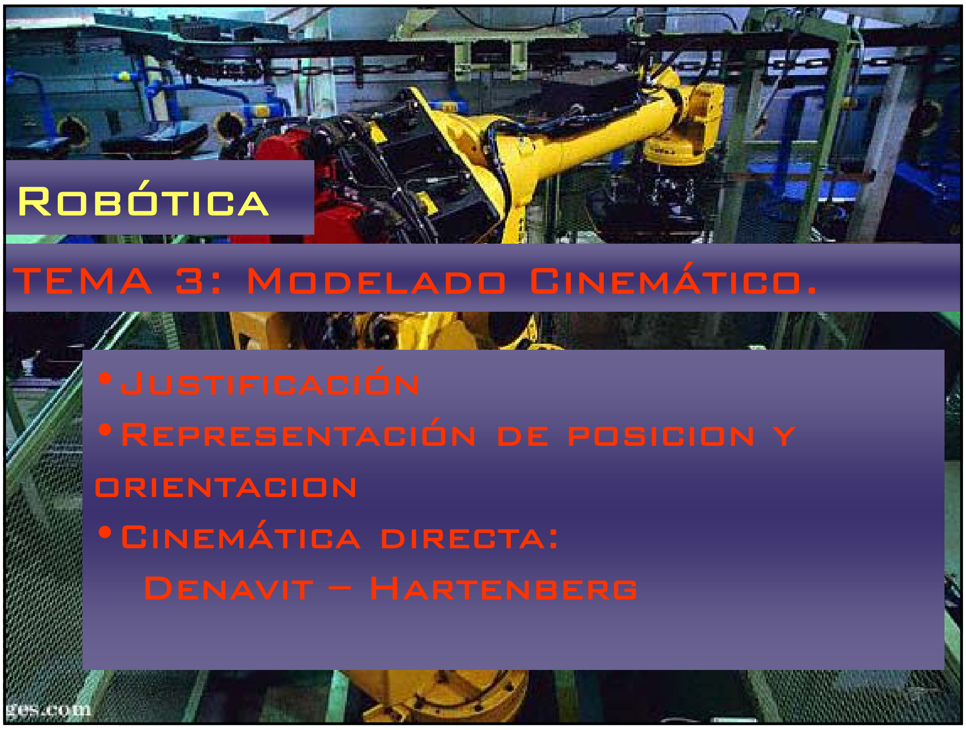


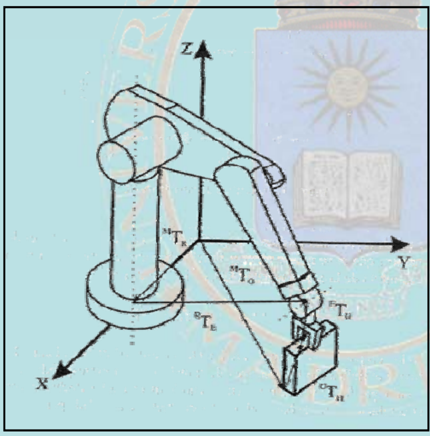
Robótica

TEMA 3: Modelado Cinemático.

- Justificación
- Representación de posicion y orientacion
- Cinemática directa:
  Denavit – Hartenberg

---

1. Justificación



2. Representación de la posición

Vector de posición

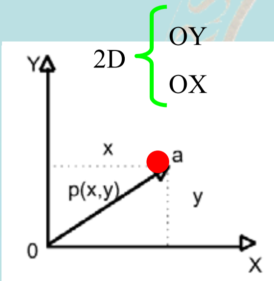
2D → Cartesianas y polares

3D → Cartesianas, cilíndrica y esfericas

2. Representación de la posición (cont.)

2.1 Coordenadas Cartesianas

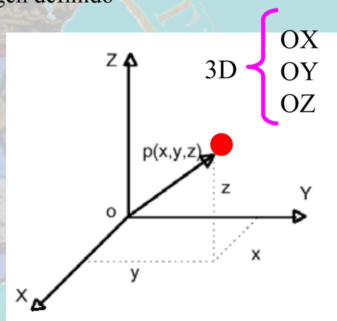
Ejes perpendiculares con origen definido



vector ⟶ **p**(x,y)

⇓

Coordenadas cartesianas



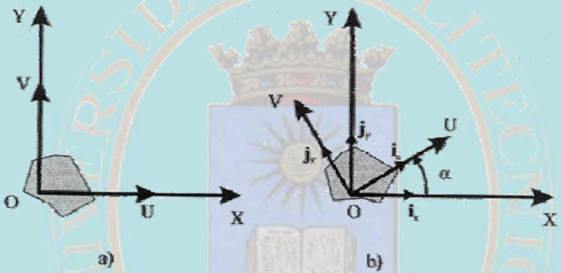
vector ⟶ **p**(x,y,z)

⇓

Coordenadas cartesianas

3. Representación de la orientación

3.1 Matrices de Rotación en 2D



El punto **p** se puede describir en el sistema **OXY** o en el sistema **OUV**

$$\mathbf{p}_{xy} = \left[p_x, p_y\right]^T = p_x \cdot \mathbf{i}_x + p_y \cdot \mathbf{j}_y$$

$$\mathbf{p}_{uv} = \left[p_u, p_v\right]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{j}_v$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v \\ j_y i_u & j_y j_v \end{bmatrix}$$

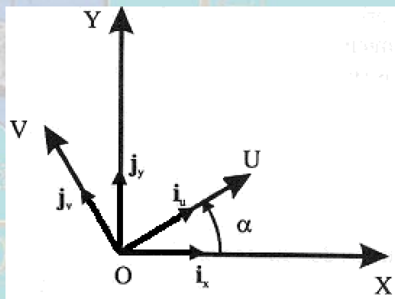
3. Representación de la orientación

3.1.1 Particularidades de R

R Matriz de rotación o Matriz de cosenos directores

R es ortonormal $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

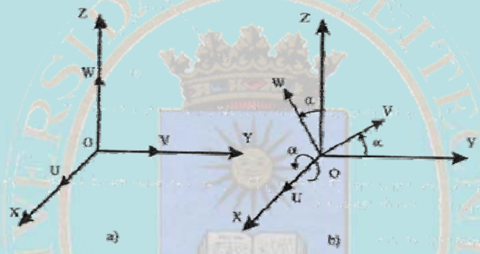


R es una matriz columna

$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{R} = \mathbf{I}$

3. Representación de la orientación (cont.)

3.2 Matrices de Rotación en 3D



El punto **p** se puede describir en el sistema **OXYZ** o en el sistema **OUVW**

$$\mathbf{p}_{uvw} = [p_u, p_v, p_w]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{j}_v + p_w \cdot \mathbf{k}_w$$

$$\mathbf{p}_{xyw} = [p_x, p_y, p_z]^T = p_x \cdot \mathbf{i}_x + p_y \cdot \mathbf{j}_y + p_z \cdot \mathbf{k}_z$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

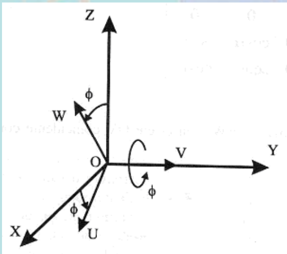
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x\mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x\mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x\mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y\mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y\mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y\mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z\mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z\mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z\mathbf{k}_w \end{bmatrix}$$

Las propiedades de **R** vistas para 2D se conservan en 3D

3. Representación de la orientación

3.2 Matrices de Rotación en 3D

$$\mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

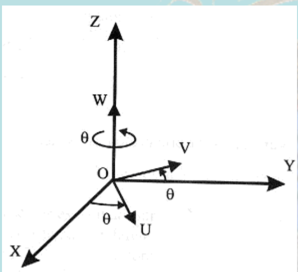


$$\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \mathrm{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

M. Hernando Robótica

3. Representación de la orientación

3.2 Matrices de Rotación en 3D



$$\mathbf{R}(\mathbf{z},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}(x,\alpha)$, $\mathbf{R}(y,\phi)$, $\mathbf{R}(z,\theta)$ $\longrightarrow$ Matrices BASICAS de rotación

M. Hernando Robótica

3. Representación de la orientación

3.2 Matrices de Rotación en 3D (cont.)

3.2.1 Composiciones de rotaciones

Las matrices de rotación pueden componerse para expresar la aplicación continua de varias rotaciones:

- Rotación α en OX
- Rotación Φ en OY
- Rotación θ en OZ

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{z},\theta)\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi)\mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta C\alpha + C\theta S\phi S\alpha & S\theta S\alpha + C\theta S\phi C\alpha \\ S\theta C\phi & C\theta C\alpha + S\theta S\phi S\alpha & -C\theta S\alpha + S\theta S\phi C\alpha \\ -S\phi & C\phi S\alpha & C\phi C\alpha \end{bmatrix}$$

EUITI-ELAI

4. Angulos de Euler

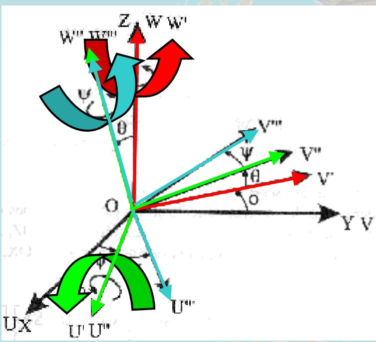
Definición: Todo sistema OUVW móvil, puede definirse con respecto al sistema OXYZ inercial a través de tres ángulos Φ, θ, ψ, denominados ángulos de Euler .

4.1 Angulos de Euler ZXZ (313)

Es una de las representaciones más habituales entre las que realizan los giros sobre ejes previamente girados. Se le suele asociar con los movimientos básicos de un giróscopo. Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, inicialmente coincidentes, se puede colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos.

EUITI-ELAI

4.1 Angulos de Euler ZXZ (313) (cont.)



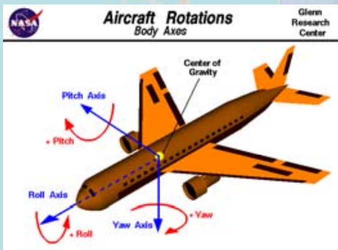
1. Girar OUVW un ángulo Φ con respecto al eje OZ → OU'V'W'.
2. Girar OU'V'W' un ángulo θ con respecto al eje OU', convirtiéndose así en el OU''V''W''.
3. Girar el sistema OU''V''W'' un ángulo ψ con respecto al eje OW'' convirtiéndose finalmente en el OU'''V'''W'''.

4.1 Angulos de Euler XYZ

Angulos de Euler XYZ - Roll, Pitch, Yaw

Se trata de la representación utilizada generalmente en aeronáutica.

Es también la más habitual de entre las que se aplican a los **giros sobre los ejes del sistema fijo denominándose entonces como ángulos de Cardan**.



1. Girar el sistema OUVW un ángulo Φ con respecto al eje OZ. Es el denominado **Yaw** o **guiñada**.
2. Girar el sistema OUVW un ángulo θ con respecto al eje **OV**. Es el denominado **Pitch** o cabeceo.
3. Girar el sistema OUVW un ángulo ψ con respecto al eje **OU**. Es el denominado **Roll** o alabeo.

4.1 Angulos de Euler (Roll Pitch Yaw)

Angulos de Euler XYZ - Roll, Pitch, Yaw

Visto desde el punto de vista de la robótica:

Es también la más habitual de entre las que se aplican a los **giros sobre los ejes del sistema fijo denominándose entonces como ángulos de Cardan**.

R=Rot(x,roll)Rot(y,pitch)Rot(z,yaw)

1. Girar el sistema OUVW un ángulo Φ con respecto al eje OX. Es el denominado **Roll**.
2. Girar el sistema OUVW un ángulo θ con respecto al eje **OV**. Es el denominado **Pitch**.
3. Girar el sistema OUVW un ángulo ψ con respecto al eje **OW**. Es el denominado **Yaw**.

1. Girar el sistema OUVW un ángulo ψ con respecto al eje **OZ**. Es el denominado **Yaw**.
2. Girar el sistema OUVW un ángulo θ con respecto al eje **OY**. Es el denominado **Pitch**.
3. Girar el sistema OUVW un ángulo Φ con respecto al eje **OX**. Es el denominado **Roll**.

5. Otras representaciones

Se utilizan a menudo otros sistemas de representación de la orientación:

•Par de rotación $\mathbf{k} = \lfloor k_x \quad k_y \quad k_z \rfloor \qquad \theta$

•Quaternios $Q = \{q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \,/\, q_0 e + q_1 i + q_2 j + q_3 k\} = Q(s, \mathbf{v})$

$$Q = Rot(\mathbf{k}, \theta) = \left(\cos \theta/2, \mathbf{k} \sin \theta/2\right)$$

7. Matrices de Transformación Homogénea

Ninguno de los métodos anteriores por sí solo permite una representación conjunta de la posición y la orientación (**localización**).

Para solventar este problema se introdujeron las denominadas **coordenadas homogéneas**

Definición de Coordenadas Homogéneas.

La representación mediante coordenadas homogéneas de la localización de sólidos en un espacio *n-dimensional* se realiza a través de coordenadas de un espacio *(n+1)dimensional*

coordenadas homogéneas ⇨ **Aumentan la dimensión en 1**

$$\mathbf{p} = [x \quad y \quad z] \Rightarrow \mathbf{p} = [w_x \quad w_y \quad w_z \quad w]$$

w tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala

M. Hernando Robótica

De forma general, un vector **p** = a**i**+b**j**+c**k**, donde **i**, **j**, **k** son los versores del sistema de referencia OXYZ, se representa en coordenadas homogéneas mediante el vector columna:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definición de Matriz Homogénea.

Se define como matriz de transformación homogénea **T** a una matriz de dimensión **4x4** que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3x3} & \mathbf{p}_{3x1} \\ \mathbf{f}_{1x3} & \mathbf{w}_{1x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

En robótica interesa conocer el valor de $\mathbf{R}^{3x3}$ y de $\mathbf{p}^{3x1}$, considerándose las componentes de **f** nulas y la de *w=1*.

M. Hernando Robótica

En robótica, la matriz **T** tiene la forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3x3} & \mathbf{p}_{3x1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T representa la **orientación y posición** de un sistema **O'UVW** rotado y trasladado con respecto al sistema de referencia **OXYZ**.

Dado un vector **r= [r_u, r_v, r_w]** en el sistema **OUVW**, se puede conocer su localización (**r= [r_x, r_y, r_z]**) en el sistema **OXYZ** a través de **T**:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, una matriz de transformación homogénea se puede aplicar para:

1. **Representar la posición y orientación de un sistema** girado y trasladado O'UVW con respecto a un sistema fijo de referencia OXYZ, que es lo mismo que representar una rotación y traslación realizada sobre un sistema de referencia.

2. **Transformar un vector** expresado en coordenadas con respecto a un sistema O'UVW, a su expresión en coordenadas del sistema de referencia OXYZ.

3. **Rotar y trasladar un vector** con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ

7.1 Traslación

Supóngase que el sistema **O'UVW** únicamente se encuentra trasladado un vector **p** con respecto al sistema **OXYZ**.

$$\mathbf{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$$

La matriz **T** entonces corresponderá a una matriz homogénea de traslación:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Básica de Traslación

Un vector cualquiera **r**, representado en el sistema **O'UVW** por $\mathbf{r}_{\mathbf{uvw}}$, tendrá como componentes del vector con respecto al sistema **OXYZ**:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + r_u \\ p_y + r_v \\ p_z + r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y a su vez, un vector $\mathbf{r}_{\mathbf{xyz}}$ desplazado según **T** tendrá como componentes $\mathbf{r'}_{\mathbf{xyz}}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + r_x \\ p_y + r_y \\ p_z + r_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.2 Rotación

Supóngase que el sistema **O'UVW** únicamente se encuentra rotado un ángulo con respecto al sistema **OXYZ**.

$$T(x,\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0\\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Rotación de α respecto a OX

$$T(y,\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Rotación de Φ respecto a OY

$$T(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Rotación de θ respecto a OZ

Matriz Básica de Rotación

Dado un vector **r= [r_u, r_v, r_w]** en el sistema **OUVW**, se puede conocer su localización (**r= [r_x, r_y, r_z]**) en el sistema **OXYZ** a través de **T**:

$$\begin{bmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\\ 1\end{bmatrix}=\mathbf{T}\begin{bmatrix}r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{bmatrix}$$

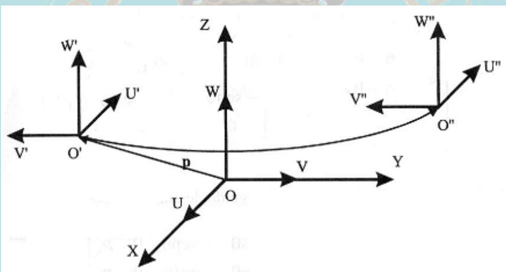
7.3 Traslación + Rotación

La principal ventaja de las matrices homogénea reside en su capacidad de representación **conjunta de posición y orientación**.

Para ello se utiliza la matriz de rotación $\mathbf{R}^{3x3}$ y el vector de traslación $\mathbf{p}^{3x1}$ en una matriz de transformación homogénea al mismo tiempo.

Es por tanto la aplicación conjunta de lo visto en los dos apartados anteriores.

La rotación y traslación son operaciones no conmutativas por lo que habrá que tener en cuenta el orden en que se realizan.



Se parte de un sistema **OUVW** coincidente con **OXYZ** al que se va a aplicar una traslación según un vector $\mathbf{p}_{x,y,z}$ y una rotación de **180°** alrededor del eje **OZ**.

Si primero se rota y después se traslada se obtiene un sistema final **O'U'V'W'**. Si primero se traslada y después se rota se obtiene un sistema final **O"U"V"W"**

7.3.1 Rotación seguida de Traslación

$$\mathbf{T}((\mathbf{x},\alpha),\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & p_y \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}((\mathbf{y},\phi),\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}((\mathbf{z},\theta),\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & p_x \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.3.1 Traslación seguida de Rotación

$$\mathbf{T}(\mathbf{p},(\mathbf{x},\alpha))=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & p_x\\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & p_y\cos\alpha-p_z\operatorname{sen}\alpha\\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & p_y\operatorname{sen}\alpha+p_z\cos\alpha\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{p},(\mathbf{y},\phi))=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi & p_x\cos\phi+p_z\operatorname{sen}\phi\\ 0 & 1 & 0 & p_y\\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi & p_z\cos\phi-p_x\operatorname{sen}\phi\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{p},(\mathbf{z},\theta))=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & p_x\cos\theta-p_y\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & p_x\operatorname{sen}\theta+p_y\cos\theta\\ 0 & 0 & 1 & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

7.4 Variante en la notación

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}n_x & o_x & a_x & p_x\\ n_y & o_y & a_y & p_y\\ n_z & o_z & a_z & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Donde **n**,**o**,**a** es una terna ortonormal que representa la orientación y **p** es un vector que representa la posición.

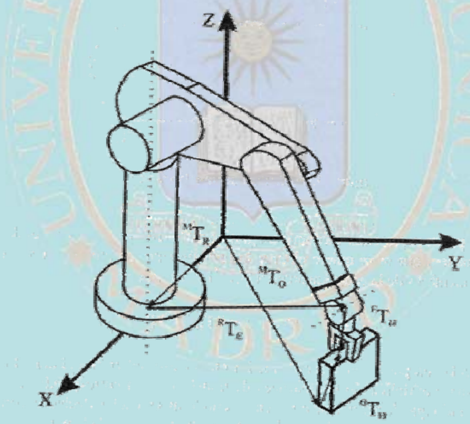
$$\|\mathbf{n}\|=\|\mathbf{o}\|=\|\mathbf{a}\|=1 \qquad [\mathbf{n}\quad \mathbf{o}\quad \mathbf{a}]^{-1}=[\mathbf{n}\quad \mathbf{o}\quad \mathbf{a}]^{T}$$

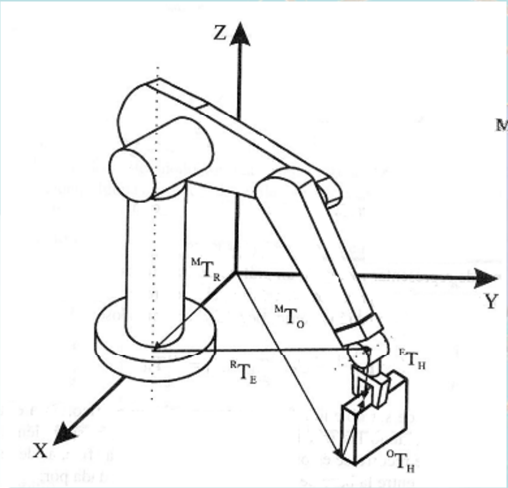
$$\mathbf{n}\times\mathbf{o}=\mathbf{a}$$

$$\mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix}n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T\mathbf{p}\\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{o}^T\mathbf{p}\\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T\mathbf{p}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

7.5 Gráficos de transformación

Es frecuente encontrar situaciones en las que la localización espacial de un objeto o de su sistema de referencia asociado, pueda realizarse a través de la composición de diversas transformaciones distintas.





$$^{M}\mathbf{T}_{R}\,^{R}\mathbf{T}_{E}\,^{E}\mathbf{T}_{H} = {}^{M}\mathbf{T}_{O}\,^{O}\mathbf{T}_{H}$$

Aplicación a la Robótica

M. Hernando Robótica

CINEMATICA DIRECTA-INVERSA

Matemáticamente en robótica nos enfrentamos a dos problemas básicos:

Objetivo 1

Obtener un modelo geométrico de la estructura que permita relacionar los grados de libertad (las variables/coordenadas generalizadas) con las coordenadas cartesianas de todos y cada uno de los puntos que constituyen el robot.

Cinemática directa

Solución única para la mayor parte de los robots seriales

Objetivo 2

Posicionar al robot. Esto es ,dadas las posiciones cartesianas como valores de entrada hallar los valores de las coordenadas generalizadas.

Cinemática inversa

Puede haber 0, 1, 2…o infinitas soluciones.

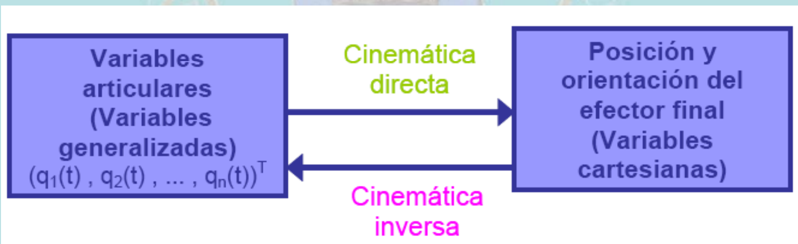
M. Hernando Robótica

CINEMATICA

Definición

La **cinemática** del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia.

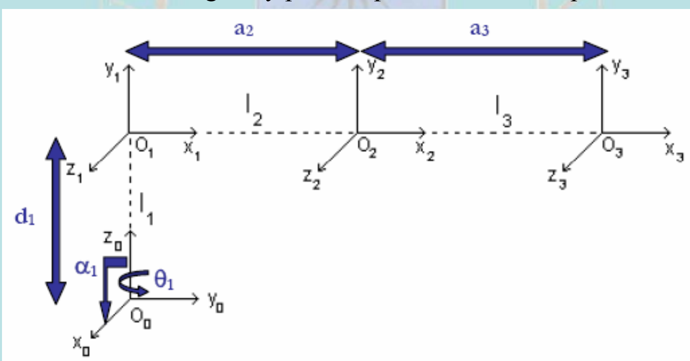
La cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y orientación del extremo final del robot y los valores que toman sus coordenadas articulares.



El Problema Cinemático Directo

La cinemática directa consiste en obtener la posición en el espacio de trabajo de los elementos de la estructura a partir de los valores de las variables generalizadas **(q)** .

Éstas están asociadas a las articulaciones y definen sus “propiedades” de movimiento, por lo que para las articulaciones de revolución la variable generalizada será un ángulo, y para las prismáticas un desplazamiento.

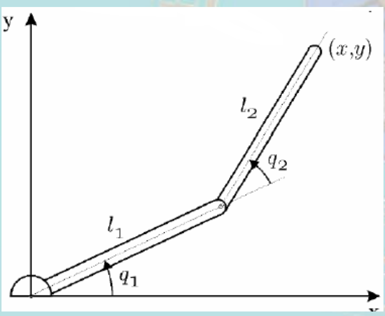


El Problema Cinemático Directo

Resolución Geométrica

Obtenemos la posición y orientación del extremo del robot apoyándonos en las relaciones geométricas:

- No es un método sistemático.
- Es usado cuando tenemos pocos grados de libertad.



$$x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

El Problema Cinemático Directo

Resolución mediante las Matrices de Transformación homogénea

- A cada eslabón se le asocia un sistema de referencia solidario.

- Es posible representar las traslaciones y rotaciones relativas entre los distintos eslabones.

- La matriz ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot.

- Representación total o parcial de la cadena cinemática del robot:

$${}^{0}\mathbf{A}_3 = {}^{0}\mathbf{A}_1\,{}^{1}\mathbf{A}_2\,{}^{2}\mathbf{A}_3$$

$$\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_6 = {}^{0}\mathbf{A}_1\,{}^{1}\mathbf{A}_2\,{}^{2}\mathbf{A}_3\,{}^{3}\mathbf{A}_4\,{}^{4}\mathbf{A}_5\,{}^{5}\mathbf{A}_6$$

- Existen métodos sistemáticos para situar los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón y obtener la cadena cinemática del robot. Método de **Denavit-Hartenberg** (D-H)

Método de Denavit - Hartenberg

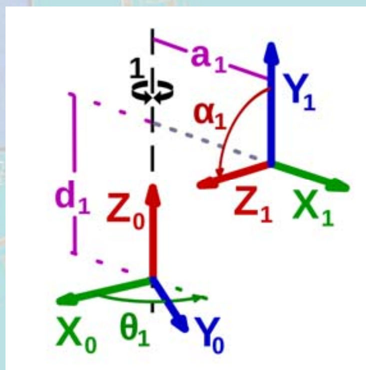
• Permite el paso de un eslabón al siguiente mediante 4 transformaciones básicas, que dependen exclusivamente de las características constructivas del robot.

• Las transformaciones básicas que relacionan el sistema de referencia del elemento ***i*** con el sistema del elemento son:

1. Rotación θ_i alrededor del eje z_{i-1}
2. Traslación d_i a lo largo del eje z_{i-1}
3. Traslación a_i a lo largo del eje x'_i
4. Rotación α_i alrededor del eje x'_i

$$^{i-1}\mathbf{A}_i = \mathbf{T}(z,\theta_i)\,\mathbf{T}(0,0,d_i)\,\mathbf{T}(a_i,0,0)\,\mathbf{T}(x,\alpha_i)$$

$$^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Método de Denavit - Hartenberg

1) Numerar los eslabones comenzando con *1* (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con *n* (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

2) Numerar cada articulación comenzando por *1* (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en *n*.

3) Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

4) Para *i* de *0* a *n-1* situar el eje z_i sobre el eje de la articulación *i+1*.

5) Situar el origen del sistema de la base $\{\mathbf{S_0}\}$ en cualquier punto del eje z_0. Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0.

6) Para *i* de *1* a *n-1*, situar el sistema $\{\mathbf{S_i}\}$ (solidario al eslabón *i*) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i. Si ambos ejes se cortasen se situaría $\{\mathbf{S_i}\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{\mathbf{S_i}\}$ se situaría en la articulación *i+1*.

EL PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

MÉTODO DE DENAVIT - HARTENBERG

7) Para i de 1 a $n\text{-}1$, situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i.

8) Para i de 1 a $n\text{-}1$, situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i.

9) Situar el sistema $\{\mathbf{S}_n\}$ en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n.

10) Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.

11) Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1}, que habría que desplazar $\{\mathbf{S}_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.

12) Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de x_i, que ahora coincidiría con x_{i-1}, que habría que desplazar el nuevo $\{\mathbf{S}_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{\mathbf{S}_i\}$.

13) Obtener α_i como el ángulo que habría que girar en torno a x_i, que ahora coincidiría con x_{i-1}, para que el nuevo $\{\mathbf{S}_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{\mathbf{S}_i\}$.

EUITI-ELAI

M. Hernando Robótica

EL PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

MÉTODO DE DENAVIT - HARTENBERG

14) Obtener las matrices de transformación ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$.

15) Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot:

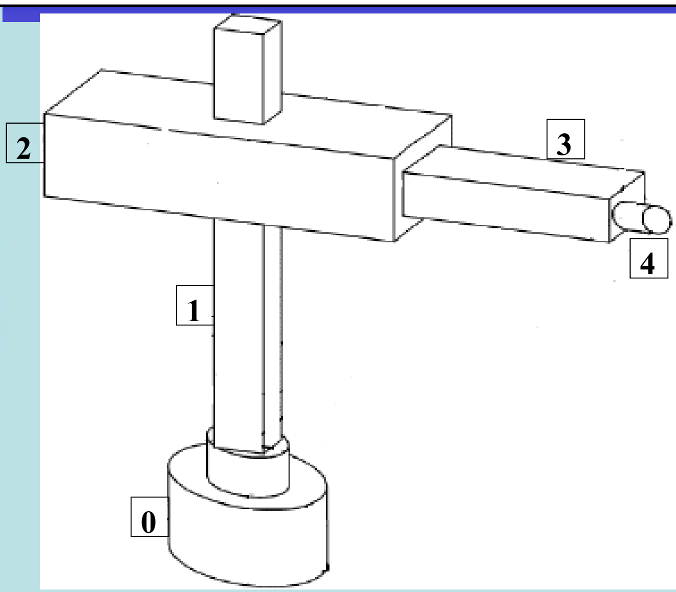
$$\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_1\, {}^{1}\mathbf{A}_2 \ldots {}^{n-1}\mathbf{A}_n$$

16) La matriz $\mathbf{T}$ define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referidas a la base en función de las n coordenadas articulares.

EUITI-ELAI

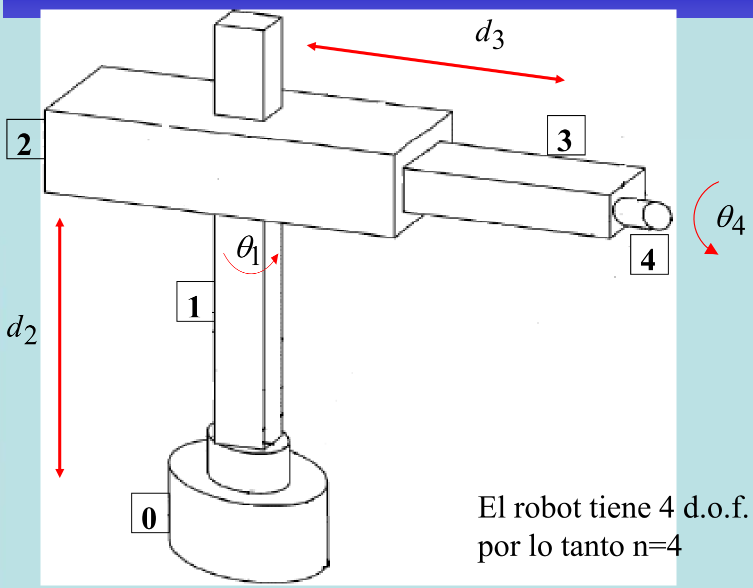
M. Hernando Robótica

DH-1) Numerar los eslabones comenzando con *1* (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con *n* (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.



M. Hernando Robótica

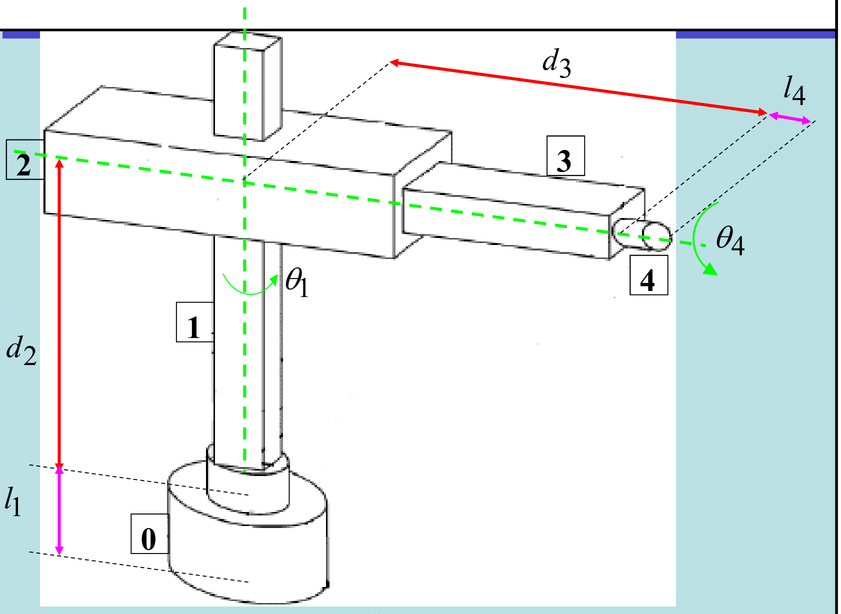
DH-2) Numerar cada articulación comenzando por *1* (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en *n*.



El robot tiene 4 d.o.f. por lo tanto n=4

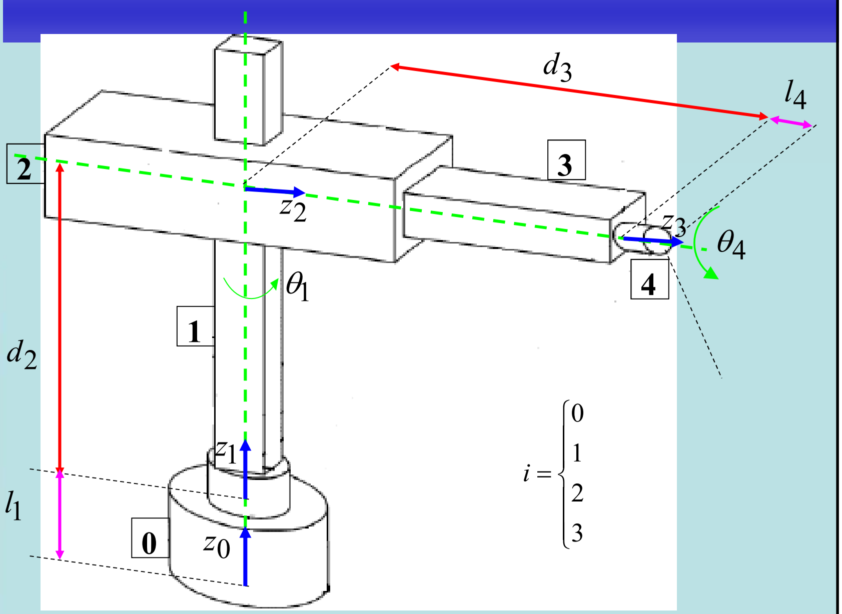
M. Hernando Robótica

DH-3) Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento



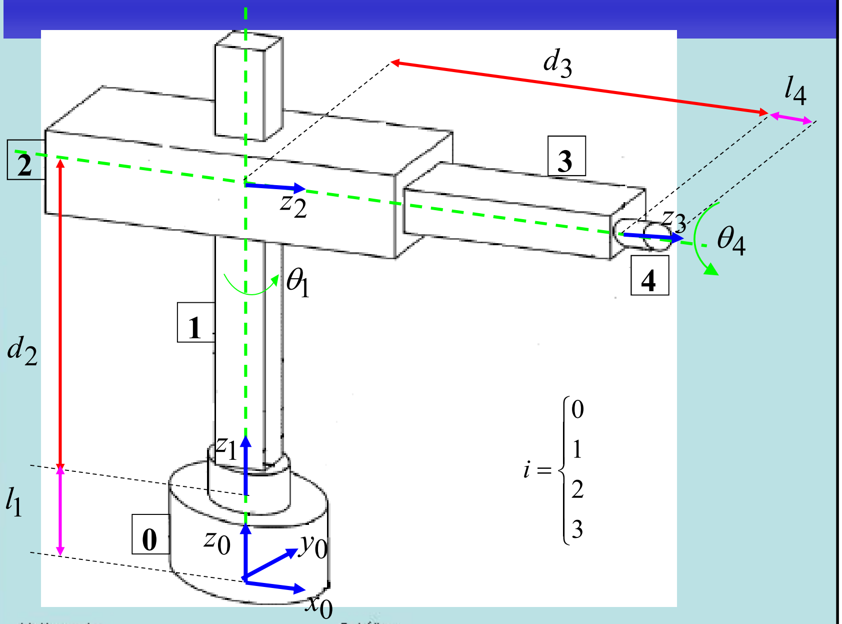
M. Hernando Robótica

DH-4) Para *i* de *0* a *n-1* situar el eje z_i sobre el eje de la articulación *i+1*.



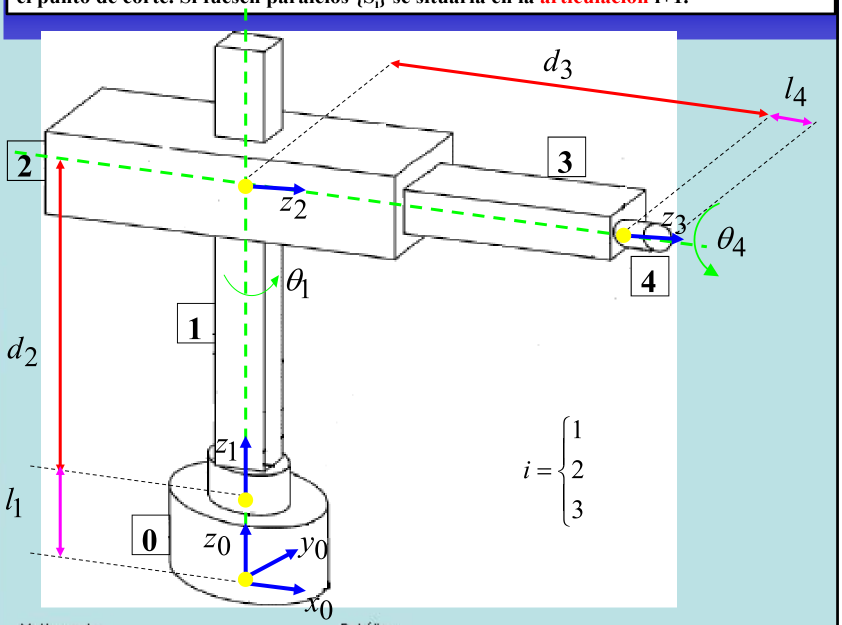
M. Hernando Robótica

DH-5) Situar el origen del sistema de la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje z_0. Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0.



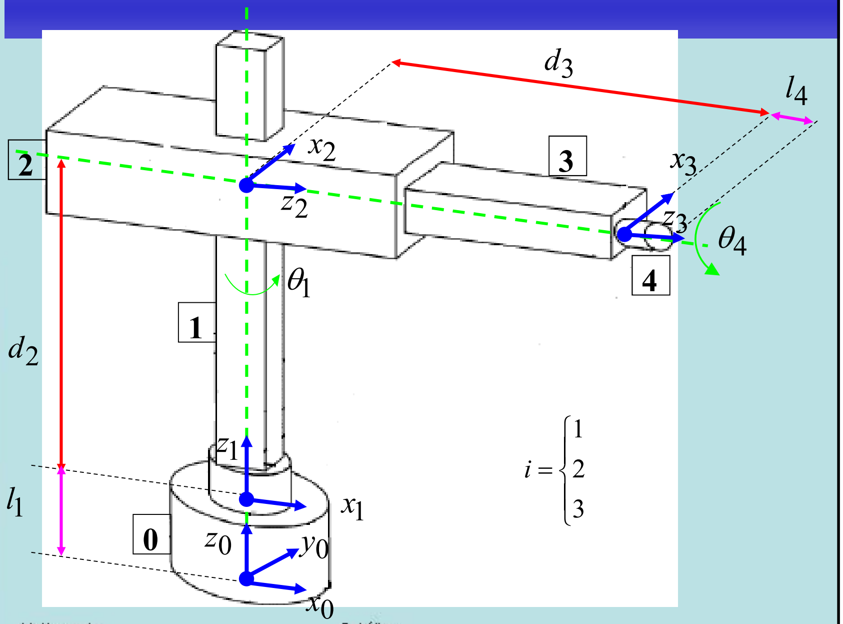
M. Hernando Robótica

DH-6) Para i de 1 a n-1, situar el sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i. Si ambos ejes se cortasen se situaría $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación i+1.



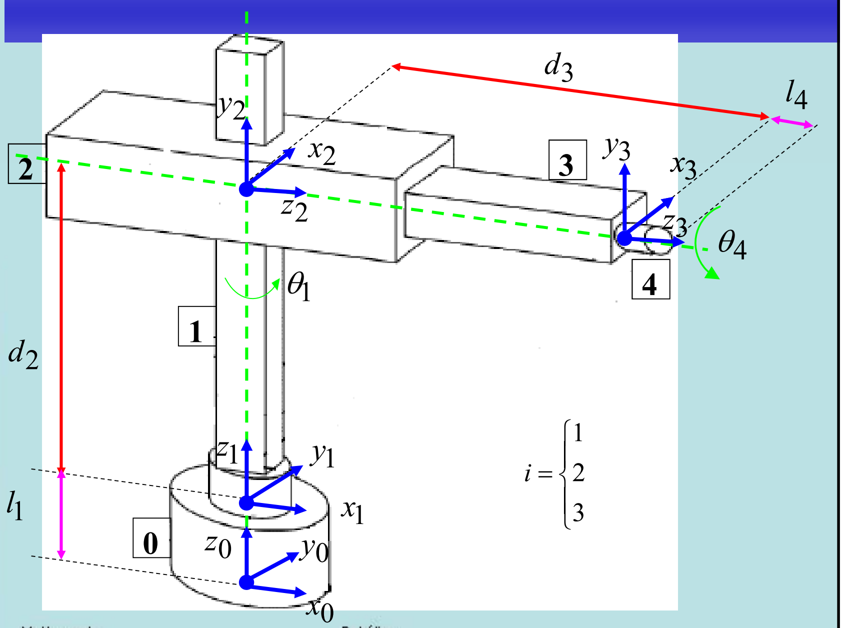
M. Hernando Robótica

DH-7) Para *i* de *1* a *n-1*, situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i.



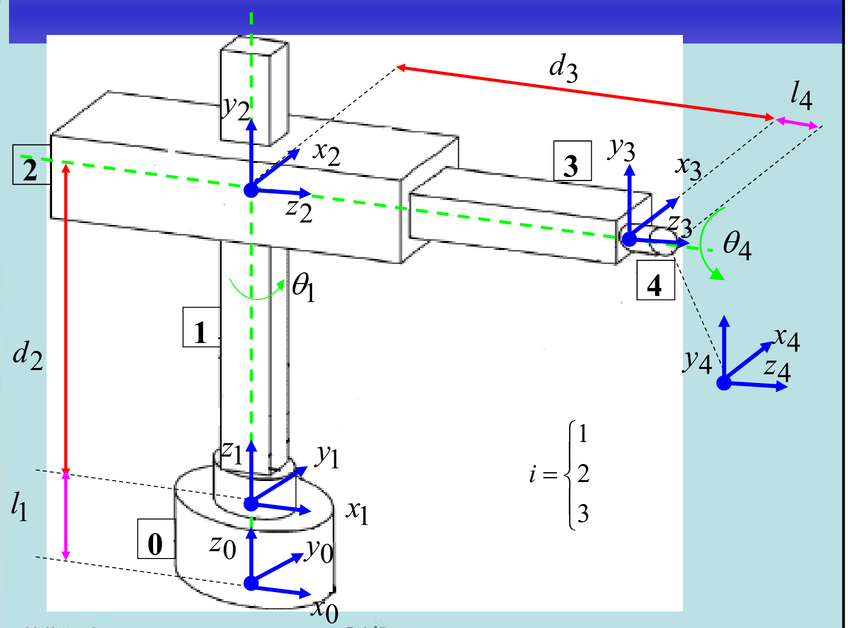
M. Hernando Robótica

DH-8) Para *i* de *1* a *n-1*, situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i.

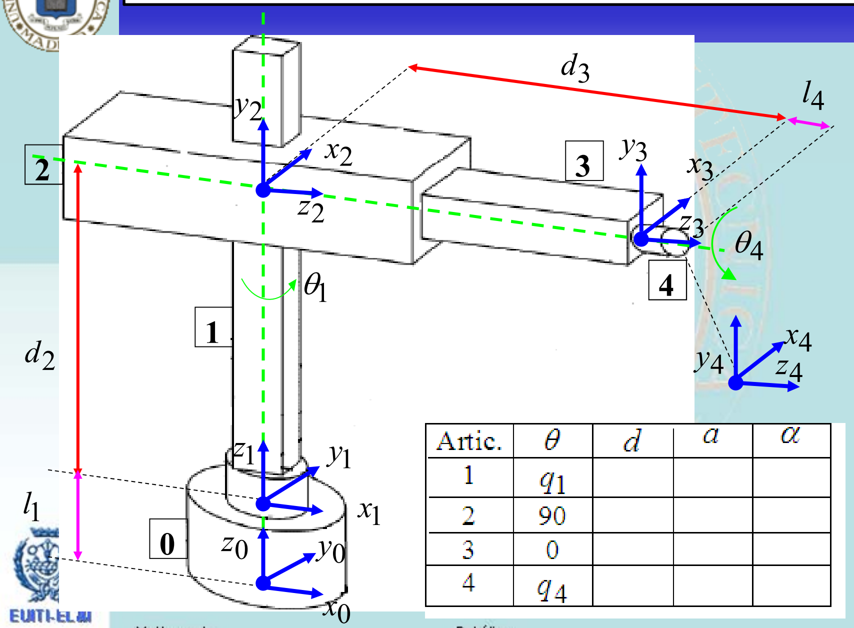


M. Hernando Robótica

DH-9) Situar el sistema {S_n} en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n.

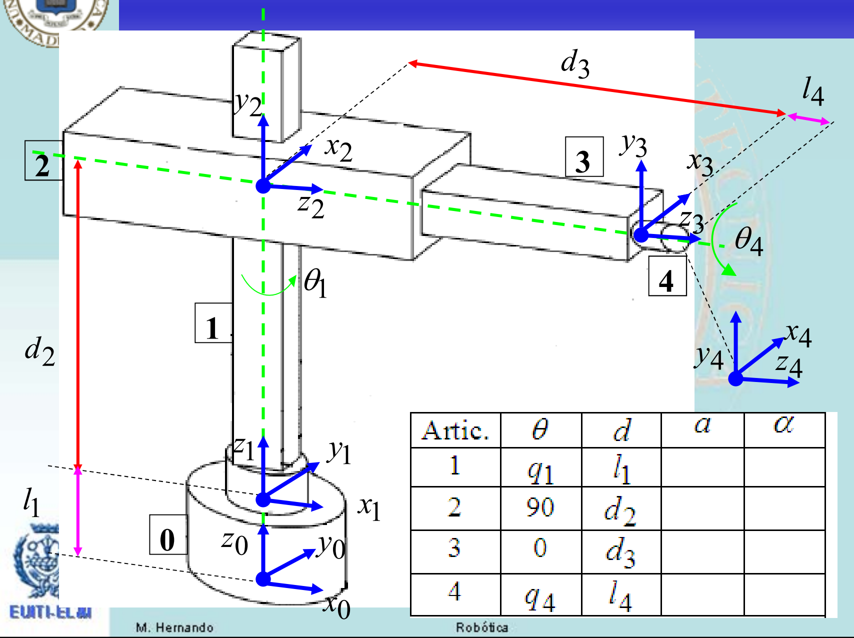


DH-10) Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.



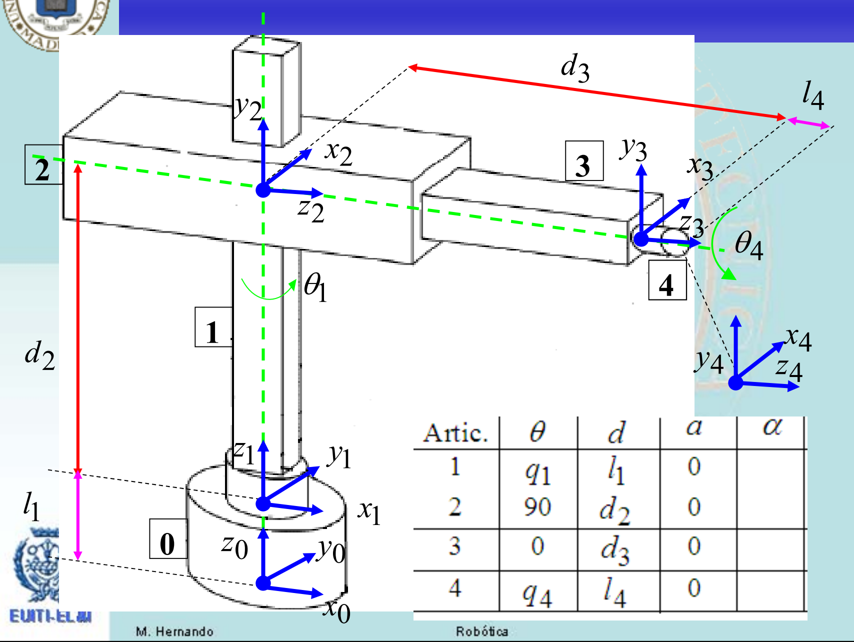
Artic.	θ	d	a	α
1	q_1			
2	90			
3	0			
4	q_4			

DH-11) Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1}, que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.



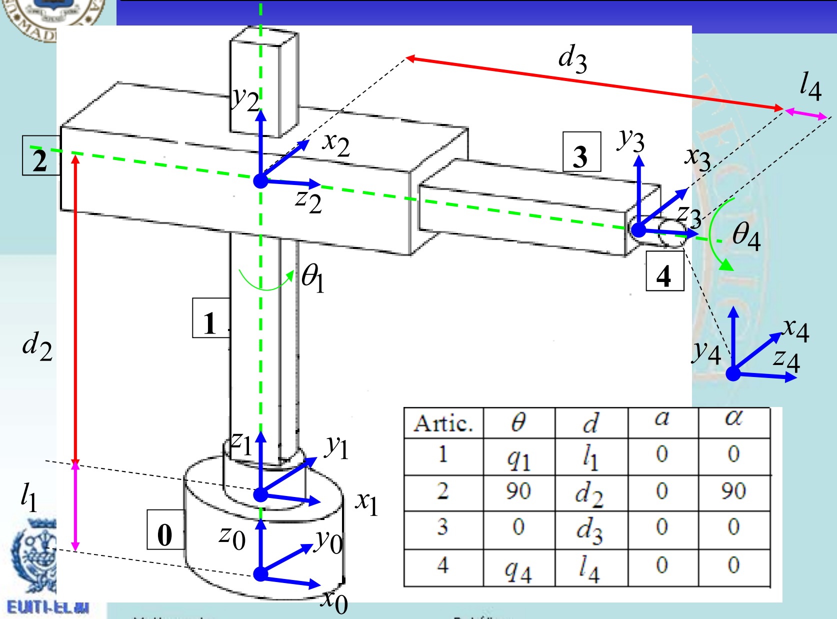
Artic.	θ	d	a	α
1	q_1	l_1		
2	90	d_2		
3	0	d_3		
4	q_4	l_4		

DH-12) Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de x_i, que ahora coincidiría con x_{i-1}, que habría que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.



Artic.	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	
2	90	d_2	0	
3	0	d_3	0	
4	q_4	l_4	0	

DH-13) Obtener α_i como el ángulo que habría que girar en torno a x_i, que ahora coincidiría con x_{i-1}, para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.



Artic.	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	0
2	90	d_2	0	90
3	0	d_3	0	0
4	q_4	l_4	0	0

DH-14) Obtener las matrices de transformación $^{i-1}A_i$.

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Artic.	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	0
2	90	d_2	0	90
3	0	d_3	0	0
4	q_4	l_4	0	0

$$^0A_1 = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^1A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^3A_4 = \begin{bmatrix} Cq_4 & -Sq_4 & 0 & 0 \\ Sq_4 & Cq_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH-15) Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot: $T = {}^0A_1 {}^1A_2 \ldots {}^{n-1}A_n$

$$ {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Artic.	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	0
2	90	d_2	0	90
3	0	d_3	0	0
4	q_4	l_4	0	0

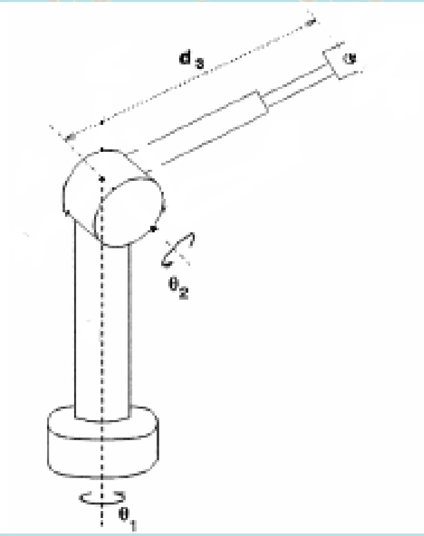
$$ {}^0A_1 = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} Cq_4 & -Sq_4 & 0 & 0 \\ Sq_4 & Cq_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ T = {}^0A_1 \, {}^1A_2 \, {}^2A_3 \, {}^3A_4 $$

$$ T = \begin{bmatrix} -Sq_1Cq_4 & Sq_1Sq_4 & Cq_1 & Cq_1(d_3+l_4) \\ Cq_1Cq_4 & Cq_1Sq_4 & Sq_1 & Sq_1(d_3+l_4) \\ Sq_4 & Cq_4 & 1 & d_2+l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

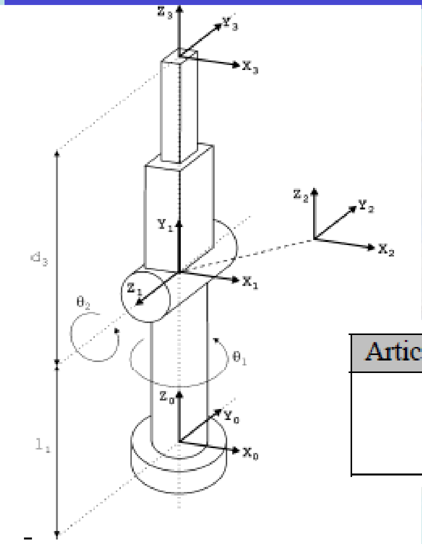
El Problema Cinemático Directo

ROBOT ESFÉRICO



El Problema Cinemático Directo

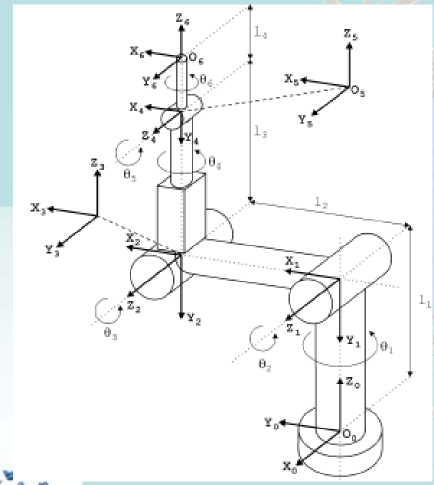
ROBOT ESFÉRICO : SOLUCIÓN



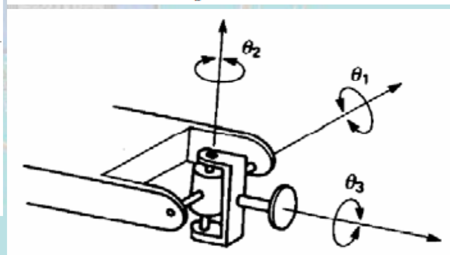
Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	l_1	0	90
2	θ_2	0	0	-90
3	0	d_3	0	0

El Problema Cinemático Directo

ROBOT ANTROPOMÓRFICO



Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	l_1	0	-90
2	θ_2	0	l_2	0
3	θ_3	0	0	90
4	θ_4	l_3	0	-90
5	θ_5	0	0	90
6	θ_6	l_4	0	0



El Problema Cinemático Directo

La Jacobiana

Velocidad de las articulaciones $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$	Jacobiana directa $\rightarrow$ / $\leftarrow$ Jacobiana inversa	Velocidades del extremo del robot $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$

$$\dot{q}_1 = f_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$
$$\dot{q}_2 = f_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$
$$\vdots$$
$$\dot{q}_n = f_n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

$$\dot{x} = f_x(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{y} = f_y(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{z} = f_z(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{\alpha} = f_\alpha(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{\beta} = f_\beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{\gamma} = f_\gamma(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

El Problema Cinemático Directo

La Jacobiana Directa

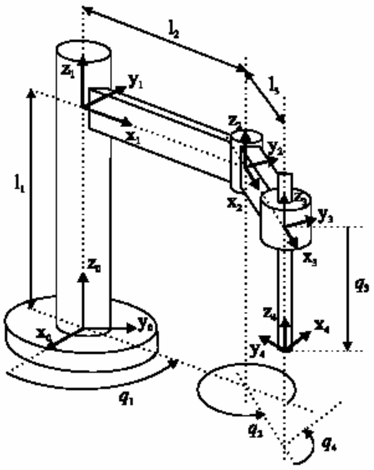
$$x = f_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad y = f_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad z = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n)$$
$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad \beta = f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad \gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i}\dot{q}_i$$
$$\dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \qquad \text{con } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \Rightarrow \textbf{Matriz Jacobiana}$$

El Problema Cinemático Directo

La Jacobiana Directa: EJEMPLO GEOMETRICO



$$x = l_3C_{12} + l_2C_1$$
$$y = l_3S_{12} + l_2S_1$$
$$z = l_1 - q_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_3S_{12} + l_2S_1) & -l_3S_{12} & 0 \\ l_3C_{12} + l_2C_1 & l_3C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

El Problema Cinemático Inverso

La Jacobiana Inversa

- **Inversión simbólica de la matriz Jacobiana:**
  - Gran complejidad: matriz 6x6 de funciones trigonométricas.
- **Evaluación e inversión numérica de la matriz Jacobiana:**
  - Necesidad de recómputo continuo.
  - En ocasiones **J** no es cuadrada 〈 Matriz pseudoinversa (**J J**^{T})$^{-1}$.
  - En ocasiones el determinante de **J** es nulo: configuraciones singulares.
- **A partir del modelo cinemático inverso:**

$$q_1 = f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$
$$\vdots$$
$$q_n = f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$

Configuraciones Singulares

Determinadas por la Jacobiana

- Jacobiano (determinante de la matriz jacobiana) nulo.
- Incremento infinitesinal en coordenadas cartesianas implica incremento infinito en coordenadas articulares.
- Implica pérdida de algún grado de libertad.
- Tipos:
  - En los límites del espacio de trabajo del robot.
  - En el interior del espacio de trabajo del robot.
- Requieren su estudio y eliminación.