实验报告

刘家骥　　　　PB20071417

1，计算结果:

近似误差:

公式: $\max\limits_{-5\le x\le 5}\|f(x)-p(x)\| \approx \max\limits_{i}|f(y_i)-p(y_i)|, y_i=\frac{i}{50}-5, i=0,\cdots 500$

1) **第一组节点,误差为**:

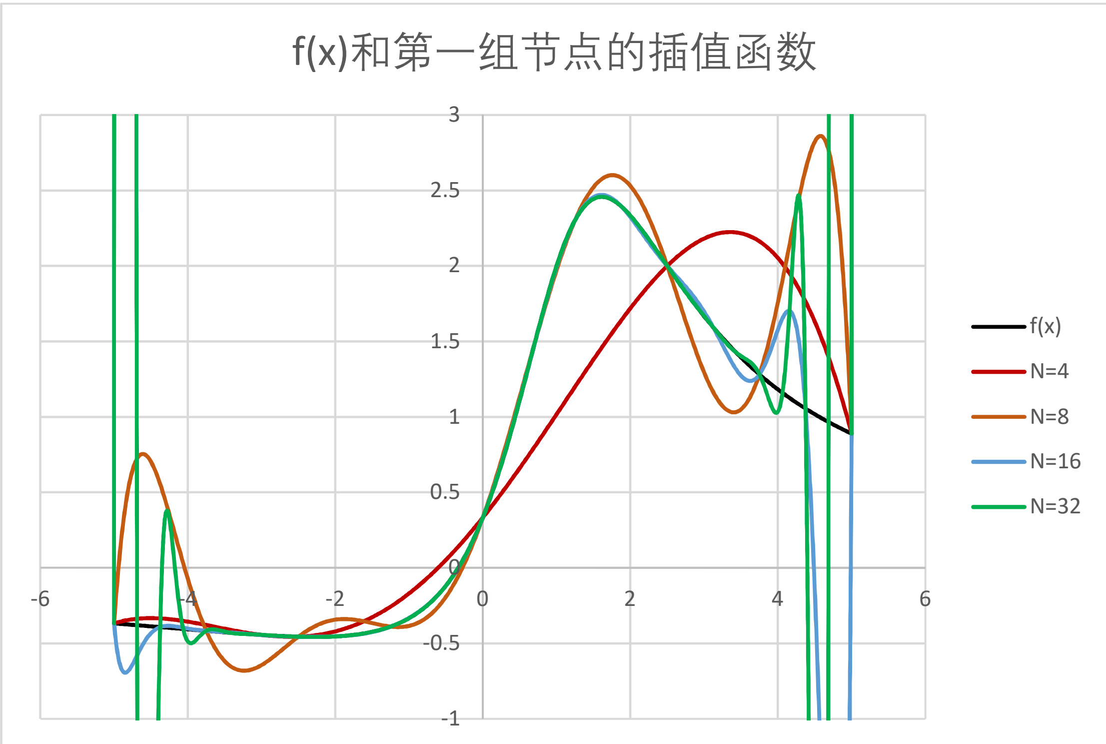
N=4,　1.108575376458e+00
N=8,　1.868530466062e+00
N=16,　5.529879571592e+00
N=32,　4.059446252083e+02

2) **第二组节点,误差为**:

N=4,　1.309481298434e+00
N=8,　3.063702127482e-01
N=16,　4.202636884907e-02
N=32,　4.307034967522e-04

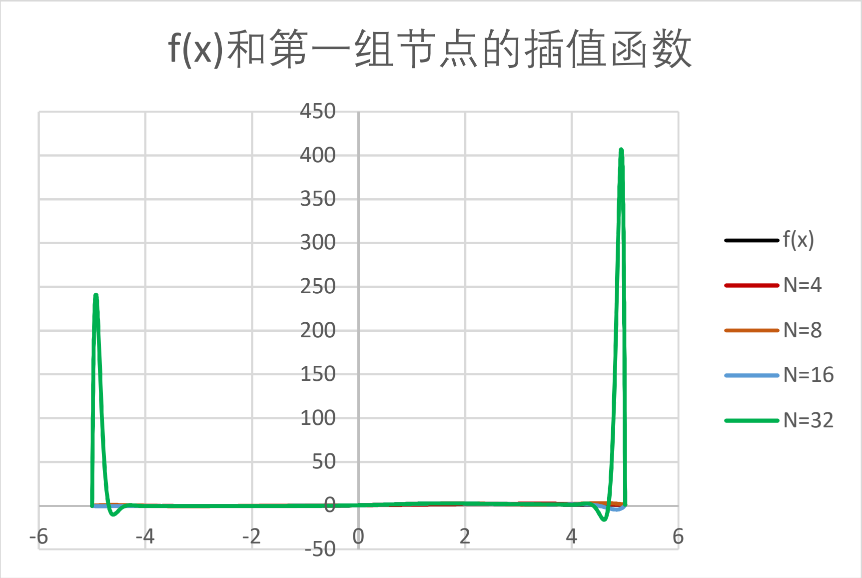
函数图象:

1) **第一组节点(均匀分布的节点)**:

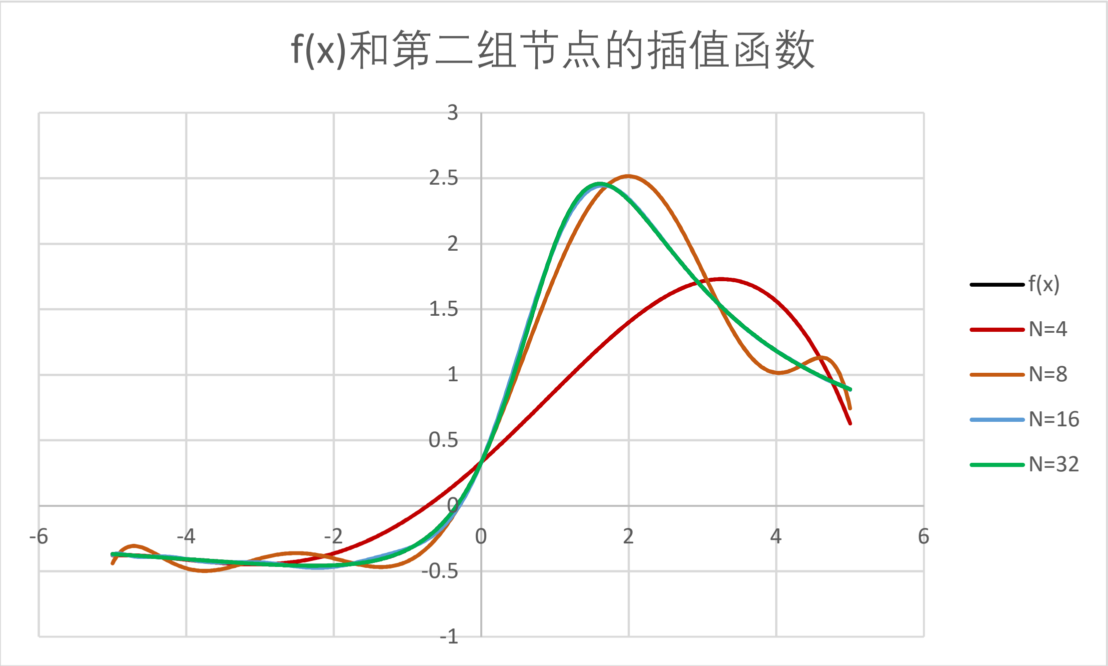


(注: ,为了比较插值效果, y 轴比例取得比较大, 但是由于 N=16, 32 时, 有部分区间插值函数绝对值过大(Runge 现象导致的), 导致在绘制图象时溢出,请见谅)

完整的图象如下:



2) 第二组节点(Chebyshev 点作为节点):



2，算法分析:

在这里，我使用 C 语言来进行编写．整个程序进行的输出结果可以分为 5 部分：自变量 x 的值，f(x)值，第一组插值结果，第二组插值结果，近似误差．

先手动输入 N 值 (节点个数为 N+1)，然后分别计算出两组插值节点的值，并保存在两个数组里面．

输出 501 个自变量 x 的值．接着输出对应的 f(x)值，也即是精确值．

再利用第一组节点，逐次调用插值基函数，算出每一个自变量 x 值对应的第一组插值的结果，同理得到第二组插值的结果．

最后输出在同一 N 值下，两组插值的近似误差．

多次执行程序，输入不同的 N 值，得到 4 组结果．

3，结果分析:

我们从两个角度分析这次的结果．

1) 对于同一种插值节点取值方式，不同的插值次数 N:

I　节点均匀分布的情况，$x_i = -5 + \frac{10}{N} i, i = 0,1,\cdots N.$

可以看到，当 N 增大时，近似误差也开始增大，甚至当 N=32 时，误差达到了大约 400．其实由图象可以看出，在中点 x=0 附近，N 越大，插值函数和原函数越贴近；但是在两端点附近，N 越大，插值函数震荡也就越剧烈．这也就是我们所说的 Runge 现象，因为节点均匀分布的高次插值，数值的稳定性差．

因此如果一定要使用这种插值方式，应当扩大被插值函数和插值函数的定义域，或者缩小在实际使用时的 x 的取值范围，例如本题中，可以把定义域扩大到[-10, 10]，或者对于原本构造出的插值函数，x 的取值只能限定在[-4, 4]内，总之就是不能让 x 取到两端点附近．

II ***Chebyshev*** 点作为节点的情况，$x_i = -5\, cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right), i = 0,1,\cdots N$

可以看到，当 N 增大时，这一种情况下近似误差开始减小. 而且 N 越大，插值函数和原函数的图象也就越贴近，甚至 N=32 时二者几乎完全重合了. 而且这里并不存在 Runge 现象.

2) 对于同一插值次数 N，不同的节点选取方式:

除了 N=4 时，第一种比第二种误差更小，其他情况下，第二种比第一种误差更小，并且是小得多. 随着 N 的增大，两种方式下都震荡次数增加的现象，但是第一种在端点附近的震荡程度明显增大，但是第二种插值(Chebyshev 点)，随着 N 的增大，虽然震荡次数增加，但是震荡程度明显减弱，因此能够与原函数很好的重合.

四，实验结论:

总的来说，均匀节点插值和 Chebyshev 点作为节点插值两种方法相比，前者在接近原函数的程度明显更低. 并且随着 N 值增加，即插值次数的增加，均匀节点插值的插值函数在端点附近相较原函数的震荡程度明显增加，这导致其近似误差显著增大. 相对地, Chebyshev 点作为节点插值的方法，就不会存在前述的问题，相反, N 值越大，插值函数和原函数在全区间内都越来越接近，甚至 N=32 时，图中都可以看到二者几乎完全重合了. 因此 Chebyshev 点作为节点的插值插值函数能够更好的逼近原函数，使用它计算的值也更接近精确值.