Homework 13

BY 刘家骥 PB20071417

2022年12月18日

18, 解:

求$f(x)=x^2$的二次最佳平方逼近三角多项式，即

$$f_2(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{2}(a_i\cos ix+b_i\sin ix), x\in[-\pi,\pi]$$

得到

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos kx\ \mathrm{d}x,\ k=0,1,2$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin kx\ \mathrm{d}x,\ k=1,2$$

因此

$$a_0=\frac{2}{3}\pi^2, a_1=-4, a_2=1$$

$$b_k=0$$

得到

$$f_2(x)=\frac{1}{3}\pi^2-4\cos x+\cos 2x$$

25, 解:

（a）证明:

对于$f(x)\in C^2[a,b]$, 且$f''(x)\neq 0$, 在$[a,b]$上$f(x)$的一次最佳逼近多项式为 $p_1^*(x)=c_0+c_1x$

这里指的应该是一次最佳一致逼近多项式。

误差函数

$$e^*(x)=f(x)-p_1(x)$$

由于$e^*(x)$要有$n+2=3$个交错点，也就是$e^*(x)$的极值点和两个端点.

而由于$f''(x)\neq 0$, $e^{*\prime}(x)=f'(x)-c_1=0$ 在$[a,b]$内仅有一个根,

因此$f'(x)-c_1=0$ 时记 $x=\tilde{x}$, 即有$f'(\tilde{x})=c_1$

由一次最佳一致逼近多项式定义

$$\begin{cases} f(a)-c_0-c_1a=\rho \\ f(\tilde{x})-c_0-c_1\tilde{x}=-\rho \\ f(b)-c_0-c_1b=\rho \end{cases}$$

由此得到

$$c_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

记$c=\tilde{x}$, 则有

$$c_0=\frac{f(a)+f(c)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{a+c}{2}$$

得证.

(b) 将区间替换为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\cos x$

得到

$$c_1=-\frac{2}{\pi},\ c_0=\frac{1+f(c)}{2}+\frac{c}{\pi}$$

而由于$c_1=f'(c)\Rightarrow-\frac{2}{\pi}=-\sin c,\ c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

因此$c=\arcsin\frac{2}{\pi},\ \cos c=\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}\Rightarrow c_0=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{\pi}$

即

$$p_1^*(x)=-\frac{2}{\pi}x+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{\pi}$$

26, 解:

求二次最佳一致逼近多项式.

由切比雪夫交错定理, 应该有$n\ +\ 2\ =$4个交错点

设误差函数$e^*(x)=p(x)-p_2^*(x)=p(x)-(c_0+c_1x+c_2x^2)$

则$e^{*\prime}(x)=p'(x)-(c_1+2c_2x)=0$应有两个实根, 记为$c$和$d$

$$\begin{cases}p(-1)-p_2^*(-1)=\rho\\ p(c)-p_2^*(c)=-\rho\\ p(d)-p_2^*(d)=\rho\\ p(1)-p_2^*(1)=-\rho\end{cases}$$

但是我们会发现这种方式的计算量是比较大的. 因此需要采用其他可行的方法.

例如使用Chebyshev多项式进行近似.

原多项式是$p(x)=6x^3+3x^2+x+4$, 构造一个最高次项为1的多项式

$$p_3^*(x)=\frac{1}{6}p(x)-p_2{}^*(x)$$

这个就是误差函数, 要达到最小, 令

$$p_3^*(x)=2^{1-3}T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$$

因此近似的最佳一致逼近多项式是

$$p_2(x)=6\cdot p_2^*(x)=3x^2+\frac{11}{2}x+4$$

27, 解:

根据定义, 在权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$时, 区间[-1, 1]内的'一组正交基函数就是(第一类)Chebyshev多项式.

因此设三次最佳平方逼近多项式为

$$S_3(x)=\sum_{i=0}^{3}c_iT_i(x)$$

其中系数

$$c_i = \frac{(f(x), T_i(x))}{(T_i(x), T_i(x))}$$

因此

$$c_1 = c_3 = 0,\ c_0 = \frac{\int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi}{2}x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}}{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}} \approx 0.4720,\ c_2 = \frac{\int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi}{2}x T_2(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}}{\int_{-1}^{1} T_2^2(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}} \approx -0.4994$$

得到

$$S_3(x) \approx -0.9988x^2 + 0.9714 \approx -x^2 + 1$$