

## Задание 2

### Логическая организация кэш-памяти; тестовое покрытие

Для кэш-памяти данных с заданными параметрами:

1. Описать структуру адреса;
2. Построить конечный автомат Мили, описывающий набор кэш-памяти (set); выходной алфавит должен позволять различать адреса (теги) запросов;
3. Описать входную последовательность минимальной длины, приводящую к вытеснению модифицированных данных (исходное состояние: кэш пуст);
4. Рассчитать достигнутое тестовое покрытие в метрике состояний и в метрике переходов построенного конечного автомата.

Возможные события:

- Операции чтения/записи со стороны вычислительного ядра;
- Снуп-инвалидатор со стороны подсистемы памяти: при его получении кэш вычёркивает немодифицированный блок с заданным адресом либо вытесняет модифицированный блок в память.

Структура кэш-памяти (вариант "d"):

- Разрядность адреса ( $W_a$ ) – 48;
- Размер кэш-памяти ( $S$ ) – 2 Мбайта;
- Размер блока ( $B$ ) – 64 байта;
- Ассоциативность ( $A$ ) – 32;
- Тип записи – отложенная (write-back);
- Политика заведения – первый свободный блок набора;
- Промах по чтению и записи;
- Политика заведения – LRU.

#### 1. Описать структура адреса

Для смещение внутри блока необходимо иметь

$$\log_2(B) = \log_2(64) = 6 \text{ бит.}$$

Для определения поля под "номер набора" нужно иметь

$$2^n = \frac{S}{A * B} = \frac{2 \text{ Мбайт}}{32 * 64 \text{ байт}} = \frac{2^{21}}{2^5 * 2^6} \Rightarrow n = 10 \text{ бит}$$

Оставшееся место для тега блока:  $48 - 6 - 10 = 32$  бита. Структура адреса будет:

$$\begin{array}{ccc} \text{Тег} & \text{Индекс} & \text{Смещение} \\ [ 48 : 16 ] & [ 15 : 6 ] & [ 5 : 0 ] \end{array}$$

## 2. Построить конечный автомат Мили

Ограничимся набором тегов  $A + 1 = 33$ .

Конечный автомат Мили:

$$A_m = (S_t, X, Y, \delta : S \times X \rightarrow S, s_0 \in S, \lambda : S \times X \rightarrow Y)$$

- Набор состояний:  $S_t = (fulltag_i)_{i=0}^{31}$ ,

$$fulltag_i = \begin{cases} (v = 0, \emptyset) \\ (v = 1, tag \in \{1, \dots, A + 1\}, age \in \{1, \dots, A\}, modified \in \{0, 1\}) \end{cases}$$

$v$  – валидность,  $tag$  – один из 33 тегов,  $age$  – давность использования,  $modified$  – флаг изменения.

- Начальное состояние –  $s_0 = [(0, \emptyset), (0, \emptyset), \dots, (0, \emptyset)]$
- Входной алфавит –  $X = \{ld, st, inv\} \times \{tag_i, i = \overline{0, 32}\}$
- Выходной алфавит –  $Y = \{ld, st, st + ld, \emptyset\} \times \{tag_i, i = \overline{0, 32}\}$
- Функции переходов –  $\delta : (s, x) \rightarrow s'$
- Функции выходов –  $\lambda : (s, x) \rightarrow y$

### Запись

$$\delta : ((st, tag), s) \rightarrow s'$$

Попадание:  $s : \exists k : v_k = 1 \wedge tag_k = tag$

$$s' : fulltag'_i = \begin{cases} fulltag_i & v_i = 0 \vee (v_i = 1 \wedge age_k < age_i) \\ (1, tag_i, age_i + 1, modified_i) & v_i = 1 \wedge i \neq k \wedge age_i < age_k \\ (1, tag, 1, 1) & i = k \end{cases}$$

$$y = (\emptyset, tag)$$

Промак без вытеснения:  $s : (\nexists k : v_k = 1 \wedge tag_k = tag) \wedge (\exists j : v_j = 0)$ ,  $j$  – минимальное из свободных (так как политика заведения – первый свободный)

$$s' : fulltag'_i = \begin{cases} fulltag_i & v_i = 0 \\ (1, tag_i, age_i + 1, modified_i) & v_i = 1 \wedge i \neq j \\ (1, tag, 1, 1) & i = j \end{cases}$$

$$y = (st, tag)$$

Промак с вытеснением:  $s : (\nexists k : v_k = 1 \wedge tag_k = tag) \wedge (\nexists j : v_j = 0)$

$$s' : fulltag'_i = \begin{cases} (1, tag_i, age_i + 1, modified_i) & i : age_i \neq 32 \\ (1, tag, 1, 1) & i : age_i = 32 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (st, tag) & \exists i : age_i = 32 \wedge modified_i = 1 \\ (\emptyset, tag) & \exists i : age_i = 32 \wedge modified_i = 0 \end{cases}$$

## Чтение

$$\delta : ((ld, tag), s) \rightarrow s'$$

Попадание:  $s : \exists k : v_k = 1 \wedge tag_k = tag$

$$s' : fulltag'_i = \begin{cases} fulltag_i & v_i = 0 \vee (v_i = 1 \wedge age_k < age_i) \\ (1, tag_i, age_i + 1, modified_i) & v_i = 1 \wedge i \neq k \wedge age_i < age_k \\ (1, tag, 1, modified_i) & i = k \end{cases}$$

$$y = (\emptyset, tag)$$

Промах без вытеснения:  $s : (\nexists k : v_k = 1 \wedge tag_k = tag) \wedge (\exists j : v_j = 0)$

$$s' : fulltag'_i = \begin{cases} fulltag_i & v_i = 0 \\ (1, tag_i, age_i + 1, modified_i) & v_i = 1 \wedge i \neq j \\ (1, tag, 1, 0) & i = j \end{cases}$$

$$y = (ld, tag)$$

Промах с вытеснением:  $s : (\nexists k : v_k = 1 \wedge tag_k = tag) \wedge (\nexists j : v_j = 0)$

$$s' : fulltag'_i = \begin{cases} (1, tag_i, age_i + 1, modified_i) & i : age_i \neq 32 \\ (1, tag, 1, 0) & i : age_i = 32 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (ld + st, tag) & \exists i : age_i = 32 \wedge modified_i = 1 \\ (ld, tag) & \exists i : age_i = 32 \wedge modified_i = 0 \end{cases}$$

## Инвалидация

$$\delta : ((inv, tag), s) \rightarrow s'$$

Попадание:  $s : \exists k : v_k = 1 \wedge tag_k = tag$

$$s' : fulltag'_i = \begin{cases} fulltag_i & v_i = 0 \vee (v_i = 1 \wedge age_k < age_i) \\ (1, tag_i, age_i - 1, modified_i) & v_i = 1 \wedge i \neq k \wedge age_i < age_k \\ (0, \emptyset) & i = k \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (st, tag) & modified_k = 1 \\ (\emptyset, tag) & modified_k = 0 \end{cases}$$

Промах:  $s : \nexists k : v_k = 1 \wedge tag_k = tag$

$$s' = s$$

$$y = (\emptyset, tag)$$

## 3. Пример – вытеснение модифицированных данных

Исходное состояние – кэш пуст:

$$s_0 = [(0, \emptyset), \dots, (0, \emptyset)]$$

Политика вытеснения LRU – это значит вытеснению будет подлежать самый "старый" блок. Этот же блок должен быть (а) модифицированным и (б) должен (желательно) быть вытеснен первым. Но так как изменение ведёт к обнулению возраста среди прочих блоков, то этот блок должен быть изменён до появления других блоков, приводящих к его вытеснению. А значит, что этот блок, который мы обязаны сразу же модифицировать, должен быть первым занесён в кэш:

|                     |  |
|---------------------|--|
| $st, 2^{16} * (0)$  | $\Leftarrow$ помещение первого блока       |
| $ld, 2^{16} * (0)$  | $\Leftarrow$ модифицирование первого блока |
| $st, 2^{16} * (1)$  |  |
| $st, 2^{16} * (2)$  |  |
| $\vdots$            |  |
| $st, 2^{16} * (30)$ |  |
| $st, 2^{16} * (31)$ |  |
| $st, 2^{16} * (32)$ | $\Leftarrow$ вытеснение первого блока      |

#### 4. Тестовое покрытие

- **Метрика состояний**

Начнём считать по порядку переменных в *fulltag*.

Может быть  $k \in \{0, 2, \dots, 32\}$  валидных блоков, расположение которых являются различными состояниями. Всего таких перестановок:

$$C_B^k = \frac{A!}{k!(A-k)!}$$

Каждый из  $k$  валидных блоков может быть заполнен  $tag \in \{1, \dots, 33\}$ , но без повторений. То есть для первого из валидных блоков (если такой есть) будет 33 варианта тега, для второго (если есть) будет 32 и так далее. Итого, если  $k$  валидных, то комбинаций с тегами будет:

$$\frac{(A+1)!}{(A+1-k)!}$$

Каждый из  $k$  валидных блоков имеет возраст  $age \in \{1, \dots, k\}$ , с учётом этого, вариантов состояний будет:

$$k!$$

И к тому же, любой валидный блок может быть как модифицированный, так и немодифицированный:

$$2^k$$

Итого состояний:

$$|S| = \sum_{k=0}^{32} \frac{A!}{k!(A-k)!} \frac{(A+1)!}{(A+1-k)!} k! 2^k = \sum_{k=0}^{32} \frac{A!}{(A-k)!} \frac{(A+1)!}{(A+1-k)!} 2^k$$

$$|S| \approx 6.1 * 10^{107}$$

точное значение: 610658749490633920905628536908573609957420537965769233311973133492019439684354198481936553510387047429721121

В примере было пройдено 34 состояний, тестовое покрытие:

$$\frac{34}{|S|} \approx 5.8 * 10^{-107}$$

- **Метрика переходов**

На каждый *fulltag* в любом состоянии может произойти 8 различных операций с 33 различными тегами, тогда всего переходов будет:  $8 * 33 * 6.1 * 10^{107} \approx 1.6 * 10^{110}$ . С учётом того что переходов было 33, то тестовое покрытие будет:

$$\frac{33}{8 * 33 * |S|} \approx 2 * 10^{-109}$$