Homework 8

BY 刘家骥 PB20071417

1, 给定函数$f(x)$离散值如下：

x	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	3.0	1.0	2.0	4.0

分别用向前、向后以及中心差商公式计算f'(0.02)和f'(0.04) .

解:

向前差商公式: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

向后差商公式: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

中心差商公式: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

由此计算:

向前差商公式:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04)-f(0.02)}{0.02} = 50.0$$

$$f'(0.04) = \frac{f(0.06)-f(0.04)}{0.02} = 100.0$$

向后差商公式:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.02)-f(0.00)}{0.02} = -100.0$$

$$f'(0.04) = \frac{f(0.04)-f(0.02)}{0.02} = 50.0$$

中心差商公式:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04)-f(0.00)}{0.04} = -25.0$$

$$f'(0.04) = \frac{f(0.06)-f(0.02)}{0.04} = 75.0$$

2, 用3点的Gauss-Legendre数值积分公式求积分$\int_0^2 e^{-x} sin(x)dx$, 及其积分误差.

解:

先作变量替换: 令$t = x-1$, 即$x = t+1$,

这里我让$f(t) = \mathrm{e}^{-(t+1)}\sin(t+1)$, 积分化成 $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$,

题目要求三点公式, 也就是要有3个节点, 需要用正交多项式$p_3(x)$来确定节点.

求得

$$p_3(x) = P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

得到节点$x_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{\frac{3}{5}}$,由此求得系数为

$$\alpha_1=\int_{-1}^{1}\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\mathrm{d}\,x=\frac{5}{9}$$

$$\alpha_2=\int_{-1}^{1}\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\mathrm{d}\,x=\frac{8}{9}$$

$$\alpha_3=\int_{-1}^{1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\mathrm{d}\,x=\frac{5}{9}$$

因此积分公式为

$$I\approx\left[\frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]\approx 0.4665193$$

接下来计算误差.
由Gauss积分的误差公式,得到

$$E_n(f)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1}[(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)]^2\mathrm{d}x=\frac{f^{(6)}(\xi)}{15750},\quad \xi\in[-1,1]$$

可以得到

$$f^{(6)}(\xi)=8\,\mathrm{e}^{-(\xi+1)}\cos(\xi+1)\leqslant f^{(6)}(-1)=8$$

$\therefore$

$$E_n(f)\leqslant 5.08\times 10^{-4}$$

3，试推导积分$\boldsymbol{\int_0^2 (x-1)^2 f(x)dx}$的2点Gauss积分公式，这里$(x-1)^2$为权重函数。
解:
先求出在权函数为$W(x)=(x-1)^2$下，$n=2$时的正交多项式.

$$p_0(x)=f_0(x)=1$$

$$p_1(x)=f_1(x)-\frac{(f_1(x),\ p_0(x))}{(p_0(x),\ p_0(x))}p_0(x)=x-1$$

$$p_2(x)=f_2(x)-\frac{(f_2(x),\ p_0(x))}{(p_0(x),\ p_0(x))}p_0(x)-\frac{(f_2(x),\ p_1(x))}{(p_1(x),\ p_1(x))}p_1(x)=x^2-2x+\frac{2}{5}$$

然后用$p_2(x)$确定节点, 得到$x_1=1-\frac{\sqrt{15}}{5}$, $x_2=1+\frac{\sqrt{15}}{5}$.
接下来求系数:

$$\alpha_1=\int_0^2(x-1)^2\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

$$\alpha_2=\int_0^2(x-1)^2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

因此积分公式为:

$$I\approx\frac{1}{3}\left[f\left(1-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+f\left(1+\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right].$$

4, 设函数$f(x)$充分光滑(可微), 试推导如下数值微分公式（即确定常数A,B,C,D,E), 使其截断误差为$O(x^4)$.

$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h)\right]$, 其中$h>0$.

解:

这里使用插值型数值微分, 并使用五点公式, 就可以使截断误差达到$O(x^4)$.

构建五点Lagrange插值函数

$$L_4(t)=\sum_{i=0}^{4}\frac{\prod_{j=0,\,j\neq i}^{j=4}(t-x_j)}{\prod_{j=0,\,j\neq i}^{j=4}(x_i-x_j)}f(x_i)$$

其中$x_0=x-2h$, $x_1=x-h$, $x_2=x$, $x_3=x+h$, $x_4=x+2h$,(因为要求的量就是$f'(x)$, 避免混淆, 我就用t来表示变量了).

令$\tau=t-x$, $L_4(t)$可以化为:

$$L_4(t)=\frac{1}{24h^4}(\tau^2-h^2)\tau[(\tau-2h)f(x_0)+(\tau+2h)f(x_4)]-\frac{1}{6h^4}(\tau^2-4h^2)\tau[(\tau-h)f(x_1)+(\tau+h)f(x_3)]$$
$$+\frac{1}{4h^4}(\tau^2-h^2)(\tau^2-4h^2)f(x_2)$$

然后

$$\frac{\mathrm{d}L_4(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}L_4(t)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{12h^4}(2\tau^3-3h\tau^2-h^2\tau+h^3)f(x_0)+\frac{1}{12h^4}(2\tau^3+h\tau^2-3h^2\tau-h^3)f(x_4)$$
$$-\frac{1}{6h^4}(4\tau^3-3h\tau^2-8h^2\tau+4h^3)f(x_1)-\frac{1}{6h^4}(4\tau^3+3h\tau^2-8h^2\tau-4h^3)f(x_3)$$
$$\frac{1}{2h^4}(2\tau^3-5h^2\tau)f(x_2)$$

现在让$t=x$, 也就是$\tau=0$, 得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_4(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=x}=\frac{1}{12h}f(x_0)-\frac{2}{3h}f(x_1)+\frac{2}{3h}f(x_3)-\frac{1}{12h}f(x_4)$$

对照题给公式, 可以得到系数:

$$A=\frac{1}{12},\ B=-\frac{2}{3},\ C=0,\ D=\frac{2}{3},\ E=-\frac{1}{12}.$$