

《基础物理实验》实验报告

实验名称 RLC 电路的谐振与暂态过程 指导教师 袁跃峰

姓 名 桂庭辉 学号 2019K8009929019 专 业 计算机科学与技术 班级 03 座号 6

实验日期 2020 年 12 月 30 日 实验地点 教学楼 709 调课/补课 ☐ 是 成绩评定

1 实验目的

1. 通过观察示波器中的波形研究 RLC 电路的谐振现象。
2. 了解 RLC 电路的相频特性与振幅特性。
3. 通过示波器中的波形观察 RLC 串联电路的暂态过程。

2 实验仪器与用具

标准电感、标准电容， $100\ \Omega$ 标准电阻，电阻箱，电感箱，函数发生器，示波器，数字多用表，导线等。

3 实验原理

3.1 RLC 串联谐振电路

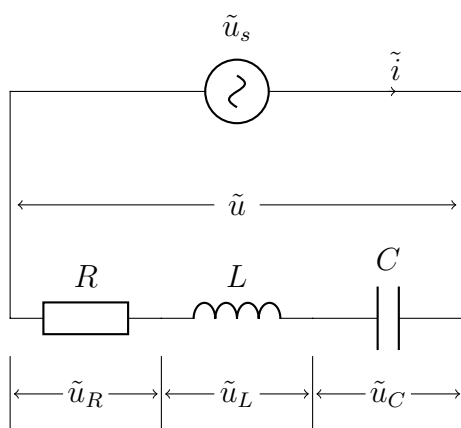


图 1: RLC 串联谐振电路

RLC 串联谐振电路如上图所示，利用复数法^①分析电路可求得电容 C 、电感 L 、电阻 R 的复阻抗分别为

$$\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad \tilde{Z}_L = j\omega L, \quad \tilde{Z}_R = R$$

^①本实验报告中复数法记法约定 \tilde{x} 表示复变量， x 表示其模长，虚单位为 $j = \sqrt{-1}$ 。

进而可求得电路的总复阻抗与总阻抗：

$$\tilde{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \Rightarrow Z = |\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

电流 i 的大小为

$$i = \frac{u}{Z} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

路端电压 u 与电流 i 的相位差为

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

以上诸式中 $\omega = 2\pi f$ 为交变电压 u 的角频率， f 为其频率。可见 Z, φ, i 均为 f 的函数，即当电路中其他元件参量确定的情况下，电路特性将完全取决于频率的大小。

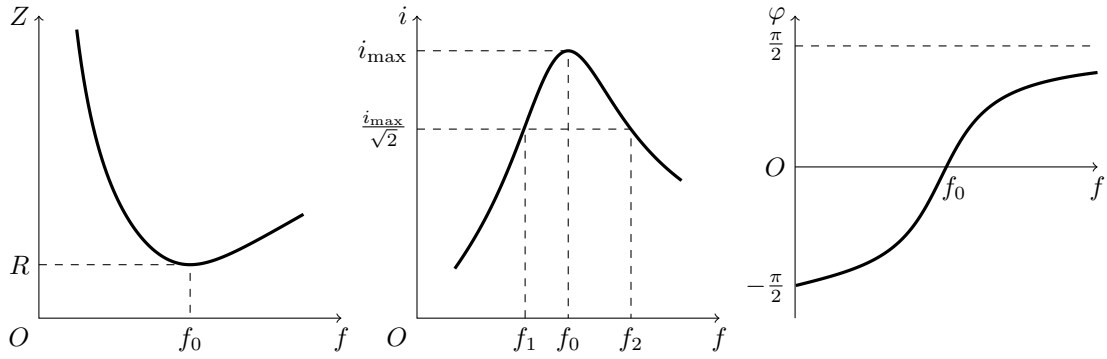


图 2: RLC 串联电路的频率特性

1. 当 $\text{Im } \tilde{Z} = 0$ ，即 $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ 时，总阻抗呈电阻性，且总阻抗达到最小值 $Z_0 = R$ ，电压与电路的相位差 $\varphi = 0$ ，电流达到最大值 $i_{\max} = \frac{u}{R}$ ，这种状态称为串联谐振。此时的角频率 ω_0 称为谐振角频率，相应地此时频率 f_0 称为谐振频率，其具体大小为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

谐振时，有

$$u_L = i_{\max} Z_L = \frac{\omega_0 L}{R} u, \quad \frac{u_L}{u} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

而

$$u_C = i_{\max} Z_C = \frac{u}{R\omega_0 C}, \quad \frac{u_C}{u} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

令

$$Q = \frac{u_L}{u} = \frac{u_C}{u} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}$$

Q 称为谐振电路的品质因数，是标志和衡量谐振电路性能优劣的重要参量。 Q 可衡量的电路

性能有：

(1) 储耗能特性：\$Q\$ 值越大，相对的储能耗能越小，储能效率越高；

(2) 电压分配特性：谐振时 \$u_L = u_C = Qu\$，电感、电容上的电压均为总电压的 \$Q\$ 倍，因此有时称串联谐振为电压谐振。利用电压谐振，可在某些传感器、信息接收中显著提高灵敏度或效率，但在某些应用场合，它对系统和人员却具有一定不安全性，故而在设计与操作中应予以注意。

(3) 频率选择性：设 \$f_1, f_2\$ 为谐振峰两侧 \$i = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}\$ 处对应频率，则 \$\Delta f = f_2 - f_1\$ 称为通频带宽度，简称带宽。不难证明有

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

当 \$Q\$ 值越大时，带宽越窄，峰越尖锐，频率选择性越好。

2. 当 \$\text{Im } \tilde{Z} > 0\$，即 \$\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0\$ 时，总阻抗呈电感性，此时电压与电流相位差 \$\varphi > 0\$，交变电压频率 \$f > f_0\$，并且随着 \$f\$ 的增大，\$\varphi\$ 趋近于 \$\frac{\pi}{2}\$，阻抗越大，电流越小。

3. 当 \$\text{Im } \tilde{Z} < 0\$，即 \$\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0\$ 时，总阻抗呈电感性，此时电压与电流相位差 \$\varphi < 0\$，交变电压频率 \$f < f_0\$，并且随着 \$f\$ 的减小，\$\varphi\$ 趋近于 \$-\frac{\pi}{2}\$，阻抗越大，电流越小。

3.2 RLC 并联谐振电路

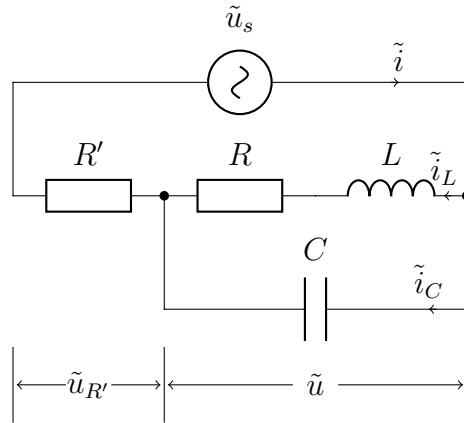


图 3: RLC 并联谐振电路

利用复数法分析上图电路，电容 \$C\$、电感 \$L\$、电阻 \$R\$ 的复阻抗分别为

$$\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad \tilde{Z}_L = j\omega L, \quad \tilde{Z}_R = R$$

那么电路并联部分的总复阻抗为

$$\tilde{Z}_p = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}} = \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR}$$

从而可求得电路并联部分总电阻为

$$Z_p = |\tilde{Z}_p| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega R)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

并联部分电压 u 与干路电流 i 的相位差为

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \omega C[R^2 + (\omega L)^2]}{R}$$

并联部分电压 u 大小为

$$u = iZ_p = \frac{u_{R'}}{R'} Z_p$$

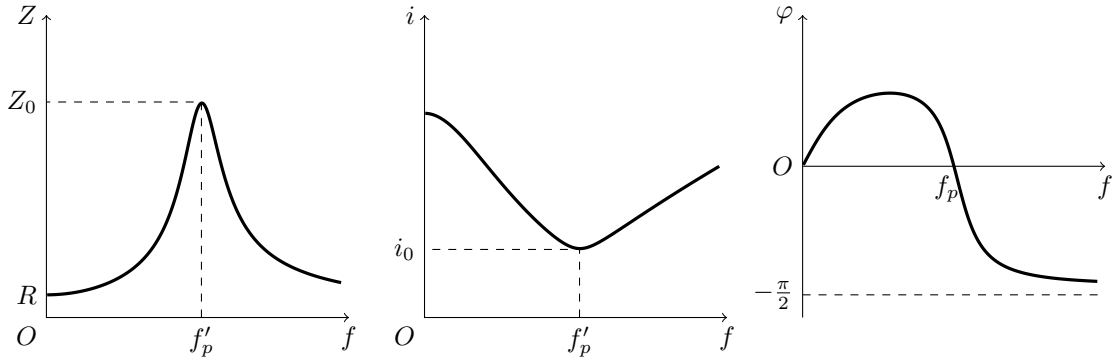


图 4: RLC 并联电路的频率特性

1. 当 $\text{Im } \tilde{Z}_p = 0$, 即 $\varphi = 0$ 时, 总阻抗呈纯电阻性, 可求得其并联谐振的角频率 ω_p 与频率 f_p 为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}, \quad f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

即并联谐振频率 f_p 与串联谐振频率 f_0 稍有不同, 当 $Q \gg 1$ 时, $\omega_p \approx \omega_0$, $f_p \approx f_0$ 。

2. 当 $f < f_p$ 时, $\varphi > 0$, 电流相位落后于电压, 整个电路呈电感性。

3. 当 $f > f_p$ 时, $\varphi < 0$, 电流相位超前于电压, 整个电路呈电容性。

在谐振频率两侧区域, 并联电路的电抗特性与串联电路相反。在 $f = f_p^{\textcircled{2}}$ 处总阻抗达到极大值, 总电流达到极小值。而在 f_p' 两侧, 随 f 偏离 f_p' 越远, 阻抗越小, 电流越大。

与串联谐振类似, 可用品质因数

$$Q_1 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}, \quad Q_2 = \frac{i_C}{i} \approx \frac{i_L}{i}, \quad Q_3 = \frac{f_0}{\Delta f}$$

来标志并联谐振电路的性能优劣, 有时也称并联谐振为电流谐振。

^② f_p' 与 f_p 稍有不同。

3.3 RLC 电路的暂态过程

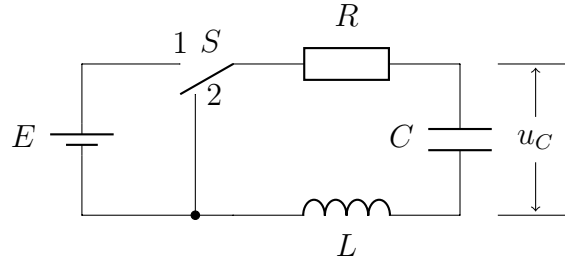


图 5: RLC 串联振荡电路

在 RLC 串联振荡电路中，开关拨向不同的端口，电路呈现为两种状态：当开关 S 拨向 1 时，电源 E 接入电路，为电容 C 进行充电；当开关 S 拨向 2 时，电容在 RLC 串联电路中放电。在放电过程中，根据实际电路可列出常微分方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$$

电容存储的电荷量 $q = Cu_C$ ，那么电路中的电流为

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

将其代入电路常微分方程即得到关于 u_C 的二阶齐次常微分方程

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

考虑初始条件即可得到方程组：

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \\ u_C = E \quad (t = 0) \\ C \frac{du_C}{dt} = 0 \quad (t = 0) \end{cases}$$

引入阻尼系数 $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ ，则可将方程组的解分为三种情况：

1. 当 $\zeta < 1$ ，即 $R^2 < \frac{4L}{C}$ 时，阻尼不足，上述方程组的解为

$$u_C = \sqrt{\frac{4L}{4L - R^2 C}} E e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$$

其中时间常量 $\tau = \frac{2L}{R}$ ，衰减振动的角频率为 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}$ 。 τ 的大小决定了振幅衰减的快慢， τ 越小，振幅衰减越迅速。

若 $R^2 \ll \frac{4L}{C}$, 振幅的衰减很缓慢, 此时

$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

近似为 LC 电路自由振动, ω_0 为 $R = 0$ 时 LC 回路的固有频率。衰减振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\sqrt{LC}$$

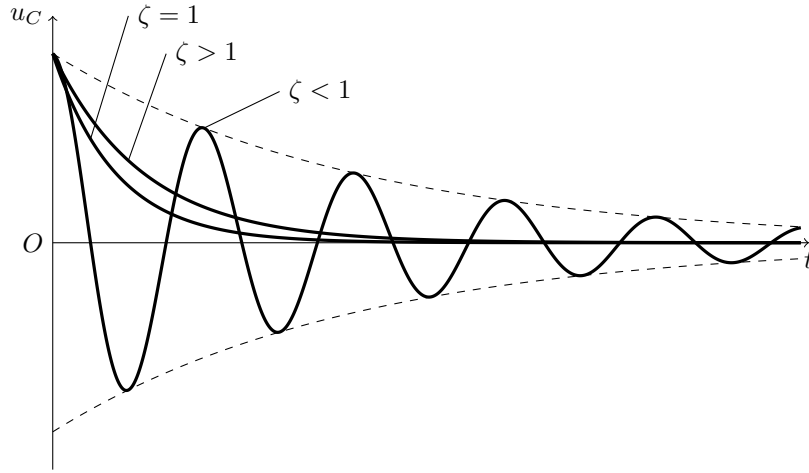


图 6: RLC 暂态过程中的三种阻尼曲线

2. 当 $\zeta > 1$, 即 $R^2 > \frac{4L}{C}$ 时, 对应过阻尼状态, 方程组的解为

$$u_C = \sqrt{\frac{4L}{R^2C - 4L}} E e^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \varphi)$$

其中 $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R^2C}{4L} - 1}$ 。此时振幅将缓慢地衰减为 0。若固定 L, C 。

3. 当 $\zeta = 1$, 即 $R^2 = \frac{4L}{C}$ 时, 对应临界阻尼状态, 方程组的解为

$$u_C = E \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau}$$

其中 $\tau = \frac{2L}{R}$, 其为从过阻尼到阻尼振动过渡的分界点。

对于充电过程, 考虑初始条件, 电路方程组变为

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \\ u_C = 0 \quad (t = 0) \\ \frac{du_C}{dt} = 0 \quad (t = 0) \end{cases}$$

当 $R^2 < \frac{4L}{C}$ 时, 方程组的解为

$$u_C = E \left[1 - \sqrt{\frac{4L}{4L - R^2 C}} e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) \right]$$

当 $R^2 > \frac{4L}{C}$ 时, 方程组的解为

$$u_C = E \left[1 - \sqrt{\frac{4L}{R^2 C - 4L}} e^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \varphi) \right]$$

当 $R^2 = \frac{4L}{C}$ 时, 方程组的解为

$$u_C = E \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right]$$

可以看出, 充电过程与放电过程十分类似, 只是最后趋向的平衡位置不同。

4 实验内容

4.1 测 RLC 串联电路的相频特性曲线和幅频特性曲线

取 $u_{pp} = 2.0 \text{ V}$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 0.05 \mu\text{F}$, $R = 100 \Omega$ 时, 用示波器 CH1、CH2 通道分别观测 RLC 串联电路的总电压 u 和电阻两端电压 u_R 。注意限制总电压峰值不超过 3.0 V (或有效值不超过 0.1 V), 防止串联谐振时产生有危险的高电压。

1. 调谐振, 改变函数发生器的输出频率, 通过 CH1 与 CH2 相位差为 0, CH2 幅度最大来判断谐振与否, 记录谐振时的频率 f_0 。
2. 用万用表记录谐振时的电感、电容两端的电压 u_L , u_C , 和电源路端电压 u 并计算 Q 值。
3. 保持 CH1 的幅度为 2 V 不变, 按照建议的频率点测量 CH1 与 CH2 的相位差、CH2 的幅度值, 并绘制相频曲线和幅频曲线, 即 $\varphi - f$ 图象、 $i - f$ 图象。

4.2 测 RLC 并联电路的相频特性和幅频特性曲线

取 $u + u_{R'} = 2.0 \text{ V}$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 0.05 \mu\text{F}$, $R' = 5 \text{ k}\Omega$ 。为观测电感与电容并联部分的电压和相位, 用 CH1 测量总电压, 用 CH2 测量 R' 两端电压, 两通道测量电压值相减即为并联部分的电压 u , 可通过示波器面板上的“MATH”键实现两通道波形相减。

1. 调节函数发生器频率, 通过观察 CH1-CH2 与 CH2 相位差为 0, CH2 的幅度最小来判断谐振点, 记录此时的频率。
2. 保持 CH1 总电压幅度值 2 V 不变 (不同频率点需要调节函数发生器), 按照建议的频

率点测量 CH1-CH2 与 CH2 的相位差, 与 CH1-CH2、CH2 的幅度值, 绘制相频曲线与幅频曲线, 即 $\varphi - f$ 图象、 $i - f$ 图象、 $u - f$ 图象。

4.3 观测 RLC 串联电路的暂态过程

由函数发生器产生方波, 为便于观察, 需将方波的低电平调整至与示波器的扫描基线一致。由低电平到高电平相当于充电, 由高电平到低电平相当于放电。函数发生器各参数可设置为: 频率 50 Hz, 电压峰峰值 $u_{pp} = 2.0 \text{ V}$, 偏移 1 V。示波器 CH1 通道用于测量总电压, CH2 用来测量电容两端电压 u_C , 注意两个通道必须共地。实验中 $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 0.2 \mu\text{F}$ 。

1. 当 $R = 0 \Omega$ 时, 测量 u_C 波形;
2. 调节 R 测得临界电阻 R_C , 并与理论值比较;
3. 记录 $R = 2 \text{ k}\Omega$, $20 \text{ k}\Omega$ 的 u_C 波形。函数发生器频率可设置为 250 Hz ($R = 2 \text{ k}\Omega$) 和 20 Hz ($R = 20 \text{ k}\Omega$)。

5 实验结果与数据处理

5.1 测 RLC 串联电路的相频特性曲线和幅频特性曲线

根据实验电路的参数可计算得到 Q 的理论标准值

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 14.142$$

(1) 调节函数发生器输出频率, 当 $f = 2.259 \text{ kHz}$ 时, 路端电压与电阻 R 两端电压相位差趋近为 0, 即达到谐振状态, 此时用数字多用表测得

$$u = 0.444 \text{ V}, \quad u_C = 6.84 \text{ V}, \quad u_L = 6.90 \text{ V}$$

故而可计算得到电路的品质因数为

$$Q_1 = \frac{u_C}{u} = 15.405, \quad Q_2 = \frac{u_L}{u} = 15.541$$

(2) 在实验讲义给出的参考频率下, 保证路端电压 $u_{pp} = 2.0 \text{ V}$ 不变的情况下测得电压、电流相位差, 以及相应的 u_R 值记录如下页。

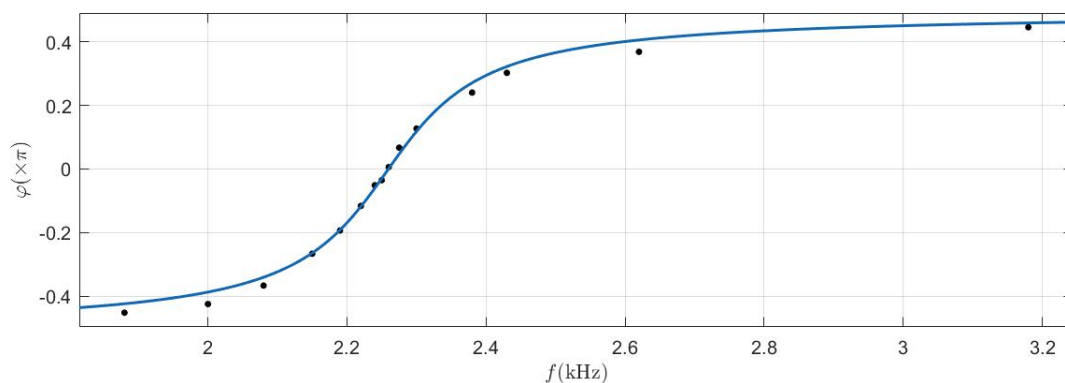
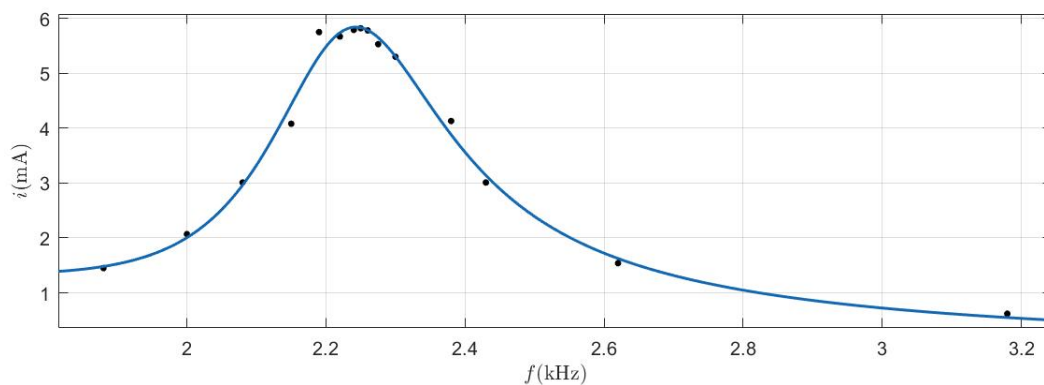
根据数据记录可作出 $\varphi - f$, $i - f$ 图象如下页。

由 $i - f$ 图象可读得谐振频率为 $f_0 = 2.241 \text{ kHz}$, 通频带宽为 $\Delta f = 0.232 \text{ kHz}$, 故而可算得品质因子

$$Q' = \frac{f_0}{\Delta f} = 9.659 \text{ kHz}$$

表 1: RLC 串联谐振电路实验数据记录

函数发生器 f (kHz)	1.88	2.00	2.08	2.15	2.19
电压电流相位差 φ	-0.451π	-0.424π	-0.366π	-0.266π	-0.193π
电阻电压 U_R (mV)	145	207	301	408	575
函数发生器 f (kHz)	2.22	2.24	2.25	2.26	2.275
电压电流相位差 φ	-0.116π	-0.051π	-0.035π	0.006π	0.067π
电阻电压 U_R (mV)	567	579	582	578	553
函数发生器 f (kHz)	2.30	2.38	2.43	2.62	3.18
电压电流相位差 φ	0.127π	0.240π	0.302π	0.368π	0.445π
电阻电压 U_R (mV)	530	413	301	154	62

图 7: RLC 串联谐振电路相频曲线图 8: RLC 串联谐振电路幅频曲线

可见 Q_1 , Q_2 , Q' 与 Q 差距均较大, 可能的误差原因除读数时的数据跳变外, 还有电感、电容的内阻使得实际实验电路与分析时的理想电路并不相同。

5.2 测 RLC 并联电路的相频特性和幅频特性曲线

(1) 调节函数发生器输出频率至并联部分电压 u 与总电流相位相同，即达到谐振，此时可得谐振频率为

$$f_p = 2.249 \text{ kHz}$$

(2) 在参考频率下测得实验数据如下^③：

表 2: RLC 并联谐振电路实验数据记录

f (kHz)	2.05	2.15	2.20	2.231	2.24	2.247	2.25
Δt (μs)	120	104	80	60	36	12	-2
φ	0.492π	0.447π	0.352π	0.268π	0.161π	0.053π	-0.009π
u (mV)	680	740	790	840	880	920	935
$U_{R'}$ (mV)	684	401	193	103.8	94.4	81.92	79.36
f (kHz)	2.253	2.2565	2.265	2.275	2.32	2.40	2.60
Δt (μs)	-12	-22	-48	-60	-82	-94	-96
φ	-0.054π	-0.099π	-0.217π	-0.273π	-0.380π	-0.451π	-0.499π
u (mV)	935	925	895	845	755	680	550
$U_{R'}$ (mV)	81.92	84.48	92.16	112.6	238	435	710

根据上表数据可作出如下图象：

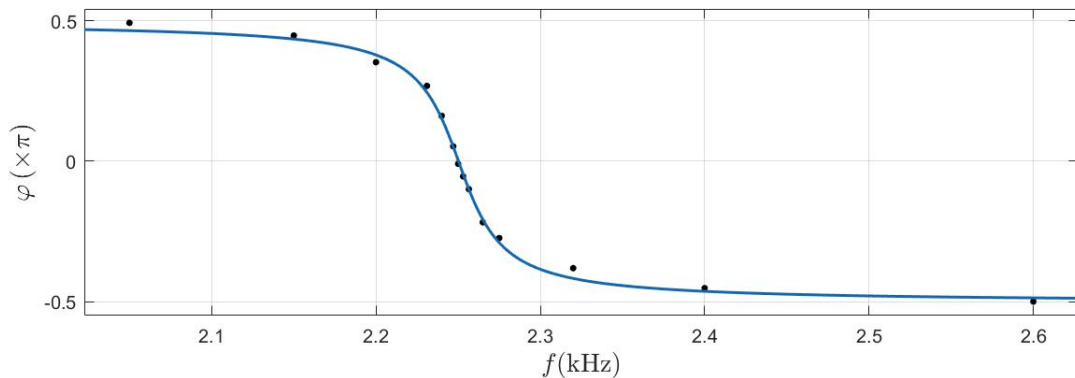


图 9: RLC 并联电路相频曲线

^③原始数据中 Δt 部分数据符号与此表相反，原因在于实验时读得的是电流 (CH2) 与并联部分的电压 u (CH1-CH2) 的相位差，此处应进行取反。示波器光标功能仅能读取相同相位点间的时间间隔，根据 Δt 计算相位差 φ 的公式为

$$\varphi = 2\pi f \Delta t.$$

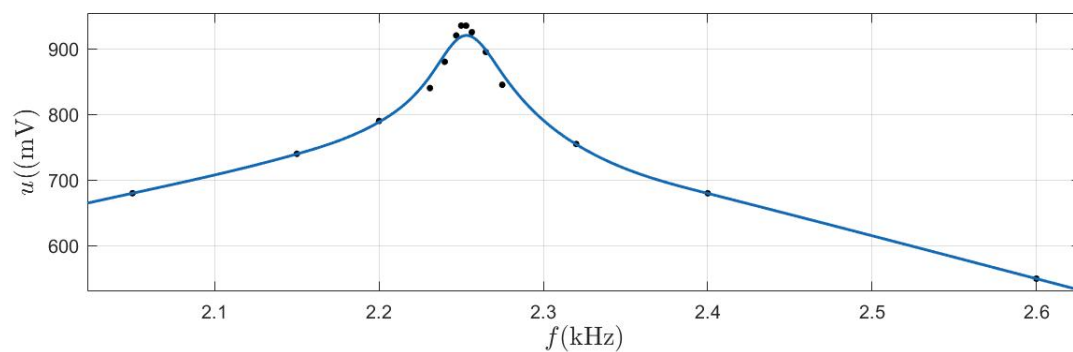


图 10: RLC 并联电路 $u - f$ 曲线

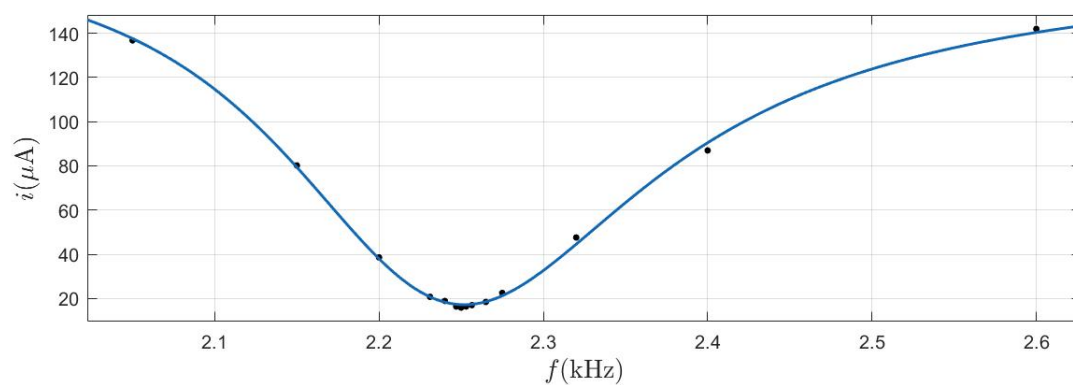


图 11: RLC 并联电路 $i - f$ 曲线

5.3 观测 RLC 串联电路的暂态过程

(1) 调节 $R = 0 \Omega$ ，得到如下 u_C 波形：

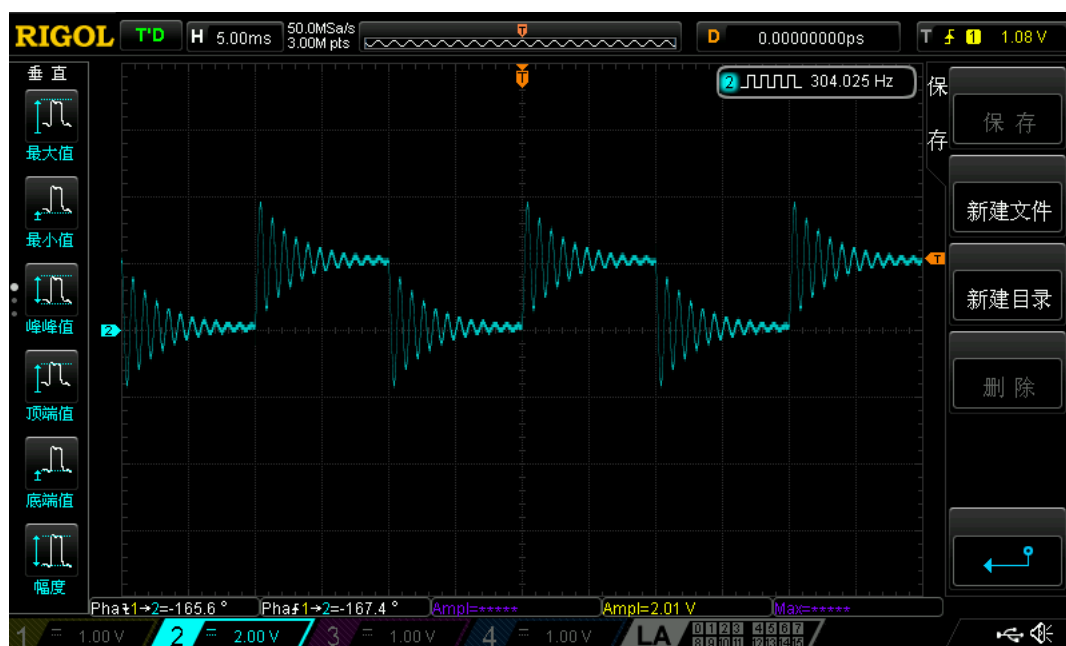


图 12: 阻尼振动状态波形

(2) 自小到调节 R 的大小，当 $R = 1300 \Omega$ 时，波形振动部分消失，即可近似看作临界

阻尼状态，波形如下：

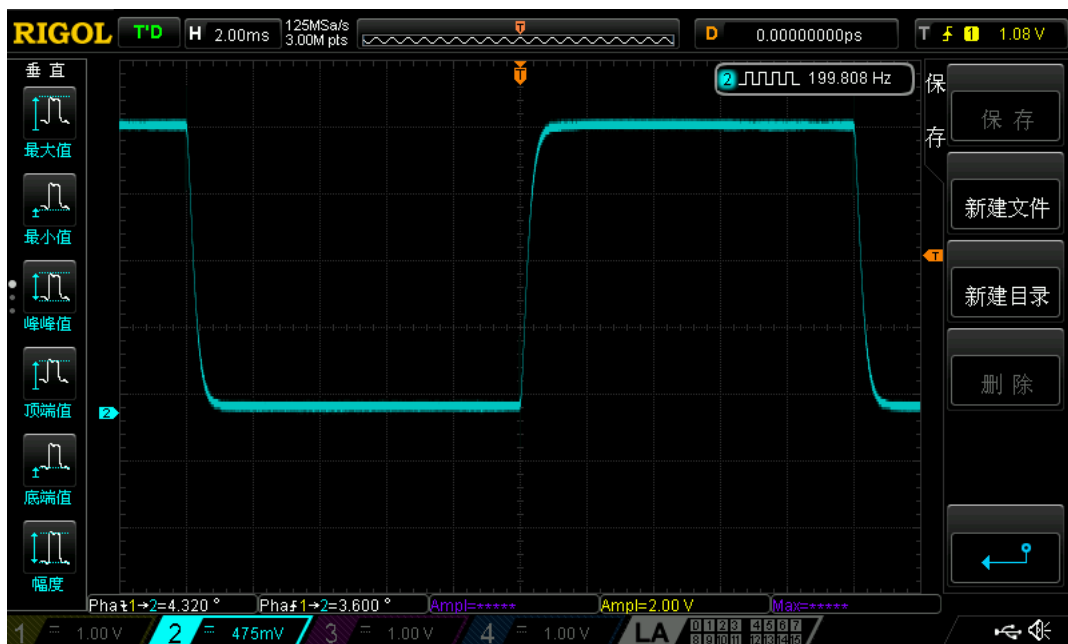


图 13: 临界阻尼状态波形

根据实验所用电路元件参数可计算得到临界电阻理论值 R_C 为

$$R_C = \sqrt{\frac{4L}{C}} \approx 1414 \Omega$$

实际测得的结果较小，除因临界阻值附近波形不明显影响选取的精度外，还有电路中电感、电容内阻带来的影响。

(3) 调节 R 至过阻尼状态（2 k Ω ，20 k Ω ），在相应频率下记录 u_C 波形：



图 14: 过阻尼状态下波形

6 实验总结

本次实验的实验过程较为顺利，但对示波器的了解不足、实验原理的理解不够深入导致实验过程中还是屡有失误，譬如 5.2 节原始数据中 Δt 的符号问题等。