2022计算方法作业 #11

1. (4分) 设 n 阶实方阵 A 有相异的特征根 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$. 对给定的实数 $\alpha \neq \lambda_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 利用规范幂法或反幂法, 设计一个能计算离 α 距离最近的矩阵 A 的特征根的迭代格式(注：不容许对矩阵求逆).

2. (8分)考虑用Jacobi方法计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值。求对A作一次Givens相似变换时的Givens(旋转)变换矩阵 Q (要求相应的计算效率最高) 以及Givens变换后的矩阵 B (其中, $B = Q^T AQ$).

3. (8分) 设 $\mathbf{p} < \mathbf{q}$, $\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \theta)$为 $\mathbf{n}$ 阶Givens矩阵, θ 为角度. 记

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}} \equiv (\mathbf{a_{ij}}), \quad \mathbf{B}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}} \equiv (\mathbf{b_{ij}}) = \mathbf{Q}^{\mathbf{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \theta)\ \mathbf{A}\ \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \theta).$$

假设 $\mathbf{a_{pq}} \neq \mathbf{0}$, 证明：
当 θ 满足 $cot2\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ 时，有

$$\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{b_{ii}^2} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ii}^2} + \mathbf{2a_{pq}^2}$$

提示：只需证 $\mathbf{b_{pp}^2} + \mathbf{b_{qq}^2} = \mathbf{a_{pp}^2} + \mathbf{a_{qq}^2} + \mathbf{2a_{pq}^2}$.