10.11 No.5　刘家骥 PB20071417

1. 解：Doolittle法．原方程组：$\begin{cases} 5x_1+x_2+2x_3=2 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=6 \end{cases}$

$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, 即 $A\vec{x}=\vec{b}$.

令 $A=LU=\begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix}$

$k=1$，U的第1行 $u_{1i}=a_{1i}$，$\therefore u_{11}=5,\ u_{12}=1,\ u_{13}=2$.

L的第1列 $l_{21}=\frac{1}{u_{11}}=0.2,\ l_{31}=\frac{2}{u_{11}}=0.4$

$k=2$　U的第2行：$u_{22}=3-l_{21}u_{12}=2.8$

$u_{23}=-1-l_{21}u_{13}=-1.4$

L的第2列：$l_{32}=\frac{2-l_{31}u_{12}}{u_{22}}=\frac{4}{7}$

$k=3$　U的第3行：$u_{33}=5-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=\underline{5}$

$\therefore LU=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0.2 & 1 & \\ 0.4 & \frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & 2.8 & -1.4 \\ & & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}}=\vec{b}$

解 $L\vec{y}=\vec{b}$，$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0.2 & 1 & \\ 0.4 & \frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}=(2\ \ 3.6\ \ \frac{22}{7})^T$

再解 $U\vec{x}=\vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & 2.8 & -1.4 \\ & & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3.6 \\ \frac{22}{7} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}$ 解得 $\begin{cases} x_1=-\frac{6}{35} \\ x_2=1.6 \\ x_3=\frac{22}{35} \end{cases}$

2. 解: $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 用追赶法.

将A化成 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & \\ & \gamma_3 & \alpha_3 & \\ & & \gamma_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \beta_2 & \\ & & 1 & \beta_3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}=LU$

然后方程化为 $L\vec{y}=\vec{b}$, $U\vec{x}=\vec{y}$.

列出具体计算的公式:
$$\begin{cases} \alpha_i=a_i-\gamma_i\beta_{i-1} \\ \beta_i=\frac{b_i}{\alpha_i} \\ \gamma_i=c_i \\ y_i=\frac{\tilde{b}_i-\gamma_i y_{i-1}}{\alpha_i} \end{cases} \text{依次取 } i=1,\cdots,4$$
$$x_j=y_j-\beta_j x_{j+1} \quad j\text{ 依次取 } j=4,\cdots,1$$

其中,不存在的数 $\beta_0, c_1, \gamma_1, y_0, b_0, x_5=0$

这里,$\vec{b}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\tilde{b}_3,\tilde{b}_4)$ 以示区分.

先解得

$$LU=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\-1&\frac{15}{4}&0&0\\0&-1&\frac{52}{15}&0\\0&0&-1&\frac{89}{26}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{4}&0&0\\0&1&-\frac{8}{15}&0\\0&0&1&-\frac{15}{26}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{y}=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{15},\frac{8}{13},\frac{68}{89}\right)^T.$$

再解 $U\vec{x}=\vec{y}$，得 $\begin{cases}x_1=\frac{60}{89}\\x_2=\frac{62}{89}\\x_3=\frac{94}{89}\\x_4=\frac{68}{89}\end{cases}$

3. $\begin{cases}7x_1+10x_2=0.8\\5x_1+7x_2=0.2\end{cases}$

解：(1) 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}7&10\\5&7\end{pmatrix}\Rightarrow \|A\|_1=17$

A 的逆：$A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&10\\5&-7\end{pmatrix}\Rightarrow \|A^{-1}\|_1=17$

条件数 $Cond_1(A)=\|A\|_1\times\|A^{-1}\|_1=17^2=289.$

(2) 常数项 $\vec{b}$ 有扰动 $\delta\vec{b}$ 时，有 $A(\vec{x}+\delta\vec{x})=\vec{b}+\delta\vec{b}$

此时有 $\frac{\|\delta\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_1}\le Cond_1(A)\cdot\frac{\|\delta\vec{b}\|_1}{\|\vec{b}\|_1}=8.67$

可以看到相对误差应该是偏大的.