Homework 6
刘家骥 PB20071417

1，解:

(a)

方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\2\end{pmatrix}$$

将矩阵 A 拆成 $A=L+U+D$

$$D=\mathrm{diag}(2,2,2,2),U=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

则原方程组可以表示成: $x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$，即:

$$x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

迭代形式写成分量形式即是:

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}x_2^{(k)}+1\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{2}x_1^{(k)}+\frac{1}{2}x_3^{(k)}+0\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}x_2^{(k)}+\frac{1}{2}x_4^{(k)}+1\\x_4^{(k+1)}=\frac{1}{2}x_3^{(k)}+1\end{cases}$$

(b)求迭代矩阵，由以上，可知迭代矩阵就是$G=-D^{-1}(L+U)$，即

$$G=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

(c)讨论收敛性，可以先看系数矩阵 A，但是 A 既不是严格列占优也不是严格行占优，因此在这里只能用定义来讨论：计算 G 的谱半径$\rho(G)$.

这里根据谱半径的定义，先求矩阵 G 的特征值 λ，令$|\lambda I-G|=0$，可得

$$\begin{vmatrix}\lambda&-\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&\lambda&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\lambda&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&\lambda\end{vmatrix}=0$$

解得$\lambda_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$，$\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$，$\lambda_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$，$\lambda_4=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，可以发现$\rho(G)=|\lambda_i|_{\max}<1$

因此这里的 Jacobi 迭代收敛.

2，解:

(a) 先仿照 Jacobi 迭代的形式写，将系数阵 A 拆成

$$A=D+L+U=\mathrm{diag}(5,5,5)+\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&0&0\\2&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-3&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组可以化为$x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$，再把已算出的$x^{(k)}$在迭代中，用$x^{(k+1)}$

代替，即 $x^{(k+1)}=-D^{-1}Lx^{(k+1)}-D^{-1}Ux^{(k)}+D^{-1}b$，这个就是 Gauss-Seidel 迭代，写成分量形式就是:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}= & 0.6x_2^{(k)}-0.4x_3^{(k)}+2 \\ x_2^{(k+1)}=0.6x_1^{(k+1)} & -0.4x_3^{(k)}+4 \\ x_3^{(k+1)}=-0.4x_1^{(k+1)}-0.4x_2^{(k+1)} & +6 \end{cases}$$

对于松弛(SOR)迭代，设松弛因子为ω，则其分量形式可以写成:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\omega(-x_1^{(k)}+0.6x_2^{(k)}-0.4x_3^{(k)}+2) \\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\omega(0.6x_1^{(k+1)}-x_2^{(k)}-0.4x_3^{(k)}+4) \\ x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\omega(-0.4x_1^{(k+1)}-0.4x_2^{(k+1)}-x_3^{(k)}+6) \end{cases}$$

(b) 这里, Gauss-Seidel 迭代的可以改写成 $(D+L)x^{(k+1)}=-Ux^{(k)}+b$，因此分裂矩阵

$$Q=D+L=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

迭代矩阵

$$G=-(D+L)^{-1}U=-\begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0.2 & 0 \\ -0.128 & -0.08 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & -0.4 \\ 0 & 0.36 & -0.64 \\ 0 & -0.384 & 0.416 \end{pmatrix}$$

(c) 讨论迭代收敛性，先看 A 是否能够判断,由于$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 并不满足行或者列占优，而另一种方法是判断 A 是否是实对称正定矩阵，正定不好判断，因此还是利用定义，计算谱半径$\rho(G)$.计算出 G 的特征值为:

$$\lambda_1 \approx -0.1085,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3 \approx 0.8845$$

因此 $\rho(G)=\left|\lambda_i\right|_{\max}<1$, Gauss-Seidel 迭代收敛.

3，解:

(a) 迭代公式为: $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(b-Ax^{(k)})$

由已知，这种迭代方法比较类似于 SOR 迭代，应该可以通过控制α的大小来控制收敛速度，

但二者又有不同.

迭代公式可以化为: $x^{(k+1)}=(I-\alpha A)x^{(k)}+\alpha b$,因此迭代矩阵就是

$$G=I-\alpha A=\begin{pmatrix}1-3\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & 1-2\alpha\end{pmatrix}$$

(b) 现在要求使原迭代收敛的α 的取值范围.

直接利用定义: $\rho(G)=\left|\lambda_i\right|_{\max}<1$,

可以得到 G 的两个特征值$\lambda_1=-4\alpha+1$, $\lambda_2=-\alpha+1$, 因此有

$$\begin{cases}\left|-4\alpha+1\right|<1 \\ \left|-\alpha+1\right|<1\end{cases} \Rightarrow \alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

(c) 由于迭代收敛的速度是由$\rho(G)$大小唯一决定的, 因此只要知道$\rho(G)$最小时α的取值即可.

而$\rho(G)=\max\{|-4\alpha+1|,|-\alpha+1|\}$, $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 可以得到当$\alpha\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$时,

$(4\alpha-1)$和$(-\alpha+1)$的交点就是所求, 此时$\alpha=\frac{2}{5}=0.4$.

即$\alpha=\frac{2}{5}=0.4$时,收敛速度最快.