Homework 9

BY 刘家骥 PB20071417

1,
解:
(a)向前Euler公式如下

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k))$$

在本题中就是

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) - \frac{y(x_k)}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

向后Euler公式如下

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$$

在本题中就是

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) - \frac{y(x_{k+1})}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

梯形公式

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) - \frac{y(x_{k+1}) + y(x_k)}{2n}, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

改进的Euler公式, 也就是把梯形公式右边的$y(x_{k+1})$换成了向前Euler公式得到的$y(x_{k+1})$, 从而避免迭代过程, 以简化运算, 如下

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) - \frac{\left[y(x_k) - \frac{y(x_k)}{n}\right] + y(x_k)}{2n}, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

以上$y(x_k) = y_k$.
(b)记$y_0 = y(0)$,
向前Euler公式, 可变形为$y_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) y_k$, 因此结果是

$$y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n y_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

向后Euler公式, 可变形为$y_{k+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right) y_k$, (这本来是隐式格式, 只不过本题中比较简单, 恰好化成这种可以直接计算的形式).因此结果是

$$y_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n y_0 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

梯形公式, 可变形为$y_{k+1} = \frac{2n-1}{2n+1} y_k$, 因此结果是

$$y_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n y_0 = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$$

改进的Euler公式, 可变形为$y_{k+1}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)y_k$,因此结果是

$$y_n=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n y_0=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n$$

(c)对于原问题, 容易得到其解析解是

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x}$$

因此$y(1)=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.36787944$.
由于极限

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

因此向后Euler结果极限

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=\mathrm{e}^{-1}$$

向前Euler结果极限

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$$

梯形公式结果极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}+1\right)^{-n}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{t}+1\right)^{-t}\left(\frac{1}{t}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=\mathrm{e}^{-1}$$

改进的Euler公式, 可以用夹逼定理
由于

$$\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)\cdot\left(\frac{1+n}{n}\right)=1+\frac{1-n}{2n^3}<1\ \Rightarrow\ 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}<\frac{n}{1+n}$$

有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^n$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$$

因此以上四种方法都能收敛到$y(1)$.

2,
解:
原计算式是一个三步三阶的显式格式. 也就是说要验证误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}$是4阶的.
先假设在x_{n+1}左侧的其他点处y的精确值就是代入计算的值, 即

$$y_k=y(x_k),\quad k=n-2,\ n-1,\ n$$

则有

$$y_{n+1}=y(x_{n-1})+\frac{h}{3}[7f(x_n,\ y(x_n))-2f(x_{n-1},\ y(x_{n-1}))+f(x_{n-2},\ y(x_{n-2}))]$$

然后将上式在x_n处作Taylor展开:

$$y(x_{n-1})=y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(\eta_1)$$

$$f(x_n,\ y(x_n))=y'(x_n)$$

$$f(x_{n-1},\ y(x_{n-1}))=y'(x_{n-1})=y'(x)-hy''(x)+\frac{h^2}{2}y'''(x)-\frac{h^3}{6}y^{(4)}(\eta_2)$$

$$f(x_{n-2},\ y(x_{n-2}))=y'(x_{n-2})=y'(x)-2hy''(x)+2h^2y'''(x)-\frac{4h^3}{3}y^{(4)}(\eta_3)$$

再由介值定理, 整合得到

$$y_{n+1}=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)-\frac{7h^4}{24}y^{(4)}(\eta)$$

然后是对$y(x_{n+1})$展开:

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(\theta)$$

因此

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{h^4}{24}y^{(4)}+\frac{7h^4}{24}y^{(4)}(\eta)\xlongequal{\triangle}\frac{h^4}{3}y^{(4)}(\xi)=\frac{h^4}{3}y^{(4)}(x_{n-1})+O(h^5)$$

这就得到验证了.
3,
解:
和构建显式格式的方法类似, 积分区间是$[x_{n-1},\ x_{n+1}]$, 积分节点是$\{x_{n+1},\ x_n,\ x_{n-1}\}$, 记公式为

$$y_{n+1}=y_{n-1}+h[\alpha_0f(x_{n+1},y_{n+1})+\alpha_1f(x_n,y_n)+\alpha_2f(x_{n-1},y_{n-1})]$$

然后由数值积分公式得到

$$\alpha_0h=\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n-1})}\mathrm{d}\,x=\frac{h}{3}$$

$$\alpha_1h=\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}\frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n+1})(x_n-x_{n-1})}\mathrm{d}\,x=\frac{4h}{3}$$

$$\alpha_2h=\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}\frac{(x-x_{n+1})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_{n+1})(x_{n-1}-x_n)}\mathrm{d}\,x=\frac{h}{3}$$

由此得到了

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}[f(x_{n+1},y_{n+1})+4f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_{n-1})]$$

假设$y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$，为方便运算, 也设上式右边的$y_{n+1}=y(x_{n+1})$，
对上式于x_n处Taylor展开得到

$$y_{n+1}=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n)+\frac{7h^5}{360}y^{(5)}(x_n)+O(h^6)$$

然后与$y(x_{n+1})$的Taylor展开式相减,得到

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=-\frac{h^5}{90}y^{(5)}(x_n)+O(h^6)$$

也就是说误差主项是$-\frac{h^5}{90}y^{(5)}(x_n)$，这个公式的阶数是4.

为了得到预估-校正公式， 我们需要另外求出显式格式的公式(这里可以套用上一题的公式，因为都是p=1，q=2的情形)，如下:

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}[7f(x_n,\ y_n)-2f(x_{n-1},\ y_{n-1})+f(x_{n-2},\ y_{n-2})]$$

因此预估-校正公式就是

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_{n-1}+\dfrac{h}{3}[7f(x_n,\ y_n)-2f(x_{n-1},\ y_{n-1})+f(x_{n-2},\ y_{n-2})]\\ y_{n+1}=y_{n-1}+\dfrac{h}{3}[f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})+4f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_{n-1})]\end{cases}$$