Homework 11

BY 刘家骥 PB20071417

2022年12月8日

1, 解:

首先由矩阵特征值的定义, $Av_i = \lambda_i v_i$, 那么对于已经给定的实数α, 有

$$(A - \alpha I)\, v_i = (\lambda_i - \alpha) v_i$$

也就是说, 矩阵$(A - \alpha I)$有特征值$(\lambda_i - \alpha)$, 现在要求距离α最近的λ, 也就是求最小的$|\lambda_i - \alpha|$.

也就是求矩阵$(A - \alpha I)$模最小的特征值.

记$B = (A - \alpha I)$, 则规范格式为

$$\begin{cases} Y^{(k)} = \dfrac{X^{(k)}}{\|X^{(x)}\|_\infty} \\ X^{(k+1)} = B^{-1} Y^{(k)} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} Y^{(k)} = \dfrac{X^{(k)}}{\|X^{(x)}\|_\infty} \\ BX^{(k+1)} = Y^{(k)} \end{cases}$$

要求不对矩阵求逆, 在解线性方程组$BX^{(k+1)} = Y^{(k)}$时, 就需要考虑用其他可行的方法:

I) Doolittle LU分解法(或者 Crout LU分解法),

将矩阵 B 分解为

$$B = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

就可以直接求解$BX^{(k+1)} = Y^{(k)}$.

II) 迭代法,

利用Jacobi迭代或者Gauss-Seidel迭代, 求解$BX^{(k+1)} = Y^{(k)}$.(通常在矩阵阶数比较大时用迭代法求解更好)

然后k很大时, 就能得出B^{-1}的模最大特征值, 记为$\tilde{\lambda}$, 则$\tilde{\lambda} = \|X^{(k)}\|_\infty$,

则矩阵A距离α最近的特征值为

$$\lambda = \alpha + \frac{1}{\tilde{\lambda}}$$

2, 解:

由已知, 对A进行旋转变换的目的是让其变成对角阵.

$$A=\begin{pmatrix}7&1&2\\1&4&0\\2&0&3\end{pmatrix}$$

因此重点在于处理那些非对角元:

一般处理模最大非对角元的迭代速度更快.

因此使a_{13}和a_{31}变成0,

$$Q=Q(1,3,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&&\sin\theta\\&1&\\-\sin\theta&&\cos\theta\end{pmatrix}$$

令$\cos\theta=c,\sin\theta=d$, 得到

$$Q=\begin{pmatrix}c&&d\\&1&\\-d&&c\end{pmatrix}$$

则

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}7c^2-4cd+3d^2&c&2c^2-2d^2\\c&4&d\\2c^2-2d^2&d&3c^2+4cd+7d^2\end{pmatrix}$$

令$c=d=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 可以得到

$$A^{(1)}=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}3\sqrt{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&4&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&7\end{pmatrix}$$

这时我再将$a_{23}^{(1)}$和$a_{32}^{(1)}$变成0

$$Q=\begin{pmatrix}1&&\\&c&d\\&-d&c\end{pmatrix}$$

$$A^{(2)}=Q^{\mathrm{T}}A^{(1)}Q=\begin{pmatrix}3\sqrt{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}c&\frac{\sqrt{2}}{2}d\\\frac{\sqrt{2}}{2}c&4c^2-\sqrt{2}cd+7d^2&\frac{\sqrt{2}}{2}c^2-3cd-\frac{\sqrt{2}}{2}d^2\\\frac{\sqrt{2}}{2}d&\frac{\sqrt{2}}{2}c^2-3cd-\frac{\sqrt{2}}{2}d^2&7c^2+\sqrt{2}cd+4d^2\end{pmatrix}$$

令$\tan\vartheta=t$,

得到

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2-3t+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

解得$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$(-3±$\sqrt{11}$), 取绝对值较小的解, 得到$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$(-3+$\sqrt{11}$)≈0.223888.

因此$c=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=0.975842$,$d=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=0.218479$

得到

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix} 4.242641 & 0.690024 & 0.154488 \\ 0.690024 & 3.841690 & 0 \\ 0.154488 & 0 & 7.158317 \end{pmatrix}$$

这时$A^{(2)}$相比A, 可以发现$|a_{12}^{(2)}|<|a_{12}|$, $|a_{13}^{(2)}|<|a_{13}|$, 再多进行几次迭代就近似可以近似化成对角阵.

而运算最高效的方法是让模最大非对角元变成0,

因此对A作一次Givens变换的变换矩阵就是

$$Q=\begin{pmatrix} c & & d \\ & 1 & \\ -d & & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

变换后的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 4 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

3, 证明:

$$B=Q^{\mathrm{T}}AQ$$

因此

$$b_{ii}=\sum_j (Q^{\mathrm{T}}A)_{ij}Q_{ji}=\sum_j \sum_k a_{kj}Q_{ki}Q_{ji}$$

当$i=p\,\mathrm{or.}\,q$ 时,

$$b_{ii}=a_{pp}Q_{pi}Q_{pi}+a_{qp}Q_{qi}Q_{pi}+a_{pq}Q_{pi}Q_{qi}+a_{qq}Q_{qi}Q_{qi}$$

令$\cos\theta=c$, $\sin\theta=d$, 且有 $c^2+d^2=1$,

因此

$$b_{pp}=a_{pp}c^2-2a_{pq}cd+a_{qq}d^2$$

$$b_{qq}=a_{pp}d^2+2a_{pq}cd+a_{qq}c^2$$

$$b_{pp}^2+b_{qq}^2=(a_{pp}^2+a_{qq}^2)(c^4+d^4)+8a_{pq}^2c^2d^2+4a_{pq}(a_{pp}-a_{qq})cd(d^2-c^2)+4a_{pp}a_{qq}c^2d^2$$

$$=(a_{pp}^2+a_{qq}^2)\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)+2a_{pq}^2\sin^2 2\theta-2a_{pq}(a_{pp}-a_{qq})\sin 2\theta\cos 2\theta+a_{pp}a_{qq}\sin^2 2\theta$$

由于

$$\cot 2\theta=\frac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{pq}}$$

因此

$$\sin 2\theta=\pm\frac{2a_{pq}}{\sqrt{4a_{pq}^2+(a_{qq}-a_{pp})^2}}\,,\ \cos 2\theta=\pm\frac{a_{qq}-a_{pp}}{\sqrt{4a_{pq}^2+(a_{qq}-a_{pp})^2}}$$

不妨都取正, 得到

$b_{pp}^2+b_{qq}^2=\frac{1}{4a_{pq}^2+(a_{qq}-a_{pp})^2}[(a_{pp}^2+a_{qq}^2)(4a_{pq}^2+(a_{qq}-a_{pp})^2-2a_{pq}^2)+8a_{pq}^4+4a_{pq}^2(a_{pp}-a_{qq})^2+4a_{pp}a_{qq}a_{pq}^2]=a_{pp}^2+a_{qq}^2+2a_{pq}^2$

而当$i\neq p\,\mathrm{or.}\,q$时,

易知$b_{ii}=\sum_j\sum_k a_{kj}Q_{ki}Q_{ji}=\sum_j\sum_k\delta_{ki}\delta_{ji}a_{kj}=a_{ii}\Rightarrow b_{ii}^2=a_{ii}^2$

因此, 此时有

$$\sum_i b_{ii}^2=\sum_i a_{ii}^2+2a_{pq}^2$$

□