

Composición de Matrices Homogéneas

Como se explicó antes, una matriz de transformación homogénea sirve, entre otras cosas, para representar el giro y/o traslación realizados sobre un sistema de referencia. También se dijo que un robot era un conjunto de enlaces uniones-articulación, y que era deseable representar el efector final, pata, etc. de un robot o animatrónico con respecto a un sistema fijo; una de las formas de hacerlo es asignar a los elementos de un robot un sistema de ejes asociado, e ir haciendo transformaciones sucesivas desde el efector final hasta el punto de referencia, que podría ser la base del robot.

De esta manera se obtendría una transformación homogénea compuesta, que estaría representando al robot, esto es, dados los elementos fijos del robot, y los ángulos, lo que obtendríamos al final sería la posición del efector final, o sea que lo que estaríamos haciendo es la cinemática directa del robot.

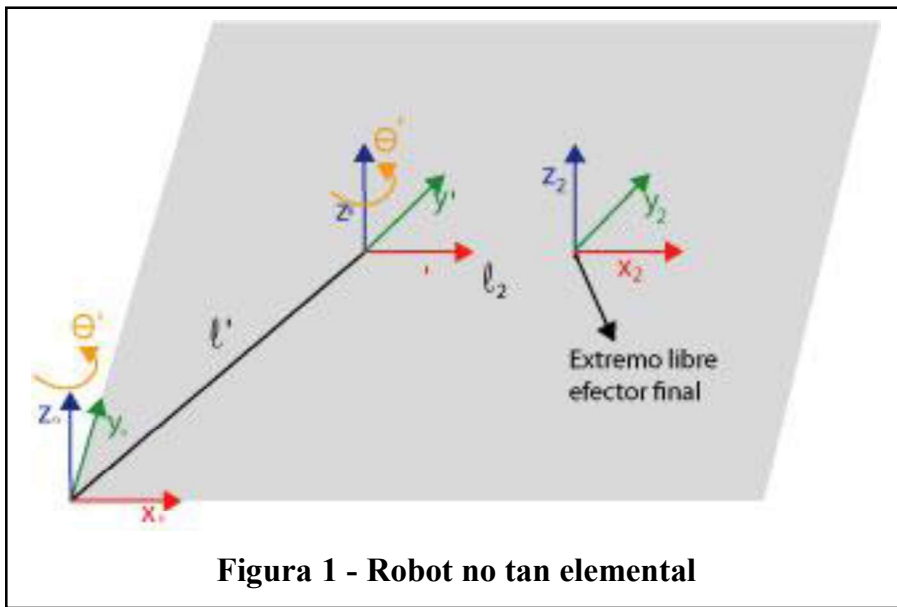
Para explicar la composición de matrices homogéneas aprovechemos el primer “robot no tan elemental”, descrito anteriormente, que dibujaremos a continuación en perspectiva en la Figura 34, para ver todos los sistemas propuestos. Este robot tiene dos grados de libertad y se mueve sobre el plano xy , y sus dos articulaciones son rotacionales según el eje z , en este caso, perpendicular al plano.

Hagamos una breve descripción del robot desde su efector final hacia la base.

El efector final se halla en el extremo libre, en la punta del enlace ℓ_2 , cuya distancia suponemos también ℓ_2 ; allí, colocaremos un sistema de referencia (en la “pluma”) del robot, que llamaremos sistema 2 o $\{S_2\}$, dextrógiro, por definición. Este sistema estará representando el punto al que llega el robot, y a una distancia según el eje x del sistema siguiente hacia la base (sistema 1 o $\{S_1\}$) de longitud ℓ_2 .

Si seguimos hacia la base, nos encontraremos con una segunda articulación del robot, podemos suponer que en ella, o cerca de ella, se encuentra un actuador (podría ser un motor eléctrico), que mueve al segmento ℓ_2 , y con ello al sistema $\{S_2\}$, puesto que lo suponemos solidario a ℓ_2 y en el extremo de este.

En esta segunda articulación colocaremos el siguiente sistema de referencia llamado sistema $\{S_1\}$, que al rotar se lleva consigo a ℓ_2 y por lo tanto al sistema $\{S_2\}$. El sistema $\{S_1\}$, planteado en la propia articulación, es también dextrógiro, y es a su vez rotado por el sistema cero (0) $\{S_0\}$, que se encuentra en la base del robot en la cual podría haber otro motor, que permita la rotación de este sistema $\{S_1\}$; sin embargo el sistema $\{S_1\}$, de acuerdo a la figura se halla trasladado del sistema $\{S_0\}$ (que lo rota) una distancia ℓ_1 , según el eje y , que es justamente el largo del elemento que los conecta; se supone entonces, que el sistema $\{S_0\}$ está fijo al plano y es también dextrógiro, por definición.



Es importante aclarar en este punto que los ángulos de rotación de las articulaciones que coinciden con los ejes z_1 y z_2 son tomados positivos en el sentido en contra de las agujas del reloj, y que el eje z_2 no rota.

¿Cuál es el problema a resolver?

Queremos saber si existe una matriz que defina la cinemática directa de nuestro “robot no tan elemental”; que permita dado los ángulos rotados de las articulaciones correspondientes a los ejes z_0 y z_1 , hallar la posición (x, y, z) del efector final (pluma).

Definido el problema, podemos comenzar a plantear las matrices de transformación homogéneas desde el extremo del robot, esto es, desde el sistema $\{S_2\}$ hacia la base.

El sistema $\{S_2\}$ se halla trasladado según el eje de las x con respecto al sistema $\{S_1\}$, una magnitud ℓ_2 ; a su vez puede estar rotado con respecto al sistema $\{S_1\}$, un ángulo que llamaremos θ_1 que gira alrededor de z_1 .

Si se quiere referenciar el sistema $\{S_2\}$ (efector final) al sistema $\{S_1\}$ (segunda articulación); deberemos representarlo por una matriz de transformación homogénea, que contenga una traslación de acuerdo al eje x , seguida de una rotación con respecto al eje z_1 .

$T(p_1(z, \theta)) = {}^1H_2$ que es la matriz de transformación homogénea que referencia los puntos del sistema $\{S_2\}$ al sistema $\{S_1\}$.

Las transformaciones de traslaciones seguidas de rotaciones, según el eje z , tienen la forma general:

$$T(p_1(z, \theta)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & p_x \cos(\theta_1) - p_y \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & p_x \sin(\theta_1) + p_y \cos(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

En este caso hay traslación solo sobre el eje x y el ángulo rotado es θ_1 , además p_z es igual a cero, puesto que no hay traslación en este eje (el movimiento se da en el plano xy), por lo que la matriz queda

$${}^1H_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 & l_2 \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_2 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Es muy común expresar al $\cos(\theta) = C\theta$ y $\text{sen}(\theta) = S\theta$ para ahorrar texto, puesto que en la multiplicación de matrices aparecen ecuaciones en los elementos que pueden ser muy complejas. De igual manera, si queremos referenciar el sistema $\{S_1\}$ al sistema $\{S_0\}$, deberemos armar una matriz homogénea que contemple la traslación (ahora sobre el eje y) igual a l_1 y una rotación con respecto al eje de z_0 de un ángulo θ_0 , la matriz homogénea quedará.

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & -\text{sen}(\theta_0) & 0 & -l_1 \cos(\theta_0) \\ \text{sen}(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 & +l_1 \text{sen}(\theta_0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Tenemos entonces las dos matrices que representan las sucesivas transformaciones del punto o anatema que está en el efector final, hasta la base del robot.

¿Cómo podemos expresar la matriz que representan la transformación completa?
 Simplemente multiplicando estas matrices.

Lo importante es tener en cuenta el orden en que se hace esta multiplicación.

La composición de matrices homogéneas que representan el efector final de nuestro “robot no tan elemental” es

$${}^0H_2 = {}^0H_1 {}^1H_2 = H_{\text{Total}} \quad (4)$$

Hacemos el producto:

$${}^0H_2 = \begin{bmatrix} c\theta_0 & -s\theta_0 & 0 & -l_1c\theta_0 \\ s\theta_0 & c\theta_0 & 0 & +l_1s\theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_1c\theta_0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_1s\theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$${}^0H_2 = \begin{vmatrix} c\theta_0c\theta_1 - s\theta_0s\theta_1 & c\theta_0s\theta_1 - c\theta_0c\theta_0 & 0 & c\theta_0l_2c\theta_1 - s\theta_0l_2s\theta_1 - l_1s\theta_0 \\ s\theta_0c\theta_1 + c\theta_0s\theta_1 & -s\theta_0s\theta_1 + c\theta_0c\theta_1 & 0 & s\theta_0l_2c\theta_1 + c\theta_0l_2s\theta_1 + l_1c\theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Que es la matriz homogénea que representa la dinámica directa de nuestro robot no tan elemental.

¿Funcionará? ¿Cómo podemos probar si realmente esta matriz representa a nuestro robot?

Si pre-multiplicamos esta matriz por un punto que se encuentra en el sistema $\{S_2\}$, esto es el sistema que representa al efector final, hallaremos las coordenadas (x, y, z) del efector final con respecto del sistema $\{S_0\}$, ó sea a la base. Como el vector ${}^1H_2 p$, esta referirá los puntos del efector final al sistema $\{S_1\}$ y luego al resultado de este producto que es justamente un punto en el sistema $\{S_1\}$, lo pre-multiplicamos por 0H_1 para referirlo a la base del robot.

¿Qué punto podemos elegir?

Un punto interesante seria el $p = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

O sea el punto correspondiente al origen del sistema $\{S_2\}$ donde está el efector final (pluma) de nuestro robot no tan elemental de la Figura 34; a veces en robot más complejos el efector final es intercambiable de modo que puede haber a partir de la muñeca del robot, o bien un corrimiento en cualquiera o todas las coordenadas o bien una rotación en cualquiera de los ejes (esto es para darle una orientación o traslación al efector final, o ambas cosas a la vez) sin embargo, nuestro primer robot es simple y dijimos que bien podía ser una pluma su efector final, de modo que lo único que deberíamos cuidar es que esta apunte hacia abajo (al papel), sabiendo que la posición $p = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ es la de la pluma en el sistema $\{S_2\}$.

Aclarado este punto transformaremos el punto $p = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ del sistema $\{S_2\}$ al sistema $\{S_1\}$ para ver que coordenadas tiene este.

$${}^1H_2p = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_2c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_2s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2c\theta_1 \\ l_2s\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Que es (0,0,0,1) expresado en el sistema $\{S_1\}$.

Si ahora pre-multiplicamos este punto por la matriz 0H_1 hallaremos las coordenadas del efector final con respecto al sistema 0 (cero) que es lo que estamos buscando

$${}^0H_1[{}^1H_2p] = \begin{bmatrix} c\theta_0 & -s\theta_0 & 0 & -l_1s\theta_0 \\ s\theta_0 & c\theta_0 & 0 & l_1c\theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2c\theta_1 \\ l_2s\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

El resultado es:

$$\begin{bmatrix} c\theta_0l_2c\theta_1 - s\theta_0l_2s\theta_1 - l_1s\theta_0 \\ s\theta_0l_2c\theta_1 + c\theta_0l_2s\theta_1 + l_1c\theta_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{componente}_x \\ \text{componente}_y \\ \text{componente}_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ahora que tenemos las coordenadas del efector final, probaremos si nuestras matrices homogéneas representan el robot propuesto.

Aclaremos antes que l_1 y l_2 son consideradas fijos y parámetros del robot, por lo tanto lo único que puede variar son θ_1 y θ_2 .

Primer caso: Supongamos los siguientes valores para los ángulos:

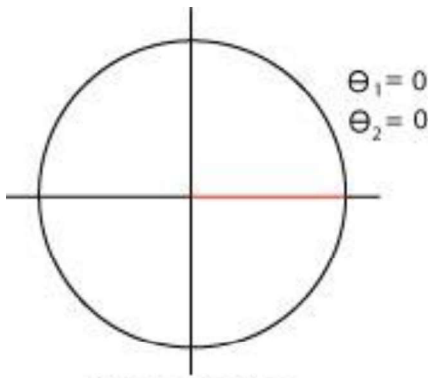


Figura 2 - Primer caso

En los robots antropomorfos y de otro tipo, los ángulos correspondientes a $\theta_1 = \theta_2$ en cero, como se muestra en la Figura 35, responden a la posición de descanso del robot (posición cero) o también llamada “en bandera”; que normalmente es la posición en que las articulaciones, atraviesa los elementos rígidos del robot de modo que teóricamente las articulaciones podrían tener sus actuadores desenergizados; pero lo expresado no vale para todos los robots.

Reemplacemos los valores de θ_1 y θ_2 , en el vector de componentes, y dibujemos el robot en la postura correspondiente a θ_1 y θ_2 iguales a cero, Figura 36, para comprobar si la posición del efector final (pluma en este caso) verifica lo calculado.

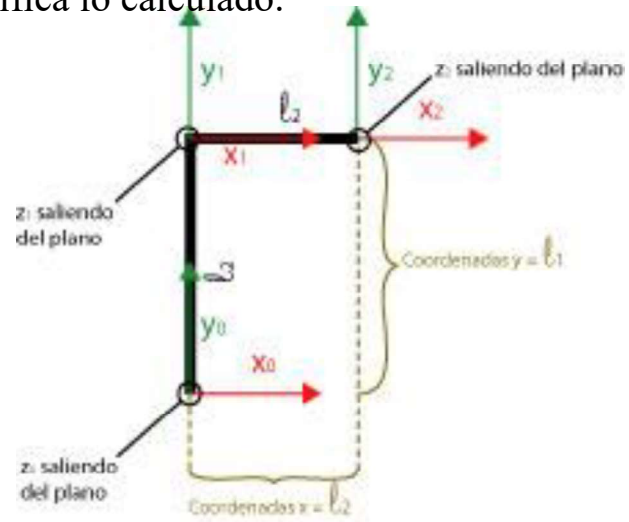


Figura 3 - Configuración para primer caso

1. l_2 1- 0 -0 $\rightarrow x = l_2$
 $0 + 0 + l_1 \rightarrow y = l_1$
 $0 \rightarrow z = 0$
Escala= 1

X
Y
Z
1

Como podemos apreciar, para este primer caso, la composición de matrices se puede verificar Perfectamente.

Coordenada x = l₂
 Coordenada z = o
 Puesto que nuestro robot “no tan elemental” no tiene movimientos que “salgan” del plano xy.

Segundo caso: Supongamos

$$\theta_1 = 90^{\circ} (\pi /2)$$

$$\theta_0 = -60^{\circ} (-\pi /3)$$

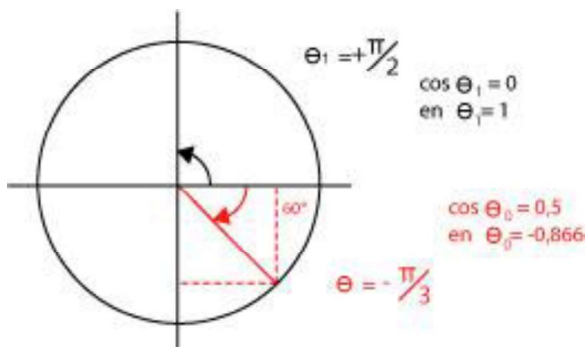


Figura 4 - Segundo caso

Considere ángulos positivos, (Figura 37) los que están generados en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Reemplazando los valores en el vector de componentes, queda:

$$0,5\ l_2\ 0 - (-0,866\ l_2\ 1) - l_1\ (-0,866) \rightarrow \text{comp. } x$$

$$-0,866\ l_2\cdot 0 + 0.5\ l_2\cdot 1+ l_1\cdot 0,5 \rightarrow \text{comp. } y$$

Pasando en limpio queda:

$$0,866l_1 + 0,866l_2 = x$$

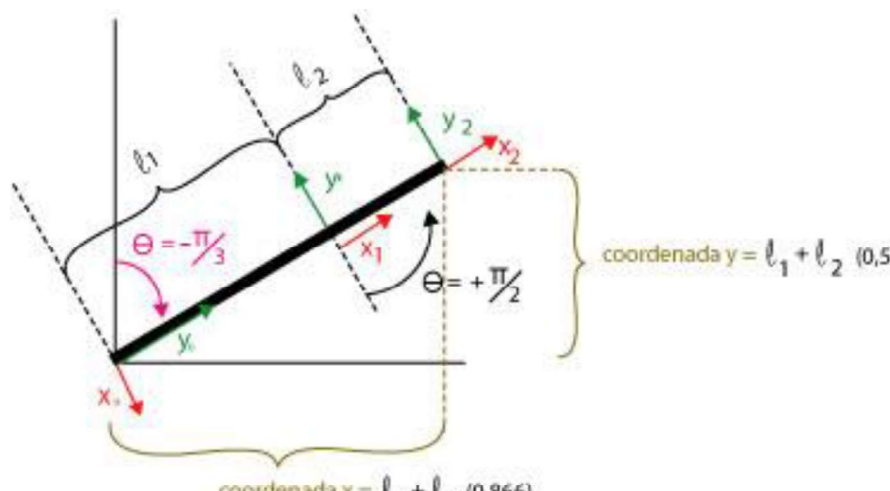
$$0,5l_1 + 0,5l_2 = y$$

$$l_1 +l_2\ (0,866) = x$$

$$l_1 +l_2\ (0,5) = y$$

$$0 = z$$

Escalado = 1



Estas coordenadas se pueden verificar en el grafico, en este segundo caso se ha colocado el primer tramo del robot a un ángulo de $-\pi/3$ o lo que es lo mismo 30° o $\pi/6$ con respecto al eje x convencional ($0 x_0, y_0$ sin moverse).

Al segundo tramo l_2 se lo coloca a $\pi/2$ para hacerlo coincidir (paralelo) con el primer tramo, para verificar una posición fácil de dibujar y entender.

Si por un momento suponemos que:

$$l_1 = 0,70 \text{ mts.}$$

$$l_2 = 0.30 \text{ mts.}$$

Los valores del gráfico anterior corresponderán a metros y es trivial la verificación

Para simplificar más aún, el lector verá que en el segundo caso también se verifica la matriz compuesta que es un resultado similar al obtenido anteriormente sin utilización de matrices de transformación.

Lo que queda es básicamente un triángulo muy fácil de comprobar.

Matriz Compuesta para el otro Robot no tan Elemental

Anteriormente, describimos un robot que tenía dos grados de libertad: el primero era de tipo rotativo (similar al del robot estudiado en el apartado anterior) y el otro es de tipo prismático. Volvamos a dibujar este robot, pero ahora le asignaremos los ejes desde el efector final hacia la base como hicimos con el robot anterior.

Por una cuestión de simplicidad se ha dibujado en la Figura 39 este robot en el plano xy dejando para el lector que imagine el eje z saliendo del plano (hoja).

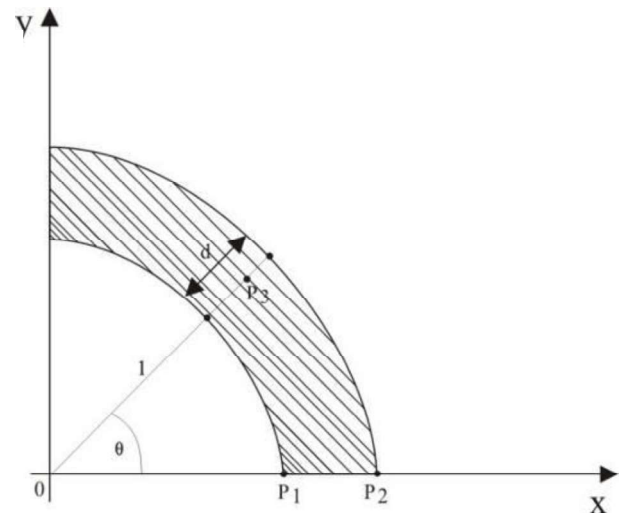


Figura 6 - Otro robot no tan elemental

Si comenzamos mas desde el extremo libre (pluma del robot) ubicamos allí mismo el sistema $\{S_2\}$ fijo y solidario a la misma pluma, este sistema puede estar trasladado con respecto al sistema $\{S_1\}$, una distancia que puede variar entre $0 \leq d \leq d_{\text{máx}}$. Recordemos que esta articulación es prismática.

Por lo tanto si queremos escribir la matriz homogénea que representa la transformación que “lleva” puntos del sistema $\{S_2\}$ al $\{S_1\}$ solo tendremos que tener en cuenta la translación sobre el eje y y la transformación viene dada entonces por:

$${}^1H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Solo traslación una distancia d según el eje y

Si ahora queremos referenciar el sistema $\{S_1\}$ a la base (sistema 0) tendremos un caso similar al robot estudiado anteriormente en el que el sistema $\{S_1\}$ se halla trasladado una distancia l según el eje y y rotado un ángulo θ con respecto al eje z_0 , estas matrices conocidas se la puede expresar como:

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & -ls\theta \\ s\theta & c\theta & 0 & lc\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Si queremos obtener la matriz que representa la cinemática directa de nuestro segundo “robot no tan elemental” debemos multiplicar las matrices en el orden adecuado esto es:

$${}^0H_2 = {}^0H_1 {}^1H_2 = H_{\text{Total}} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & -ls\theta \\ s\theta & c\theta & 0 & lc\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

El resultado es:

$${}^0H_{2=} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & -s\theta d - s\theta l \\ s\theta & c\theta & 0 & +c\theta d + c\theta l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Como en el caso anterior, es importante saber si 0H_2 representa realmente la matriz que transforma puntos del sistema $\{S_2\}$ correspondiente al efector final, en puntos con respecto al sistema $\{S_0\}$ (x_0 y_0) supuesto en la base del robot; para la cual supondremos:

$$\theta = -\pi/4$$

$D=d \rightarrow$ que es la distancia que tendrá el elemento retráctil.

En este caso veremos a donde se halla el extremo libre del robot (sistema $\{S_2\}$) o lo que es lo mismo la pluma, al igual que en el caso del robot anterior, lo que vemos es referenciar el punto p (0,0,0,1), o sea debemos hacer ${}^0H_2 p$ (0)

Al hacer el cálculo:

$${}^0H_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta d - s\theta l \\ c\theta d + c\theta l \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} componente_x \\ componente_y \\ componente_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Si reemplazamos por $\theta = -\pi/4$ y $x=d$ nos queda:

componente x: $0,707.d + 0,707 l$

componente y: $0,707.d + 0,707 l$

componente z: 0

escala: 1 (uno)

O sea:

$x = l+d (0,707)$

$y = l+d (0,707)$

$z = 0$

$e = 1$

Podemos suponer, como en el caso anterior que:

$l = 0,70$

$d = 0,30$ para poder verificar que la matriz calculada funciona

Nota:

No hay que perder de vista que los datos son el ángulo θ y d o sea los datos de las articulaciones, θ corresponde a la rotación y d a la prismática, l es un parámetro del robot y se lo supone fijo para todos los cálculos.

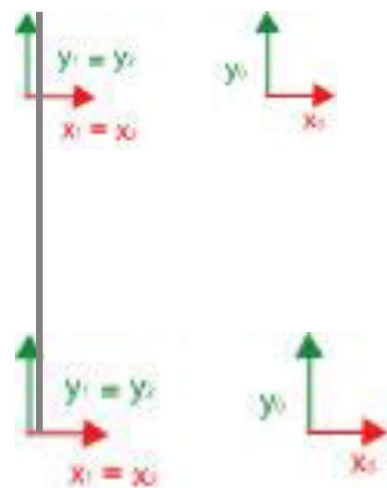
En el robot anterior los datos eran θ_1 y θ_2 , y l_1 y l_2 eran considerados fijos.

Verifiquemos otro punto:

Coloquemos el robot en bandera, es decir

$\theta = 0$

$d = 0$



Reemplazando en las ecuaciones que designan los componentes tenemos:

$$\begin{aligned} x &= -\sin(0)d - \sin(0)l \\ y &= \cos(0)d + \cos(0)l \\ z &= 0 \\ e &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Figura 7 - Configuración para $d=0$ y $\theta=0$

Componentes quedan: $x=0$

$y=1$; para $d=0$

$z=0$

$e=1$

Lo que se puede
comprobar en la Figura 40

Se deja para el lector que verifique:

$$\theta = -\pi/2$$

$$l = d_{\max.}$$

¿Por qué es importante el estudio de los dos robots anteriores?

Es importante aclarar, llegado a este punto que las articulaciones de todos los robots y animatrónicos contruidos o por construir, solo son de dos tipos posibles (rotacional o prismática) y por más compleja que sea, se puede modelar como una combinación de ellas. El movimiento de una articulación puede ser de desplazamiento, de giro, o de una combinación de ambos [02].

Comentario sobre la elección de los ejes:

Cuando se presentaron estos robots no tan elementales para el estudio de las composiciones de matrices homogéneas no se aclaró acerca de la elección de los ejes que colocamos en cada eslabón del robot, solo se dijo que iban todos orientados en forma dextrógira y nada más; en realidad uno podría colocarlos casi de cualquier forma, el hecho de que los eligiéramos de la manera en que lo hicimos fue para acercarnos a un método, una convención estándar que se usa en robots desde 1955 a la convención de Denavit Hartenberg (DH); dicha convención permite hallar una matriz homogénea compuesta que representa el robot, y que es útil para estudiar su cinemática directa y que desarrollaremos más adelante.

Espacio de las Articulaciones y Espacio Cartesiano

En el presente trabajo se aclaró mediante gráficos el problema de la Cinemática directa y la Cinemática inversa.

Repetimos aquí el mismo grafico para mayor comodidad.

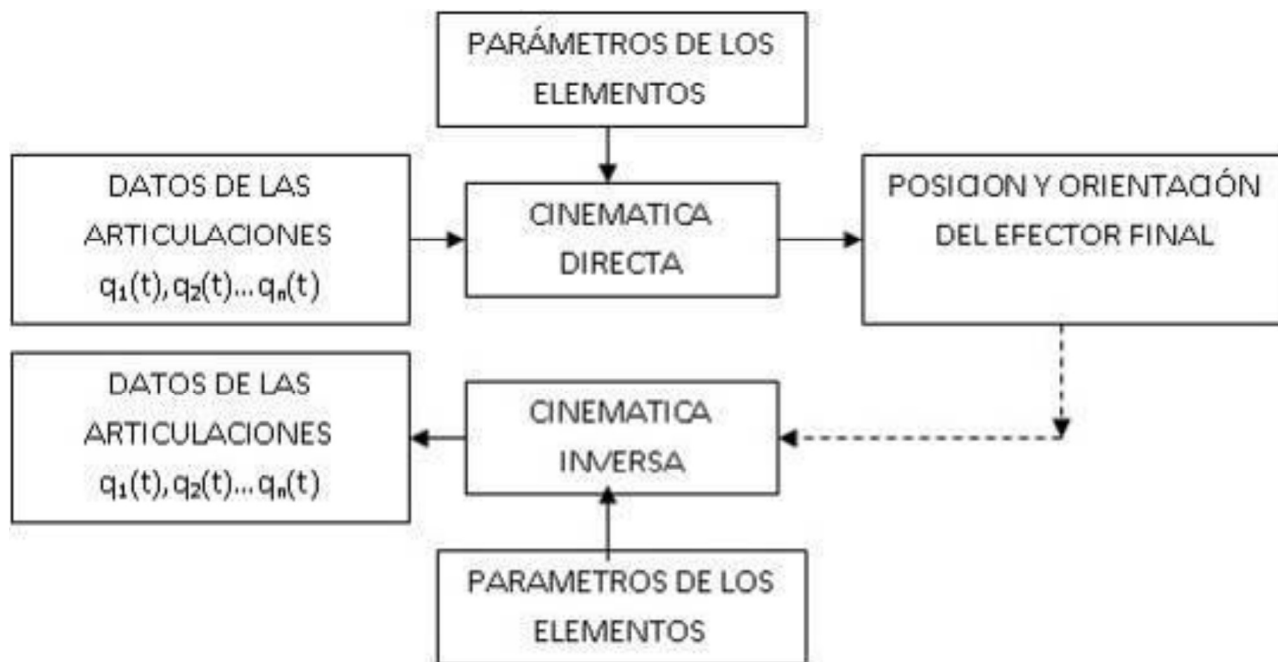


Figura 8 - Cinemática directa e inversa

De acuerdo al grafico, se puede hablar entonces de dos espacios, un “espacio de articulaciones” o espacio de Joints y otro llamado “espacio Cartesiano”.

Se podría decir entonces que la cinemática directa, puede estar representada por una función que toma como argumento un “vector de articulaciones” que tiene tantos componentes como grados de libertad tenga la cadena cinemática que represente al robot y devuelve un vector de 6 componentes; las 3 primeras serán la posición del efector final y las 3 tres últimas serán la orientación del efector final.

Entonces la función será:

$$F: J \rightarrow R_6$$

Donde las tres primeras componentes serán (x, y, z) del efector final son la posición y las 3 últimas pueden ser (a_x, a_y, a_z) de orientación o como ángulos de Euler o como YAW, PITCH y ROLL.

Recordemos que el presente trabajo presenta como robot de estudio a un robot de solo 3 grados de libertad por lo que se hará hincapié, en este caso, solo en la posición del efector final, sin tener en cuenta la orientación del mismo.

El Algoritmo de Denavit Hartenberg

Éste es un método que permite calcular la matriz homogénea que venimos calculando hasta ahora con nuestros “robots no tan elementales”, pero aplicable a cualquier tipo de robot. Este algoritmo permite como en los casos anteriores conocer las coordenadas del efector final en un sistema fijo que puede ser la base.

La matriz de transformación homogénea T es la que relaciona el sistema solidario al punto Terminal (efector final) con un sistema de referencia arbitrariamente escogido, que

llamaremos sistema del mundo. En principio, cada uno de los elementos ($a_x; a_y; a_z; o_x; o_y; o_z; n_x; n_y; n_z; p_x; p_y; p_z$) de la matriz T será función de algunas o todas las variables de articulación, y de las constantes geométricas del manipulador. Según se vio al detallar la forma explícita de la matriz T, multiplicándola por el vector $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, que expresa las coordenadas homogéneas del punto terminal respecto a su propio sistema, obtendremos éstas respecto al sistema del mundo. Y, por otra parte, según se vio en la sección anterior, existen fórmulas que relacionan los ángulos de orientación en cualquiera de sus expresiones con los elementos de la sub-matriz de rotación de T.

En el anexo correspondiente a Denavit Hartenberg se describe con detalle el proceso de construcción de T para cadenas cinemáticas abiertas, en las que cada articulación tenga un sólo grado de libertad. El caso de las cadenas cinemáticas cerradas no se trata en el presente trabajo, en cambio, el caso de articulaciones con más de un grado de libertad no presenta ningún problema: bastaría con considerar la articulación como si se tratase de dos, unidas por un enlace ficticio de longitud 0.

Sustancialmente, el proceso consiste en dar un sistema de coordenadas a cada enlace, que se moverá con él, de acuerdo a un conjunto de normas como se ejemplifica en la Figura 42.

Lo que se logrará al final, al igual que hicimos con los robots no tan elementales, es una matriz que permita referenciar el efector final, al sistema de la base, de modo que si pre-multiplicamos la matriz hallada T_{total} por las componentes del efector final, hallaremos las coordenadas del efector final en el sistema de referencia, por ejemplo la base del robot.

Convenciones para la Nomenclatura:

En cadenas cinemáticas abiertas cada par enlace-articulación (link-joint) es un grado de libertad. Numeraremos los links y joints secuencialmente, desde el inicio de la cadena. La base está fija normalmente al suelo, será el enlace (link) 0, y no se cuenta como grado de libertad. La articulación (joint) 1 será la que conecte la base al primer enlace móvil; los joints comienzan, pues, a numerarse desde 1, y no existe joint al final del último enlace.

Figura 9 - Ejemplo de asignación de ejes

