2022计算方法作业 #9

1. 设有常微分初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = & -y(x), \qquad (0 \le x \le 1) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

假设求解区间[0,1]被 n 等分 (n充分大), 令 $h = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, ..., n)$,

(a) 分别写出用向前Euler公式，向后Euler公式，梯形公式以及改进的Euler公式求上述微分方程数值解时的差分格式（即 y_{k+1}与y_k二者之间的递推关系式）;

(b) 设 $y_0 = y(0)$，分别求此四种公式（方法）下的近似值y_n的表达式；(注：这里的y_n即是$y(x_n) \equiv y(1)$的近似值)

(c) 当 n 充分大(即区间长度$h \to 0$)时，分别判断四种方法下的近似值 y_n是否收敛到原问题的真解 $y(x)$在$x = 1$处的值 (i.e., $y(1)$).

2. 试推导例题7.4(第4版教材155-156页)中的差分格式

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\Big[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\Big]$$

的局部截断误差，即验证

$$T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{3}h^4 y^{(4)}(x_{n-1}) + O(h^5)$$

(提示：将差分格式右端的某些项在某点处同时作Taylor展开)

3. 试用线性多步法构造 $p = 1, q = 2$ 时的隐式差分格式，求该格式局部截断误差的误差主项并判断它的阶，最后为该隐式格式设计一种合适的预估-校正格式。