

2022秋计算方法作业 #6

10分 1. 设有线性方程组 $Ax = b$, 其中,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) 写出Jacobi迭代的迭代格式(分量形式);
- (b) 求Jacobi迭代的迭代矩阵;
- (c) 讨论此时Jacobi迭代(方法)的收敛性.

10分 2. 设有线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 30 \end{cases}$$

- (a) 分别写出Gauss-Seidel迭代和SOR迭代的分量形式;
- (b) 求Gauss-Seidel迭代的分裂矩阵(splitting matrix)及迭代矩阵(iteration matrix);
- (c) 讨论Gauss-Seidel迭代的收敛性(请给出理由或证明)。

6分 3. 设有线性方程组 $Ax = b$, 其中, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
利用如下迭代公式解此方程

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- (a) 写出此迭代公式的迭代矩阵;
- (b) 求使该迭代收敛时参数 α 的最大取值范围;
- (c) 当 α 取何值时, 迭代收敛速度最快.