_y = 1$  (lignes pleines),  $n_y = 0.95$  (lignes en tirets),  $n_y = 0.9$  (lignes en pointillés) pour un amortissement  $\gamma = 0.4$ . Les cercles ( $\circ$ ) sont les valeurs asymptotiques à  $T = \infty$ .

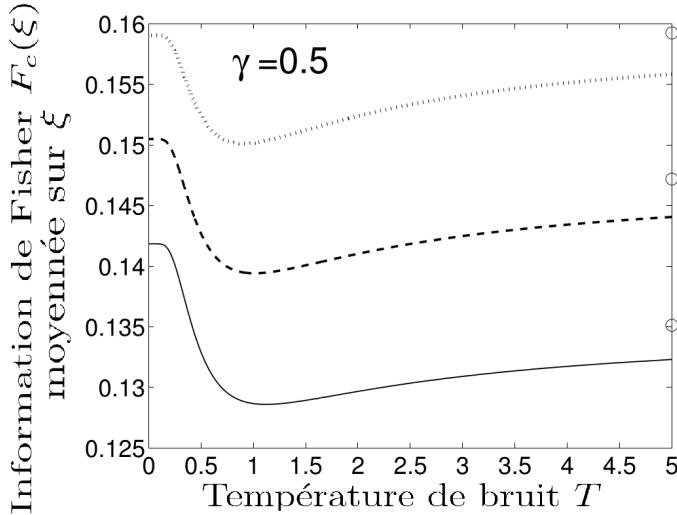


FIGURE B.6 – L’information de Fisher  $F_c(\xi; \phi = \pi/2)$  de l’Éq. (B.1) moyennée sur la phase  $\xi$ , comme une fonction de la température de bruit  $T$ ; avec  $n_y = 1$  (lignes pleines),  $n_y = 0.95$  (lignes en tirets),  $n_y = 0.9$  (lignes en pointillés) pour un amortissement  $\gamma = 0.5$ . Les cercles ( $\circ$ ) sont les valeurs asymptotiques à  $T = \infty$ .

En général, selon l’axe de rotation  $\vec{n}$ , l’amortissement  $\gamma$  et le vecteur de mesure  $\vec{\omega}$ , les trois régimes d’évolution avec la température de bruit  $T$  sont toujours accessibles pour une telle information de Fisher moyennée sur la phase  $\xi$ . Les Figs. B.5 et B.6 montrent spécifiquement les conditions d’un régime antirésonant, avec l’information de Fisher moyennée sur la phase  $\xi$  qui devient minimale pour la valeur critique de la température de bruit  $T_c$ . La température critique  $T_c$  intervient autour de 1 sur les Figs. B.5 et B.6, bien que la valeur précise de  $T_c$  soit habituellement dépendante de  $\vec{n}$  et de  $\gamma$  comme visible sur les Figs. B.5 et B.6. Autour d’une telle température critique  $T_c$ , le bruit thermique est maximalement défavorable avec l’efficacité d’estimation qui est à un minimum. Il est alors préférable de repérer un régime où une telle température  $T_c$  est identifiée, afin d’opérer le processus à une température  $T$  plus faible ou plus élevée, quand cela est possible. Ce phénomène d’antirésonance stochastique est similaire à celui montré pour l’information de Fisher non moyennée dans la section 4.3.

Dans des conditions définies fixant l’axe de rotation  $\vec{n}$ , l’amortissement  $\gamma$  et le vecteur de mesure  $\vec{\omega}$ , nous avons montré les effets de la température de bruit  $T$  sur une information de Fisher moyennée sur la phase  $\xi$ . Une telle information de Fisher moyennée sur la phase  $\xi$ , est une mesure de performance significative de l’estimation de la phase  $\xi$ , car indépendante de la phase  $\xi$  à estimer. Cela peut servir à optimiser la mise en place du processus d’estimation, ayant une utilité générale non liée à une valeur spécifique ou à un intervalle de la phase  $\xi$ , possiblement en augmentant la température de bruit  $T$  si approprié. Par exemple, la configuration des Fig. B.5 et B.6 incite à éviter d’opérer autour de la température critique  $T_c \approx 1$  et à ajuster à une température  $T$  plus haute (ou plus faible) si accessible.

L’évolution non monotone de la performance moyennée sur la phase  $\xi$  illustrée sur la Fig. B.4 est aussi préservée avec la mesure généralisée de  $K = 4$  opérateurs. Cela est illustré sur la Fig. B.7 qui représente le résultat de la moyenne sur  $\xi$  de l’information de Fisher de l’Éq. (B.7) à partir de l’Éq. (4.28) et l’Éq. (B.1) aussi montré sur la Fig. B.4 à  $n_y = 1$ . Les conditions de

la Fig. B.7, pour l'axe de rotation  $\vec{n}$  et l'amortissement de bruit  $\gamma$ , illustrent spécifiquement le régime antirésonant où les hautes températures de bruit sont généralement préférables.

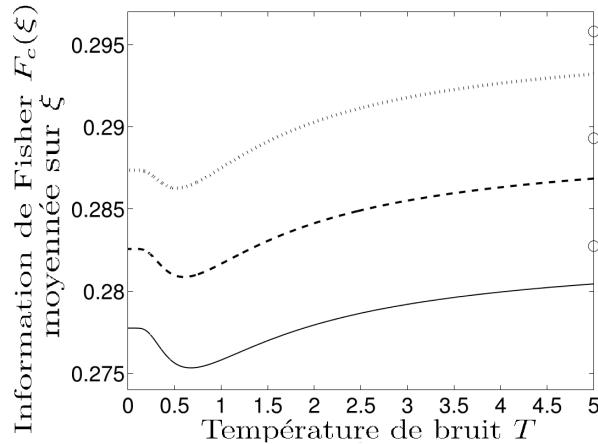


FIGURE B.7 – L'information de Fisher  $F_c(\xi) = [F_c(\xi; \phi = 0) + F_c(\xi; \phi = \pi/2)]/2$  à partir des Éqs. (4.28), (B.1) et de la Fig. B.4 après avoir effectué la moyenne sur la phase  $\xi$ , comme une fonction de la température de bruit  $T$ ; avec l'amortissement  $\gamma = 0.4$  et l'axe de rotation  $n_y = 1$  (ligne pleine),  $n_y = 0.95$  (ligne en tirets),  $n_y = 0.9$  (ligne en pointillés). Les cercles ( $\circ$ ) sont les valeurs asymptotiques à  $T = \infty$ .

Les conditions de la Fig. B.7, ainsi que celles des Figs. B.5 et B.6, démontrent que la performance quantifiée par l'information de Fisher moyennée sur la phase  $\xi$ , qui est indépendante du paramètre inconnu  $\xi$ , a accès aux régimes non monotones d'évolution avec la température de bruit  $T$ . Cela illustre la possibilité de comportements non standards du bruit ou décohérence quantique, qui n'est pas uniformément plus défavorable lorsque le niveau de bruit augmente. On peut avoir l'option d'éviter des températures défavorables en augmentant la performance en ajustant à une température plus élevée (ou plus faible).

## C Estimation d'état quantique aidée par l'intrication avec un bruit thermique

Dans cette annexe nous reprenons le processus d'estimation de phase amélioré par l'intrication en présence de bruit dépolarisant des sections 4.5.1 et 4.5.2, et nous montrons qu'un bénéfice similaire par l'intrication se retrouve avec un bruit thermique quantique.

On envoie un qubit sonde sur un milieu dont on veut estimer l'angle de phase  $\xi$ . On choisit cette sonde d'état  $|\psi_0\rangle$  afin que :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

On a alors l'opérateur densité de l'Éq. (4.56) :

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Le qubit d'opérateur densité  $\rho_0$  interagit alors avec le milieu à imager par l'intermédiaire de l'opérateur  $U_\xi$  de l'Éq. (4.57). On a alors l'état transformé  $\rho_1(\xi) = U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger$  qui donne

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{bmatrix} \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^{-i\xi} \\ e^{i\xi} & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Le bruit thermique défini dans la section 2.3.3 est caractérisé par les matrices de Kraus des Éqs. (2.68)-(2.71). L'opérateur densité est alors transformé comme suit :

$$\mathcal{N}(\rho_1) = \rho_2 = \sum_{j=1}^4 \Lambda_j \rho_1 \Lambda_j^\dagger. \quad (\text{C.4})$$

On mesure ensuite ce qubit dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ . On obtient alors pour les deux résultats de mesure possibles, les probabilités

$$\langle +|\rho_2|+\rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(\xi) \sqrt{1 - \gamma} \right], \quad (\text{C.5})$$

$$\langle -|\rho_2|-\rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos(\xi) \sqrt{1 - \gamma} \right]. \quad (\text{C.6})$$

Comme précédemment, on peut alors calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $0 < \xi < \pi$  :

$$\hat{\xi} = \arccos \left( -\frac{N - 2n_+}{N\sqrt{1 - \gamma}} \right). \quad (\text{C.7})$$

Nous allons maintenant décrire un protocole d'estimation quantique utilisant la propriété d'intrication quantique avant de le comparer au protocole à un photon unique.

On prépare une paire de qubits intriquée dans l'état  $|\beta_{00}\rangle$  de l'Éq. (3.63). Le qubit sonde de la paire de qubits d'opérateur densité  $\rho_0$  de l'Éq. (4.66) interagit ensuite avec le milieu à imager par l'intermédiaire de l'opérateur  $U_\xi$ . On a alors l'état transformé  $\rho_1(\xi) = (U_\xi \otimes I_2)\rho_0(U_\xi \otimes I_2)^\dagger$  qui donne

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\xi} \end{bmatrix} \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-i\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\xi} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Le qubit sonde de la paire intriquée est alors affecté par un bruit thermique décrit par les Éqs. (2.68)-(2.71) et (C.4). L'état  $\rho_1$  de la paire intriquée se voit alors transformé selon

$$\rho_2 = \sum_{j=1}^4 (\Lambda_j \otimes I_2) \rho_1 (\Lambda_j \otimes I_2)^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p + (\gamma - 1)(p - 1) & 0 & 0 & e^{-i\xi}\sqrt{1-\gamma} \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(1-p) & 0 \\ e^{i\xi}\sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 & 1 - \gamma p \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Lors de la mesure dans la base  $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  on obtient les probabilités des quatre résultats de mesure :

$$\langle \beta_{00} | \rho_2 | \beta_{00} \rangle = \frac{1 + \cos(\xi)\sqrt{1-\gamma} - \frac{\gamma}{2}}{2}, \quad (\text{C.10})$$

$$\langle \beta_{10} | \rho_2 | \beta_{10} \rangle = \frac{1 - \cos(\xi)\sqrt{1-\gamma} - \frac{\gamma}{2}}{2}, \quad (\text{C.11})$$

$$\langle \beta_{01} | \rho_2 | \beta_{01} \rangle = \frac{\gamma}{4}, \quad (\text{C.12})$$

$$\langle \beta_{11} | \rho_2 | \beta_{11} \rangle = \frac{\gamma}{4}. \quad (\text{C.13})$$

On a alors la probabilité  $L$  d'obtenir exactement  $n_{00}$  paires de qubits dans l'état  $|\beta_{00}\rangle$ ,  $n_{01}$  paires de qubits dans l'état  $|\beta_{01}\rangle$ ,  $n_{10}$  paires de qubits dans l'état  $|\beta_{10}\rangle$  et  $n_{11}$  paires de qubits dans l'état  $|\beta_{11}\rangle$  sur  $N$  paires de qubits mesurées :

$$L = \binom{N}{n_{00}} \binom{N - n_{00}}{n_{01}} \binom{N - n_{00} - n_{01}}{n_{10}} (\langle \beta_{00} | \rho_2 | \beta_{00} \rangle)^{n_{00}} (\langle \beta_{01} | \rho_2 | \beta_{01} \rangle)^{n_{01}} (\langle \beta_{10} | \rho_2 | \beta_{10} \rangle)^{n_{10}} (\langle \beta_{11} | \rho_2 | \beta_{11} \rangle)^{n_{11}}. \quad (\text{C.14})$$

Comme précédent on dérive alors cette vraisemblance  $L$  par rapport au paramètre  $\xi$ , et on déduit la valeur du paramètre  $\xi$  qui maximise  $L$  dans l'Éq. (C.14). L'estimateur du maximum de vraisemblance est donc pour  $0 < \xi < \pi$  :

$$\hat{\xi} = \arccos \left( \frac{(n_{00} - n_{01}) \left( 1 - \frac{\gamma}{2} \right)}{(n_{00} + n_{01})\sqrt{1-\gamma}} \right). \quad (\text{C.15})$$

La Fig. C.1 montre les erreurs quadratiques obtenues avec les protocoles des Figs. 4.13 et 4.14 pour un bruit thermique. Ces courbes sont obtenues par simulation des deux protocoles pour différentes valeurs de la phase  $\xi$ .

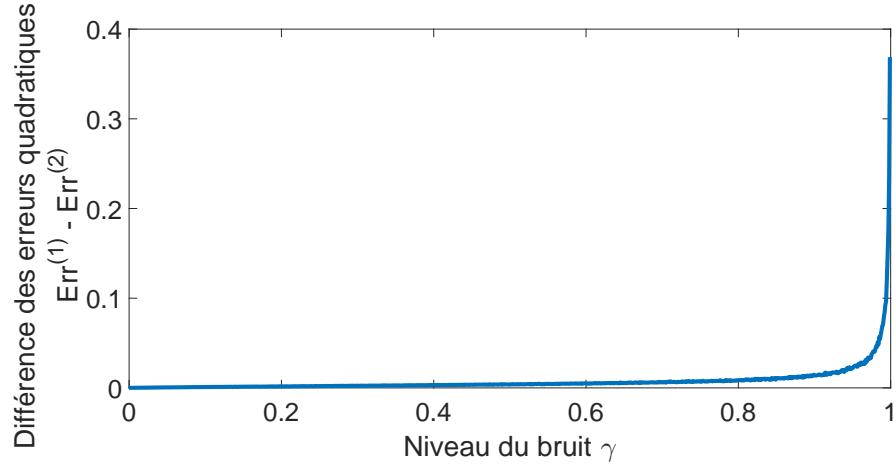


FIGURE C.1 – Différence des erreurs quadratiques moyennes  $E_{rr}^{(1)}$  de l’Éq. (C.7) pour le protocole à qubit unique et  $E_{rr}^{(2)}$  de l’Éq. (C.15) pour le protocole à paire de qubits intriquée, pour une simulation sur des signaux à 10 000 valeurs de  $\xi$  prises au hasard et pour 1 000 itérations par valeurs du niveau de bruit  $\gamma$  et une probabilité  $p = 0.7$ .

On constate sur la Fig. C.1 que l’erreur quadratique moyenne  $E_{rr}$  est ainsi réduite avec la paire de qubits intriquée.

Nous continuons l’application sur des images numériques de ce scénario d’estimation de phase quantique améliorée par l’intrication en présence de bruit thermique maintenant. La Fig. C.2 illustre la simulation numérique d’une telle application avec un bruit thermique.

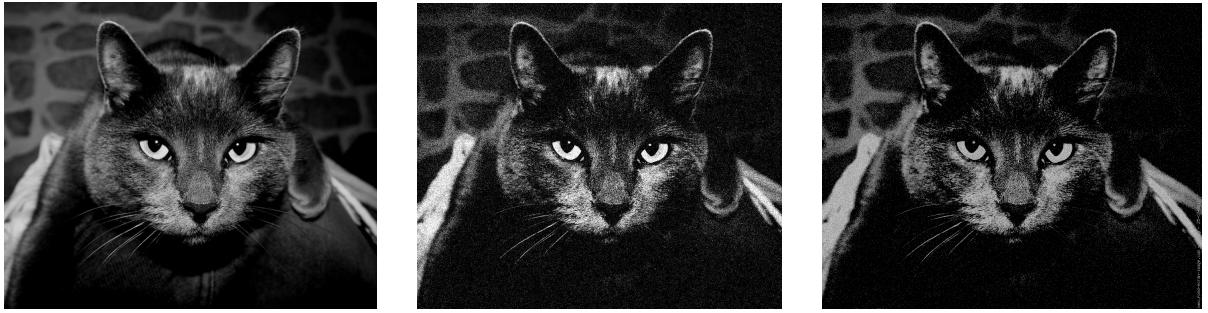


FIGURE C.2 – À gauche, l'image en niveaux de gris originale. Au centre, l'image en niveaux de gris, bruitée avec un bruit thermique, acquise pour  $N = 10^3$  qubits uniques par pixel avec  $\gamma = 0.99$  et  $p = 0.7$ . L'erreur quadratique moyenne  $E_{rr}$  pour cette image est de  $E_{rr} = 0.0747$  pour des niveaux de gris codés par une phase  $\xi$  entre 0 et  $\pi$ . À droite, l'image en niveaux de gris, bruitée avec un bruit thermique, acquise pour  $N = 10^3$  paires de qubits intriquées par pixel avec  $\gamma = 0.99$  et  $p = 0.7$ . L'erreur quadratique moyenne pour cette image est de  $E_{rr} = 0.0585$  pour des niveaux de gris codés par une phase  $\xi$  entre 0 et  $\pi$ .

On constate sur la Fig. C.2 que bien que le qubit auxiliaire n'interagisse jamais avec le processus  $U_\xi$  à estimer, son utilisation à travers la propriété d'intrication permet l'amélioration de ce protocole d'estimation d'un paramètre pour un bruit thermique montré ici. Cette amélioration pour un bruit thermique confirme la possibilité d'amélioration montrée pour un bruit dépolarisant de la section 4.5.2.

La Fig. C.3 illustre les erreurs quadratiques moyennes  $E_{rr}$  pour les protocoles à un qubit unique et à une paire de qubits intriquée pour un bruit thermique en fonction de la valeur à estimer  $\xi$ .

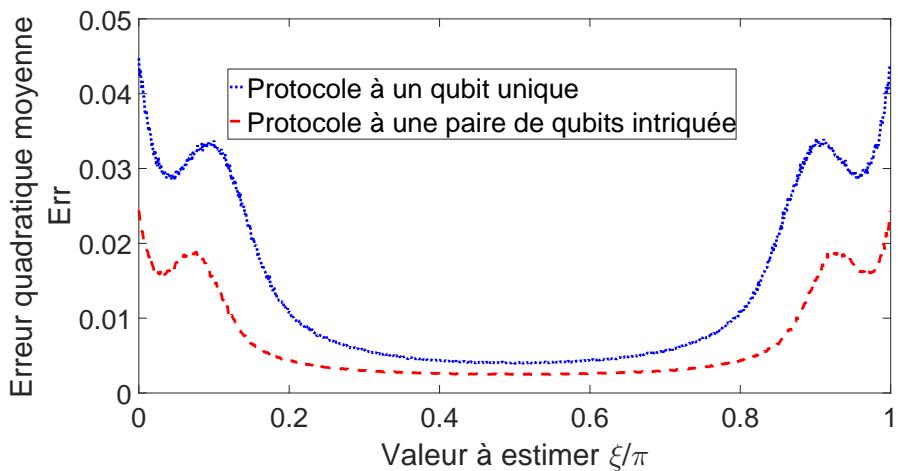


FIGURE C.3 – Erreur quadratique moyenne  $E_{rr}$  en fonction de la valeur à estimer  $\xi$  pour les protocoles à qubit unique de l'Éq. (C.7) et à paire de qubits intriquée de l'Éq. (C.15), pour une simulation sur des signaux pour 10 000 itérations par valeurs de  $\xi$  et pour  $\gamma = 0.75$ .

La Fig. C.3 nous montre que le protocole à une paire intriquée entraîne une erreur quadratique  $E_{rr}$  plus faible que le protocole à un qubit unique. Ce résultat valable pour le bruit dépolarisant est aussi vérifié avec un bruit thermique. Cette amélioration est plus importante pour des valeurs de  $\xi$  proche de  $0.1\pi$  et  $0.9\pi$ .

## D Information cohérente et quantités associées

### D.1 Information cohérente

Dans cette annexe, nous étudions les comportements avec le bruit d'une quantité informationnelle quantique importante qui est l'information cohérente, ainsi que de trois autres quantités associées [7, 8]. Les résultats confirment et étendent pour ces quantités informationnelles, les possibilités d'effets de bruit utile [142, 143] rapportées dans les sections 5.1 et 5.2.

En partant de l'entropie de sortie  $S(\rho')$  et de l'entropie d'échange  $S(\rho'_E)$  des sections 5.1 et 5.2 on peut définir l'information cohérente quantique [8, 174] comme

$$I_c(\rho, \mathcal{N}) = S(\rho') - S(\rho'_E) . \quad (\text{D.1})$$

L'information cohérente  $I_c(\rho, \mathcal{N})$  n'est pas nécessairement non négative, et dépend de la capacité quantique d'un canal bruité  $\mathcal{N}(\cdot)$  [174]. Pour un état d'entrée pur d'opérateur densité  $\rho$  nous avons vu dans la section 5.2 que  $S(\rho') = S(\rho'_E)$  ce qui implique  $I_c(\rho, \mathcal{N}) = 0$  quels que soient les paramètres de bruit  $(\gamma, T)$ . Cependant, pour un état d'entrée mélangé d'opérateur densité  $\rho$ , l'information cohérente  $I_c(\rho, \mathcal{N})$  de l'Eq. (D.1) ne s'annule pas en général, et peut suivre, selon les valeurs de l'opérateur densité  $\rho$  et l'amortissement  $\gamma$ , trois régimes de variation (décroissant, antirésonant et croissant) en fonction de la température de bruit  $T$ . Ces différents régimes sont illustrés sur les Figs. D.1 et D.2 où la Fig. D.1 montre un régime décroissant et un régime croissant et la Fig. D.2 illustre des situations de régime antirésonant.

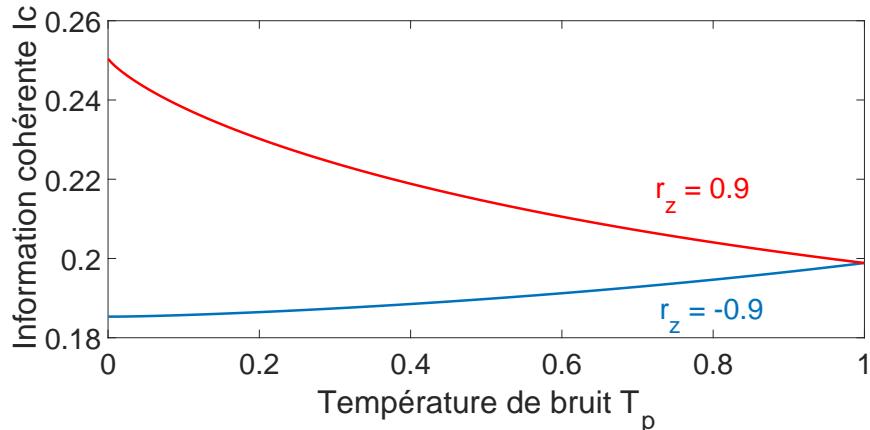


FIGURE D.1 – Informations cohérentes  $I_c(\rho, \mathcal{N})$  de l'Eq. (D.1) décroissante et croissante en fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour différentes valeurs de la composante  $r_z$  (ici illustrées  $-0.9$  et  $0.9$ ) pour un amortissement  $\gamma = 0.05$  et pour un état d'entrée mélangé d'opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, \pm 0.9]^\top$ .

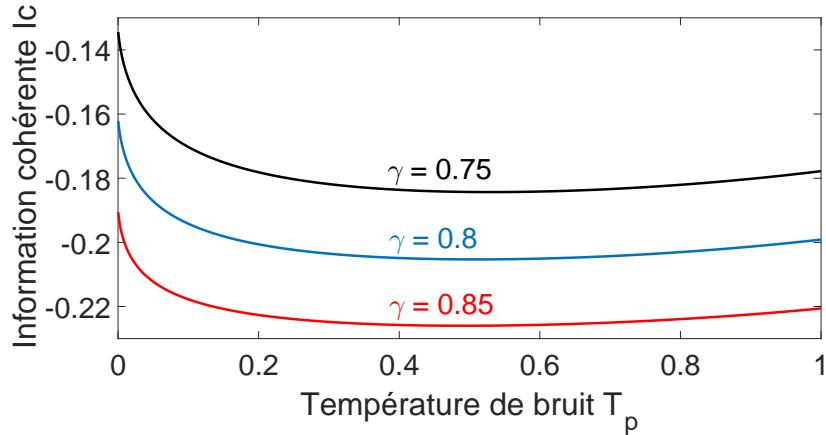


FIGURE D.2 – Information cohérente  $I_c(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.1) antirésonante en fonction de la température de bruit réduite  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.75, 0.8 et 0.85) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, 0.9]^\top$ .

## D.2 Information mutuelle entrée–sortie

On peut aussi définir l’information mutuelle entrée–sortie quantique [8, 174] comme

$$I(\rho, \mathcal{N}) = S(\rho) + S(\rho') - S(\rho'_E) = S(\rho) + I_c(\rho, \mathcal{N}), \quad (\text{D.2})$$

qui est non négative, et quantifie l’information mutuelle entre l’état quantique d’entrée  $\rho$  et l’état quantique de sortie d’opérateur densité  $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$ . Cette information mutuelle entrée–sortie  $I(\rho, \mathcal{N})$  s’annule pour un état d’entrée d’opérateur densité  $\rho$  pur, tout comme  $S(\rho)$  et  $I_c(\rho, \mathcal{N})$ . Pour des états d’entrée d’opérateur densité  $\rho$  mélange, on vérifie que  $I(\rho, \mathcal{N})$  aussi, selon les valeurs de l’opérateur densité  $\rho$  et de l’amortissement  $\gamma$ , peut subir trois régimes de variation (décroissant, antirésonant et croissant) en fonction de la température de bruit  $T$ . Ces trois régimes sont respectivement illustrés sur les Figs. D.3, D.4 et D.5.

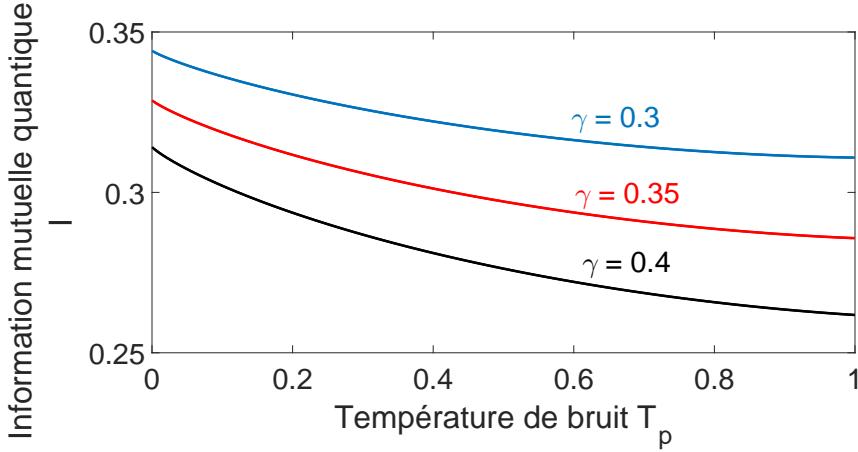


FIGURE D.3 – Information mutuelle entrée-sortie quantique  $I(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.2) décroissante en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.3, 0.35 et 0.4) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

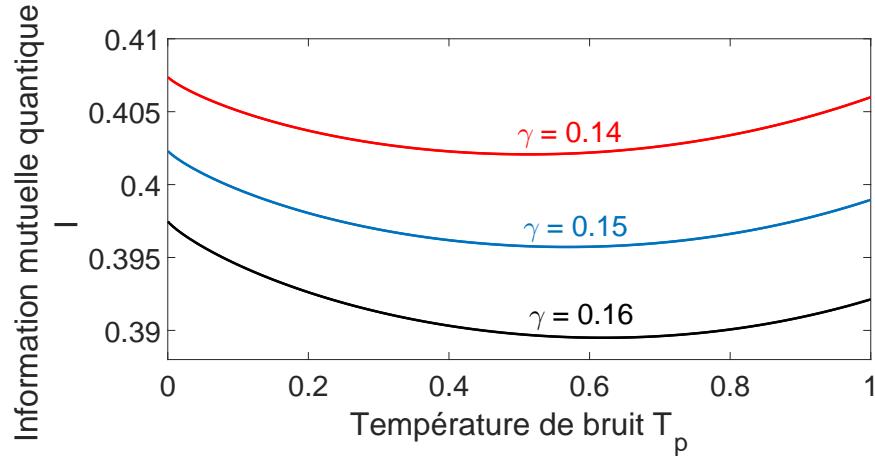


FIGURE D.4 – Information mutuelle entrée-sortie quantique  $I(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.2) antirésonante en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.14, 0.15 et 0.16) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

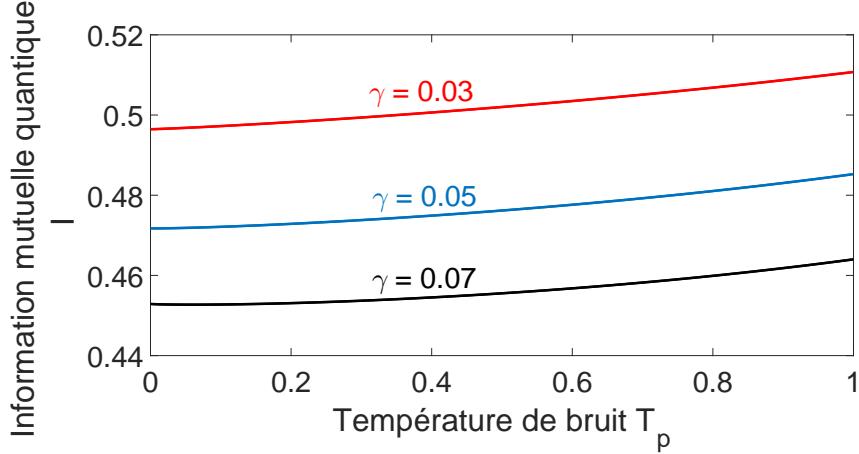


FIGURE D.5 – Information mutuelle entrée-sortie quantique  $I(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.2) croissante en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.03, 0.05 et 0.07) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

Les comportements décroissants des mesures informationnelles  $I_c(\rho, \mathcal{N})$  et  $I(\rho, \mathcal{N})$  traduisent, de manière attendue, une dégradation monotone de l’efficacité informationnelle d’un canal bruité à mesure que la température de bruit  $T$  augmente. Au contraire, de façon inattendue, des variations non monotones antirésonantes et croissantes pour  $I_c(\rho, \mathcal{N})$  et  $I(\rho, \mathcal{N})$  représentent un comportement non standard, typique de la résonance stochastique, résultant de l’action sophistiquée du bruit thermique. Ce comportement révèle la possibilité, sous certaines conditions, d’améliorer l’efficacité informationnelle d’un canal quantique de transmission en augmentant le niveau de bruit avec une augmentation de la température.

### D.3 Perte d’information

On peut aussi définir la perte d’information [8, 174] comme

$$L(\rho, \mathcal{N}) = S(\rho) + S(\rho'_E) - S(\rho') = S(\rho) - I_c(\rho, \mathcal{N}), \quad (\text{D.3})$$

qui est non négative et quantifie l’information mutuelle entre l’entrée et l’environnement. La perte  $L(\rho, \mathcal{N})$  s’annule pour un état d’entrée pur d’opérateur densité  $\rho$ , tout comme  $S(\rho)$  et  $I_c(\rho, \mathcal{N})$ . Pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$ , on peut vérifier que  $L(\rho, \mathcal{N})$  aussi, selon les valeurs de l’opérateur densité  $\rho$  et de l’amortissement  $\gamma$ , peut subir trois régimes de variation (croissant, résonant et décroissant) en fonction de la température de bruit  $T$ . Ces trois régimes sont illustrés sur les Figs. D.6, D.7 et D.8.

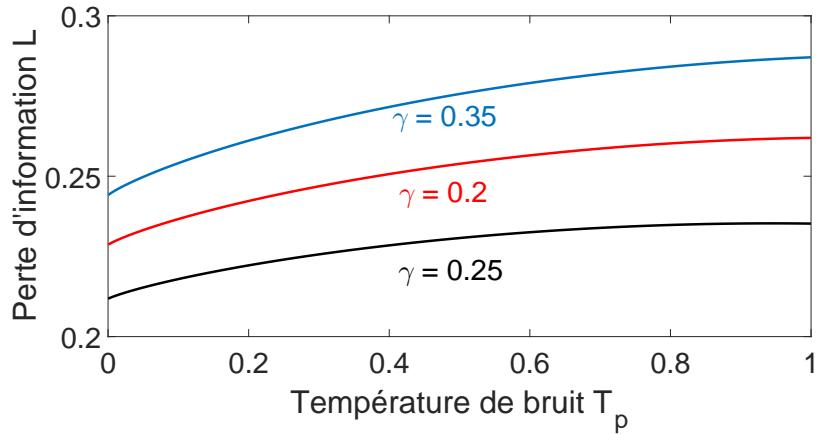


FIGURE D.6 – Perte d’information  $L(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.3) croissante en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.2, 0.25 et 0.35) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

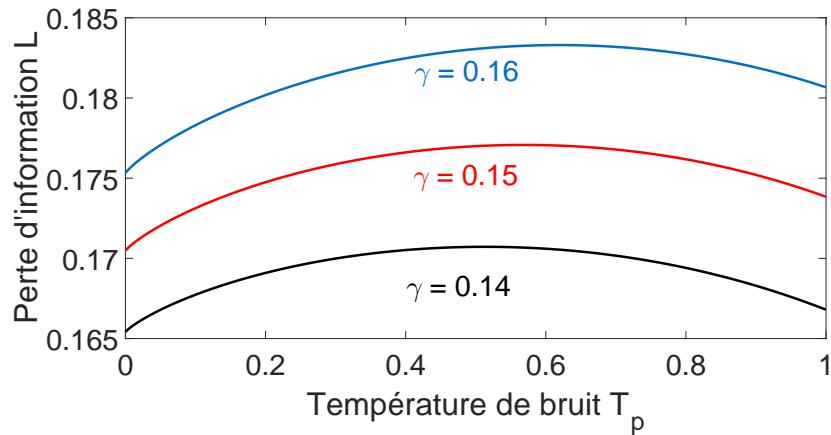


FIGURE D.7 – Perte d’information  $L(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.3) résonante en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.14, 0.15 et 0.16) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

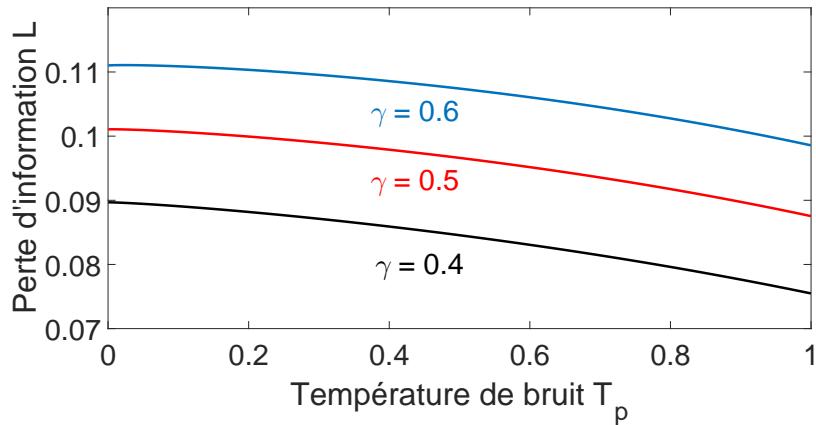


FIGURE D.8 – Perte d’information  $L(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.3) décroissante en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.4, 0.5 et 0.166) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

## D.4 Bruit informationnel

On peut aussi définir le bruit informationnel [8, 174] comme

$$N(\rho, \mathcal{N}) = S(\rho'_E) + S(\rho') - S(\rho), \quad (\text{D.4})$$

qui est non négatif, et quantifie l’information mutuelle entre la sortie et l’environnement. Le bruit informationnel  $N(\rho, \mathcal{N})$  ne s’annule généralement pas pour un état d’entrée pur d’opérateur densité  $\rho$  en la présence d’un bruit thermique. On peut vérifier que  $N(\rho, \mathcal{N})$  aussi, selon les valeurs de l’opérateur densité  $\rho$  et de l’amortissement  $\gamma$ , peut subir trois régimes de variation (croissant, résonant et décroissant) en fonction de la température de bruit  $T$ . Ces trois régimes sont illustrés sur les Figs. D.9, D.10 et D.11.

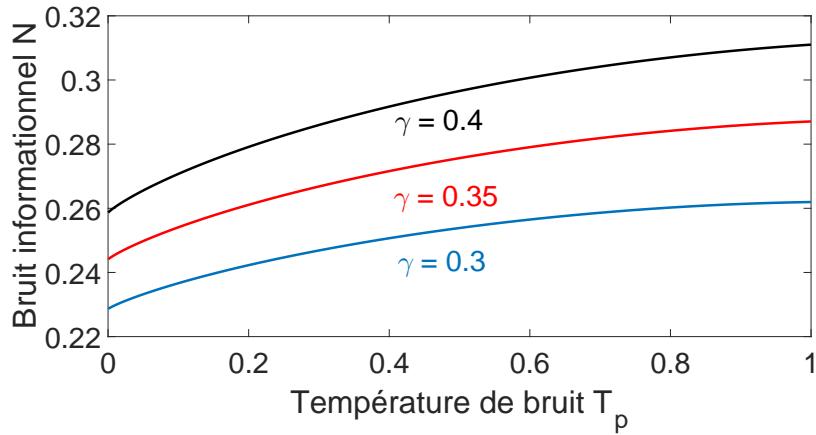


FIGURE D.9 – Bruit informationnel  $N(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.4) croissant en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.3, 0.35 et 0.4) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

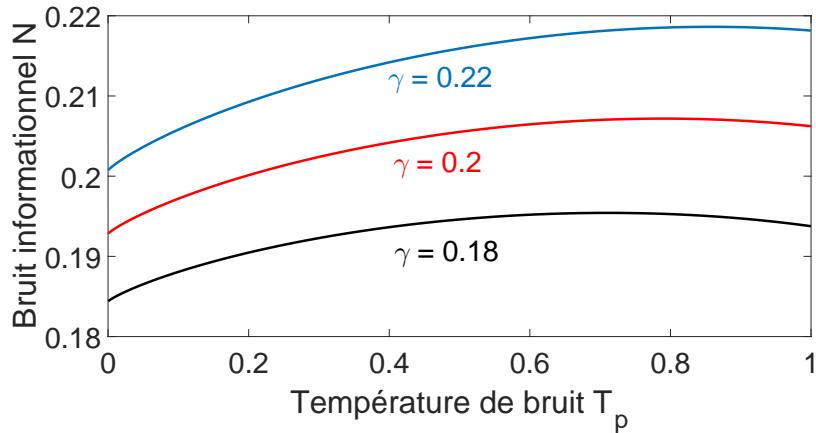


FIGURE D.10 – Bruit informationnel  $N(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.4) résonant en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.18, 0.2 et 0.22) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

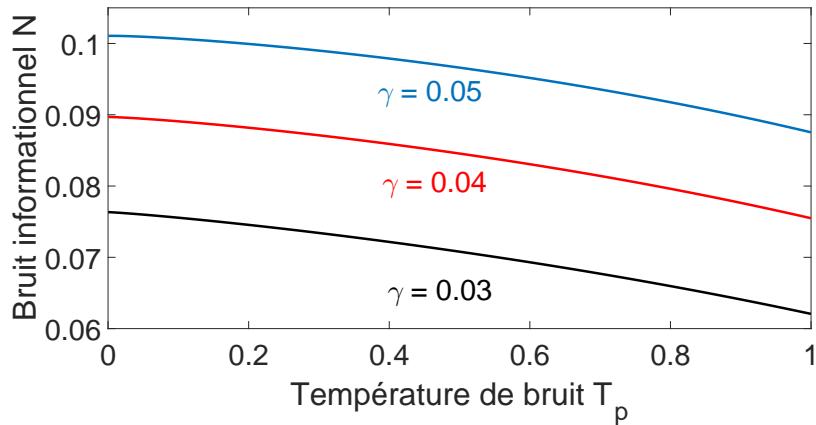


FIGURE D.11 – Bruit informationnel  $N(\rho, \mathcal{N})$  de l’Éq. (D.4) décroissant en fonction de la température réduite de bruit  $T_p$ , pour différentes valeurs de l’amortissement  $\gamma$  (ici illustrées 0.03, 0.04 et 0.05) et pour un état d’entrée mélangé d’opérateur densité  $\rho$  avec pour vecteur de Bloch  $\vec{r} = [0, 0, -0.9]^\top$ .

Comme précédemment, en exploitant d’autres quantités informationnelles quantiques que sont la perte d’information  $L(\rho, \mathcal{N})$  et le bruit informationnel quantique  $N(\rho, \mathcal{N})$ , on montre des situations où des comportements non standards surviennent, avec une amélioration du canal de transmission d’information à mesure que le bruit augmente. La perte d’information  $L(\rho, \mathcal{N})$  et le bruit  $N(\rho, \mathcal{N})$  croissants lorsque la température de bruit  $T$  augmente sont des comportements standards, exprimant une dégradation du canal de transmission lorsque le niveau de bruit augmente. Au contraire, des variations non monotones, résonantes et décroissantes pour  $L(\rho, \mathcal{N})$  et  $N(\rho, \mathcal{N})$  sont des comportements non standards, manifestant la possibilité d’une amélioration de la transmission d’information par l’augmentation du niveau de bruit thermique.



# Liste des publications de la thèse

## Articles de journaux internationaux à comité de lecture :

- [118] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance with unital quantum noise”, *Fluctuation and Noise Letters* 18, pp. 1950015, 1–15 (2019).
- [142] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Enhancing qubit information with quantum thermal noise”, *Physica A* 507, pp. 219–230 (2018).
- [102] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Qubit state detection and enhancement by quantum thermal noise”, *Electronics Letters* 54, pp. 38–39 (2018).
- [117] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic antiresonance in qubit phase estimation with quantum thermal noise”, *Physics Letters A* 381, pp. 2621–2628 (2017).

## Colloques internationaux :

- [175] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Digital image processing with quantum approaches”, *Proceedings 8th International Conference on Image and Signal Processing*, Cherbourg, France, 2-4 July 2018.

## Colloques nationaux :

- [176] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Parallélisme quantique pour le traitement d’images”, *13èmes Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle*, Paris, France, 26-27 mars 2018.
- [119] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Estimation quantique en présence de bruit améliorée par l’intrication”, *Actes du 26ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Juan-les-Pins, France, 5-8 sept. 2017.
- [103] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “L’intrication en imagerie quantique pour résister au bruit”, *12èmes Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle*, Paris, France, 15-16 mars 2017.

## Séminaires :

- [177] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Phénomènes quantiques pour le traitement du signal et des images”, *Journée des doctorants du laboratoire LARIS*, Université d’Angers, 21 juin 2018.
- [143] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Entropie de von Neumann et information de Holevo pour le signal quantique en présence de bruit”, *Journée “Entropies, divergences et mesures informationnelles classiques et généralisées”*, *GdR ISIS (Information Signal Image viSion)*, Paris, France, 24 mai 2017.
- [144] N. Gillard, “Information quantique pour le traitement du signal et des images”, *Séminaire Doctoral International Francophone*, Agence Universitaire de la Francophonie, 18 mai 2017, Angers, France.



# Bibliographie

- [1] R. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*. New York : John Wiley Sons, Inc., 1968.
- [2] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*. New York : Wiley, 1991.
- [3] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1993.
- [4] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Detection Theory*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1998.
- [5] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*. New York : Academic Press, 1976.
- [6] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [7] E. Desurvire, *Classical and Quantum Information Theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 2009.
- [8] M. M. Wilde, *Quantum Information Theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 2013.
- [9] J. S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox,” *Physics*, vol. 1, pp. 195–200, 1964.
- [10] M. Hsieh and M. M. Wilde, “Entanglement-assisted communication of classical and quantum information,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, pp. 4682–4704, 2010.
- [11] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental test of realistic theories via Bell’s theorem,” *Physical Review Letters*, vol. 47, pp. 460–463, 1981.
- [12] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment : A new violation of Bell’s inequalities,” *Physical Review Letters*, vol. 49, pp. 91–94, 1982.
- [13] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, “Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers,” *Physical Review Letters*, vol. 49, pp. 1804–1807, 1982.
- [14] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states,” *Physical Review Letters*, vol. 69, pp. 2881–2884, 1992.
- [15] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger, “Dense coding in experimental quantum communication,” *Physical Review Letters*, vol. 76, pp. 4656–4659, 1996.

- [16] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels,” *Physical Review Letters*, vol. 70, pp. 1895–1899, 1993.
- [17] J. Bae, J. Jin, J. Kim, C. Yoon, and Y. Kwon, “Three-party quantum teleportation with asymmetric states,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 24, no. 4, pp. 1047–1052, 2005.
- [18] C. H. Bennett and G. Brassard, “Quantum cryptography : Public key distribution and coin tossing.,” *International Conference on Computers, Systems & Signal Processing*, pp. 175–179, 10-12 December 1984.
- [19] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, “Quantum cryptography,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, pp. 145–195, 2002.
- [20] M. Bozzio, A. Orieux, L. Vidarte, I. Zaquine, I. Kerenidis, and E. Diamanti, “Experimental investigation of practical unforgeable quantum money,” *Nature Partner Journals Quantum Information*, vol. 4, pp. 5,1–8, 2018.
- [21] P. Jouget, S. Kunz-Jacques, A. Levrier, P. Grangier, and E. Diamanti, “Experimental demonstration of long-distance continuous-variable quantum key distribution,” *Nature Photonics*, vol. 7, pp. 378–381, 2013.
- [22] J. Lodewyck, M. Bloch, R. García-Patrón, S. Fossier, E. Karpov, E. Diamanti, T. Debus-schert, N. J. Cerf, R. Tualle-Brouri, S. W. McLaughlin, and P. Grangier, “Quantum key distribution over 25 km with an all-fiber continuous-variable system,” *Physical Review A*, vol. 76, pp. 042305,1–10, 2007.
- [23] L. K. Grover, “Quantum computers can search arbitrarily large databases by a single query,” *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 4709–4712, 1997.
- [24] W. L. Yang, C. Y. Chen, and M. Feng, “Implementation of three-qubit Grover search in cavity quantum electrodynamics,” *Physical Review A*, vol. 76, pp. 054301,1–4, 2007.
- [25] D. Deutsch and R. Jozsa, “Rapid solution of problems by quantum computation,” *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 439, pp. 553–558, 1993.
- [26] R. Cleve, A. Ekert, C. Macchiavello, and M. Mosca, “Quantum algorithms revisited,” *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 454, pp. 339–354, 1998.
- [27] S. Lu and S. L. Braunstein, “Quantum decision tree classifier,” *Quantum Information Processing*, vol. 13, no. 3, pp. 757–770, 2014.
- [28] P. W. Shor, “Algorithms for quantum computation : discrete logarithms and factoring,” *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 124–134, 20–22 Nov 1994.
- [29] E. Martín-López, A. Laing, T. Lawson, R. Alvarez, X.-Q. Zhou, and J. L. O’Brien, “Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using qubit recycling,” *Nature Photonics*, vol. 6, pp. 773–776, 2012.
- [30] P. Botsinis, D. Alanis, Z. Babar, H. Nguyen, D. Chandra, S. X. Ng, and L. Hanzo, “Quantum search algorithms for wireless communications,” *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 21, pp. 1209–1242, 2019.
- [31] S. E. Venegas-Andraca and J. L. Ball, “Processing images in entangled quantum systems,” *Quantum Information Processing*, vol. 9, pp. 1–11, 2010.

- [32] P. Q. Le, F. Dong, and K. Hirota, “A flexible representation of quantum images for polynomial preparation, image compression, and processing operations,” *Quantum Information Processing*, vol. 10, pp. 63–84, 2011.
- [33] Y. Xi-Wei, W. Hengyan, L. Zeyang, C. Ming-Cheng, P. Jian, L. Jun, Z. Kechao, L. Xing-cheng, W. Zhehui, L. Zhihuang, Z. Wenqiang, L. Jianzhong, Z. Meisheng, P. Xinhua, and S. Dieter, “Quantum image processing and its application to edge detection : Theory and experiment,” *Physical Review X*, vol. 7, pp. 031041,1–13, 2017.
- [34] “Dossier : Enfin ! la révolution quantique,” *L’Usine Nouvelle*, no. 3536, semaine du 2 au 8 novembre 2017.
- [35] M. Peev, C. Pacher, R. Alléaume, C. Barreiro, J. Bouda, W. Boxleitner, T. Debuisschert, E. Diamanti, M. Dianati, J. F. Dynes, S. Fasel, S. Fossier, M. Fürst, J.-D. Gautier, O. Gay, N. Gisin, P. Grangier, A. Happe, Y. Hasani, M. Hentschel, H. Hübel, G. Humer, T. Länger, M. Legré, R. Lieger, J. Lodewyck, T. Lorünser, N. Lütkenhaus, A. Marhold, T. Matyus, O. Maurhart, L. Monat, S. Nauerth, J.-B. Page, A. Poppe, E. Querasser, G. Ribordy, S. Robyr, S. Salvail, A. Sharpe, A. Shields, D. Stucki, M. Suda, C. Tamas, T. Themel, R. T. Thew, Y. Thoma, A. Treiber, P. Trinkler, R. Tualle-Brouri, F. Vannel, N. Walenta, H. Weier, H. Weinfurter, I. Wimberger, Z. L. Yuan, H. Zbinden, and A. Zeilinger, “The SECOQC quantum key distribution network in Vienna,” *New Journal of Physics*, vol. 11, pp. 075001,1–37, 2009.
- [36] L. Sheng-Kai, C. Wen-Qi, L. Wei-Yue, Z. Liang, L. Yang, R. Ji-Gang, Y. Juan, S. Qi, C. Yuan, L. Zheng-Ping, L. Feng-Zhi, C. Xia-Wei, S. Li-Hua, J. Jian-Jun, W. Jin-Cai, J. Xiao-Jun, W. Jian-Fend, H. Yong-Mei, W. Qiang, Z. Yi-Lin, D. Lei, X. Tao, M. Lu, H. Tai, Z. Qiang, C. Yu-Ao, L. Nai-Le, W. Xiang-Bin, Z. Zhen-Cai, L. Chao-Yang, S. Rong, P. Cheng-Zhi, W. Jian-Yu, and P. Jian-Wei, “Satellite-to-ground quantum key distribution,” *Nature*, vol. 549, pp. 43–47, 2017.
- [37] A. Macridin, P. Spentzouris, J. Amundson, and R. Harnik, “Electron-phonon systems on a universal quantum computer,” *Physical Review Letters*, vol. 121, pp. 110504,1–6, 2018.
- [38] A. Macridin, P. Spentzouris, J. Amundson, and R. Harnik, “Digital quantum computation of fermion-boson interacting systems,” *Physical Review A*, vol. 98, pp. 042312,1–19, 2018.
- [39] I. Trummer and C. Koch, “Multiple query optimization on the D-Wave 2X adiabatic quantum computer,” *Proceedings of the Very Large Database Endowment*, vol. 9, pp. 648–659, 2016.
- [40] S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford : Oxford University Press, 2006.
- [41] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, and N. Chambet, “Stochastic resonance in a neuron model that transmits spike trains,” *Physical Review E*, vol. 53, pp. 1273–1275, 1996.
- [42] G. Deco and B. Schürmann, “Stochastic resonance in the mutual information between input and output spike trains of noisy central neurons,” *Physica D*, vol. 117, pp. 276–282, 1998.
- [43] F. Moss, L. M. Ward, and W. G. Sannita, “Stochastic resonance and sensory information processing : A tutorial and a review of application,” *Clinical Neurophysiology*, vol. 115, pp. 267–281, 2004.

- [44] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, “Stochastic resonance,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 70, pp. 223–287, 1998.
- [45] B. Andò and S. Graziani, *Stochastic Resonance : Theory and Applications*. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [46] M. D. McDonnell, N. G. Stocks, C. E. M. Pearce, and D. Abbott, *Stochastic Resonance : From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization*. Cambridge : Cambridge University Press, 2008.
- [47] S. Zozor and P.-O. Amblard, “On the use of stochastic resonance in sine detection,” *Signal Processing*, vol. 82, no. 3, pp. 353–367, 2002.
- [48] G. P. Harmer, B. R. Davis, and D. Abbott, “A review of stochastic resonance : circuits and measurement,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 52, pp. 299–309, 2002.
- [49] X. Wu, W. Guo, W. Cao, W. Shao, and Z. Pan, “A method based on stochastic resonance for the detection of weak analytical signal,” *Talanta*, vol. 61, no. 6, pp. 863–869, 2003.
- [50] S. Zozor and P.-O. Amblard, “Stochastic resonance in locally optimal detectors,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 12, pp. 3177–3181, 2003.
- [51] D. Rousseau and F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance and improvement by noise in optimal detection strategies,” *Digital Signal Processing*, vol. 15, pp. 19–32, 2005.
- [52] F. Duan, F. Chapeau-Blondeau, and D. Abbott, “Weak signal detection : condition for noise induced enhancement,” *Digital Signal Processing*, vol. 23, pp. 1585–1591, 2013.
- [53] B. Peeters and G. De Roeck, “Stochastic system identification for operational modal analysis : A review,” *The American Society of Mechanical Engineers, Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, vol. 123, pp. 659–667, 2001.
- [54] F. Chapeau-Blondeau and D. Rousseau, “Noise-enhanced performance for an optimal Bayesian estimator,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, pp. 1327–1334, 2004.
- [55] D. Rousseau and F. Chapeau-Blondeau, “Noise-improved Bayesian estimation with arrays of one-bit quantizers,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 56, pp. 2658–2662, 2007.
- [56] H. Chen, P. Varshney, and J. Michels, “Noise enhanced parameter estimation,” *IEEE Transactions Signal Processing*, vol. 56, pp. 5074–5081, 2008.
- [57] G. Balkan and S. Gezici, “CRLB based optimal noise enhanced parameter estimation using quantized observations,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 17, pp. 5, 477–480, 2010.
- [58] F. Duan, F. Chapeau-Blondeau, and D. Abbott, “Exploring weak-periodic-signal stochastic resonance in locally optimal processors with a Fisher information metric,” *Signal Processing*, vol. 92, pp. 3049–3055, 2012.
- [59] X. Wang and Y. Gao, “Stochastic resonance for estimation of a signal’s bandwidth under low SNR,” *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, vol. 89, no. 1, pp. 263–269, 2016.

- [60] P. Yan, F. Duan, F. Chapeau-Blondeau, and D. Abbott, “Noise enhancement in robust estimation of location,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 66, pp. 1953–1966, 2018.
- [61] C. Heneghan, C. C. Chow, J. J. Collins, T. T. Imhoff, S. B. Lowen, and M. C. Teich, “Information measures quantifying aperiodic stochastic resonance,” *Physical Review E*, vol. 54, pp. R2228–R2231, 1996.
- [62] X. Godivier and F. Chapeau-Blondeau, “Noise-assisted signal transmission by a nonlinear electronic comparator : Experiment and theory,” *Signal Processing*, vol. 56, pp. 293–303, 1997.
- [63] X. Godivier and F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance in the information capacity of a nonlinear dynamic system,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 8, pp. 581–589, 1998.
- [64] L. B. Kish, G. P. Harmer, and D. Abbott, “Information transfer rate of neurons : stochastic resonance of Shannon’s information channel capacity,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 1, pp. 13–19, 2001.
- [65] N. G. Stocks, “Information transmission in parallel threshold arrays : Suprathreshold stochastic resonance,” *Physical Review E*, vol. 63, pp. 041114,1–9, 2001.
- [66] M. D. McDonnell, D. Abbott, and C. E. M. Pearce, “An analysis of noise enhanced information transmission in an array of comparators,” *Microelectronics Journal*, vol. 33, pp. 1079–1089, 2002.
- [67] M. D. McDonnell, N. G. Stocks, C. E. M. Pearce, and D. Abbott, “Optimal information transmission in nonlinear arrays through Suprathreshold stochastic resonance,” *Physics Letters A*, vol. 352, pp. 183–189, 2006.
- [68] J. Fiorina, D. Rousseau, and F. Chapeau-Blondeau, “Interferer rejection improved by noise in ultra-wideband telecommunications,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 6, pp. 317–328, 2006.
- [69] H. Chen, L. R. Varshney, and P. K. Varshney, “Noise-enhanced information systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 102, pp. 1607–1621, 2014.
- [70] J. J. L. Ting, “Stochastic resonance for quantum channels,” *Physical Review E*, vol. 59, pp. 2801–2803, 1999.
- [71] V. J. Menon, N. Chanana, and Y. Singh, “Single-particle treatment of quantum stochastic resonance,” *Physica A*, vol. 275, pp. 505–530, 2000.
- [72] G. Bowen and S. Mancini, “Noise enhancing the classical information capacity of a quantum channel,” *Physics Letters A*, vol. 321, pp. 1,1–5, 2004.
- [73] G. Bowen and S. Mancini, “Stochastic resonance effects in quantum channels,” *Physics Letters A*, vol. 352, pp. 272–275, 2006.
- [74] C. Lupo, S. Mancini, and M. M. Wilde, “Stochastic resonance in Gaussian quantum channels,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 46, pp. 045306,1–15, 2013.
- [75] F. Chapeau-Blondeau, “Qubit state estimation and enhancement by quantum thermal noise,” *Electronics Letters*, vol. 51, pp. 1673–1675, 2015.

- [76] P. Dirac, “A new notation for quantum mechanics,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 35, pp. 416–418, 1939.
- [77] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland, and C. Monroe, “Experimental entanglement of four particles,” *Nature*, vol. 404, pp. 256–259, 2000.
- [78] T. B. Pittman and J. D. Franson, “Cyclical quantum memory for photonic qubits,” *Physical Review A*, vol. 66, pp. 062302,1–4, 2002.
- [79] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box,” *Physical Review A*, vol. 76, pp. 042319,1–19, 2007.
- [80] C. Rigetti, J. M. Gambetta, S. Poletto, B. L. T. Plourde, J. M. Chow, A. D. Córcoles, J. A. Smolin, S. T. Merkel, J. R. Rozen, G. A. Keefe, M. B. Rothwell, M. B. Ketchen, and M. Steffen, “Superconducting qubit in a waveguide cavity with a coherence time approaching 0.1 ms,” *Physical Review B*, vol. 86, pp. 100506,1–5, 2012.
- [81] M. D. Hutchings, J. B. Hertzberg, Y. Liu, N. T. Bronn, G. A. Keefe, M. Brink, J. M. Chow, and B. L. T. Plourde, “Tunable superconducting qubits with flux-independent coherence,” *Physical Review Applied*, vol. 8, pp. 044003,1–12, 2017.
- [82] P. M. Platzman and M. I. Dykman, “Quantum computing with electrons floating on liquid helium,” *Science*, vol. 284, pp. 1967–1969, 1999.
- [83] A. Aassime, G. Johansson, G. Wendin, R. J. Schoelkopf, and P. Delsing, “Radio-frequency single-electron transistor as readout device for qubits : Charge sensitivity and backaction,” *Physical Review Letters*, vol. 86, pp. 3376–3379, 2001.
- [84] D. Hite, Y. Colombe, A. Wilson, D. Allcock, D. Leibfried, D. Wineland, and D. Pappas, “Surface science for improved ion traps,” *Materials Research Society Bulletin*, vol. 38, pp. 826–833, 2013.
- [85] R. Blatt and C. F. Roos, “Quantum simulations with trapped ions,” *Nature Physics*, vol. 8, pp. 277–284, 2012.
- [86] J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics : New Edition*. Princeton : Princeton University Press, 2018.
- [87] C. Yu-Ao, Z. An-Ning, Z. Zhi, Z. Xiao-Qi, and P. Jian-Wei, “Experimental quantum error rejection for quantum communication,” *Physical Review Letters*, vol. 96, pp. 220504,1–4, 2006.
- [88] G. Puentes, D. Voigt, A. Aiello, and J. P. Woerdman, “Tunable spatial decoherers for polarization-entangled photons,” *Optics Letters*, vol. 31, pp. 2057–2059, 2006.
- [89] A. Shaham and H. S. Eisenberg, “Realizing controllable depolarization in photonic quantum-information channels,” *Physical Review A*, vol. 83, pp. 022303,1–5, 2011.
- [90] R. N. Mantegna and B. Spagnolo, “Stochastic resonance in a tunnel diode,” *Physical Review E*, vol. 49, pp. 1792–1795, 1994.
- [91] F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance and optimal detection of pulse trains by threshold devices,” *Digital Signal Processing*, vol. 9, pp. 162–177, 1999.

- [92] F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance and the benefit of noise in nonlinear systems,” in *Noise, Oscillators and Algebraic Randomness* (M. Planat, ed.), pp. 137–155, Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [93] F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance for an optimal detector with phase noise,” *Signal Processing*, vol. 83, pp. 665–670, 2003.
- [94] D. Rousseau and F. Chapeau-Blondeau, “Constructive role of noise in signal detection from parallel arrays of quantizers,” *Signal Processing*, vol. 85, pp. 571–580, 2005.
- [95] D. Rousseau, G. V. Anand, and F. Chapeau-Blondeau, “Noise-enhanced nonlinear detector to improve signal detection in non-Gaussian noise,” *Signal Processing*, vol. 86, pp. 3456–3465, 2006.
- [96] F. Chapeau-Blondeau and D. Rousseau, “Injecting noise to improve performance of optimal detector,” *Electronics Letters*, vol. 43, pp. 897–898, 2007.
- [97] Y. C. Eldar and G. D. Forney, “On quantum detection and the square-root measurement,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, pp. 858–872, 2001.
- [98] Y. C. Eldar, A. Megretski, and G. C. Verghese, “Designing optimal quantum detectors via semidefinite programming,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, pp. 1007–1012, 2003.
- [99] M. A. Ballester, S. Wehner, and A. Winter, “State discrimination with post-measurement information,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, pp. 4183–4198, 2008.
- [100] C. Langrock, E. Diamanti, R. V. Roussev, Y. Yamamoto, M. M. Fejer, and H. Takesue, “Highly efficient single-photon detection at communication wavelengths by use of up-conversion in reverse-proton-exchanged periodically poled LiNbO<sub>3</sub> waveguides,” *Optics Letters*, vol. 30, no. 13, pp. 1725–1727, 2005.
- [101] H. Kamada, M. Asobe, T. Honjo, H. Takesue, Y. Tokura, Y. Nishida, O. Tadanaga, and H. Miyazawa, “Efficient and low-noise single-photon detection in 1550 nm communication band by frequency upconversion in periodically poled LiNbO<sub>3</sub> waveguides,” *Optics Letters*, vol. 33, no. 7, pp. 639–641, 2008.
- [102] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Qubit state detection and enhancement by quantum thermal noise,” *Electronics Letters*, vol. 54, pp. 38–39, 2017.
- [103] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “L'intrication en imagerie quantique pour résister au bruit,” *12èmes Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle, Paris, France*, 15–16 mars 2017.
- [104] J. P. Rolland and H. H. Barrett, “Effect of random background inhomogeneity on observer detection performance,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 9, pp. 649–658, 1992.
- [105] S. J. Davey, M. G. Rutten, and B. Cheung, “A comparison of detection performance for several track-before-detect algorithms,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2008, pp. 428036, 1–10, 2008.
- [106] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “Quantum entanglement,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, pp. 865–942, 2009.

- [107] C. H. Bennett and G. Brassard, “An update on quantum cryptography,” *Springer Berlin Heidelberg*, pp. 475–480, 1985.
- [108] T. B. Pittman, Y. H. Shih, D. V. Strekalov, and A. V. Sergienko, “Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement,” *Physical Review A*, vol. 52, pp. 3429–3432, 1995.
- [109] B. Jack, J. Leach, J. Romero, S. Franke-Arnold, M. Ritsch-Marte, S. M. Barnett, and M. J. Padgett, “Holographic ghost imaging and the violation of a Bell inequality,” *Physical Review Letters*, vol. 103, pp. 083602, 1–4, 2009.
- [110] G. M. D’Ariano, P. Lo Presti, and M. G. A. Paris, “Using entanglement improves the precision of quantum measurements,” *Physical Review Letters*, vol. 87, pp. 270404, 1–4, 2001.
- [111] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, “Quantum metrology,” *Physical Review Letters*, vol. 96, pp. 010401, 1–4, 2006.
- [112] R. Demkowicz-Dobrzański, J. Kolodyński, and M. Guta, “The elusive Heisenberg limit in quantum-enhanced metrology,” *Nature Communications*, vol. 3, pp. 1063, 1–8, 2012.
- [113] J. Trapateau, J. Ghalbouni, A. Orieux, E. Diamanti, and I. Zaquine, “Multi-user distribution of polarization entangled photon pairs,” *Journal of Applied Physics*, vol. 118, no. 14, pp. 143106, 1–5, 2015.
- [114] F. Chapeau-Blondeau, “Noise-aided nonlinear Bayesian estimation,” *Physical Review E*, vol. 66, pp. 032101, 1–3, 2002.
- [115] D. Rousseau, F. Duan, and F. Chapeau-Blondeau, “Suprathreshold stochastic resonance and noise-enhanced Fisher information in arrays of threshold devices,” *Physical Review E*, vol. 68, pp. 031107, 1–10, 2003.
- [116] F. Chapeau-Blondeau, S. Blanchard, and D. Rousseau, “Fisher information and noise-aided power estimation from one-bit quantizers,” *Digital Signal Processing*, vol. 18, pp. 434–443, 2008.
- [117] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic antiresonance in qubit phase estimation with quantum thermal noise,” *Physics Letters A*, vol. 381, pp. 2621–2628, 2017.
- [118] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance with unital quantum noise,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 18, pp. 1950015, 1–15, 2019.
- [119] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Estimation quantique en présence de bruit améliorée par l’intrication,” *Actes du 26ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, Juan-les-Pins, France*, 5–8 sept. 2017.
- [120] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, “Advances in quantum metrology,” *Nature Photonics*, vol. 5, pp. 222–229, 2011.
- [121] C. W. Helstrom, “The minimum variance of estimates in quantum signal detection,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 14, pp. 234–242, 1968.
- [122] S. L. Braunstein and C. M. Caves, “Statistical distance and the geometry of quantum states,” *Physical Review Letters*, vol. 72, pp. 3439–3443, 1994.

- [123] P. Gibilisco, F. Hiai, and D. Petz, “Quantum covariance, quantum Fisher information, and the uncertainty relations,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, pp. 439–443, 2009.
- [124] M. G. A. Paris, “Quantum estimation for quantum technology,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 7, pp. 125–137, 2009.
- [125] F. Chapeau-Blondeau, “Optimizing qubit phase estimation,” *Physical Review A*, vol. 94, pp. 022334, 1–14, 2016.
- [126] F. Chapeau-Blondeau, “Optimized probing states for qubit phase estimation with general quantum noise,” *Physical Review A*, vol. 91, pp. 052310, 1–13, 2015.
- [127] N. V. Agudov and A. V. Krichigin, “Stochastic resonance and antiresonance in monostable systems,” *Radiophysics and Quantum Electronics*, vol. 51, pp. 812–824, 2008.
- [128] L. S. Borkowski, “Multimodal transition and stochastic antiresonance in squid giant axons,” *Physical Review E*, vol. 82, pp. 041909, 1–10, 2010.
- [129] S. Rajasekar and M. A. F. Sanjuan, *Nonlinear Resonances*. Berlin : Springer, 2016.
- [130] Y. J. Wadop Ngouongo, G. Djuidjé Kenmoé, and T. C. Kofané, “Effect of coupling on stochastic resonance and stochastic antiresonance processes in a unidirectionally  $N$ -coupled systems in periodic sinusoidal potential,” *Physica A*, vol. 472, pp. 25–31, 2017.
- [131] D. P. K. Ghikas and A. C. Tzemos, “Stochastic anti-resonance in the time evolution of interacting qubits,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 10, pp. 1250023, 1–15, 2012.
- [132] A. C. Tzemos and D. P. K. Ghikas, “Dependence of noise induced effects on state preparation in multiqubit systems,” *Physics Letters A*, vol. 377, pp. 2307–2316, 2013.
- [133] O. E. Barndorff-Nielsen and R. D. Gill, “Fisher information in quantum statistics,” *Journal of Physics A*, vol. 33, pp. 4481–4490, 2000.
- [134] F. Chapeau-Blondeau and E. Belin, “Quantum image coding with a reference-frame-independent scheme,” *Quantum Information Processing*, vol. 15, no. 7, pp. 2685–2700, 2016.
- [135] A. J. Goldsmith and P. P. Varaiya, “Capacity, mutual information, and coding for finite-state Markov channels,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, pp. 868–886, 1996.
- [136] F. Chapeau-Blondeau, “Noise-enhanced capacity via stochastic resonance in an asymmetric binary channel,” *Physical Review E*, vol. 55, pp. 2016–2019, 1997.
- [137] X. Godivier, J. Rojas-Varela, and F. Chapeau-Blondeau, “Noise-assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity,” *Electronics Letters*, vol. 33, pp. 1666–1668, 1997.
- [138] G. Smith and J. Yard, “Quantum communication with zero-capacity channels,” *Science*, vol. 321, pp. 1812–1815, 2008.
- [139] F. G. S. L. Brandão, J. Oppenheim, and S. Strelchuk, “When does noise increase the quantum capacity?,” *Physical Review Letters*, vol. 108, pp. 040501, 1–5, 2012.
- [140] J. J. L. Ting, “Noise effects for the depolarizing channel,” *Physics Letters A*, vol. 259, pp. 349–354, 1999.

- [141] J. J. L. Ting, “Noise effects on one-Pauli channel,” *European Physical Journal B*, vol. 13, pp. 527–530, 2000.
- [142] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Enhancing qubit information with quantum thermal noise,” *Physica A*, vol. 507, pp. 219–230, 2018.
- [143] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Entropie de von Neumann et information de Holevo pour le signal quantique en présence de bruit,” *Journée “Entropies, divergences et mesures informationnelles classiques et généralisées”, GdR ISIS (Information Signal Image viSion), Paris, France*, 24 mai 2017.
- [144] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Information quantique pour le traitement du signal et des images,” *Séminaire Doctoral International Francophone, Agence Universitaire de la Francophonie, Angers, France*, 18 mai 2017.
- [145] C. H. Bennett and P. W. Shor, “Quantum information theory,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 2724–2742, 1998.
- [146] F. Chapeau-Blondeau, “Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500–4510, 2015.
- [147] B. Schumacher and M. A. Nielsen, “Quantum data processing and error correction,” *Physical Review A*, vol. 54, pp. 2629–2635, 1996.
- [148] B. Schumacher, “Quantum coding,” *Physical Review A*, vol. 51, pp. 2738–2747, 1995.
- [149] H. Barnum, C. M. Caves, R. Fuchs, C. A. Jozsa, and B. Schumacher, “On quantum coding for ensembles of mixed states,” *Journal of Physics A*, vol. 34, pp. 6767–6785, 2001.
- [150] B. Schumacher and M. D. Westmoreland, “Sending classical information via noisy quantum channels,” *Physical Review A*, vol. 56, pp. 131–138, 1997.
- [151] A. S. Holevo, “The capacity of the quantum channel with general signal states,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 269–273, 1998.
- [152] F. Chapeau-Blondeau, “Quantum state discrimination and enhancement by noise,” *Physics Letters A*, vol. 378, pp. 2128–2136, 2014.
- [153] C. Tsallis, S. Lloyd, and M. Baranger, “Peres criterion for separability through nonextensive entropy,” *Physical Review A*, vol. 63, pp. 042104,1–6, 2001.
- [154] M. Müller-Lennert, F. Dupuis, O. Szehr, S. Fehr, and M. Tomamichel, “On quantum Rényi entropies : A new generalization and some properties,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 54, pp. 122203,1–12, 2013.
- [155] G. M. Bosyk, G. Bellomo, S. Zozor, M. Portesi, and P. W. Lamberti, “Unified entropic measures of quantum correlations induced by local measurements,” *Physica A*, vol. 462, pp. 930–939, 2016.
- [156] S. H. F. P. M. Bosyk, M. Zozor and L. P. W., “A family of generalized quantum entropies : definition and properties,” *Quantum Information Processing*, vol. 15, no. 8, pp. 3393–3420, 2016.
- [157] G. Bellomo, G. Bosyk, F. Holik, and S. Zozor, “Lossless quantum data compression with exponential penalization : an operational interpretation of the quantum Rényi entropy,” *Scientific Reports, Nature Publishing Group*, vol. 7, pp. 14765,1–10, 2017.

- [158] M. Portesi, F. Holik, P. Lamberti, M. Bosyk, G. Bellomo, and S. Zozor, “Generalized entropies in quantum and classical statistical theories,” *European Physical Journal - Special Topics, Édition Diffusion Presse Sciences*, vol. 227, pp. 335–344, 2018.
- [159] S. Abe, “Nonadditive entropies and quantum entanglement,” *Physica A*, vol. 306, pp. 316–322, 2002.
- [160] N. Canosa and R. Rossignoli, “Generalized nonadditive entropies and quantum entanglement,” *Physical Review Letters*, vol. 88, pp. 170401,1–4, 2002.
- [161] R. Rossignoli and N. Canosa, “Generalized disorder measures and the detection of quantum entanglement,” *Physica A*, vol. 344, pp. 637–643, 2004.
- [162] A. P. Majtey, A. R. Plastino, and A. Plastino, “New features of quantum discord uncovered by  $q$ -entropies,” *Physica A*, vol. 391, pp. 2491–2499, 2012.
- [163] F. Chapeau-Blondeau, “Tsallis entropy for assessing quantum correlation with Bell-type inequalities in EPR experiment,” *Physica A*, vol. 414, pp. 204–215, 2014.
- [164] H. Ushijima-Mwesigwa, C. F. A. Negre, and S. M. Mniszewski, “Graph partitioning using quantum annealing on the D-Wave system,” *Proceedings of the Second International Workshop on Post Moores Era Supercomputing*, pp. 22–29, 2017.
- [165] D. A. Ghosh, P. Pratikand, B. Pratyushand, K. Bikash, and P. K. Panigrahi, “Automated error correction in IBM quantum computer and explicit generalization,” *Quantum Information Processing*, vol. 17, no. 6, pp. 153,1–23, 2018.
- [166] B. K. Behera, S. Seth, A. Das, and P. K. Panigrahi, “Demonstration of entanglement purification and swapping protocol to design quantum repeater in IBM quantum computer,” *Quantum Information Processing*, vol. 18, no. 4, pp. 108,1–13, 2019.
- [167] W. Yuanhao, L. Ying, Y. Zhang-Qi, and Z. Bei, “16-qubit IBM universal quantum computer can be fully entangled,” *Nature Partner Journals Quantum Information*, vol. 4, pp. 1–6, 2018.
- [168] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, and H. Weinfurter, “Elementary gates for quantum computation,” *Physical Review A*, vol. 52, pp. 3457–3467, 1995.
- [169] E. F. Dumitrescu, A. J. McCaskey, G. Hagen, G. R. Jansen, T. D. Morris, T. Papenbrock, R. C. Pooser, D. J. Dean, and P. Lougovski, “Cloud quantum computing of an atomic nucleus,” *Physical Review Letters*, vol. 120, pp. 210501,1–6, 2018.
- [170] N. Klco, E. F. Dumitrescu, A. J. McCaskey, T. D. Morris, R. C. Pooser, M. Sanz, E. Solaño, P. Lougovski, and M. J. Savage, “Quantum-classical computations of Schwinger model dynamics using quantum computers,” *Physical Review A*, vol. 98, pp. 0.2331,1–15, 2018.
- [171] M. D. Bowdrey, D. K. Oi, A. Short, K. Banaszek, and J. Jones, “Fidelity of single qubit maps,” *Physics Letters A*, vol. 294, no. 5, pp. 258–260, 2002.
- [172] G. Amosov, S. Mancini, and V. Manko, “Tomographic portrait of quantum channels,” *Reports on Mathematical Physics*, vol. 81, no. 2, pp. 165–176, 2018.
- [173] M. B. Hastings, “Superadditivity of communication capacity using entangled inputs,” *Nature Physics*, vol. 5, pp. 255–257, 2009.

- [174] A. S. Holevo and V. Giovannetti, “Quantum channels and their entropic characteristics,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 75, pp. 046001,1–30, 2012.
- [175] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Digital image processing with quantum approaches,” *Proceedings 8th International Conference on Image and Signal Processing, Cherbourg, France*, 2–4 July 2018.
- [176] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Parallélisme quantique pour le traitement d’images,” *13èmes Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle, Paris, France*, 26–27 mars 2018.
- [177] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, “Phénomènes quantiques pour le traitement du signal et des images,” *Journée des doctorants du laboratoire LARIS, Université d’Angers*, 21 juin 2018.



---

**Titre : Traitement du signal quantique : Effets de bruit utile et intrication**

**Mots clés :** Information quantique, traitement du signal, bruit, intrication

**Résumé :** Nous examinons ici des Dans ces études de traitement du signal problématiques standards du traitement du quantique, nous rencontrons également une signal, comme la détection de signaux dans le propriété spécifiquement quantique constituée bruit, l'estimation paramétrique à partir de par l'intrication. Nous approfondissons aussi signaux bruités, la transmission d'information sur l'apport de l'intrication, avec des bénéfices un canal bruité, mais dans un cadre quantique. purement quantiques inaccessibles en Nous suivons plus spécialement un fil classique, obtenus pour les tâches de traitement conducteur spécifique, déjà bien développé en du signal en présence de bruit que nous classique, et constitué par les effets de bruit utile étudions. Nous considérons aussi des signaux à ou phénomène de résonance stochastique – deux dimensions pouvant s'apparenter à du des situations de traitement du signal ou de traitement numérique d'images en quantique. l'information en présence de bruit, où la Les études de traitement du signal quantique performance ne se dégrade pas de façon développées ici sont principalement théoriques monotone lorsque le niveau du bruit augmente, et numériques. En complément, nous mais au contraire où l'augmentation du bruit présentons des mises en œuvre expérimentales peut se révéler bénéfique au traitement. En que nous avons pu réaliser grâce à un présence de signaux et bruits quantiques, nous processeur quantique rendu accessible en ligne mettons ainsi en évidence la possibilité de tels par la compagnie IBM (processeur IBM Q 14 effets de résonance stochastique, dans des Melbourne à 14 qubits). tâches de détection, d'estimation ou de transmission de signal.

---

**Title : Quantum signal processing : useful noise and entanglement effects**

**Keywords :** Quantum information, signal processing, noise, entanglement

**Abstract:** Here we examine standard signal In these quantum signal processing studies, we processing issues, such as signal detection in also encounter a specifically quantum property noise, parametric estimation from noisy signals, consisting of entanglement. We also investigate transmission of information over a noisy the contribution of entanglement, with purely channel, but in a quantum framework. We follow quantum benefits that are inaccessible in more specifically a specific thread, already well classical, obtained for signal processing tasks in developed in classical, and constituted by the the presence of noise that we are studying. We effects of useful noise or stochastic resonance also consider two-dimensional signals that can phenomenon - situations of signal or information be likened to digital processing of quantum processing in the presence of noise, where the images. The quantum signal processing studies performance does not monotonically deteriorate developed here are mainly theoretical and when the noise level increases, but instead numerical. In addition, we present experimental where the increase in noise can be beneficial to implementations that we have been able to the processing. In the presence of quantum achieve thanks to a quantum processor made signals and noises, we thus highlight the accessible online by the IBM company (IBM Q possibility of such stochastic resonance effects, 14 Melbourne processor of 14 qubits). in tasks of detection, estimation or signal transmission.