

De acuerdo al grafico, se puede hablar entonces de dos espacios, un “espacio de articulaciones” o espacio de Joints y otro llamado “espacio Cartesiano”.

Se podría decir entonces que la cinemática directa, puede estar representada por una función que toma como argumento un “vector de articulaciones” que tiene tantos componentes como grados de libertad tenga la cadena cinemática que represente al robot y devuelve un vector de 6 componentes; las 3 primeras serán la posición del efector final y las 3 tres últimas serán la orientación del efector final.

Entonces la función será:

$$F: J \rightarrow R_6$$

Donde las tres primeras componentes serán (x, y, z) del efector final son la posición y las 3 últimas pueden ser (a_x, a_y, a_z) de orientación o como ángulos de Euler o como YAW, PITCH y ROLL.

Recordemos que el presente trabajo presenta como robot de estudio a un robot de solo 3 grados de libertad por lo que se hará hincapié, en este caso, solo en la posición del efector final, sin tener en cuenta la orientación del mismo.

El Algoritmo de Denavit Hartenberg

Éste es un método que permite calcular la matriz homogénea que venimos calculando hasta ahora con nuestros “robots no tan elementales”, pero aplicable a cualquier tipo de robot. Este algoritmo permite como en los casos anteriores conocer las coordenadas del efector final en un sistema fijo que puede ser la base.

La matriz de transformación homogénea T es la que relaciona el sistema solidario al punto Terminal (efector final) con un sistema de referencia arbitrariamente escogido, que llamaremos sistema del mundo. En principio, cada uno de los elementos $(a_x; a_y; a_z; o_x; o_y; o_z; n_x; n_y; n_z; p_x; p_y; p_z)$ de la matriz T será función de algunas o todas las variables de articulación, y de las constantes geométricas del manipulador. Según se vio al detallar la forma explícita de la matriz T , multiplicándola por el vector $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, que expresa las coordenadas homogéneas del punto terminal respecto a su propio sistema, obtendremos éstas respecto al sistema del mundo. Y, por otra parte, según se vio en la sección anterior, existen fórmulas que relacionan los ángulos de orientación en cualquiera de sus expresiones con los elementos de la sub-matriz de rotación de T .

En el anexo correspondiente a Denavit Hartenberg se describe con detalle el proceso de construcción de T para cadenas cinemáticas abiertas, en las que cada articulación tenga un sólo grado de libertad. El caso de las cadenas cinemáticas cerradas no se trata en el presente trabajo, en cambio, el caso de articulaciones con más de un grado de libertad no presenta ningún problema: bastaría con considerar la articulación como si se tratase de dos, unidas por un enlace ficticio de longitud 0.

Sustancialmente, el proceso consiste en dar un sistema de coordenadas a cada enlace, que se moverá con él, de acuerdo a un conjunto de normas como se ejemplifica en la Figura 42.

Lo que se logrará al final, al igual que hicimos con los robots no tan elementales, es una matriz que permita referenciar el efector final, al sistema de la base, de modo que si pre-

multiplicamos la matriz hallada T_{total} por las componentes del efector final, hallaremos las coordenadas del efector final en el sistema de referencia, por ejemplo la base del robot.

Convenciones para la Nomenclatura:

En cadenas cinemáticas abiertas cada par enlace-articulación (link-joint) es un grado de libertad. Numeraremos los links y joints secuencialmente, desde el inicio de la cadena. La base está fija normalmente al suelo, será el enlace (link) 0, y no se cuenta como grado de libertad. La articulación (joint) 1 será la que conecte la base al primer enlace móvil; los joints comienzan, pues, a numerarse desde 1, y no existe joint al final del último enlace.

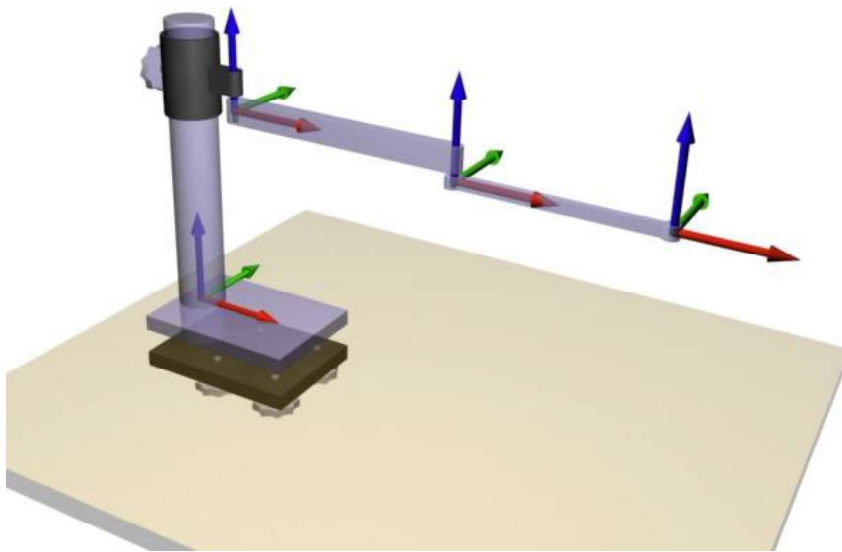


Figura 1 - Ejemplo de asignación de ejes

Cadena cinemática abierta y su numeración

Definiciones:

Eje de una articulación es la recta definida como:

- La dirección de desplazamiento, en articulaciones traslacionales.
- El eje de giro, en articulaciones rotacionales.

A continuación los parámetros DH de cada enlace son cuatro números reales, dos de ellos representando ángulos, y los otros dos, distancias, definidos del siguiente modo:

- a_i es la mínima distancia (distancia perpendicular) entre el eje de la articulación i y el eje de la $i+1$. Por extensión, también denotaremos por a_i al segmento de recta a lo largo de cual se da precisamente esa mínima distancia entre ejes.
- α_i es el ángulo que forman el eje i y el $i+1$, medido en un plano perpendicular al segmento a_i .
- d_i es la distancia entre los puntos de intersección de la normal a los ejes $i/i-1$ con el eje i , y la normal a los ejes $i-1/i$ también con el eje i , medida a lo largo del este eje.[04], [01]
- θ_i es el ángulo entre la normal a los ejes $i-1/i$ y la normal a los ejes $i/i+1$, medido en un plano perpendicular al eje i .

Nota: se sugiere ver en los ejemplos concretos que siguen la asignación de estos parámetros para mayor claridad.

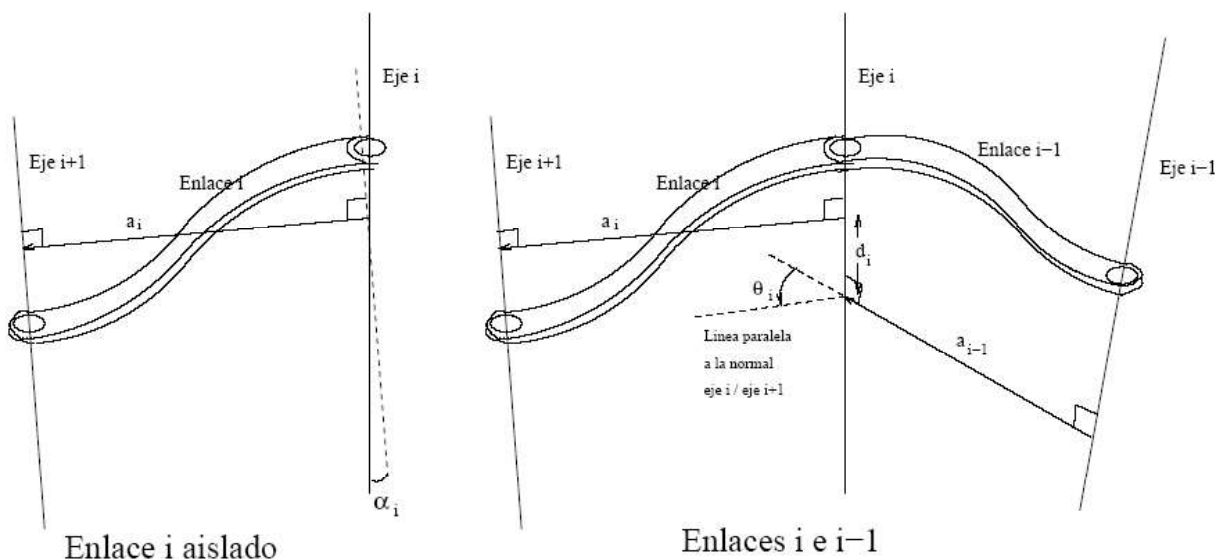


Figura 2 - Parámetros de Denavit-Hartenberg

Véase la representación de estos parámetros en la Figura 43. Obsérvese que basta el conocimiento de los dos ejes en los extremos de un enlace (digamos, el i) para conocer α_i y a_i ; sin embargo, es necesario conocer los ejes anterior y siguiente para determinar θ_i y d_i .

Daremos para estos parámetros una definición alternativa cuando hayamos fijado los respectivos sistemas de coordenadas.

Convención para la asignación de los ejes de cada sistema asociado a un link

Las normas para determinar los ejes de cada sistema ortonormal asociado a un link se ilustran en las Figuras 43 y 44 y se definen como sigue:

- El eje z_{i-1} es el eje de la articulación i . (Con lo que z_i es el de la $i+1$). No importa el sentido a lo largo de la recta en que se oriente. Se recomienda orientar todos los z que sigan la misma dirección en el mismo sentido.
- El eje x_i debe escogerse perpendicular a su propio z (z_i) y también al z anterior (z_{i-1}) y a lo largo de la perpendicular común (el segmento a_i).
- El eje y_i se determina de tal modo que el sistema forme un triedro directo (es decir, que $\vec{x}_i \times \vec{y}_i = \vec{z}_i$).
- El origen se fija en la intersección de la normal eje $i-1$ /eje i (es decir, el segmento a_{i-1}) con el eje i . Véanse en la Figura 44 los sistemas de coordenadas $i-1$ e i situados sobre los enlaces. Hay algunas excepciones y casos particulares que deben tenerse en cuenta:
- El eje x_0 debe dejarse arbitrariamente como cualquier perpendicular a z_0 , dado que no existe ningún z_{-1} al cual hacerle ser también perpendicular. Análogamente, el origen del sistema $\{S_0\}$ es un punto arbitrario sobre el eje z_0 .
- Debe existir un último sistema de coordenadas, fijo a la mano o herramienta, que no sigue las mismas reglas que los anteriores. Debe situarse de modo que su eje z esté en la dirección de aproximación (el avance natural de la mano) y su eje y (vector de orientación) debe apuntar de garra a garra de la pinza (en caso de pinzas con simetría cilíndrica, es arbitrario). Este sistema "especial" sólo debe añadirse si el último sistema obtenido por las reglas usuales no cumpliera estas condiciones. En ese caso, la transformación entre el último sistema natural y este sistema especial es fija, y se halla por observación directa.

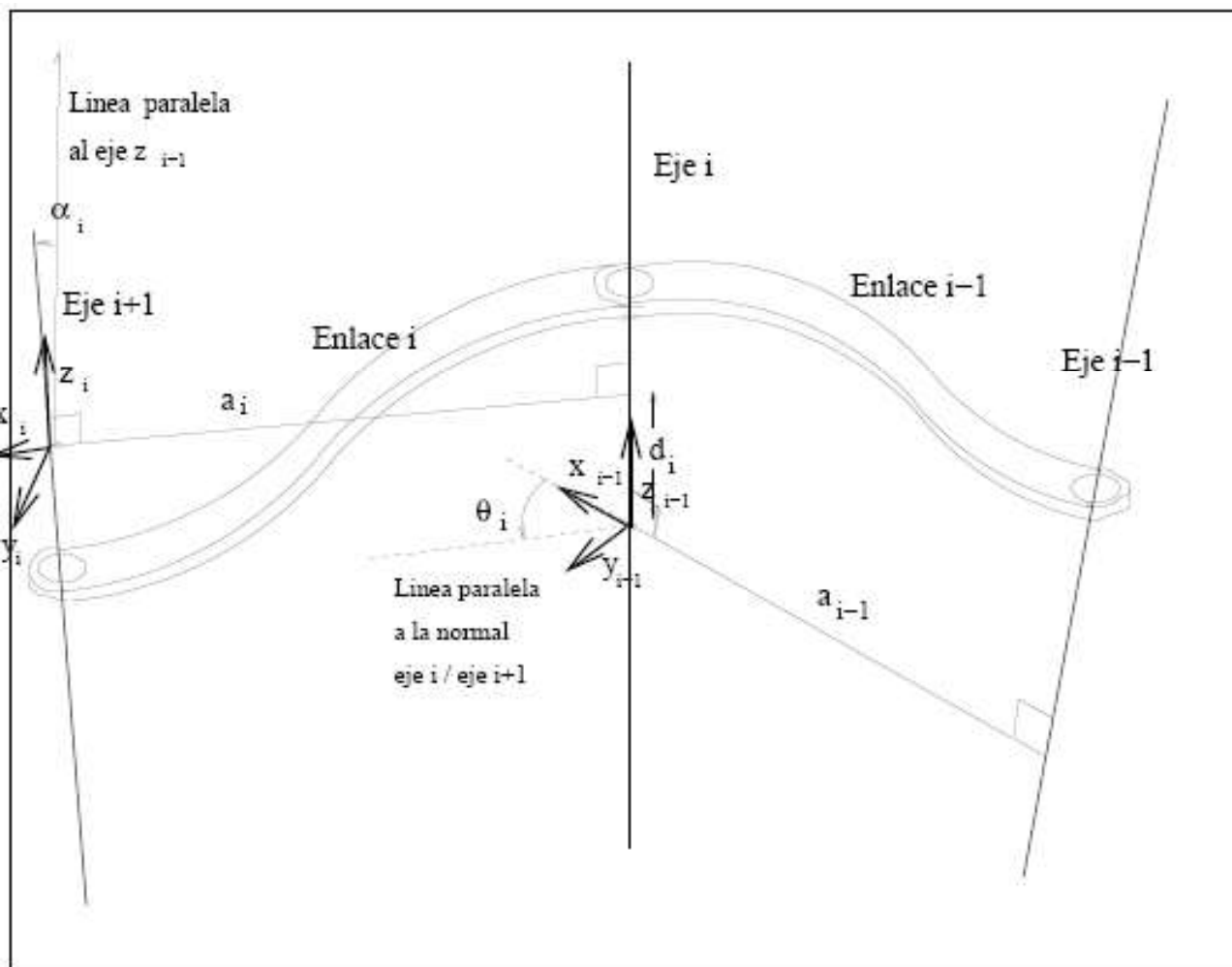


Figura 3 - Sistemas de coordenadas fijos a una articulación

- Cuando dos ejes z consecutivos son paralelos, hay infinitas perpendiculares comunes. En ese caso, lo normal es tomar el origen a la altura del centro de la articulación, y el eje x a lo largo de la normal común que pasa por ese centro.
- Cuando dos ejes z consecutivos se intersectan, determinan un plano. La normal común es la normal al plano, pero el segmento a_i tiene longitud nula. En ese caso el eje x se escoge normal al plano que determinan los dos z , en cualquiera de los dos sentidos. El origen se toma en el punto de intersección de los dos ejes z .
- Cuando dos ejes z consecutivos son colineales (están superpuestos), el origen se fija arbitrariamente, así como la dirección de x , a lo largo de cualquier perpendicular a los z (que son la misma recta). Se aconseja en ese caso tomar la dirección de x lo más parecida posible a la dirección del x anterior. El valor de a_i , que no está definido, se toma como 0.

Nótese que:

- En una articulación rotacional, θ_i es el ángulo de rotación, y d_i , a_i y α_i son constantes.
- En una articulación de traslación, d_i es distancia de traslación, y θ_i , y α_i son constantes. a_i es también constante, y usualmente 0 (suele corresponder al último de los casos particulares anteriores).

Un robot se construye con elementos de dimensiones constantes, y estas medidas permanecen constantes en toda circunstancia, salvo que se altere mecánicamente al robot. Las acciones de los actuadores que provocarán el movimiento sólo cambiarán el parámetro variable de cada articulación, θ_i para rotacionales, y d_i para traslacionales. Por otra parte, lo normal es construir robots en los que los ejes de las articulaciones sean o bien paralelos, o bien perpendiculares entre sí; esto hace que los valores para α_i suelen ser bien $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

El siguiente paso es determinar la transformación que llevaría el sistema $i-1$ hasta el Sistema $\{S_i\}$. Nótese que podemos hacerlos coincidir aplicando sucesivamente las siguientes transformaciones:

- Rotar alrededor de z_{i-1} un ángulo θ_i . Esto deja los ejes x_{i-1} y x_i paralelos, pues deja a las rectas a_{i-1} y a_i en el mismo plano, y siendo ambas perpendiculares a z_{i-1} .
- Trasladar a lo largo del eje z'_{i-1} (aunque es el mismo que z_i) el origen una distancia d_i . Esto deja los ejes x_{i-1} y x_i colineales. Nótese que no por ello los ejes z_{i-1} y z_i son aún coincidentes.
- Trasladar a lo largo del eje x''_i una distancia a_i . Esto hace coincidir los orígenes, y superpone los vectores básicos en la dirección \vec{i} (x''_{i-1} y x''_i).
- Rotar alrededor de x''_{i-1} (o de x_i , ahora coinciden) un ángulo α_i . Esto hará coincidir z''_{i-1} con z_i (y, por tanto, y''_{i-1} con y_i).

Así pues, podemos escribir la transformación desde el sistema $i-1$ hasta el i como:

$${}^{i-1}A_i = \text{Rot}(Z_{i-1}, \theta_i) \text{Trans}(0,0,d_i) \text{Trans}(a_i, 0,0) \text{Rot}(x''_i, \alpha_i) \quad (1)$$

Donde las matrices se han posmutiplicado, pues las transformaciones se efectúan siempre respecto a los nuevos ejes que van resultando de la transformación anterior. En forma explícita,

$$\begin{aligned} {}^{i-1}A_i &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

El resultado final es la matriz DH (Denavit-Hartenberg) para el enlace i , la cual, conociendo las características geométricas de dicha articulación y de su enlace, da la transformación que lleva de coordenadas expresadas en el sistema $\{S_i\}$ a coordenadas expresadas en el sistema

$\{S_{i-1}\}$. Igualmente, da la posición del origen del sistema $\{S_i\}$ respecto al $\{S_{i-1}\}$ (viendo la 4a columna), así como su orientación (viendo la sub-matriz de rotación).

Ahora estamos en condiciones de dar las definiciones alternativas para los parámetros de DH, que son:

- a_i es la distancia perpendicular (distancia mínima) entre los ejes z_{i-1} y z_i , medida en la dirección positiva de x_i .
- α_i es el ángulo que forma el eje z_{i-1} con el eje z_i , girando alrededor de x_i , con x_i apuntando hacia el observador.
- θ_i es el ángulo que forma el eje x_{i-1} con el eje x_i , girando alrededor de z_{i-1} , con z_{i-1} apuntando hacia el observador.
- d_i es la distancia que queda entre los orígenes de los sistemas $\{S_{i-1}\}$ y $\{S_i\}$ después de haber trasladado el origen i a lo largo de la perpendicular común a_i hasta situarlo sobre el eje z_{i-1} . Su signo viene dado por el eje z_{i-1} .

Una vez que todos los parámetros estén identificados, y las matrices DH escritas, recordemos que lo que se pretende es encontrar la transformación entre el sistema del mundo (sistema 0 generalmente la base del robot) y el último (sistema n , generalmente el actuador del robot). Es obvio que:

$${}^0A_n = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \dots {}^{n-1}A_n \quad (3)$$

Cada elemento de la matriz ${}^{i-1}A_i$ es función de α_i , a_i , θ_i , y d_i (α_i , a_i , constantes para cada robot, y d_i o bien θ_i variables para cada tipo de articulación), y por tanto cada elemento de 0A_n es, en principio, función de todos los (α_i , a_i , θ_i , y d_i) con $i = 1 \dots n$.

Resumiendo: los pasos que deben seguirse para la construcción de la cinemática directa son:

1. Identificar cuántos grados de libertad tiene el robot, y cuántas articulaciones; si tuviera alguna articulación con más de un grado de libertad (digamos, m) habrá m sistemas superpuestos en un punto.
2. Asignar los ejes z , sabiendo que z_{i-1} es el eje de la articulación i .
3. Asignar todos los ejes x , sabiendo que x_i es perpendicular a z_i , y a z_{i-1} y va en la dirección de la perpendicular común.
4. Asignar los ejes y , de modo que se cumpla que $\vec{x}_i \times \vec{y}_i = \vec{z}_i$.
5. Determinar los parámetros (α_i , a_i , θ_i , y d_i) de cada enlace por inspección visual.
6. Construir la tabla de parámetros, y a partir de cada una de sus filas, usando la fórmula general de la matriz DH, escribir cada una de las ${}^{i-1}A_i$.
7. Multiplicar todas ellas para generar la 0A_n .

Robot Modelo de 3 Grados de Libertad

Una vez expuesto el algoritmo, lo aplicaremos en un robot de 3 (tres) grados de libertad que se muestra en la Figura 45, motivo de estudio del presente trabajo.

El robot tiene la siguiente forma:

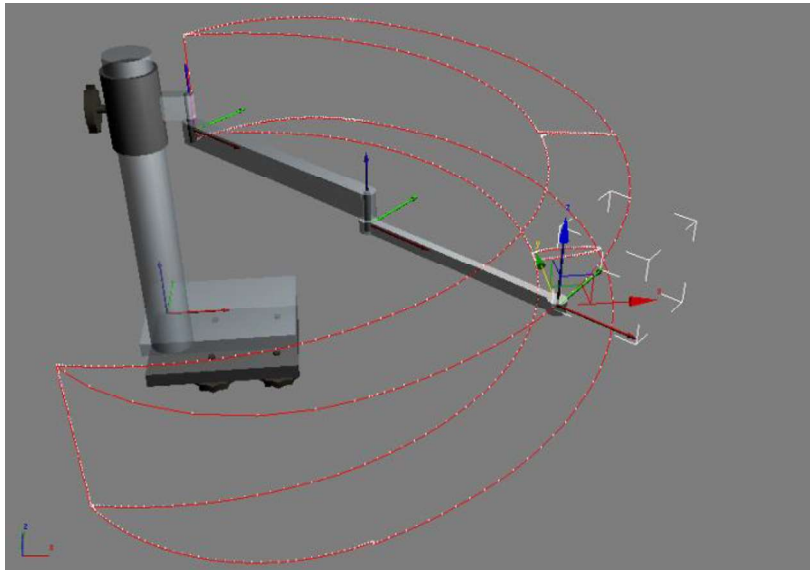


Figura 4 - Robot de tres grados de libertad

El primer grado de libertad es prismático (de desplazamiento) y sube y baja una corredera donde están soportados los otros dos grados de libertad que son rotacionales.

El área de trabajo esta determinada por las restricciones dadas a las articulaciones desde el punto de reposo de las mismas.

Articulación Prismática (d_1)
 $-10\text{cm} \leq d_1 \leq 20\text{cm}$

1^{ra} Articulación Rotacional (θ_2)
 $-70^\circ \leq \theta_2 \leq 70^\circ$

2^{da} Articulación Rotacional (θ_3)
 $-70^\circ \leq \theta_3 \leq 70^\circ$

En la Figura 45 podemos observar el área de trabajo del robot (Volumen dentro de la línea roja considerando los movimientos máximos permitidos)

Método de Denavit Hartenberg para la cinemática directa del robot:

1. Identificar cuántos grados de libertad tiene el robot, y cuántas articulaciones; si tuviera alguna articulación con más de un grado de libertad (digamos, m) habrá m sistemas superpuestos en un punto.

El robot, como dijimos tiene tres grados de libertad, (tres articulaciones), daremos seguidamente la ubicación de los ejes, ver Figura 46.

2. Asignar los ejes z , sabiendo que z_{i-1} es el eje de la articulación i .

El eje z_0 es vertical y está en la base del robot, el z_1 es vertical también y en este caso coincidente con z_0 [04] y corresponde a la primera articulación prismática.

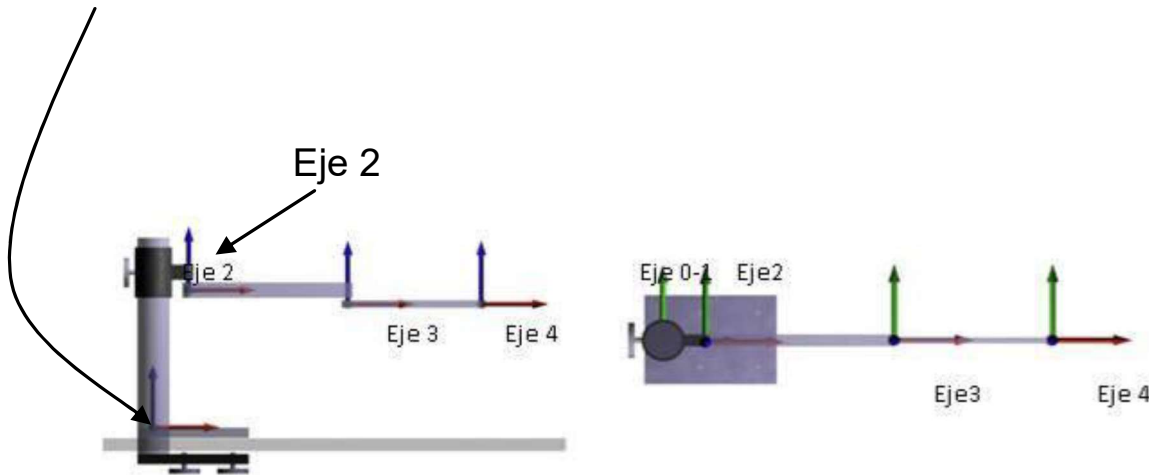


Figura 5 - Asignación de ejes

El eje z_2 es el correspondiente a la segunda articulación, que es rotacional.

El eje z_3 corresponde a la segunda articulación rotacional.

El eje z_4 corresponde al efector final de este robot, que es directamente el extremo libre del robot.

3. Asignar todos los ejes x , sabiendo que x_i es perpendicular a z_i , y a z_{i-1} y va en la dirección de la perpendicular común.

El eje x_0 será perpendicular al eje z_0 y por lo tanto horizontal, pero al no haber un eje z anterior, su dirección se puede elegir. Se elige hacia la derecha como se muestra en la figura 46 (recordar la convención de colores de ejes x : rojo y : verde y : azul).

El eje x_1 debe ser perpendicular a su propio z_1 y al z anterior (z_0). Estos dos ejes son colineales y coincidentes en el arranque del robot, por lo tanto cualquier perpendicular común será válida, Se elige la que sigue la misma dirección que el x anterior.

El eje x_2 es perpendicular a z_1 y z_2 y sigue la dirección de la perpendicular común que va a lo largo del primer elemento del brazo tal como está dibujado.

El eje x_3 es el mismo caso que el caso de x_2 y se aplican las mismas consideraciones.

El eje x_4 está colocado en el extremo libre del robot y no se han considerado la propuesta de que el último eje z deberá apuntar en la dirección de avance de la herramienta.

4. Asignar los ejes y , de modo que se cumpla que $\vec{x}_i \times \vec{y}_i = \vec{z}_i$

Si aplicamos esto los ejes y se colocaran como se muestra en la figura.

5. Determinar los parámetros (α_i , a_i , θ_i y d_i) de cada enlace por inspección visual.

Para determinar estos parámetros es conveniente inspeccionar el plano del robot para apreciar cada uno de los parámetros.

Nota:

Para llegar al origen del sistema $\{S_2\}$ desde la base deberemos hacer: $L_1 - K_1 + d_1$.

Ahora armaremos la tabla de Denavit -Hartenberg de acuerdo a los parámetros definidos:

Joint 0:

α_0 : Es el ángulo que forma el eje z_0 con el eje z_1 , como son colineales, dicho ángulo es 0.

a_0 : Es la distancia mínima entre los ejes z_0 y z_1 que en este caso es nula (cero).

d_0 : Es la distancia que queda entre los orígenes de los sistemas $\{S_{i-1}\}$ y $\{S_i\}$ después de haber trasladado el origen de $\{S_i\}$ a lo largo de la perpendicular común a_i hasta situarlo sobre el eje z_{i-1} . Su signo viene dado por el eje z_{i-1} . En este caso no hay eje anterior, no se coloca (es cero).

θ_0 : es el ángulo que forma el eje x_{i-1} con el eje x_i , girando alrededor de z_{i-1} , con z_{i-1} apuntando hacia el observador, como no hay eje anterior el valor es cero.

Joint 1:

α_1 : Es el ángulo que forma el eje z_1 con el eje z_2 , como son paralelos, dicho ángulo es 0.

a_1 : Es la distancia mínima entre los ejes z_1 y z_2 que en este caso es K_3 como se aprecia en el plano.

d_1 : Es la distancia que queda entre los orígenes de los sistemas $\{S_1\}$ y $\{S_2\}$ después de haber trasladado el origen de $\{S_2\}$ a lo largo de la perpendicular común a_1 hasta situarlo sobre el eje z_1 . Su signo viene dado por el eje z_1 . En este caso hay que trasladarlo en forma vertical y será: $L_1 - K_1 + d_1$

θ_1 : es el ángulo que forma el eje x_1 con el eje x_2 , girando alrededor de z_1 , con z_1 apuntando hacia el observador, en este caso es cero.

Joint 2:

α_2 : Es el ángulo que forma el eje z_2 con el eje z_3 , como son paralelos, dicho ángulo es 0.

a_2 : Es la distancia mínima entre los ejes z_2 y z_3 que en este es L_2 como se aprecia en el plano.

d_2 : Es la distancia que queda entre los orígenes de los sistemas $\{S_2\}$ y $\{S_3\}$ después de haber trasladado el origen de $\{S_3\}$ a lo largo de la perpendicular común a_2 hasta situarlo sobre el eje z_2 . Su signo viene dado por el eje z_2 . En este caso no hay que trasladarlo en forma vertical y será cero.

θ_2 : es el ángulo que forma el eje x_2 con el eje x_3 , girando alrededor de z_2 , con z_2 apuntando hacia el observador, en este caso es cero la primera articulación rotacional o sea θ_2 .

Joint 3:

α_3 : Es el ángulo que forma el eje z_3 con el eje z_4 , como son paralelos, dicho ángulo es 0.

a_3 : Es la distancia mínima entre los ejes z_3 y z_4 que en este es L_3 como se aprecia en el plano.

d_3 : Es la distancia que queda entre los orígenes de los sistemas $\{S_3\}$ y $\{S_4\}$ después de haber trasladado el origen de $\{S_4\}$ a lo largo de la perpendicular común a_3 hasta situarlo

sobre el eje z_3 . Su signo viene dado por el eje z_3 . En este caso no hay que trasladarlo en forma vertical y será cero.

θ_3 : es el ángulo que forma el eje x_3 con el eje x_4 , girando alrededor de z_3 , con z_3 apuntando hacia el observador, en este caso la segunda articulación rotacional o sea θ_3 .

Joint 4:

Sabemos que es el extremo del robot, y que no lo hemos modificado por lo tanto no hay modificaciones en este joint.

Con esta configuración, los parámetros de *Denavit-Hartenberg* son:

6. Construir la tabla de parámetros, y a partir de cada una de sus filas, usando la fórmula general de la matriz D-H, escribir cada una de las ${}^{i-1}A_i$.

Tabla 1 - Parámetros de DH del robot

| Joint | α_i : | a_i : | d_i : | θ_i : |
|-------|--------------|---------|-------------|--------------|
| 0 | 0 | 0 | - | - |
| 1 | 0 | K3 | $L1-K1+d_1$ | 0 |
| 2 | 0 | L2 | 0 | θ_2 |
| 3 | 0 | L3 | K2 | θ_3 |
| 4 | - | - | - | - |

Las matrices que relacionan cada par de articulaciones se muestran a continuación

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & K3 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L1-K1+d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & L2 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -K2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Multiplicar todas ellas para generar la 0A_n . Que era el último paso

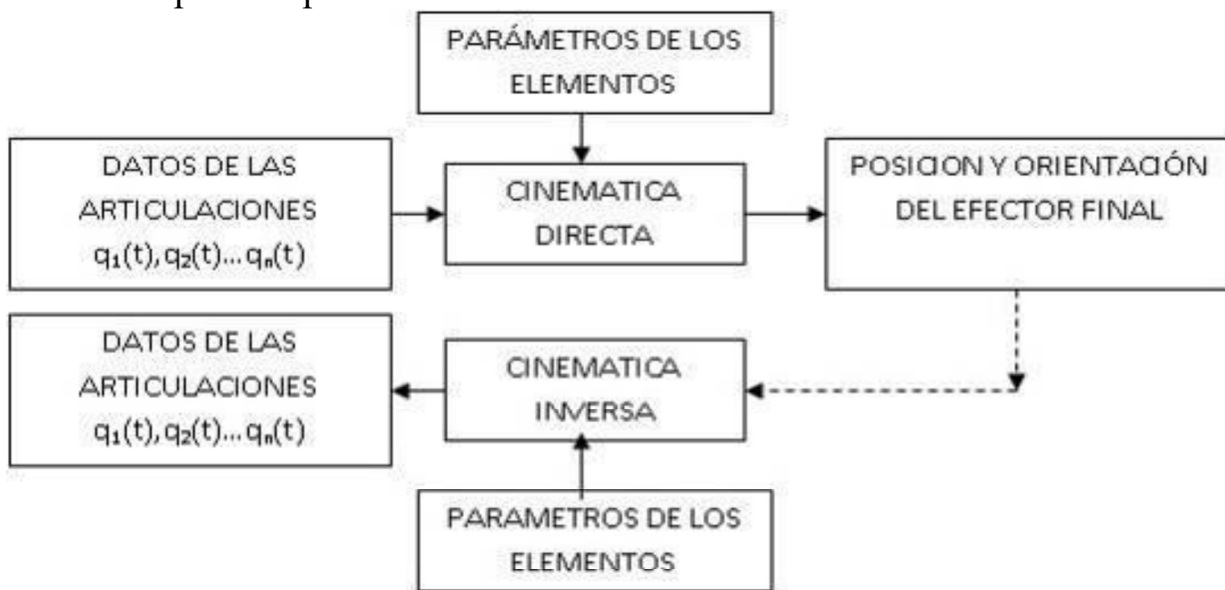
Multiplicando todas las matrices queda:

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) & 0 & \cos(\theta_2 + \theta_3)L_3 + \cos(\theta_2)L_2 + K_3 \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & \sin(\theta_2 + \theta_3)L_3 + \sin(\theta_2)L_2 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 - K_1 - K_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Esta última matriz permite calcular la posición del efector final en función de los valores de las articulaciones.

Cinemática inversa del Manipulador

Hasta ahora, habíamos obtenido las coordenadas para la posición del punto Terminal (efector final) a partir de los valores de las variables de articulación. Ahora nos planteamos el problema inverso: obtener los valores de los joints, que son realmente lo que se envía al sistema de control del manipulador, a partir de la posición y orientación deseadas para el punto terminal. Esto es lo más usado, y absolutamente necesario, dado que las tareas a realizar o trayectorias a recorrer por un manipulador se dan casi siempre en coordenadas cartesianas referidas a algún sistema fijo, para ayudar la comprensión, repetimos el diagrama visto en el primer apartado:



La cinemática inversa es, como se había expresado anteriormente, en general, mucho más problemática que la directa. Los problemas clásicos con los que nos encontraremos serán:

- El punto pedido está, por su lejanía, fuera del alcance del robot.
- El punto pedido está fuera del alcance, pero debido a problemas geométricos (unos enlaces del robot chocan con otros).

- El punto pedido puede alcanzarse mediante dos o más combinaciones (valores) del vector de articulación. Cada una de estas combinaciones se llama configuración; es típico el caso de los brazos tipo SCARA, como el del robot motivo del presente trabajo, donde muchos de los puntos del volumen de trabajo pueden accederse con el codo doblado hacia la derecha, o hacia la izquierda (lo cual también modifica, naturalmente, los valores de las demás articulaciones).
- Las ecuaciones que relacionan las variables de articulación con las variables cartesianas no son solubles, en el sentido de que no se pueden encontrar soluciones separables, llamadas forma cerrada, que den el valor de cada variable cartesiana como función exclusivamente de las variables de articulación. No obstante, se puede probar que para un manipulador de 6 grados de libertad tal que los tres últimos sean rotacionales y sus ejes se intersequen en un punto común siempre existe solución cerrada.

¿Cómo encontrar los valores de las articulaciones en función de la posición y orientación deseada?

Existen varios métodos para hacerlo pero la idea general se expresa en el llamado *Método de Aproximación Directa*, el *Método de Solución Geométrica* y además desarrollaremos el *Método de Pieper's* que es el que utilizaremos para solucionar el robot presentado en el caso de estudio de la cinemática directa.

Método de Aproximación directa

Se trata de usar las normas de construcción de la matriz de transformación T entre el mundo (podría ser la base del robot) y el punto terminal (cinemática directa), escribiendo dicha matriz de modo simbólico, es decir, dejando cada elemento en función de las variables de articulación J_i de las que dependa. A continuación, y usando la interpretación dada para la matriz T, podemos escribir que:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dados (x; y; z; yaw; pitch; roll) que el usuario debe proveer como especificación de la posición y orientación, se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= p_x(J_1 \dots J_6) \\ y &= p_y(J_1 \dots J_6) \\ z &= p_z(J_1 \dots J_6) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 yaw &= \tan^{-1} \left(\frac{a_y}{a_x} \right) \\
 pitch &= -\tan^{-1} \left(\frac{-a_z}{a_x / \cos(yaw)} \right) \\
 roll &= \tan^{-1} \left(\frac{n_z}{o_z} \right)
 \end{aligned} \tag{7}$$

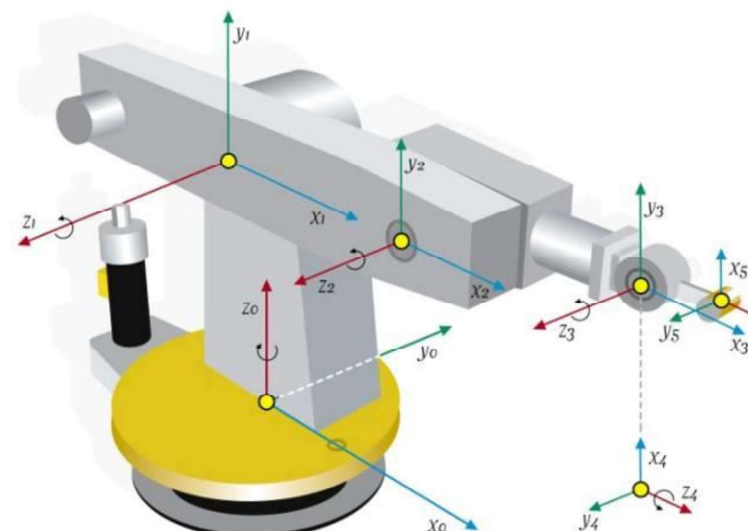
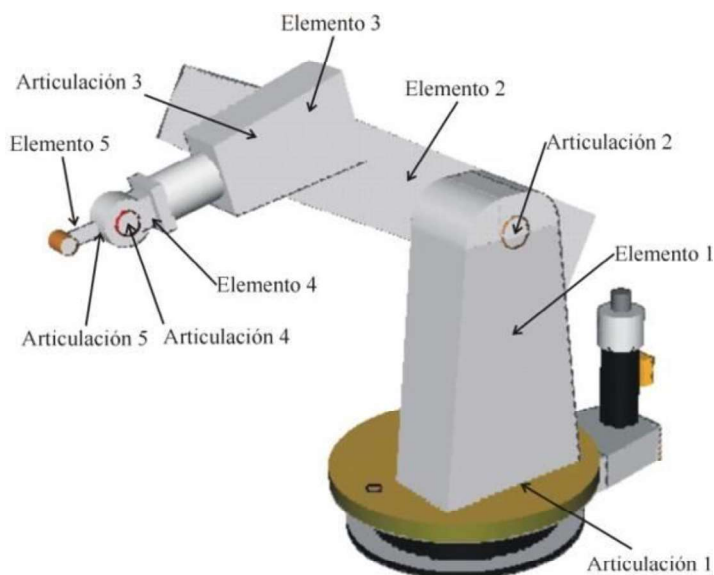
Se pueden dar diferentes ecuaciones para los ángulos de orientación, usando otros elementos de la matriz. Además, las ecuaciones serán por supuesto diferentes en caso de haber optado por otra representación para la orientación en lugar de la yaw-pitch-roll. (por ejemplo, los ángulos de Euler). En cualquier caso, la idea es simplemente plantear directamente tantas ecuaciones como grados de libertad haya, y tratar de resolverlas de alguna manera.

Si hubiera menos de 6 grados de libertad, habría, por supuesto menos ecuaciones. Generalmente, suelen ser ecuaciones no lineales bastante complejas, y es difícil encontrar de modo simple una solución en forma cerrada.

Método de Aproximación Geométrica

Es quizá el método más intuitivo es tratar de descomponer la geometría espacial del brazo en varios problemas de geometría plana. Para muchos robots en donde $\alpha_i = \pm 90^\circ$ esto puede hacerse con facilidad.

A modo de ejemplo presentaremos la resolución de la cinemática inversa del primer grado de libertad de un robot antropomorfo de 5 grados de libertad llamado RSA-2 que se muestra en la Figura 48. El lector interesado en la aplicación de este método puede obtener más información sobre el mismo, así como el desarrollo de las soluciones de cinemática inversa para los cuatro grados de libertad restantes en la bibliografía citada [05].



Solución de la Primera Articulación de un robot Antropomorfo

A partir de la Figura 49 (vista superior) despejamos θ_1 :

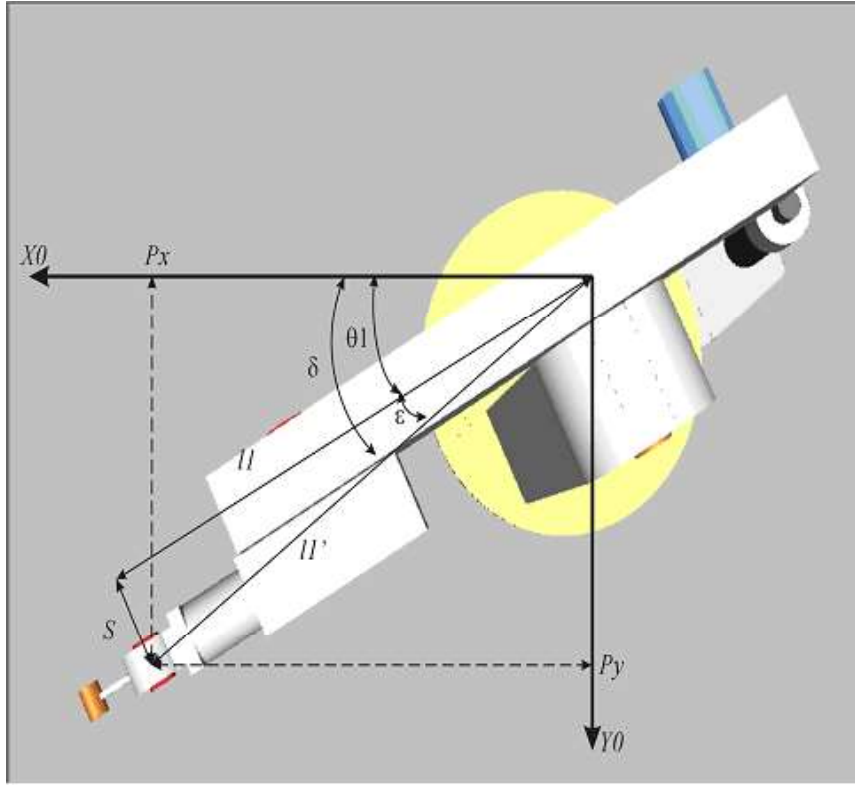


Figura 8 - Robot RSA-2 vista superior

$$l_1^2 = l_1'^2 + S^2 \quad (8)$$

$$l_1 = \sqrt{l_1'^2 - S^2} \quad (9)$$

$$l_1'^2 = Px^2 + Py^2 \quad (10)$$

$$l_1 = \sqrt{Px^2 + Py^2 - S^2} \quad (11)$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{Py}{Px}\right) \quad (12)$$

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{S}{l_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{S}{\sqrt{Px^2 + Py^2 - S^2}}\right) \quad (13)$$

$$\theta_1 = \delta - \varepsilon \quad (14)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{Py}{Px}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{S}{\pm\sqrt{Px^2 + Py^2 - S^2}}\right) \quad (15)$$

En el caso de los robots de tipo antropomorfo y en general en la mayoría de los robots tipos manipuladores, las cadenas cinemáticas constan de 3 grados de libertad para la posición gruesa (enlaces mayores) más otros 3 para la posición fina y orientación (enlaces menores). Los últimos suelen estar justo antes de la mano; unos y otros no son absolutamente independientes. No obstante, se puede probar que si los tres enlaces menores son

rotacionales, y sus ejes se intersecan en un punto común (caso de la mayoría de los robots industriales con manos intercambiables), entonces las 3 últimas articulaciones pueden ser sustituidas por una articulación esférica con tres grados de libertad, y un enlace cuya longitud, fija, es la distancia entre el extremo de los enlaces mayores y el extremo de la mano y en muchos casos cero. Esta distancia es fija precisamente porque ninguno de los 3 últimos enlaces es traslacional, y por tanto el punto terminal está restringido a moverse en la superficie de una esfera centrada en el final de los enlaces mayores, cuyo radio sería la longitud de la mano.

Algoritmo de Pieper's

Existen varias alternativas para calcular la cinemática inversa de un robot, como se ha expresado anteriormente, Se puede intentar encontrar la solución geométrica, o se puede intentar encontrar una solución analítica a partir de las matrices de cinemática directa de Denavit-Hartenberg. El primer método, si bien a primera vista puede parecer sencillo, obliga a hacer un desarrollo particular para cada robot. El segundo método tiene la contra de que no siempre es posible encontrar las soluciones, y esto se contrapone a la ventaja que supone tener un algoritmo para el cálculo.

El Método de Pieper's [04], [06] es el algoritmo utilizado para realizar la cinemática inversa del robot presentado como motivo de estudio. Pieper's estudió los manipuladores con 6 grados de libertad en los cuales 3 (tres) ejes consecutivos se intersecan en un punto. En esta parte del trabajo describiremos el método que él desarrolló para el caso de 6 articulaciones angulares en donde los 3 últimos ejes se intersecan.

Su método se aplica a otras configuraciones que incluyen articulaciones prismáticas como es el caso del robot presentado en el presente trabajo.

Cuando se intersecan los tres últimos ejes, los orígenes de los sistemas de los vínculos 4,5 y 6 se ubican en este punto de intersección, el cual se da en coordenadas base de la siguiente manera:

$${}^0p_4 = {}^0A_1A_2^2A_3^3p_4 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Utilizando la matriz genérica de DH

$${}^0p_4 = {}^0A_1A_2^2A_3^3p_4 = {}^0A_1A_2^2A_3^3 \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4s\alpha_3 \\ d_4c\alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Se puede poner como:

$${}^0p_4 = {}^0A_1 A_2 \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

en donde

$$\begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = {}^2A_3 \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 s \alpha_3 \\ d_4 c \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

haciendo el producto de matrices en el segundo miembro queda:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_3) &= a_3 c \theta_3 + d_4 s \alpha_3 s \theta_3 + a_2 \\ f_2(\theta_3) &= a_3 c \alpha_2 s \theta_3 - d_4 s \alpha_3 c \alpha_2 c \theta_3 - d_4 s \alpha_2 c \alpha_3 - d_3 s \alpha_2 \\ f_3(\theta_3) &= a_3 s \alpha_2 s \theta_3 - d_4 s \alpha_3 s \alpha_2 c \theta_3 + d_4 c \alpha_2 c \alpha_3 + d_3 c \alpha_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Aplicando el mismo concepto hacemos:

$${}^0p_4 = {}^0A_1 \begin{bmatrix} g_1(\theta_2, \theta_3) \\ g_2(\theta_2, \theta_3) \\ g_3(\theta_2, \theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Donde:

$$\begin{aligned} g_1(\theta_2, \theta_3) &= c \theta_2 f_1(\theta_3) - s \theta_2 f_2(\theta_3) + a_1 \\ g_2(\theta_2, \theta_3) &= s \theta_2 c \alpha_1 f_1(\theta_3) + c \theta_2 c \alpha_1 f_2(\theta_3) - s \alpha_1 f_3(\theta_3) - d_2 s \alpha_2 \\ g_3(\theta_2, \theta_3) &= s \theta_2 s \alpha_1 f_1(\theta_3) + c \theta_2 s \alpha_1 f_2(\theta_3) + c \alpha_1 f_3(\theta_3) + d_2 c \alpha_1 \end{aligned} \quad (22)$$

Entonces, ahora podemos resolver:

$${}^0p_4 = {}^0A_1 \begin{bmatrix} g_1(\theta_2, \theta_3) \\ g_2(\theta_2, \theta_3) \\ g_3(\theta_2, \theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \theta_1 g_1(\theta_2, \theta_3) - s \theta_1 g_2(\theta_2, \theta_3) \\ s \theta_1 g_1(\theta_2, \theta_3) + c \theta_1 g_2(\theta_2, \theta_3) \\ g_3(\theta_2, \theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \theta_1 g_1 - s \theta_1 g_2 \\ s \theta_1 g_1 + c \theta_1 g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Donde en la última ecuación se ha simplificado la notación.

Si escribimos una expresión para la magnitud al cuadrado de 0p_4 que denotaremos como:

$r = x^2 + y^2 + z^2$ y que por la ecuación anterior se puede escribir como:

$$r = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad (24)$$

reemplazando por las ecuaciones (22) que describen las funciones g's queda:

$$r = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2f_3 + 2a_1(c\theta_2f_1 - s\theta_2f_2) \quad (25)$$

escribimos esta ecuación, junto con la componente z como un conjunto de dos ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} r &= (k_1c\theta_2 + k_2s\theta_2)2a_1 + k_3 \\ z &= (k_1s\theta_2 - k_2c\theta_2)s\alpha_1 + k_4 \end{aligned} \quad (26)$$

en donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f_1 \\ k_2 &= -f_2 \\ k_3 &= f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2f_3 \\ k_4 &= f_3c\alpha_1 + d_2c\alpha_2 \end{aligned} \quad (27)$$

donde también se ha simplificado la notación.

Consideremos ahora la resolución de r y z , ecuaciones (24) y (26):

- Si $a=0$, tenemos que $r=k_3$, en donde se conoce r . El lado derecho (k_3) es una función de θ_3 solamente.

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} u &= \tan \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \sin \theta &= \frac{2u}{1+u^2} \end{aligned}$$

y sustituyendo en (27) puede resolverse una ecuación cuadrática en $\tan \frac{\theta_3}{2}$ para θ_3

- Si $\alpha_1 = 0$ tenemos que $z = k_4$ en donde se conoce z . Y luego de sustituir de la misma forma que las ecuaciones anteriores, surge una ecuación cuadrática que puede resolverse para θ_3

- Eliminando $s\theta_2$ y $c\theta_2$ de las ecuaciones (26) de r y z se puede obtener :

$$\frac{(r - k_3)^2}{4a_1^2} + \frac{(z - k_4)^2}{s^2\alpha_1} = k_1^2 + k_2^2 \quad (28)$$

Luego de hacer similares sustituciones para θ_3 produce una ecuación de grado 4 la cual puede resolverse para θ_3 .

Es útil tener en cuenta que:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = a_3^2 + d_4^2 + d_3^2 + a_2^2 + 2d_4d_3c\alpha_3 + 2a_2a_3c\theta_3 + 2a_2d_4s\alpha_3s\theta_3 \quad (29)$$

Habiendo resuelto para θ_3 podemos resolver las ecuaciones (26) de r y z para θ_2 y en (23) para θ_1

Para completar esta solución necesitamos resolver para $\theta_4 \theta_5 \theta_6$, estos ejes se intersecan, por lo que estos ángulos de articulación, afectan a la orientación del último vínculo solamente, a estos ángulos podemos calcularlos de la matriz 3x3 que representa la rotación del destino especificado 0R_6 . Después de obtener $\theta_1 \theta_2 \theta_3$, podemos calcular ${}^0R_4 = 0$ con $\theta_4 = 0$, por cuya notación indicamos la orientación del sistema del vínculo 4, relativa al sistema base que como dijimos antes puede ser la base del robot, cuando $\theta_4 = 0$.

La orientación deseada del sistema 6 difiere de esta orientación solo por la acción de las tres últimas articulaciones.

Como el problema se especificó, bajo el supuesto de que se conoce 0R_6 , podemos calcular:

$${}^4_6R|_{\theta_4=0} = {}^0_4R^{-1}|_{\theta_4=0} = {}^0_6R$$

Para muchos robots, estos tres últimos ángulos pueden despejarse utilizando la solución de ángulos de Euler Z-Y-Z; siempre hay dos soluciones para estas últimas 3 articulaciones, por lo que el número total de soluciones para el manipulador será el doble del número encontrado para las primeras tres articulaciones.

Aplicaremos este método a la resolución del robot propuesto de tres grados de libertad:

Solución de Cinemática Inversa para el Robot Laparoscópico

El vector que indica la posición del efector final referido al sistema $\{S_0\}$ es:

$${}^0p_{TCP} = \begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Del mismo modo, el vector que indica la posición de $\{S_4\}$ con respecto a $\{S_3\}$ es:

$${}^3p_4 = \begin{bmatrix} L3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Aplicando los conocimientos de cinemática directa resulta:

$${}^0p_{TCP} = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3p_4 \quad (32)$$

Haciendo:

$${}^2A_3 {}^3p_4 = \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(d_1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(\theta_3) &= L3 \cos(\theta_3) + L2 \\ f_2(\theta_3) &= L3 \sin(\theta_3) \\ f_3(d_1) &= d_1 + L1 - K1 - K2 \end{aligned} \quad (34)$$

Entonces se puede escribir (32) como:

$${}^0p_{TCP} = {}^0A_1 {}^1A_2 \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(d_1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Aplicando la misma idea en la ecuación (35), hacemos

$${}^1A_2 \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(d_1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\theta_2, \theta_3) \\ g_2(\theta_2, \theta_3) \\ g_3(d_1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

De esta forma quedan definidas las funciones:

$$\begin{aligned} g_1(\theta_2, \theta_3) &= f_1(\theta_3) \cos(\theta_2) - f_2(\theta_3) \sin(\theta_2) + K3 \\ g_2(\theta_2, \theta_3) &= f_1(\theta_3) \sin(\theta_2) + f_2(\theta_3) \cos(\theta_2) \\ g_3(d_1) &= f_3(d_1) \end{aligned} \quad (37)$$

Y como ${}^0A_1 = I$, la ecuación (30) finalmente queda:

$${}^0p_{TCP} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\theta_2, \theta_3) \\ g_2(\theta_2, \theta_3) \\ g_3(d_1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Donde, reemplazando las funciones queda:

$${}^0p_{TCP} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \cos(\theta_2) - f_2(\theta_3) \sin(\theta_2) + K3 \\ f_1(\theta_3) \sin(\theta_2) + f_2(\theta_3) \cos(\theta_2) \\ d_1 + L1 - K1 - K2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\theta_2, \theta_3) \\ g_2(\theta_2, \theta_3) \\ g_3(d_1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Inmediatamente se encuentra que:

$$d_1 = p_z - L1 + K1 + K2 \quad (40)$$

El siguiente paso es calcular el cuadrado del módulo del vector ${}^0p_{TCP}$:

$$\begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = g_1(\theta_2, \theta_3)^2 + g_2(\theta_2, \theta_3)^2 + g_3(d_1)^2 \\ r^2 &= (f_1(\theta_3) \cos(\theta_2) - f_2(\theta_3) \sin(\theta_2) + K3)^2 + (f_1(\theta_3) \sin(\theta_2) + f_2(\theta_3) \cos(\theta_2))^2 + p_z^2 \\ r^2 &= f_1^2 c^2 \theta_2 - 2f_1 f_2 c \theta_2 s \theta_2 + 2K3 f_1 c \theta_2 + f_2^2 s^2 \theta_2 - 2K3 f_2 s \theta_2 + K3^2 + \\ &+ f_1^2 s^2 \theta_2 + 2f_1 f_2 c \theta_2 s \theta_2 + f_2^2 c^2 \theta_2 + p_z^2 \end{aligned} \quad (41)$$

Donde los argumentos de las funciones se han eliminado para simplificar la notación, y se ha reemplazado la función *cos* por *c* y *sin* por *s*.

Reordenando los términos de la ecuación (41):

$$p_x^2 + p_y^2 = f_1^2 [c^2\theta_2 + s^2\theta_2] + f_2^2 [c^2\theta_2 + s^2\theta_2] + 2K3[f_1c\theta_2 + f_2s\theta_2] + K3^2 \quad (42)$$

$$p_x^2 + p_y^2 - K3^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2K3[f_1c\theta_2 + f_2s\theta_2] \quad (43)$$

Rescribiendo el término entre corchetes:

$$p_x^2 + p_y^2 - K3^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2K3[p_x - K3] \quad (44)$$

Reemplazando ahora los valores de f_1 y f_2 obtenidos en (34):

$$p_x^2 + p_y^2 - K3^2 = (L3c\theta_3 + L2)^2 + (L3s\theta_3)^2 + 2K3[p_x - K3] \quad (45)$$

$$p_x^2 + p_y^2 - K3^2 = L3^2 c^2\theta_3 + 2L2L3c\theta_3 + L2^2 + L3^2 s^2\theta_3 + 2K3[p_x - K3] \quad (46)$$

Reacomodando:

$$p_x^2 + p_y^2 - K3^2 - (L2^2 + L3^2) = 2L2L3c\theta_3 + 2K3[p_x - K3] \quad (47)$$

De esta última ecuación se puede despejar el valor de θ_3 :

$$\theta_{31} = \cos^{-1} \left\{ \frac{p_x^2 + p_y^2 - [L2^2 + L3^2 + 2K3(p_x - K3)]}{2L2L3} \right\} \quad (48)$$

$$\theta_{32} = -\theta_{31}$$

Como $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ la ecuación (47) devuelve dos valores posibles para θ_3 . Algo similar ocurre al calcular θ_2 , como se verá a continuación.

Conocido ya θ_3 es posible calcular el valor de θ_2 . Revisando la ecuación (39) recordamos que:

$$\begin{aligned} p_x - K3 &= (L2 + L3c\theta_3)c\theta_2 - L3s\theta_3s\theta_2 \\ p_y &= L3s\theta_3c\theta_2 + (L2 + L3c\theta_3)s\theta_2 \end{aligned} \quad (49)$$

Se observa que se forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que puede ser resuelto aplicando diferentes métodos (regla de Krammer, sustitución de variables, etc). En particular, tomando:

$$L2 + L3c\theta_3 = A$$

$$L3s\theta_3 = B$$

$$c\theta_2 = x_1$$

$$s\theta_2 = x_2$$

Las ecuaciones (49) quedan:

$$\begin{aligned} p_x - K3 &= Ax_1 - Bx_2 \\ p_y &= Bx_1 + Ax_2 \end{aligned} \quad (50)$$

Despejando,

$$x_1 = \frac{p_y - Ax_2}{B} \quad (51)$$

$$p_x - K3 = \frac{A(p_y - Ax_2)}{B} - Bx_2 = \frac{Ap_y - (A^2 + B^2)}{B} x_2 \quad (52)$$

$$B(p_x - K3) = Ap_y - (A^2 + B^2)x_2 \quad (53)$$

$$x_2 = \frac{Ap_y - B(p_x - K3)}{A^2 + B^2} \quad (54)$$

Finalmente,

$$\sin(\theta_2) = \frac{[L2 + L3\cos(\theta_3)] p_y - L3\sin(\theta_3)(p_x - K3)}{L2^2 + L3^2 + 2L2L3\cos(\theta_3)} \quad (55)$$

De donde despejamos el valor de θ_2 :

$$\begin{aligned} \theta_{21} &= \sin^{-1} \left\{ \frac{[L2 + L3\cos(\theta_3)] p_y - L3\sin(\theta_3)(p_x - K3)}{L2^2 + L3^2 + 2L2L3\cos(\theta_3)} \right\} \\ \theta_{22} &= \pi - \theta_{21} \end{aligned} \quad (56)$$

Observamos que debido a que se obtienen 2 valores distintos de θ_3 se calcularán 4 valores distintos de θ_2 . Las combinaciones se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 2 - Combinaciones para la solución de la CI

| d₁ | θ₁ | θ₂ |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| d₁ | θ₁₁ | θ₂₁ |
| | | θ₂₂ |
| | θ₂₂ | θ₂₃ |
| | | θ₂₄ |

En cualquier momento, no todas las combinaciones son válidas, por lo que se debe elegir la combinación adecuada con cuidado. Algunos de los parámetros a tener en cuenta son:

- Configuración angular válida
- Proximidad al punto deseado
- Orientación de la herramienta
- Trayectorias con mínimo consumo de energía
- Etc.

Como no hemos impuesto aún restricciones físicas a nuestro robot de estudio, en este trabajo solo se tendrá en cuenta el segundo punto para elegir entre las distintas configuraciones angulares, con la salvedad de preferir valores de θ_2 positivos para coordenadas y positivas y valores de θ_2 negativos para coordenadas y negativas. Este último requerimiento le permite al robot adquirir una actitud que le permita llegar con facilidad a la totalidad del área de trabajo.

Comprobación de las Cinemáticas Directa e Inversa

Se puede comprobar que la cinemática directa es correctamente representada por el algoritmo de Denavit-Hartenberg ingresando configuraciones angulares y de desplazamiento conocidas y comparando los resultados sobre el robot.

Para ejemplificar este método, se toma la posición de reposo, esto es:

$$d_1 = 0mm, \theta_2 = 0rad, \theta_3 = 0rad$$

Calculando con estos valores la matriz de transformación queda:

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L2 + L3 + K3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L1 - K1 - K2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Analizando la matriz se ve que los ejes del sistema $\{S_4\}$ coinciden con los de $\{S_0\}$. Además, la posición del Tool Center Point (recordemos, el origen del sistema de coordenadas de la herramienta del robot), es el largo total en el sentido del eje x_0 , cero en el sentido y_0 y la altura total en el sentido z_0 . El lector interesado puede evaluar el método para distintas configuraciones angulares.

Una vez verificada la cinemática directa se procede a generar un algoritmo para verificar la cinemática inversa. La formulación clásica se presenta en la Figura 50:

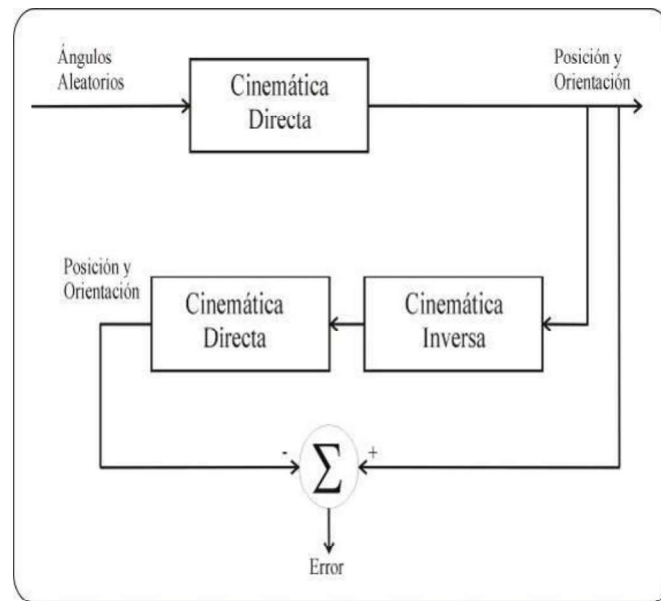


Figura 9 - Algoritmo de Comprobación de la Cinemática Inversa