Homework 7

刘家骥 PB20071417

1，构造积分的$\bar{I}(f)=\displaystyle\int_{-h}^{2h}f(x)\mathrm{dx}$数值积分公式.

解:
这里给出了三个节点: $x_0=-h,x_1=0,x_2=2h$, 因此有两种可行方案:
①构造$Lagrange$插值函数$L_2(x)=\sum_{i=0}^{2}\ell_i(x)f(x_i)$,
其中,

$$\ell_0(x)=\frac{(x-0)(x-2h)}{(-h-0)(-h-2h)}$$

$$\ell_1(x)=\frac{(x+h)(x-2h)}{(0+h)(0-2h)}$$

$$\ell_2(x)=\frac{(x+h)(x-0)}{(2h+h)(2h-0)}$$

由近似计算$\bar{I}(f)=I(f)=\int_{-h}^{2h}L_2(x)\mathrm{dx}=\sum_{i=0}^{2}\int_{-h}^{2h}\ell_i(x)\mathrm{dx}\cdot f(x_i)$,因此待求的系数

$$a_{-1}=\int_{-h}^{2h}\ell_0(x)\mathrm{dx}=0$$

$$a_0=\int_{-h}^{2h}\ell_1(x)\mathrm{dx}=\frac{9}{4}h$$

$$a_1=\int_{-h}^{2h}\ell_2(x)\mathrm{dx}=\frac{3}{4}h$$

即

$$I(f)=0f(-h)+\frac{9}{4}hf(0)+\frac{3}{4}hf(2h)$$

现在计算代数精度, 首先由于时2阶$Lagrange$插值，代数精度至少为2，不妨令$f(x)=x^3$, 此时$I(x^3)=6h^4$, $\bar{I}(x^3)=\frac{15}{4}h^4,\Rightarrow I(x^3)\neq\bar{I}(x^3)$,因此代数精度为$m$=2.

②分为2个区间，构造复化数值积分，由于每个区间只有2点, 因此只能构造复化梯形积分.

$$I(f)=\frac{x_1-x_0}{2}(f(x_0)+f(x_1))+\frac{x_2-x_1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$$

即

$$I(f)=\frac{1}{2}hf(-h)+\frac{3}{2}hf(0)+hf(2h)$$

现在计算代数精度: $I(x) = \frac{3}{2}h^2 = \bar{I}(x), I(x^2) = \frac{9}{2}h^3 \neq 3h^3 = \bar{I}(x^2)$, 因此代数精度$m = 1$.

综上, 第一种方案代数精度更高, 代数精度为2, 公式为:

$$I(f) = 0f(-h) + \frac{9}{4}hf(0) + \frac{3}{4}hf(2h)$$

还有另一种方法, 即用$I_n(x^k) = I(x^k)$构建方程组求系数(系数矩阵是范德蒙阵), 也可以求出上述的数值积分公式.

2, 分别用梯形公式和$Simpson$公式求解积分$\int_0^2 e^{-x}\sin(x)\mathrm{dx}$, 并计算积分误差(计算结果至少保留小数点后4位).

解:

不妨记$f(x) = e^{-x}\sin(x)$, 这有利于后续书写.

由已知, $f(0) = 0, f(2) \approx 0.12306002, f(1) \approx 0.30955987$.

梯形公式计算: $I = T(f) = \frac{2-0}{2}[f(0) + f(2)] = 0.1231$,

$simpson$公式计算: $I = S(f) = \frac{2-0}{6}[f(0) + 4f(1) + f(2)] = 0.4538$.

计算积分误差:

梯形公式:

$$E_1(f) = \int_0^2 R_1(x)\mathrm{dx} = \int_0^2 \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}(x-0)(x-2)\mathrm{dx} = -\frac{2}{3}f''(\eta)$$

$Simpson$公式(有三阶代数精度):

$$E_2(f) = \int_0^2 R_2(x)\mathrm{dx} = \int_0^2 \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-0)(x-1)^2(x-2)\mathrm{dx} = -\frac{1}{90}f^{(4)}(\eta)$$

3, $I(f) = \int_{-2}^2 f(x)\mathrm{dx}$, 其数值积分公式记为$S(f(x))$, 已经给出了$S(f(x))$的形式是:

$I(f) \approx S(f(x)) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha),$

解:

a)

现在要做的是求出A, B, C, α使得代数精度尽可能高.

分别让$f(x)$=x^k, $k = 0, 1, \cdots$, 现在需要解四个未知数, 需要4个方程, 因此得到

$$\begin{cases} A + B + C = \int_{-2}^2 1\mathrm{dx} = 4 \\ A\cdot(-\alpha) + C\alpha = \int_{-2}^2 x\,\mathrm{dx} = 0 \\ A\alpha^2 + C\alpha^2 = \int_{-2}^2 x^2\mathrm{dx} = \frac{16}{3} \\ A\cdot(-\alpha^3) + C\alpha^3 = \int_{-2}^2 x^3\mathrm{dx} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

显然$\alpha \neq 0$,要不然公式没有求解必要.因此可以发现上面第二式和第四式等价, 因此需要令$f(x)=x^4$, 再列出一个方程, 这样才能求解4个未知数, 因此得到:

$$\begin{cases} A+B+C=\int_{-2}^{2} 1\mathrm{dx}=4 \\ A\cdot(-\alpha)+C\alpha=\int_{-2}^{2} x\,\mathrm{dx}=0 \\ A\alpha^2+C\alpha^2=\int_{-2}^{2} x^2\mathrm{dx}=\dfrac{16}{3} \\ A\alpha^4+C\alpha^4=\int_{-2}^{2} x^4\mathrm{dx}=\dfrac{64}{5} \end{cases} \tag{2}$$

不妨让$\alpha > 0$, 可以求解得到

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{2\sqrt{15}}{5},\ \alpha^2=\dfrac{12}{5} \\ A=\dfrac{10}{9} \\ C=\dfrac{10}{9} \\ B=\dfrac{16}{9} \end{cases} \tag{3}$$

即

$$S\,(f(x))=\frac{10}{9}f\left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{16}{9}f(0)+\frac{10}{9}f\left(\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$$

由以上已经知道$f(x)=x^i, i=1,3,5,7,\cdots$时, $S\,(f(x))=I(f(x))$,所以代数精度至少是 m=5,而当$f(x)=x^6$时, $I(x^6)=\frac{256}{7}\neq S(x^6)=\frac{768}{25}$,因此代数精度是 m=5.

b)

这里对$f(x)$进行$Taylor$展开, 得到

$$f(x)=\sum_{i=0}^{5}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6$$

这里$\xi\in[-2,2]$,且取决于x的值.

因此误差就是

$$E(f)=I(f)-S(f)=\left(I\left(\sum_{i=0}^{5}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i\right)-S\left(\sum_{i=0}^{5}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i\right)\right)+\left(I\left(\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6\right)-S\left(\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6\right)\right)=\frac{f^{(6)}(\eta)}{6!}\frac{256}{7}-\frac{f^{(6)}(\xi|_{x=-\alpha})}{6!}\frac{384}{25}-\frac{f^{(6)}(\xi|_{x=\alpha})}{6!}\frac{384}{25}=\frac{64}{7875}f^{(6)}(\varphi)$$

(以上计算多次用到介值定理)

即

$$E(f)=\frac{64}{7875}f^{(6)}(\varphi)$$

其中$\varphi\in[-2,2]$.