已修订
21-09-08，13:02

第一章 数学准备

一、 笛卡尔张量分析简介

张量代数起源于力学，最初用来表示弹性介质中各点的应力状态，现在张量理论已发展成为现代物理学的有力数学工具。

1. 矢量、标准基和坐标分量

考虑三维空间欧氏空间$\mathbf{R}^3$的矢量$\boldsymbol{r}$和**标准基**（规范基）$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，基矢相互**正交且归一**，

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

其中**克罗内克符号**（Kronecker symbol）

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{when } i = j; \\ 0, & \text{when } i \neq j. \end{cases}$$

基矢是完备的，即

$$\forall \boldsymbol{r} \in R^3, \qquad \boldsymbol{r} \equiv r_i \boldsymbol{e}_i$$

这里我们使用了**求和约定**（Einstein convention）：在相乘的项中，如果一个指标（字母）重复两次，默认要对该指标的所有可能取值求和。比如

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_j b_k \delta_{jk}$$

被求和的指标又称为**哑指标**（dummy index），为被求和的指标称为**自由指标**（free index）。

利用基矢的正交归一性，

$$\boldsymbol{r} = r_j \boldsymbol{e}_j \Rightarrow \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_i = r_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = r_j \delta_{ij} = r_i$$

矢量在第i个坐标轴上的投影，即坐标分量r_i。我们常把坐标分量写成列矢量

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{r} = r_i \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i$$

上式中

$$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i$$

称为**并矢**（dyadic）。标准基的完备性可以写成等式

$$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i = \mathbf{1}$$

线性变换$\mathbf{1}$表示**恒等变换**。

通常我们会选择标准基为**右手系**，

$$(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1$$

这等价于

$$\left(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j\right) \cdot \boldsymbol{e}_k = \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \det\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right)$$
上式可以作为**列维-奇维塔符号**（Levi-Civita symbol）的定义，或者等价定义为

$$\varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1, & (i,j,k)\text{是偶排列;} \\ -1, & (i,j,k)\text{是奇排列;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

2. 矢量的坐标变换

矢量是一个客观存在的物理量，与基矢的选择无关；但其坐标分量却与基矢的选择有关。在新标准基$\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$下，分量（坐标）发生变化，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_i' \boldsymbol{e}_i' = r_i' \boldsymbol{e}_i'$$
新老坐标的变换关系为
$$r_i' = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{r} \cdot \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_j \left(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i'\right) = \left(\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j\right) r_j$$
定义**转动矩阵**（rotation matrix；或**方向余弦矩阵**，DCM，direction cosine matrix）
$$R_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j, \qquad i,j = 1,2,3$$
那么坐标分量的变换
$$r_i' = R_{ij} r_j \Leftrightarrow \vec{r}' = R\vec{r}$$

两组标准基之间的转动矩阵是**正交矩阵**，

$$R_{jl} R_{km} \delta_{lm} = \left(\boldsymbol{e}_j' \cdot \boldsymbol{e}_l\right)\left(\boldsymbol{e}_k' \cdot \boldsymbol{e}_m\right)\delta_{lm} = \left(\boldsymbol{e}_j' \cdot \boldsymbol{e}_l\right)\left(\boldsymbol{e}_k' \cdot \boldsymbol{e}_l\right) = \left(\boldsymbol{e}_j' \cdot \boldsymbol{e}_l\right)\left(\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_k'\right) = \boldsymbol{e}_j' \cdot \boldsymbol{e}_l \boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_k'$$
$$= \boldsymbol{e}_j' \cdot \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{e}_k' = \delta_{jk}$$
$$RR^T = 1_{3\times3}$$
符号$1_{3\times3}$表示3×3的单位矩阵。

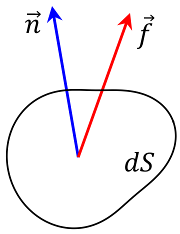
两组标准基都是右手系，

$$\left(\boldsymbol{e}_1' \times \boldsymbol{e}_2'\right) \cdot \boldsymbol{e}_3' = 1$$
$$= \left(\left(\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i\right) \times \left(\boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j\right)\right) \cdot \left(\boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k\right) = \left(R_{1i} \boldsymbol{e}_i \times R_{2j} \boldsymbol{e}_j\right) \cdot R_{3k} \boldsymbol{e}_k$$
$$= R_{1i} R_{2j} R_{3k} \varepsilon_{ijk} = \det R$$
$$\det R = 1$$

三维空间的全部转动构成群

$$\mathrm{SO}(3) \stackrel{\text{def}}{=} \{R \in M(3, \boldsymbol{R}) | RR^T = \mathbf{1}, \det R = 1\}$$
转动矩阵的逆矩阵仍为转动矩阵；两个转动矩阵的乘积也是转动矩阵。

3. 张量的定义



考虑连续介质内部的一个面元$\mathrm{d}\vec{S}=\vec{n}\mathrm{d}S$，单位面积上所受的应力$\boldsymbol{f}$来自分子间作用力，与面元的方向有关，准确到领头项（忽略方向$\boldsymbol{n}$的非线性项；零次项不符合牛顿第三定律），可以表示为柯西应力公式

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$$

其中$\boldsymbol{\sigma}$是线性映射。写成分量形式，

$$f_j=\sigma_{jk}n_k$$

或者

$$f_i\boldsymbol{e}_i=\sigma_{jk}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\cdot n_l\boldsymbol{e}_l$$

即受力可以用柯西应力张量（Cauchy's stress tensor）表达，

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k,\qquad \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$$

其中 9 个并矢

$$\{\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k|j,k=1,2,3.\}$$

是二阶张量的**张量基**。柯西应力张量$\boldsymbol{\sigma}$是物理量，与基矢的选取无关（转动不变）；**张量的分量**（components）

$$\{\sigma_{jk}|j,k=1,2,3.\}$$

与标准基的选取有关，可以写成3×3的矩阵

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

一般的 2 阶张量$\mathbf{T}$定义为

$$\mathbf{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

容易验证分量T_{ij}在坐标变换下满足

$$T'_{jk}=R_{jl}R_{km}T_{lm}$$

有时我们也直接称分量T_{ij}为张量。

类似地定义 3 阶张量

$$\mathbf{T}=T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$$

以及更高阶的张量。

张量是矩阵的推广。

矢量只有一个指标，是一阶张量。

标量可以看成 0 阶张量。

其它例子：介电张量，转动惯量（2 阶），压电张量（3 阶），弹性张量（4 阶），黎曼曲率张量（4 阶）

4. 张量的坐标变换

在坐标变换时，张量的每一个指标都按照矢量的方式变换，例如二阶张量

$$T_{ij}\to T'_{ij}=R_{ii'}R_{jj'}T_{i'j'}$$

证明：$T'_{ij}=T_{kl}(\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}'_j\cdot\boldsymbol{e}_l)=T_{kl}R_{ik}R_{jl}=R_{ii'}R_{jj'}T_{i'j'}$

有些教材中以上式作为张量的定义。

在坐标变换时，张量的分量会改变，但是张量本身不变。

5. 张量的运算

同阶张量的**加法**（以二阶为例）定义为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$C_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} A_{jk} + B_{jk}$$

数乘定义为

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B}$$

$$A_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda B_{jk}$$

这样全体二阶张量构成线性空间。

直积（并积、张量积）：

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} = T_{ij} S_{kl} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l$$

$$P_{ijkl} = T_{ij} S_{kl}$$

缩并（矢量内积的推广）：对张量的两个指标求和得到低阶张量，l 例如

$$P_{ijkk}, P_{iikl}, P_{ijki}$$

每缩并一对指标，张量的阶下降 2。注意不同指标的缩并结果是不一样的，

$$T_{ij} S_{jk} \neq T_{ji} S_{jk}$$

6. 张量的宇称

考虑矢量在空间反射

$$\boldsymbol{e}_i \to -\boldsymbol{e}_i$$

下的变换，坐标和动量

$$\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}$$

$$\vec{p} \to \vec{p}' = m\dot{\vec{r}}' = -\vec{p}$$

是（正常）**矢量**，而角动量则是**赝矢量**，

$$\vec{L} \to \vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = \vec{L}$$

一个n-阶张量，如果在空间反射下变成原来的张量乘以$(-1)^n$，我们称之为张量；如果变成原张量的$(-1)^{n+1}$倍，则称之为**赝张量**（pseudotensor）。用空间反射作用于张量，特征值± 1称为张量的宇称（parity）。

7. 迷向张量

各分量均转动不变的张量称为**迷向张量**（各向同性张量 isotropic tensor）。

SO(3)的**基本迷向张量**为δ_{jk}，ε_{jkl}，（Kronecker 符号，Levi-Civita 符号）

$$R_{jj'}R_{kk'}\delta_{j'k'} = \delta_{jk}$$
$$R_{jj'}R_{kk'}R_{ll'}\varepsilon_{j'k'l'} = \varepsilon_{jkl}$$

来自转动矩阵满足的两个条件：

$$RR^T = R^TR = \mathbf{1}_{3\times 3}, \qquad \det R = 1.$$

迷向张量满足下面的恒等式（利用$\det A \det B = \det(AB^T)$可证）

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i'j'k'} = \det\begin{pmatrix} \delta_{ii'} & \delta_{ij'} & \delta_{ik'} \\ \delta_{ji'} & \delta_{jj'} & \delta_{jk'} \\ \delta_{ki'} & \delta_{kj'} & \delta_{kk'} \end{pmatrix}$$

三维矩阵的行列式（利用$\det(AB) = \det A \det B$可证）

$$A_{ii'}A_{jj'}A_{kk'}\varepsilon_{ijk} = \det A \;\; \varepsilon_{i'j'k'}$$

推论:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \det\begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}}$$

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\vec{x} \equiv \det(\vec{x},\vec{b},\vec{c})\,\vec{a} + \det(\vec{a},\vec{x},\vec{c})\,\vec{b} + \det(\vec{a},\vec{b},\vec{x})\,\vec{c}$$
$$\Leftrightarrow \delta_{ij}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + \delta_{il}\varepsilon_{kjm} + \delta_{im}\varepsilon_{klj}$$

（取特例$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \mathbf{1}_{3\times 3}$易证，再由等式两边对$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的线性知结论成立）。

8. 场论公式的张量写法

两个矢量的内积和叉乘

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_ib_j\delta_{ij}, \qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = a_jb_k\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i$$

梯度、散度和旋度算子

$$\nabla f \sim \partial_i f, \qquad \nabla\cdot\vec{\psi} \sim \partial_i\psi_i, \qquad \nabla\times\vec{\psi} \sim \varepsilon_{ijk}\partial_j\psi_k.$$

例：计算$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$，$\nabla\times\left(\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B}\right)$

二、 几种常用的坐标系

选择合适的坐标系会使问题的求解变得简单。下面介绍几种常用的正交坐标系。

1. 直角坐标系

✧ 标准基$\{\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$

度规张量（metric tensor）定义为基矢的内积，

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{jk}$$

也是基矢$\boldsymbol{e}_i$在$\boldsymbol{e}_j$轴的坐标分量，

$$(\vec{e}_i)_j = \delta_{ij}$$

$$(\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

完备性：

$$g_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \mathbf{1}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{e}_j.\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i.\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_j.\mathbf{1}.\boldsymbol{e}_k \Longrightarrow \left(\vec{e}_j\right)_i(\vec{e}_k)_i = \delta_{jk} \Longrightarrow \vec{e}_i\vec{e}_i^T = \mathbf{1}_{3\times3}$$

右手系：$\vec{e}_i \cdot \left(\vec{e}_j \times \vec{e}_k\right) = \varepsilon_{ijk}$

体积元

$$dV = dxdydz$$

✧ 质点的位移

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$x = \vec{r}\cdot\vec{e}_x, \qquad y = \vec{r}\cdot\vec{e}_y, \qquad z = \vec{r}\cdot\vec{e}_z$$

✧ 速度

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

✧ 加速度

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

✧ 质点的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\begin{cases} L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ L_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{cases}$$

✧ 动能

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

2. 平面极坐标系

常用于天体运动、电磁、核力等有心力场问题。

✧ 与直角坐标系的关系

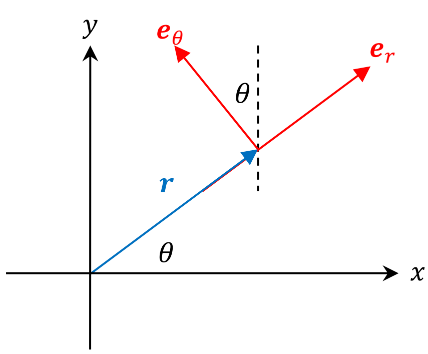
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

✧ 基矢

$$\boldsymbol{e}_r \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}, \qquad \boldsymbol{e}_\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}$$

基矢在直角坐标系的坐标

$$(\vec{e}_r)_i \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial r_i}{\partial r}$$



图表 1 平面极坐标系的标准基

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \end{cases}$$

是一种“本地坐标系”，

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta), \qquad \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$$

- ✧ 正交归一性

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 1, \qquad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

度规为单位矩阵。

- ✧ 完备性

$$\vec{e}_r\vec{e}_r^T = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta^T = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_r\vec{e}_r^T + \vec{e}_\theta\vec{e}_\theta^T = \mathbf{1}$$

- ✧ 面积

$$dS = \det\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right) dr d\theta = r dr d\theta$$

- ✧ 位移

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

- ✧ 速度

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{r}\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\dot{\theta}$$

由极坐标基矢的表达式，

$$\begin{cases} d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta \\ d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

分别为径向速度和角速度。

- ✧ 加速度

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left\{\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right\} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

- ✧ 角动量

$$L_z = rmv_\theta - 0 = mr^2\dot{\theta}$$

- ✧ 动能

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

3. 柱坐标系

与平面坐标类似，多一个z-分量，

$$\vec{r}(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta\,\vec{e}_x + \rho\sin\theta\,\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

- ✧ 标准基

$$\vec{e}_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \quad \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 1\vec{e}_z.$$

这样定义的基矢正交归一（原因是坐标网格线正交）

完备

$$\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho^T + \vec{e}_\theta\vec{e}_\theta^T + \vec{e}_z\vec{e}_z^T = \mathbf{1}_{3\times 3}$$

构成右手系：

$$\left(\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\theta\right)\cdot\vec{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

体积元

$$dV = \det\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right) d\rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz$$

- 位移

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_R + z\vec{e}_z$$

- 速度

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_r + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

- 加速度

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_R + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- 角动量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_R & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ m\dot{\rho} & m\rho\dot{\theta} & m\dot{z} \end{pmatrix} = -m\rho z\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + m(z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\boldsymbol{e}_\theta + m\rho^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$$

- 动能

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

4. 球坐标系

参数选为半径，纬度，经度：(r, θ, φ)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

- 标准基

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\bigg/\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y + 0\vec{e}_z$$

满足正交归一以及完备性

$\{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\}$构成右手系

$$(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta)\cdot\vec{e}_\varphi=\det(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)=+1$$

体积元

$$dV=\det\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial r},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)drd\theta d\varphi=r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi$$

✧ 位移

$$\vec{r}=r\vec{e}_r$$

✧ 速度

$$\vec{v}\overset{\text{def}}{=}\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\vec{e}}_r=\dot{r}\vec{e}_r+r\left(\dot{\theta}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}+\dot{\varphi}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\right)=\dot{r}\vec{e}_r+r\left(\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right)$$

✧ 加速度

$$\begin{aligned}\vec{a}&\overset{\text{def}}{=}\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\{\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\}\\&=\{\ddot{r}\vec{e}_r+\dot{r}(\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi)\}+\{(\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}[\dot{\theta}(-\vec{e}_r)+\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi]\}\\&\qquad+\{(\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+r\ddot{\varphi}\sin\theta+r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\varphi+r\dot{\varphi}\sin\theta\,[\dot{\varphi}(-\sin\theta\,\vec{e}_r-\cos\theta\vec{e}_\theta)]\}\\&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta\\&\qquad+(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

✧ 角动量

$$\boldsymbol{L}=-mr^2\sin\theta\,\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\theta+mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\varphi$$

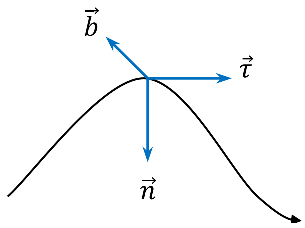
✧ 动能

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

5. 自然坐标系*

使用弧长参数s作为变量，三维空间的曲线可以表示为

$$\vec{r}=\vec{r}(s)$$



图表 2 自然坐标系

✧ 标准基

切向量定义为切线的方向，

$$\vec{\tau}\overset{\text{def}}{=}\frac{d\vec{r}}{ds}$$

曲率矢量

$$\vec{N}\overset{\text{def}}{=}\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

垂直于切向量，

$$\vec{n}^2=1\Longrightarrow 2\vec{n}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds}=0$$

曲率矢量的大小称为**曲率**，

$$N\overset{\text{def}}{=}\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$$

曲率的倒数是长度量纲，称为**曲率半径**，

$$\rho \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{N} = 1 \Big/ \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$$

一般曲线可局部近似为圆弧，圆的半径倒数即曲率，曲率矢量的方向指向圆心。

归一化的曲率向量称为**法向量**，

$$\vec{n} \overset{\text{def}}{=} \frac{\vec{N}}{N} = \rho \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

副法向定义为

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$$

$\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$构成标准基。（Gauss 曲线论）

挠率矢量

$$\vec{K} \overset{\text{def}}{=} \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\tau} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$$

与$\vec{b}, \vec{\tau}$都垂直，其模长称为**挠率**，

$$K \overset{\text{def}}{=} \left|\frac{d\vec{b}}{ds}\right| = \frac{1}{\sigma}$$

这里σ称为挠率半径，

$$\vec{K} = \frac{\vec{n}}{\sigma}$$

挠率反应曲线局部偏离平面的程度

✧ 位移

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \qquad s = s(t).$$

✧ 速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s} = \dot{s}\vec{\tau}$$

✧ 加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{\tau}) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{ds}\dot{s} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

内禀方程

$$a_\tau = \ddot{s}, \qquad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

没有副法向分量。

✧ 常用的曲率半径公式

若以t为参数，

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

则

$$\vec{N} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \left(\frac{1}{\dot{s}}\frac{d}{dt}\right)^2 \vec{r} = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{v^2}\vec{a} - \frac{1}{v^3}\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}\vec{v} = \frac{1}{v^2}\left(\mathbf{1} - \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{v^2}\right)\vec{a} = -\frac{1}{v^4}\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a})$$

又由于

$$P = \mathbf{1} - \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{v^2}, \qquad P^2 = P$$

是投影到垂直于速度方向的矩阵（projection matrix），

$$N = \frac{1}{v^2}\sqrt{\vec{a}^T P^2 \vec{a}} = \frac{1}{v^2}\sqrt{\vec{a}^T P \vec{a}} = \sqrt{\frac{a^2 v^2 - (\vec{v}\cdot\vec{a})^2}{v^6}}$$

或者

$$N = \frac{1}{v^2}\left|\frac{\vec{v}}{v}\times\left(\frac{\vec{v}}{v}\times\vec{a}\right)\right| = \frac{1}{v^2}\left|\frac{\vec{v}}{v}\times\vec{a}\right| = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v^3}$$

$$\rho = \frac{1}{N} = \frac{v^2}{a_n} = \sqrt{\frac{v^6}{a^2v^2 - (\vec{v}\cdot\vec{a})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2) - (\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})^2}}$$

如果取弧长参数

$$t = s, \qquad \vec{r} = \vec{r}(s)$$

则

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = 1$$
$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z} = 0$$
$$\rho = \left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

对平面曲线$y = y(x)$，相当于取参数$t = x$，

$$\vec{v} = (1, \quad y')^T, \qquad \vec{a} = (0, \quad y'')^T$$

于是有牛顿曲率公式

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

类似地可求得极坐标曲线$r = r(\theta)$的曲率半径为

$$\rho = \frac{(r+r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$$

使用哪一种坐标系取决于问题的场景。取容易将运动方程分离变量的坐标系，或者方便理解问题的坐标系。

三、 黎曼几何简介

1. 曲线坐标系

(1) 流形和嵌入

流形（manifold）：在每一点的邻域，都存在n维局部欧几里得坐标的拓扑空间。

Euclid 空间、闵可夫斯基空间、曲线、曲面等都是流形。

惠特尼**嵌入定理**(Whitney, H.)：n-维流形可以嵌入欧氏空间$\mathbf{R}^{2n}$.

设n维流形M可嵌入N维欧几里得空间E，

$$N \geq n \geq 1$$

把流形嵌入的欧氏空间改为闵氏空间，则得到伪黎曼空间。本节的讨论同样适用于伪黎曼空间。

(2) 欧氏空间的笛卡尔标准基

标准基：

在欧氏空间$\mathbf{R}^{\mathrm{N}}$中任意的矢量$\boldsymbol{v}$可写成

$$\boldsymbol{v} = v^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

其中

$$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_i | i = 1,2,\cdots,N\}$$

是欧氏空间的标准基。

上下指标：

为了方便，我们在讨论一般的流形时，把基矢的指标写在右下角，而把坐标分量的指标写在右上角。以此表明坐标架$\tilde{\boldsymbol{e}}_i$与坐标v^i按互逆的方式变换，从而整个矢量不依赖于坐标架的选取，$v^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i$是不变的。

欧氏空间的直角坐标标准基$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_i | i = 1,2,\cdots,N\}$与点的位置无关，

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{\boldsymbol{e}}_i = 0$$

(3) 流形的标架场

设n维流形的坐标参数为ξ^α，与嵌入的欧氏空间坐标之间的关系为

$$r^i = r^i(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n)$$
用希腊字母标记曲线坐标系的指标。

流形的**自然基矢**取为沿参数网格线的矢量（不要求正交归一），
$$\boldsymbol{e}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\alpha} \tilde{\boldsymbol{e}}_i, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n.$$
与时空点有关，每个点都有一套局部坐标架。

流形的坐标架各点不同（标架场 vierbein），在欧氏空间来看，其分量为
$$\vec{e}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^\alpha}, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n.$$
又称半度规，
$$\boldsymbol{e}_\alpha = (\vec{e}_\alpha)^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

(4)坐标参数的变换

重新取坐标参数为ξ'^α，则标架场变为
$$\boldsymbol{e}'_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi'^\alpha}$$
由链式法则，
$$\boldsymbol{e}'_\alpha = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi'^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^\beta}$$
记雅可比矩阵为
$$\Lambda^\alpha_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial \xi^\beta}$$
逆矩阵为
$$\overline{\Lambda}^\beta_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi'^\alpha}$$
那么
$$\boldsymbol{e}'_\alpha = \overline{\Lambda}^\beta_\alpha \boldsymbol{e}_\beta$$
$$\vec{e}'_\alpha = \overline{\Lambda}^\beta_\alpha \vec{e}_\beta$$
满足，
$$\overline{\Lambda}^\alpha_\gamma \Lambda^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta, \qquad \overline{\Lambda}^\gamma_\alpha \Lambda^\beta_\gamma = \delta^\beta_\alpha$$
δ^β_α是 Kronecker 符号。

一个矢量物理量是客观存在，不依赖于坐标参数和标架场的选择，具有广义不变性，所以
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} = v^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = v'^\alpha \boldsymbol{e}'_\alpha \\ \boldsymbol{e}'_\alpha = \overline{\Lambda}^\beta_\alpha \boldsymbol{e}_\beta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = v'^\alpha \overline{\Lambda}^\beta_{\cdot\alpha} \boldsymbol{e}_\beta \Longrightarrow v^\beta = v'^\alpha \overline{\Lambda}^\beta_\alpha \Longrightarrow v'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta v^\beta$$

即基矢与分量的变换矩阵互逆。

2. 度规张量

(1) 黎曼度规张量

黎曼度规张量（metric tensor），又称度规矩阵，定义为

$$g_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$$

是两个半度规的缩并。

度规张量（场）的指标是交换对称的，

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$$

例 对三维欧氏空间，如果使用笛卡尔坐标，度规矩阵及其逆矩阵都是单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 狭义相对论中的四维 Minkowski 空间（伪欧氏空间）度规为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

对（伪）黎曼几何，度规张量描述了空间的全部局部性质，不再需要考虑嵌入空间和半度规，一切性质都是内禀的。

(2) 距离

邻近点的距离平方为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \delta_{jk} dr^i dr^j = \delta_{jk} \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \frac{\partial r^j}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta = \delta_{jk} \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial r^j}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta d\xi^\alpha d\xi^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \end{aligned}$$

是正定二次型。

黎曼空间的度规矩阵是正定对称矩阵，非奇异，

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \qquad \det g \neq 0$$

度规矩阵的逆矩阵为

$$\left(g^{\alpha\beta}\right) \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}$$

也是对称矩阵，

$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$$

并且有

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$$

(3) 基矢的完备性

按度规的定义，

$$\left(g^{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha\vec{e}_\beta^T\right)\vec{e}_\gamma = g^{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha\left(\vec{e}_\beta\cdot\vec{e}_\gamma\right) = g^{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha g_{\beta\gamma} = g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}\vec{e}_\alpha = \delta^{\alpha}_{\gamma}\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\gamma$$

$$\left(g^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\right).\boldsymbol{e}_\gamma = \boldsymbol{e}_\gamma$$

再由$\{\boldsymbol{e}_\gamma|\gamma = 1,2,\cdots,n\}$在黎曼空间的完备性，

$$g^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta = \mathbf{1},\qquad g^{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha\vec{e}_\beta^T = \mathbf{1}_{n\times n}$$

3. 协变和逆变

(1) 度规张量的坐标变换

度规张量的变换为

$$g'_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}'_\alpha\cdot\boldsymbol{e}'_\beta = \overline{\Lambda}^{\mu}_{\alpha}\overline{\Lambda}^{\nu}_{\beta}\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu = \overline{\Lambda}^{\mu}_{\alpha}\overline{\Lambda}^{\nu}_{\beta}g_{\mu\nu}$$

$g_{\alpha\beta}$的两个下指标均按基矢的方式变换，称为二阶**协变张量**（covariant tensor）。

度规矩阵的逆矩阵满足

$$g'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}g^{\mu\nu}$$

$g^{\alpha\beta}$的两个上指标均按坐标的方式变换，称为二阶**逆变张量**。

Sylvester **惯性定理** 对称矩阵正、负、零特征值的个数，在合同变换下不变。

故参数变换不改变度规矩阵正、负、零特征值的个数。
选择合适的参数可以使得度规成为对角矩阵，且对角元取± 1。

(2) 指标的升降

矢量的分量在参数变换下作逆变换，

$$v'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}v^{\beta}$$

称v^α为**逆变矢量**（contravariant vector）。

将矢量的坐标与度规张量缩并，定义

$$v_\alpha \overset{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} v^\beta$$

在坐标变换下

$$v'_\alpha = g'_{\alpha\beta} v'^\beta = \overline{\Lambda}^\mu_\alpha \overline{\Lambda}^\nu_\beta g_{\mu\nu} \Lambda^\beta_\gamma v^\gamma = \overline{\Lambda}^\mu_\alpha \left(\overline{\Lambda}^\nu_\beta \Lambda^\beta_\gamma\right) g_{\mu\nu} v^\gamma = \overline{\Lambda}^\mu_\alpha \delta^\nu_\gamma g_{\mu\nu} v^\gamma = \overline{\Lambda}^\mu_\alpha g_{\mu\nu} v^\nu = \overline{\Lambda}^\mu_\alpha v_\mu$$

v_α是**协变矢量**。

反之，一个协变矢量u_α，可以通过降指标成为

$$u^\alpha \overset{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} u_\beta$$

在坐标变换下，

$$u'^\alpha = g'^{\alpha\beta} u'_\beta = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g^{\mu\nu} \overline{\Lambda}^\gamma_\beta u_\gamma = \Lambda^\alpha_\mu \delta^\gamma_\nu g^{\mu\nu} u_\gamma = \Lambda^\alpha_\mu u^\mu$$

是逆变矢量。

一般的，我们可以用度规张量升降张量的指标，

$$T_\alpha^{\cdot\beta\gamma} = g_{\alpha\mu} T^{\mu\beta\gamma}$$

$$T^{\beta\cdot\gamma}_{\cdot\alpha} = g_{\alpha\mu} T^{\beta\mu\gamma}$$

其中“·”是指标占位符，以显示第几个指标被升降，

$$T_\alpha^{\cdot\beta\gamma} \neq T^{\beta\cdot\gamma}_{\cdot\alpha}$$

上指标称为**逆变指标**，下指标称为**协变指标**。上下指标都有的张量，称为**混合张量**。

欧氏空间的直角坐标下，度规是单位矩阵，所以笛卡尔张量无需考虑上下指标的区别。

例 基矢的完备性

$$g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{e}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = \mathbf{1}$$

基矢的内积

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

可见$\boldsymbol{e}^\alpha$是$\boldsymbol{e}_\alpha$的对偶矢量（dual vector），

$$\boldsymbol{e}^\alpha = g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\beta$$

$$\vec{e}^\alpha = g^{\alpha\beta} \vec{e}_\beta$$

以α为列指标排成矩阵，右边即

$$(V^T V)^{-1} V^T$$

基矢内积

$$\vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta \Leftrightarrow \{(V^T V)^{-1} V^T\} V = \mathbf{1}_{n\times n}$$

这里的$n \times N$矩阵$\{(V^T V)^{-1} V^T\}$，是$N \times n$矩阵V的广义逆（Penrose 逆、伪逆、左逆）。

例 Kronecker 符号是复合张量，

$$\Lambda^\alpha_\mu \overline{\Lambda}^\nu_\beta \delta^\mu_\nu = \Lambda^\alpha_\mu \overline{\Lambda}^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

4. 张量密度

Levi-Civita 符号在坐标变换时，

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}\to\varepsilon'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}\equiv\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}\\ \overline{\Lambda}^{\beta_1}_{\alpha_1}\overline{\Lambda}^{\beta_2}_{\alpha_2}\cdots\overline{\Lambda}^{\beta_N}_{\alpha_N}\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_N}=(\det\Lambda)^{-1}\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\varepsilon'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}=(\det\Lambda)^{+1}\overline{\Lambda}^{\beta_1}_{\alpha_1}\overline{\Lambda}^{\beta_2}_{\alpha_2}\cdots\overline{\Lambda}^{\beta_N}_{\alpha_N}\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_N}$$

$$\varepsilon'^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}=(\det\Lambda)^{-1}\Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1}\Lambda^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots\Lambda^{\alpha_N}_{\beta_N}\varepsilon^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_N}$$

当

$$\det\Lambda\neq 1$$

时，不符合张量的定义，相差雅可比行列式$(\det\Lambda)^w$，称为**张量密度**。w称为张量密度的**权重**。

度规矩阵的行列式

$$\det g=\det\left(g_{\mu\nu}\right)$$

也不是标量，

$$g'=\overline{\Lambda}^T g\overline{\Lambda}\Longrightarrow\det g'=(\det\Lambda)^{-2}\det g$$

是权重为(-2)的张量密度。

因此在黎曼几何中，广义协变的 **Levi-Civita 张量**应该定义为

$$\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{\det g}\,\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}$$

$$\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{\det g}}\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}$$

两个矢量的叉乘

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\stackrel{\text{def}}{=}u^{\alpha_1}v^{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}\boldsymbol{e}^{\alpha_3}\boldsymbol{e}^{\alpha_4}\cdots\boldsymbol{e}^{\alpha_N}=\sqrt{\det g}\,u^{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}\boldsymbol{e}^{\alpha_3}\boldsymbol{e}^{\alpha_4}\cdots\boldsymbol{e}^{\alpha_N}$$

体积元

$$d\xi'^1 d\xi'^2\cdots d\xi'^N=\det\Lambda\,d\xi^1 d\xi^2\cdots d\xi^N$$

权重为 1，故标量体积元定义为

$$\sqrt{\det g}\,d\xi^1 d\xi^2\cdots d\xi^N$$

有向面积

$$\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}d\xi^{\alpha_1}d\xi^{\alpha_2}=\sqrt{\det g}\,\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}d\xi^{\alpha_1}d\xi^{\alpha_2}$$

5. 协变导数*

(1) 联络

矢量场$\boldsymbol{v}$在两个点的差是坐标参数变换的不变量，

$$d\boldsymbol{v} = d(v^\beta \boldsymbol{e}_\beta) = \{(\partial_\alpha v^\beta)\boldsymbol{e}_\beta + v^\beta(\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha)\}d\xi^\alpha$$

利用投影算符

$$\boldsymbol{P} \overset{\text{def}}{=} g^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\mu\boldsymbol{e}_\nu = \boldsymbol{e}^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda$$

从嵌入的欧几里得空间投影到流形的切空间，

$$d\boldsymbol{v} = d\xi^\beta\{(\partial_\beta v^\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha + v^\alpha(\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha)\cdot\boldsymbol{e}^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda + v^\alpha(\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha)\cdot(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{e}^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda)\}$$

定义 **Christoffel 联络**

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} (\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta)\cdot\boldsymbol{e}^\lambda$$

以及

$$H^{\sigma}_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} (\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha)\cdot\boldsymbol{e}^{\perp\sigma}$$

其中$\boldsymbol{e}^\perp_\sigma$是正交补空间的基矢，

$$\boldsymbol{e}^\perp_\sigma = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{e}^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda)\cdot\boldsymbol{e}^\perp_\sigma$$

则

$$\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\lambda + H^{\sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\perp_\sigma$$

$$d\boldsymbol{v} = \{(\partial_\alpha v^\beta)\boldsymbol{e}_\beta + v^\beta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\lambda + v^\beta H^{\sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\perp_\sigma\}d\xi^\alpha$$

Christoffel 联络的两个下标是对称的，

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} = (\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta)\cdot\boldsymbol{e}^\lambda = \frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta}\cdot\boldsymbol{e}^\lambda$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\cdot\beta\alpha}$$

(2) 协变导数

如果

$$H^{\sigma}_{\alpha\beta} = 0$$

那么

$$\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\lambda$$

$$d\boldsymbol{v} = \left\{(\partial_\alpha v^\beta) + v^\lambda\Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda}\right\}\boldsymbol{e}_\beta d\xi^\alpha$$

可见$\partial_\alpha v^\beta$与$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}$都不是张量，但这时

$$\partial_\alpha v^\beta + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda}v^\lambda$$

是张量。因此定义协变导数

$$\nabla_\alpha v^\beta \overset{\text{def}}{=} v^\beta_{;\alpha} = \partial_\alpha v^\beta + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda}v^\lambda$$

有

$$\nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = 0$$

$$\nabla_\alpha v_\beta \equiv v_{\beta;\alpha} = \partial_\alpha v_\beta - \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}v_\lambda$$

对二阶张量可得

$$\nabla_\alpha T^{\beta\gamma} \equiv \partial_\alpha T^{\beta\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda}T^{\lambda\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\cdot\alpha\lambda}T^{\beta\lambda}$$

零阶张量

$$\nabla_\alpha f \equiv \partial_\alpha f$$

(3) 联络的表达式

记

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{\lambda}_{\cdot\beta\gamma} g_{\lambda\alpha} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_\alpha \cdot (\partial_\beta \boldsymbol{e}_\gamma)$$

可得

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha(\boldsymbol{e}_\beta \cdot \boldsymbol{e}_\gamma)$$
$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \text{①}$$
$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \text{②}$$
$$\partial_\beta g_{\gamma\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} \text{③}$$

② + ③ − ①，得

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(-\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha})$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta})$$

例 曲线坐标系的牛顿方程

使用广义坐标表示质点的位移，

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1(t), q^2(t), \cdots, q^n(t))$$

则自然基为

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

度规为

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial r^j}{\partial q^\alpha} \delta_{ij}$$

质点的速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr^i}{dt} \boldsymbol{e}_i = \dot{q}^\alpha \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \dot{q}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \dot{q}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = \ddot{q}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \dot{q}^\alpha \frac{d\boldsymbol{e}_\alpha}{dt} = \ddot{q}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial q^\beta} = \ddot{q}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\lambda$$

$$a^\mu = \ddot{q}^\mu + \Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$$

得运动方程

$$F^\mu = m\left(\ddot{q}^\mu + \Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right)$$

如果是保守力，

$$V = V(q)$$

$$F^\mu = g^{\mu\nu} F_\nu = -g^{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial q^\nu}$$

$$m\left(\ddot{q}^\mu + \Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right) + g^{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial q^\nu} = 0$$

练习 $\nabla_\alpha g^{\mu\nu}=?$ $\nabla_\alpha A^\mu B^\nu=?$ $\nabla_\alpha \boldsymbol{e}^\beta=?$

6. 曲率张量*

(1)黎曼曲率张量

计算得

$$\left(\nabla_\alpha\nabla_\beta-\nabla_\beta\nabla_\alpha\right)A^\mu=R_{\alpha\beta\nu}{}^{\mu}A^\nu$$

黎曼曲率张量为

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}=\partial_\alpha\Gamma^\nu_{\ \beta\mu}-\partial_\beta\Gamma^\nu_{\ \alpha\mu}+\Gamma^\nu_{\ \gamma\alpha}\Gamma^\gamma_{\ \beta\mu}-\Gamma^\nu_{\ \gamma\beta}\Gamma^\gamma_{\ \alpha\mu}$$
$$R_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{\text{def}}{=}g_{\nu\gamma}R_{\alpha\beta\mu}{}^{\gamma}$$

(2)曲率张量的对称性

指标的交换对称性

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=R_{\mu\nu\alpha\beta}=-R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

Bianchi 第一恒等式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}+R_{\alpha\nu\beta\mu}+R_{\alpha\mu\nu\beta}=0$$

Bianchi 第二恒等式

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\nabla_\alpha R_{\beta\gamma\mu}{}^{\nu}++\nabla_\beta R_{\gamma\alpha\mu}{}^{\nu}+\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}=0$$

Ricci 张量

$$R_{\beta\mu}\overset{\text{def}}{=}g^{\alpha\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

曲率标量

$$R\overset{\text{def}}{=}g^{\beta\mu}R_{\beta\mu}=g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

(3)例子

例 三维 Euclid 空间球坐标参数，

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

自然基对应的标架场

$$\vec{e}_1=\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

度规张量场

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det g} = r^2\sin\theta$$

体积元

$$dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

逆变度规张量

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

非零的导数项

$$\partial_1 g_{22} = 2r, \qquad \partial_1 g_{33} = 2r\sin^2\theta\,, \qquad \partial_2 g_{33} = r^2\sin 2\theta$$

联络的非零分量

$$\Gamma_{122} = -r, \qquad \Gamma_{133} = -r\sin^2\theta$$

$$\Gamma_{212} = r, \qquad \Gamma_{221} = r, \qquad \Gamma_{233} = -\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$$

$$\Gamma_{313} = r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma_{323} = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\,, \qquad \Gamma_{331} = r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma_{332} = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$$

黎曼曲率分量$R_{ijkl} = 0$。

7. 梯度、散度和旋度*

标量场的微分的意义两个点处的数值差，不依赖于坐标架，

$$df = \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\beta = \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \boldsymbol{e}^\alpha \cdot d\xi^\beta \boldsymbol{e}_\beta$$

所以梯度为

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$$

矢量的散度

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \nabla_\alpha v^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\alpha \sqrt{\det g}\, v^\alpha$$

Laplace 算符

$$\nabla^2 f = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\alpha \sqrt{\det g}\, \partial^\alpha f$$

矢量的旋度（三维空间）

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}=\epsilon^{ijk}\left(\nabla_i v_j\right)\boldsymbol{e}_k=\frac{1}{\sqrt{\det g}}\varepsilon^{ijk}\left(\nabla_i v_j\right)\boldsymbol{e}_k$$

练习 计算

$$\frac{1}{\sqrt{\det g}}\left(\partial_\alpha\sqrt{\det g}\right)$$

提示：利用行列式的微分公式

$$(\det A)\mathbf{1}=A\,\mathrm{adj}^{\mathrm{T}}(A)=\mathrm{adj}(A)\,A^T\Longrightarrow$$
$$d(\det \mathrm{A})=(\det \mathrm{A})\,\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{dA})$$

四、 微分形式[1]

1. 外代数

两个矢量的叉乘

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

表示以矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为边的平行四边形的有向面积，对两个矢量交换反对称，可以表示成外积

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a})=a^i b^j\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\right)\overset{\text{def}}{=}a^i b^j\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j$$

对m个指标$Z=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，定义反对称化算子

$$\hat{A}_m\alpha\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{m!}\sum_{\hat{\sigma}\in S_m}\mathrm{sng}\,\hat{\sigma}\cdot\hat{\sigma}\alpha$$

其中S_m是集合Z的所有元素置换，

$$\mathrm{sng}\,\hat{\sigma}=\begin{cases}+1, & \hat{\sigma}\text{是奇置换;}\\ -1, & \hat{\sigma}\text{是偶置换.}\end{cases}$$

高次外矢量可以递归定义。k次外矢量

$$\xi=\xi^{i_1 i_2\cdots i_k}\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_k}$$

与l次外矢量

$$\eta=\eta^{i_1 i_2\cdots i_l}\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_l}$$

的**外积**（exterior product, wedge, Hermann Grassmann）为

$$\xi\wedge\eta\overset{\text{def}}{=}\xi^{i_1 i_2\cdots i_k}\eta^{i_1 i_2\cdots i_l}\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\hat{A}_{k+l}\left(\left(\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_k}\right)\otimes\left(\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_l}\right)\right)$$

按此定义，我们先计算基矢的外积，

[1] 可参考陈省身、陈维恒《微分几何讲义》。

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$$

三个基矢的外积为

$$\left(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j\right) \wedge \boldsymbol{e}_k = \frac{3!}{2!\,1!}\hat{A}_3\left(\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\right) \otimes \boldsymbol{e}_k\right) = \frac{3!}{2!\,1!}2!\,\hat{A}_3\left(\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right) \otimes \boldsymbol{e}_k\right) = 3!\,\hat{A}_3\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$$
$$= \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$$
$$\left(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j\right) \wedge \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i \wedge \left(\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k\right)$$

满足结合律，可记作$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k$。

一般地，

$$\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \overset{\text{def}}{=} k!\,\hat{A}_k\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\cdots\boldsymbol{e}_{j_k} = \sum_{\hat{\sigma}\in S_k} \operatorname{sng}\hat{\sigma}\cdot\hat{\sigma}\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\cdots\boldsymbol{e}_{j_k} = \delta^{j_1 j_2\cdots j_k}_{i_1 i_2\cdots i_k}\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\cdots\boldsymbol{e}_{j_k}$$

其中广义 Kronecker 符号为

$$\delta^{i_1 i_2\cdots i_k}_{j_1 j_2\cdots j_k} = \varepsilon^{i_1 i_2\cdots i_k}\varepsilon_{j_1 j_2\cdots j_k} = \begin{cases} +1, & (j_1, j_2, \cdots, j_k)\text{是}(i_1, i_2, \cdots, i_k)\text{的偶排列；} \\ -1, & (j_1, j_2, \cdots, j_k)\text{是}(i_1, i_2, \cdots, i_k)\text{的奇排列；} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

指标缩并时满足性质[2]（n是线性空间的维数）

$$\delta^{i_1 i_2\cdots i_k l}_{j_1 j_2\cdots j_k l} \equiv (n-k)\delta^{i_1 i_2\cdots i_k}_{j_1 j_2\cdots j_k}$$

外积满足（证明略）

（1）分配律：

$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta$$

（2）交换律：

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \xi$$

（3）结合律：

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$$

于是两个外矢量矢量的外积为

$$\xi \wedge \eta = \left(\xi^{i_1 i_2\cdots i_k}\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\right) \wedge \left(\eta^{i_1 i_2\cdots i_l}\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_l}\right)$$
$$= \xi^{i_1 i_2\cdots i_k}\eta^{i_{k+1} i_{k+2}\cdots i_{k+l}}\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k+l}}$$

由于反对称性，在三维空间中，外矢量最低为零次，最高为 3 次。

例 两个矢量的外积

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = a^i b^j \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = a^i b^j\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\right) = \left(a^i b^j - a^j b^i\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

三个矢量的外积

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = a^i b^j c^k \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k$$
$$= \left(a^i b^j c^k + a^j b^k c^i + a^k b^i c^j - a^i b^k c^j - a^j b^i c^k - a^k b^j c^i\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$$

定理 矢量$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$线性相关的充要条件是

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k = 0$$

证明 若这组矢量线性相关，不妨设ω_k是$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{k-1}$的线性组合，则必有

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 \cdots + \alpha_k\omega_k) = 0$$

[2] $i_1, i_2, \cdots, i_k$确定后，l有$n-k$种取法。

反之，设这组矢量线性无关，则可以扩充成n维空间的完备基$\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k, \omega_{k+1}, \cdots, \omega_n\}$，由于

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n \neq 0$$

所以

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \neq 0$$

2. 微分形式

嘉当（E. Cartan）为了推广微分，把dx^i看成是沿着自然基方向、长度为dx^i的矢量，称为**微分 1-形式**。

矢量场可以表示 1-形式，

$$V_i dx^i$$

这里dx^i是 1-形式的基。

1-形式的外积为微分 2-形式（differential 2-form），

$$dx^i \wedge dx^j$$

是 2-形式的一组基。

二阶反对称张量场可以表示为 2-形式，

$$T_{ij}\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \to T_{ij} dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2!}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2!} T_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j - dx^i \otimes dx^j\right)$$

$$= \frac{1}{2!} T_{jk} dx^i \wedge dx^j$$

一个k阶全反对称张量可以写成

$$T = \frac{1}{k!} T_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

在n维流形上，可以定义 0-形式（标量），1-形式，……，n-形式，更高阶的微分形式为零。

例 在三维流形直角坐标系，两个 1-形式的外积

$$\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right) \wedge \left(b_x dx + b_y dy + b_z dz\right)$$
$$= \left(a_x b_y - a_y b_x\right) dx \wedge dy + \left(a_y b_z - a_z b_y\right) dy \wedge dz + \left(a_z b_x - a_x b_z\right) dz \wedge dx$$

实为两个矢量的叉乘。

三个 1-形式的外积，

$$\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right) \wedge \left(b_x dx + b_y dy + b_z dz\right) \wedge \left(c_x dx + c_y dy + c_z dz\right)$$
$$= \left\{\left(a_x b_y - a_y b_x\right) c_z + \left(a_y b_z - a_z b_y\right) c_x + \left(a_z b_x - a_x b_z\right) c_y\right\} dx \wedge dy \wedge dz$$
$$= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\, dx \wedge dy \wedge dz$$

是混合积。

3. 外微分

外微分d（exterior derivative, exterior differential）把k次微分形式映射为$k+1$次微分形式，满足

（1）0-形式$f(x)$的外微分即梯度，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

（2）线性：对任意两个微分形式ω_1, ω_2有

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

（3）设ω_1是r次外微分式，则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$$

（4）0-形式$f(x)$的 2 次外微分为零，

$$d(df) = 0 \Leftrightarrow d\left(dx^i\right) = 0$$

注意第四条性质，与微积分中$d^2 f(x)$一般不为零不同，

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} d\left(dx^i\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0$$

例 矢量场可写成 1-形式，

$$A = A_i dx^i$$

它的外微分

$$dA = \partial_j A_i dx^j \wedge dx^i$$

在三维空间，

$$\partial_j A_i dx^j \wedge dx^i = \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right) dx \wedge dy + \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right) dy \wedge dz + \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right) dz \wedge dx$$

是矢量的旋度。

例 对微分 2-形式

$$F = \frac{1}{2!} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

求外微分，

$$dF = \frac{1}{2!}\left(dF_{ij}\right) \wedge \left(dx^i \wedge dx^j\right) = \frac{1}{2!}\left(\partial_k F_{ij} dx^k\right) \wedge \left(dx^i \wedge dx^j\right) = \frac{1}{2!} \partial_k F_{ij} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

在三维空间，

$$\frac{1}{2!} \partial_k F_{ij} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{2}(\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} - \partial_1 F_{32} - \partial_2 F_{13} - \partial_3 F_{21}) dx \wedge dy \wedge dz$$

利用张量的反对称性

$$F_{ij} = -F_{ji}$$

化简得

$$dF = (\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12}) dx \wedge dy \wedge dz$$

我们来看这有什么几何意义。由于

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2!} F_{ij} dx^i \wedge dx^j &= \frac{1}{2}(F_{12} - F_{21}) dx \wedge dy + \frac{1}{2}(F_{23} - F_{32}) dy \wedge dz + \frac{1}{2}(F_{31} - F_{13}) dz \wedge dx \\ &= F_{12} dx \wedge dy + F_{23} dy \wedge dz + F_{31} dz \wedge dx \end{aligned}$$

定义星映射（Hodge star operator）

$$B_i = (*F)_i \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{jk}{}_i F_{jk}$$

为它的对偶（F dual）

$$B_1 = \frac{1}{2!}(F_{23} - F_{32}), \qquad B_2 = \frac{1}{2!}(F_{31} - F_{13}), \qquad B_3 = \frac{1}{2!}(F_{12} - F_{21})$$

那么

$$\frac{1}{2!}F_{ij}dx^i \wedge dx^j = B_1 dx \wedge dy + B_2 dy \wedge dz + B_3 dz \wedge dx$$

则

$$dF = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

是矢量场

$$B = B_i dx^i$$

的散度。

例 二维空间中的映射$p(x,y), q(x,y)$，其外微分的外积

$$dp \wedge dq = \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial p}{\partial x}dx \wedge \frac{\partial q}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial y}dy \wedge \frac{\partial p}{\partial x}dx$$
$$= \left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) dx \wedge dy = \frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} dx \wedge dy$$

霍奇对偶 Hodge duality

$$(*\xi)_{i_1 i_2 \cdots i_{n-k}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k!}\epsilon^{j_1 J_2 \cdots j_k}{}_{i_1 i_2 \cdots i_{n-k}} \xi_{j_1 J_2 \cdots j_k}$$
$$**\xi \equiv (\operatorname{sgn}\det g)(-1)^{k(n-k)}\xi$$

三维空间

$$*(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \qquad *(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$$
$$*\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

定理 （庞加莱 Poincaré 引理）

$$d^2 = 0$$

即对任意微分形式ω，

$$d(d\omega) = 0$$

证明 设

$$\omega = f_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

则

$$d\omega = \frac{\partial f_{i_1 i_2 \cdots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

$$d^2\omega = \frac{\partial^2 f_{i_1 i_2 \cdots i_r}}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

由于求偏导可交换，而微分形式的基是反对称的，

$$d^2\omega = 0$$

推论 三维空间中 0-形式满足

$$d^2 f = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \nabla f = \vec{0}$$

1-形式满足

$$d^2 A = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0$$

4. 可积性

定理 （弗罗本尼斯 Frobenius 可积性条件）一次微分形式ω（法夫 Pfaff 形式）可积的充要条件是

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

（其中流形维数需大于或等于 3）

定理 如果$\Omega \overset{\text{def}}{=} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n \neq 0$，则法夫形式$\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$构成完全可积组的充要条件是[3]

$$\Omega \wedge d\omega_j = 0, \qquad j = 1,2,\cdots,n.$$

（其中流形维数需大于或等于n+2）

证明略。Frobenius 定理考虑了在方程组前乘以积分因子之后可积的情况。

特例：三个自由度的情形

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

可积条件为

$$\vec{F} \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) = 0$$

5. Stokes 公式*

设D是m维定向流形M中的带边区域，ω是M上有紧致支集的$m-1$次外微分式，则

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

其中若$\partial D = \emptyset$，则规定右边的积分为零。

[3] 陈省身、陈维恒，《微分几何讲义》p229