Homework 14

BY 刘家骥 PB20071417

2022年12月19日

3, (1)

解:

由于目标函数要求的是最小值, 因此令

$$\tilde{z}=-z$$

对于无约束的变量x_4, 令$x_4=x_5-x_6$

对约束条件的第一个等式两边乘以 - 1, 以使常数项为正.

添加松弛变量x_7, x_8, 使得

$$x_1+x_2-x_3+2(x_5-x_6)+x_7=14,\ x_7\geqslant 0$$

$$-2x_1+3x_2+x_3-(x_5-x_6)-x_8=2,\ x_8\geqslant 0$$

因此化为标准形式就是

$$\max\tilde{z}=x_1-2x_2+3x_3-2(x_5-x_6)+0x_7+0x_8$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-4x_1+x_2-2x_3+(x_5-x_6)=2\\x_1+x_2-x_3+2(x_5-x_6)+x_7=14\\-2x_1+3x_2+x_3-(x_5-x_6)-x_8=2\\x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8\geqslant 0\end{cases}$$

显然, 从这里, 还不能直接找出一组为单位矩阵的基, 因此需要添加人工变量x_9,x_{10}, 构造出单位矩阵的基(这些人工变量最终都是要取0的):

$$\max\tilde{z}=x_1-2x_2+3x_3-2(x_5-x_6)+0x_7+0x_8-M(x_9+x_{10})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-4x_1+x_2-2x_3+(x_5-x_6)+x_9=2\\x_1+x_2-x_3+2(x_5-x_6)+x_7=14\\-2x_1+3x_2+x_3-(x_5-x_6)-x_8+x_{10}=2\\x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\geqslant 0\end{cases}$$

由此列出初始单纯形表如下:

$c_j\rightarrow$			1	-2	3	-2	2	0	0	-M	-M
$\vec{c}_B$	$\vec{x}_B$	$\vec{b}$	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	x_7	14	1	1	-1	2	-2	1	0	0	0
-M	x_9	2	-4	1	-2	1	-1	0	0	1	0
-M	x_{10}	2	-2	3	1	-1	1	0	-1	0	1
σ_j			1-6M	-2+4M	3-M	-2	2	0	-M	0	0

4, (1)

解:

系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

理论上至多可以得到$C_4^2=6$组基, 对应6组基解如下

$\overrightarrow{x^{(1)}}=(1,2,0,0)$, $\overrightarrow{x^{(2)}}=\left(\frac{45}{13},0,-\frac{14}{13},0\right)$, $\overrightarrow{x^{(3)}}=\left(\frac{34}{5},0,0,\frac{7}{5}\right)$, $\overrightarrow{x^{(4)}}=\left(0,\frac{45}{16},\frac{7}{16},0\right)$, $\overrightarrow{x^{(5)}}=\left(0,-\frac{7}{29},0,\frac{260}{87}\right)$, $\overrightarrow{x^{(6)}}=\left(0,0,-\frac{68}{31},-\frac{45}{31}\right)$,

其中基可行解有:

$\overrightarrow{x^{(1)}}=(1,2,0,0)$, $\overrightarrow{x^{(3)}}=\left(\frac{34}{5},0,0,\frac{7}{5}\right)$, $\overrightarrow{x^{(4)}}=\left(0,\frac{45}{16},\frac{7}{16},0\right)$,

分别代入目标函数

$$\min z=2x_1-x_2+3x_3+2x_4$$

可以发现, 最优解是

$$\overrightarrow{x^{(4)}}=\left(0,\frac{45}{16},\frac{7}{16},0\right).$$

5, (2)

解:

首先还是写出原问题对应的标准形式如下:

$$\max z=3x_1-2x_2+5x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1+2x_3+x_4=13 \\ x_2+3x_3+x_5=17 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_6=13 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 \end{cases}$$

由此列出初始单纯形表如下:

$c_j\rightarrow$			3	-2	5	0	0	0
$\vec{c}_B$	$\vec{x}_B$	$\vec{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	13	3	0	2	1	0	0
0	x_5	17	0	1	3	0	1	0
0	x_6	13	2	1	1	0	0	1
σ_j			3	-2	5	0	0	0

由此得到一组基解$\overrightarrow{x^{(0)}}=(0,0,0,13,17,13)$

根据非基指标σ_j最大且正者x_j入基, 比值$\lambda=\frac{x_l^{(0)}}{a_{lj}}$最小且正者$x_l$出基的规则, 进行执行:

$c_j\rightarrow$			3	-2	5	0	0	0
$\vec{c}_B$	$\vec{x}_B$	$\vec{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	$\frac{5}{3}$	3	-$\frac{2}{3}$	0	1	-$\frac{2}{3}$	0
5	x_3	$\frac{17}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	x_6	$\frac{22}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	0	0	-$\frac{1}{3}$	1
σ_j			3	-$\frac{11}{3}$	0	0	-$\frac{5}{3}$	0

$c_j \rightarrow$			3	-2	5	0	0	0
$\vec{c}_B$	$\vec{x}_B$	$\vec{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_1	$\frac{5}{9}$	1	-$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{9}$	0
5	x_3	$\frac{17}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	x_6	$\frac{56}{9}$	0	$\frac{10}{9}$	0	-$\frac{2}{3}$	-$\frac{7}{3}$	1
σ_j			0	-3	0	-1	-1	0

现在非基指标σ_j的值都为负了, 因此得到最优解:

$$\vec{x} = \left(\frac{5}{9}, 0, \frac{17}{3}, 0, 0, \frac{56}{9}\right)$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{9} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \dfrac{17}{3} \end{cases}$$

从而

$$\max z = 30$$