Най-близък общ предшественик на два върха в дърво. Минимален елемент в отрез от масив. (част 2)

23.10.2020 г.

(Lowest Common Ancestor (LCA) and Range Minimum Query (RMQ))

Стъпка I:
Алгоритъма от предишната лекция:

$time \leftarrow 0$
$visited[0 \dots 2|V|]$
$depth[0 \dots 2|V|]$
$start[0 \dots |V|-1]$
$end[0 \dots |V|-1]$
$time \leftarrow time + 1$ (**Vertex**)
procedure $DFS(T, v)$ {
    for each u **in** $p(v) = u$ **do**
        $DFS(T, u)$
        $depth[time] \leftarrow d(v)$
        $visited[time] \leftarrow v$
        $time \leftarrow time + 1$ (**Edge**)
    $end[v] \leftarrow time - 1$
}

procedure $LCA(u, v)$ { // $start[u] \leq start[v]$
    $k \leftarrow RMQ(depth, start[u], start[v])$
    return $visited[k]$
}

Коректност:

1. За всеки два върха u и v с условието $start[u] \leq start[v]$ е в сила точно едно от двете:
    - или $T_v \subseteq T_u$ и тогава $\left[start[v], end[v]\right] \subseteq \left[start[u], end[u]\right]$
    - или $T_u \cap T_v = \emptyset$ и тогава $\left[start[u], end[u]\right] \cap \left[start[v], end[v]\right] = \emptyset$

При $DFS(T, v)$, $time$ нараства за всеки връх (**Vertex**) $\rightarrow |V_{T_v}|$ пъти, както и за всяко ребро (**Edge**) $\rightarrow |E_{T_v}| = |V_{T_v}| - 1$ пъти. Следователно $end[v] - start[v] = 2(|V_{T_v}| - 1)$

В интервала $\left(start[v], end[v]\right]$ е записан върха v толкова пъти, колкото са синовете $children(v)$ на v.

От тук с индукция по $|V_{T_v}|$ може да видим, че в интервала $\left[start[v], end[v]\right]$ се срещат само върхове от T_v.
1) База: $|V_{T_v}| = 1$.
2) Нека $|V_{T_v}| > 1$ и $c_1, c_2, \dots, c_s$ са синовете на v, в който са обходетни във for цикъла. Тогава от индуктивното предположение имаме, че в интервала $\left[start[c_i], end[c_i]\right]$ има върхове само от T_{c_i}.

От цикъла се вижда, че $end[c_i] < start[c_{i+1}] < end[v]$. Тоест това са непресичащи се интервали в $\left[start[v], end[v]\right]$.

Остана да забележим, че:

$$end[v] - start[v] = 2(|V_{T_v}| - 1) = 2\sum_{i=1}^{s}\left(|V_{T_{c_i}}|\right) = 2\left(\sum_{i=1}^{s}\left(|V_{T_{c_i}}| - 1 + 1\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{s}\left(|V_{T_{c_i}}| - 1\right) + 2s = \sum_{i=1}^{s}\left(end[c_i] - start[c_i]\right) + 2s = \sum_{i=1}^{s}\left(end[c_i] - start[c_i] + 1\right) \underbrace{-s}$$

брой записи на върха v в отворения интервал $(start[v], end[v]\big]$

Това показва, че други елементи освен v и върховете от T_{c_i} в $\left[start[v], end[v]\right]$ няма.

Сега, ако $T_u \cap T_v = \emptyset$, то в интервала $\left[start[u], end[u]\right]$ се срещат само елементи на T_u, а в интервала $\left[start[v], end[v]\right]$ се срещат само елементи на T_v. Ако двата интервала имаха общ елемент k, то $visited[k] \in T_u \cap T_v$, което е **противоречие** ↯ с условието $T_u \cap T_v = \emptyset$.

Обратно: В интервала $\left[start[u], end[u]\right]$ са записани всички върхове от T_u и T_v. Тогава без ограничение на общността T_v е поддърво на T_u ($T_v \subseteq T_u$) и елементите на T_v са записани в интервала $\left[start[v], end[v]\right]$, а извън този интервал няма елементи на T_v и следователно $\left[start[v], end[v]\right] \subseteq \left[start[u], end[u]\right]$.

2. Нека u и v са два върха, такива че $start[u] \leq start[v]$ и нека $k = arg\ \min\ depth[l]$, където $start[u] \leq l \leq start[v]$ и $w = visited[k]$. Тогава твърдим, че $w = LCA(u, v)$.

2.1. сл. $T_v \subseteq T_u$. Тогава в интервала $\left[start[u], end[u]\right]$ са записани върхове само от дървото T_u, в което всички дълбочини са $\geq$ от тази на върха u и единственият връх с дълбочина $d(u)$ е u. На позиция $t = start[u]$ в масива $depth$ имаме, че $depth[t] = d(u) \Rightarrow \min\ depth[k] = d(u), start[u] \leq k \leq start[v]$. От първата част $visited[k] = u$.
От друга страна от това, че $T_v \subseteq T_u$ е ясно, че $LCA(u, v) = u = visited[k]$.

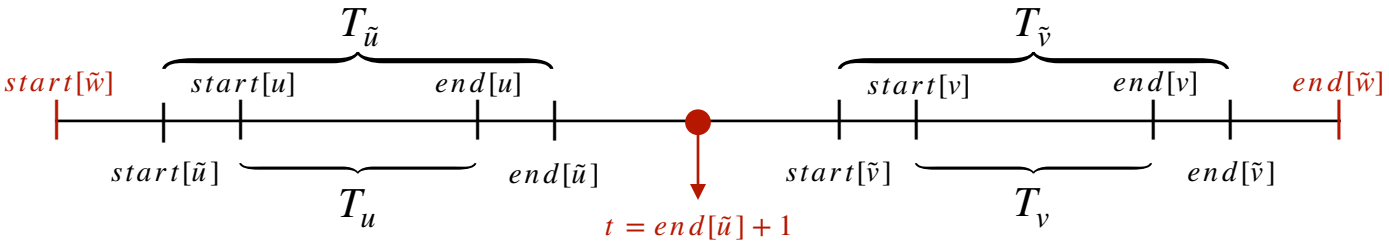
2.2. сл. $T_u \cap T_v = \emptyset$. Нека $\tilde{w}$ е техен най-близък общ предшественик. Нека $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ са синовете на $\tilde{w}$: $u \in T_{\tilde{u}}$ и $v \in T_{\tilde{v}}$. Тогава
$\left[start[u], end[u]\right] \subseteq \left[start[\tilde{u}], end[\tilde{u}]\right] \subseteq \left[start[\tilde{w}], end[\tilde{w}]\right]$ и
$\left[start[v], end[v]\right] \subseteq \left[start[\tilde{v}], end[\tilde{v}]\right] \subseteq \left[start[\tilde{w}], end[\tilde{w}]\right]$

Освен това $T_{\tilde{u}} \cap T_{\tilde{v}} = \emptyset$, от където следва, че
$\left[start[\tilde{u}], end[\tilde{u}]\right] \cap \left[start[\tilde{v}], end[\tilde{v}]\right] = \emptyset$.

Сега: $start[\tilde{u}] \leq start[u] < start[v] \leq end[\tilde{v}]$.
Ако $start[\tilde{v}] \leq start[\tilde{u}]$, то $\left[start[\tilde{v}], end[\tilde{u}]\right]$ има общи елементи с $\left[start[u], end[u]\right] \Rightarrow u \in T_v$, но $v \in T_{\tilde{v}} \Rightarrow \tilde{v}$ е предшественик на u и v, който е по-дълбоко от $\tilde{u} \Rightarrow start[\tilde{u}] < start[\tilde{v}] \underbrace{\Rightarrow}_{T_u \cap T_v = \emptyset} end[\tilde{u}] < start[\tilde{v}]$.

Тоест разположението на интервалите е следното:

$$start[u] \le end[\tilde{u}] < end[\tilde{u}] + 1 \le start[\tilde{v}] \le start[v]$$



Тъй като $\tilde{u}$ е син на $\tilde{w}$:

$$\begin{cases} depth[t] = d(\tilde{w}) \\ visited[t] = \tilde{w} \end{cases} \Rightarrow \min_{start[u] < l \le start[v]} depth[l] \le d[\tilde{w}]$$

Накрая $T_u, T_v \subseteq T_{\tilde{w}} \Rightarrow start[\tilde{w}] \le start[u] \le start[v] \le end[\tilde{w}]$, следователно:

$$\min_{start[u] \le l \le start[v]} depth[l] \ge \min_{start[\tilde{w}] \le l \le end[\tilde{w}]} depth[l] = d(\tilde{w}) \quad !$$

$\Rightarrow d(\tilde{w}) = depth[t]$ е минимумът в $\left[start[u], start[v]\right]$ и тъй като
$t \in \left[start[\tilde{w}], end[\tilde{w}]\right]$, то $visited[t] = \tilde{w} \Rightarrow \min_{start[u] \le l \le start[v]} depth[l] \le d(\tilde{w})$.

Забележка: $\left|depth[t] - depth[t+1]\right| = 1$ за всяко $t < 2\left(|V| - 1\right)$.

Дефиниция: Проблема $\pm 1\ RMQ$ е следния казус:

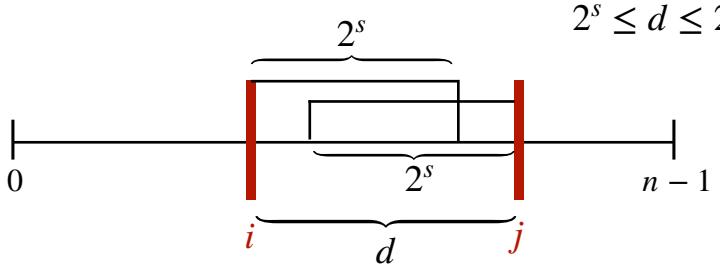
Дадено: Масив $A[0 \ldots n-1]$ от естествени (може и цели) числа, така че
$|A[i] - A[i+1]| = 1$, за $i < n-1$.
Вход: $0 \le i \le j < n$
Изход: $k = \arg \min_{i \le l \le j} A[l]$
Следствие: Ако имаме решение $\left(f(n), g(n)\right)$ за $\pm 1\ RMQ$ проблема, то имаме решение $\left(n + f(2n), g(2n)\right)$ за LCA-проблема.

Стъпка I беше свеждането на LCA-проблема към RMQ-проблема
Стъпка II: Решение на RMQ-проблема за $O(n \log n, 1)$ времева сложност.

Дадено: Масив $A[0 \ldots n-1] \subset \mathbb{Z}$
Вход: $0 \le i \le j < n$
Изход: $k = \arg \min_{i \le l \le j} A[l]$

Идея:

$2^s \le d \le 2^{s+1}$



1. Построяване на индекс $\mathscr{A}_I$.

$table[i][k] = \arg\ \min\ A[i \ldots i + 2^k - 1]$

($table[i][0] = i$ за всяко i)

for $i = 0$ **to** $n - 1$ **do**
    $table[i][0] = i$

$k \leftarrow 1$
$pow \leftarrow 1$
while $2 * pow \leq n$ **do**
    for $i = 0$ **to** $(n - 1) - (2 * pow - 1)$ **do**
        $l \leftarrow table[i][k - 1]$
        $r = table[i + pow][k - 1]$
        if $A[l] \leq A[r]$ **then**
            $table[i][k] \leftarrow l$
        else
            $table[i][k] \leftarrow r$
    done
    $pow \leftarrow 2 * pow$
    $k \leftarrow k + 1$
}

Естествено преди това трябва да сме си преизчислили логаритмите закръглени надолу на всички числа от 2 до n и степените на двойката неревишаващи n:
$\log[0 \ldots n - 1]$
$pow1[0 \ldots \log[n - 1]]$
$pow \leftarrow 1,\ j \leftarrow 0$ // $2^j = pow$
for $i = 0$ **to** $n - 1$ **do**
    if $i = pow - 1$ **then** // $i = 2^j - 1$
        $pow1[j] \leftarrow i$
        $\log[i] \leftarrow j$
    if $i + 1 = 2 * pow$ **then**
        $pow \leftarrow pow * 2$
        $j \leftarrow j + 1$
}

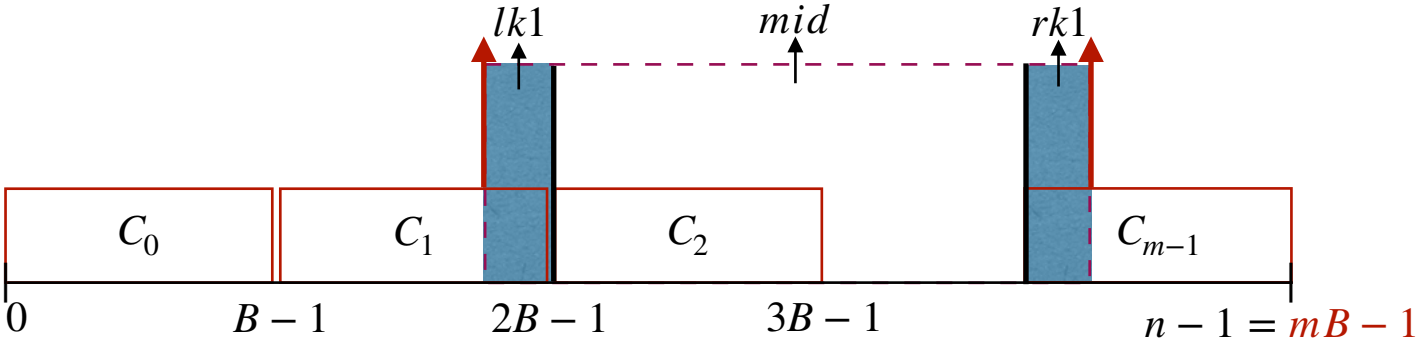
procedure $RMQ(i, j)$ { // $i \leq j$
    $d \leftarrow j - 1 + 1$
    $k \leftarrow \log[d]$
    $pow \leftarrow pow1[k]$ // $2^k \leq d \leq 2^{k+1}$
    $l \leftarrow table[i][k]$
    $r \leftarrow table[j - pow][k]$
    if $A[l] \leq A[r]$ **then return** l
    return r
}

Коректност:

$d = j - i + 1$
$2^k \le j - i + 1 < 2^{k+1}$, т.е.
$\Rightarrow j - pow \ge i$

От друга страна $i + 2^{k+1} - 1 \ge j + 1 \Rightarrow i + 2^k - 1 \ge j - 2^k + 1 \Rightarrow j - pow$

III. Решение на ± 1 RMQ-проблема за $O(n, 1)$



За всеки един от тези блокове може да намерим минимума $c_i = \min C_i$

$I_i = arg; \min\ C_i \in [Bi \ldots B(i+1) - 1]$

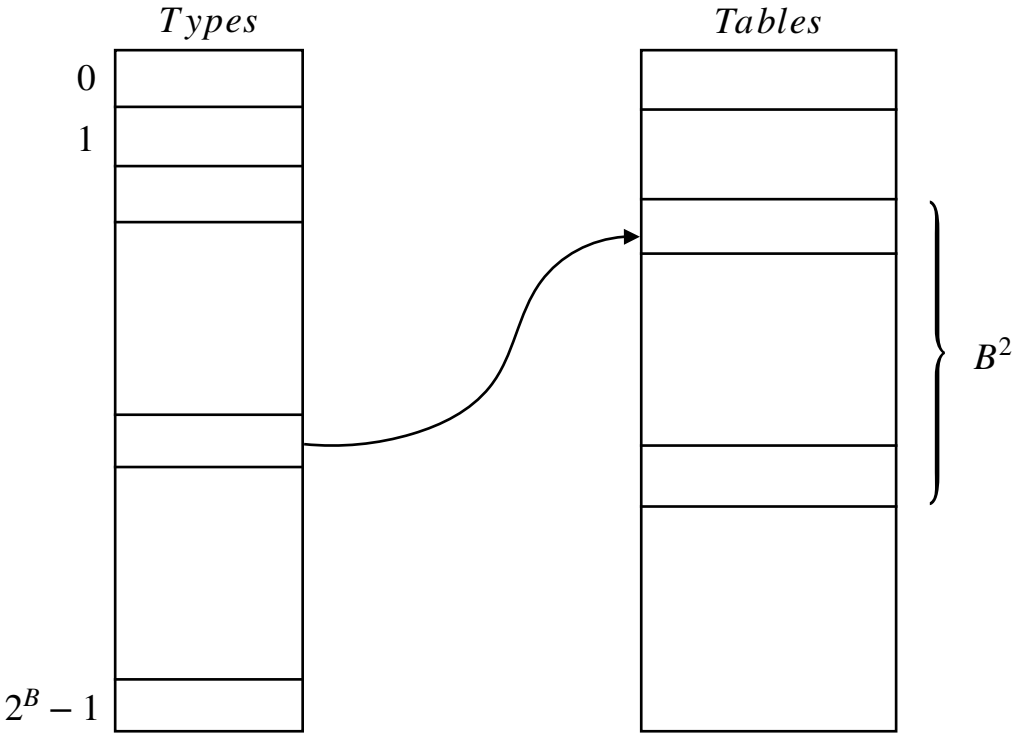
За всеки блок $c_i \longmapsto$ (съпоставяме) масив от стойности
$\underset{type}{\tau}\ [j] = C_i[j] - C_i[0] \in [-B \ldots B]$, като разликата на всеки два последователни $\left|\tau[j+1] - \tau[j]\right| = 1, \tau_i[0] = 0 \Rightarrow$ най-много 2^B различни масива τ. Всеки от тях може да адресираме с наивен алгоритъм $(B^2, 1)$ - решение.

Анализ:
Двете части на решението имат сложност:
$f_1(n) = \left(\frac{n}{B} \log \frac{n}{B}, 1\right)$ и $f_2(n) = \left(2^B B^2, 1\right)$, т.е. общото време за индексиране ще е
$f(n) = f_1(n) + f_2(n) = \frac{n}{B} \log \frac{n}{B} + 2^B B^2 \overset{?}{\in} O(n)$

$B \sim c \log n$
$2^{c \log_2 n} c^2 \log_2^2 n = n^c \,.\, c^2 \log_2 n \in O(n) \Leftrightarrow c < 1.$

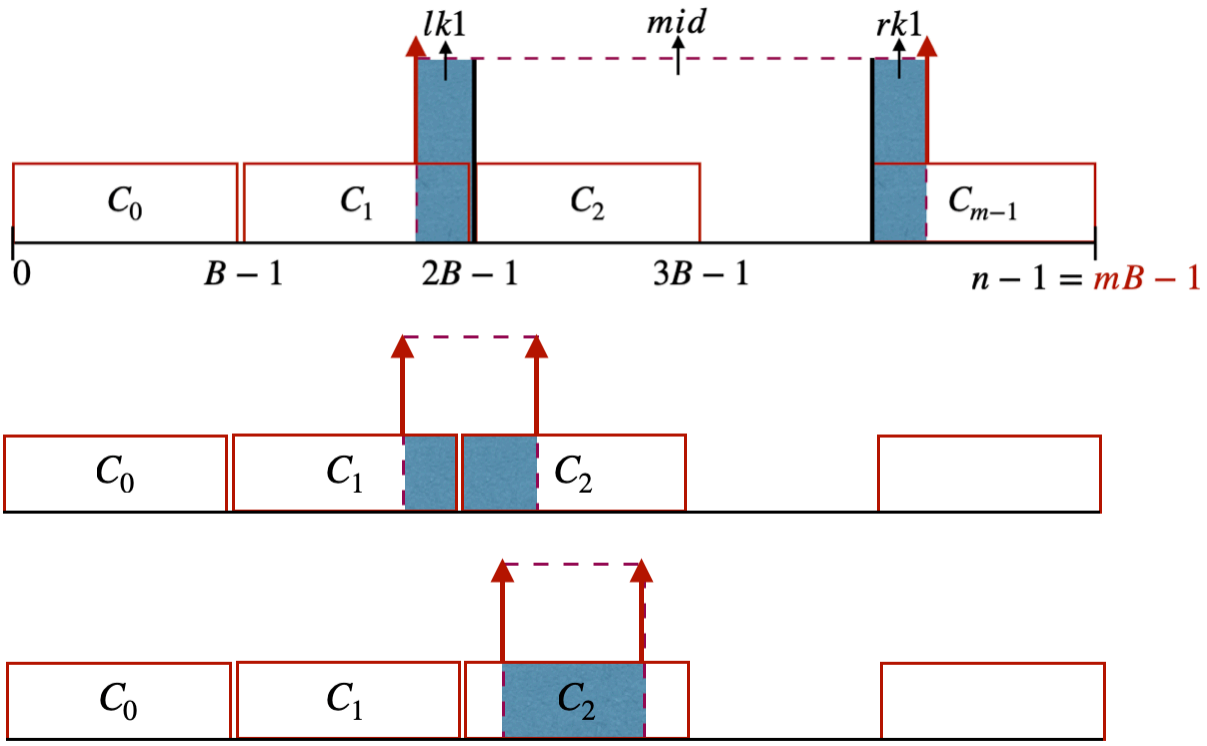
Сега може да изберем $c = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor$

```
procedure FindBlockType(A, i, B) {
        type ← 0 // −1 ~ 0, 1 ~ 1
        c ← A[B_i]
        I ← B_i
        for j = 1 to B − 1 do
                b ← A[Bi + j] − A[Bi + j − 1]
                if b = = − 1 then
                        type ← 2 * type
                else
                        type ← 2 * type + 1
                if A[Bi + j] < c then
                        I ← Bi + j
                        c ← A[Bi + j]
        done
        return (type, c, I)
}
```



```
procedure initTypes()
        for t = 0 to 2^B − 1 do
                Types[t] ← − 1

procedure SetType(A, i, B, type) {
        if Types[type] ≠ − 1 then
                return
        c ← currentSize(Tables)
        for k = 0 to B − 1 then
                for l = 0 to k − 1 do
                        Tables[s + l . B + l] ← − 1
                m ← A[Bi + k], Tables[s + Bk + k] ← k
                for l = k + 1 to B − 1 do
                        if A[Bi + l] < A[Tables[s + kBi + l − 1]] then
                                Tables[s + kB + l] ← l
                        else
                                Tables[s + kB + l] ← s + lB + l − 1
                done
        done
}
```



```
procedure RMQ(A, l, r) {
        l_0 ← [l/B] + 1
        r_0 ← [r/B] − 1
        if l_0 ≤ r_0 then
                mid ← logRMQ(C[0 ... n/B − 1], l_0, r_0)
                m ← I[mid]
        else
                m ← −1
3 :     if l_0 − 1 = r_0 − 1 then
                k ← RMQTable(type[l_0 − 1], l − B[l/B], r − B[l/B])
                return k + B[l/B]
        if l_0 = r_0 + 1 then
                lk ← RMQTable(type[l_0 − 1], l − B[l/B], B − 1)
                rk ← RMQTable(type[l_0], 0, r − B[r/B])
2 :             lk1 ← lk + B[l/B]
                rk1 ← rk + B[r/B]
                if A[lk1] ≤ A[rk1] then
                        return lk1
                else
                        return rk1
        if l_0 ≤ r_0 and m ≠ −1 then
                lk ← RMQTable(type[l_0 − 1], l − B[l/B], B − 1)
                lk1 ← lk + B[l/B]
1 :             rk ← RMQTable(type[r_0 + 1], 0, r − B[l/B])
                rk1 ← rk + B[r/B]
                if A[lk1] ≤ A[m] then
                        return m
                else
                        return rk1
```