Lógica difusa

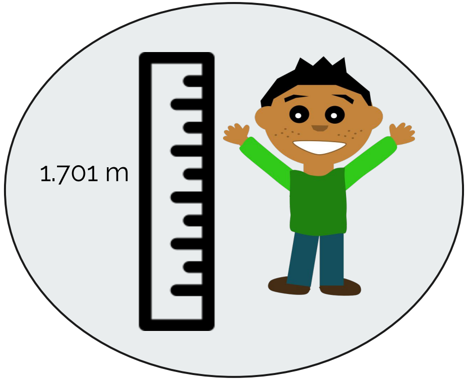
Conjuntos difusos: Motivación

Y es que con la teoría de conjuntos no es suficiente?

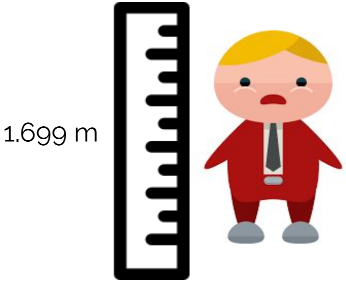
La lógica clásica no refleja la naturaleza de los conceptos y pensamientos humanos.

Por ejemplo, si definieramos como altos a todas las personas cuya altura es mayor a 1.70m:

Altos



No altos



$$\text{Altos} = \{\text{altura} \,|\, \text{altura} > 1.7m\}$$

Esto es innatural e inadecuado para representar el concepto de persona alta. El problema está en la transición tan fuerte entre los conjuntos.

Aquí es donde los conjuntos difusos nos salvan la vida.

Contenido

1. Terminología & Conceptos generales:
    a. Función de pertenencia
    b. Universo de Discurso
    c. Variable lingüística
    d. Conjunto difuso.
2. Operaciones conjuntos difusos:
    a. Complemento
    b. Familias T-Norma
    c. S-Norma
3. Relaciones difusas.
4. Sistemas Mamdani y Takagi-Sugeno

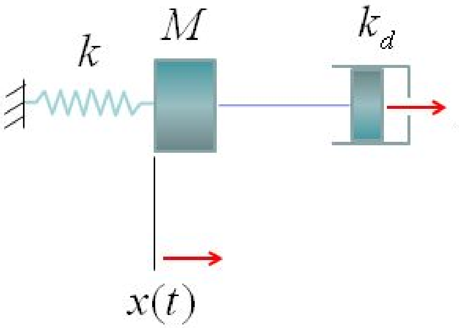
Ideas básicas

Incertidumbre: No conocimiento seguro y claro de alguna concepto.

Modelamiento y representación: Simplificación de una situación del mundo real a través de la abstracción.

Características del modelamiento:

- Formalidad
- Optimización
- Solucionabilidad
- Generalidad
- Especificidad



Tipos de incertidumbre

Total certeza, certidumbre

Determinismo

Cara o sello?
Verdadero o Falso?

Aleatoriedad

Las redes neuronales son eficientes ?

Ambiguedad: Más información permite resolver el problema

La mujer rubia es alta o baja?

Vaguedad: Precisión en las definiciones

Qué significa A? y B? ... variables sin especificar

Confusión

Algunos tipos de modelamiento

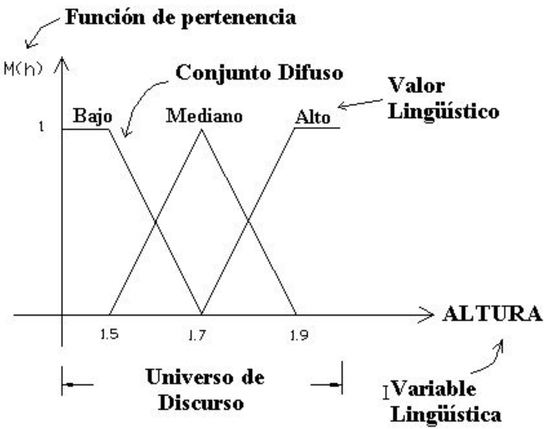
Aleatoriedad
Riesgo

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Probabilista

Ambigüedad
Más información permite resolver el problema
Vaguedad-Precisión en definiciones

Teoría de posibilidades
Conjuntos Difusos



Algunos tipos de modelamiento

Aleatoriedad
Riesgo

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Probabilista

Ambigüedad
Más información permite resolver el problema
Vaguedad-Precisión en definiciones

Teoría de posibilidades
Conjuntos Difusos

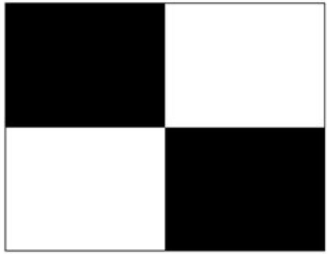
Clásico vs. Difuso

Lógica clásica:

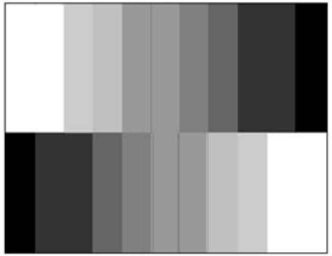
- Se consideran dos valores (0,1) para expresar verdadero/falso.

Lógica difusa:

- Es un tipo de lógica multivaluada. ‘posible’.



Lógica difusa



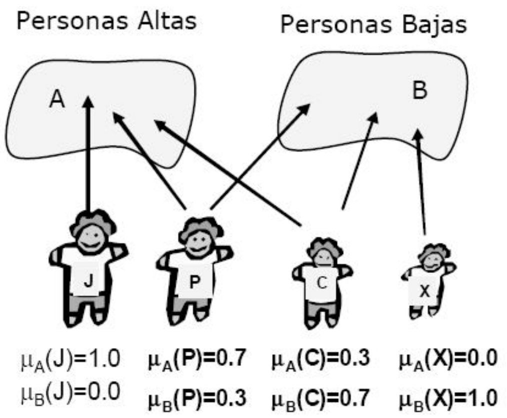
Lógica clásica

Conjuntos difusos

- Es un modelo para describir el significado de palabras vagas o imprecisas.
- Son funciones que relacionan un universo de objetos.
- La función de pertenencia que hace esta relación para el conjunto difuso A es la función

$$\mu A(x) \in [0,1]$$

- μA(x) da el grado de pertenencia del elemento x en el conjunto difuso A.
- La fusividad describe la vaguedad o imprecisión de un evento, definición o afirmación.



Función de pertenencia

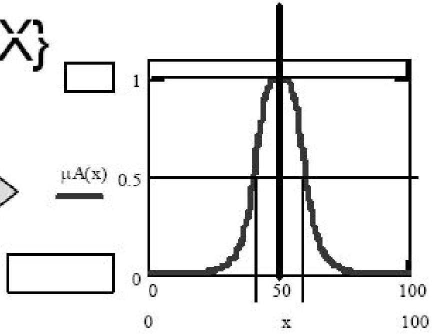
- Asigna a cada elemento del conjunto un grado de pertenencia entre 0 y 1. Un conjunto difuso A en X se define por el conjunto de pares ordenados

$$X, \mu_a(x)$$

- Conjunto Difuso Continuo:

$$A = \{ x, \mu_A(x) | \ x \in X \}$$

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left[\frac{x-50}{10}\right]^4}$$



Representación de una función de pertenencia

- **Variables continuas:**

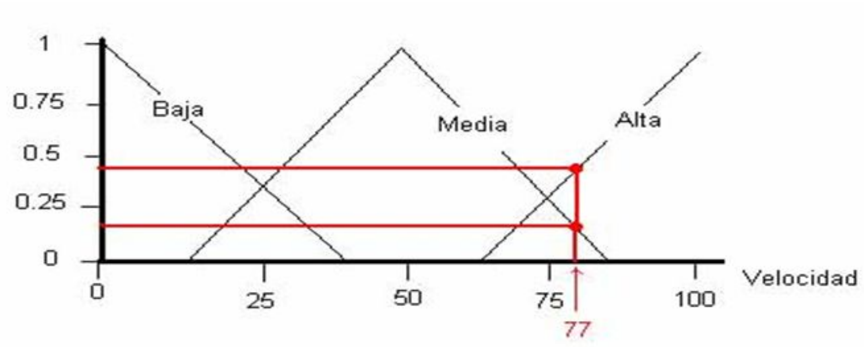
$$A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x}$$

- **Variables discretas:**

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{x \in X} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

Los signos de suma e integral no significan sumatoria o integración sino la unión de los pares (x_i ,$\mu_A(x_i)$). En ambos casos la línea horizontal no significa división. Esta es una barra delimitadora

Representación de medidas difusas

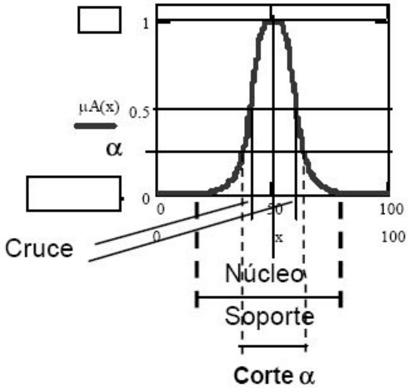


Velocidad a la que vamos (77) se traza una vertical.

Se toma valor Intersección mirando el eje vertical, hay TRES la primera esta a una altura de 0.20 y 0.45, y la otra es 0.

Sistema: 77 Km/h la velocidad es 0.2 Media, 0.45 Alta y Baja 0. Así, se consigue que el sistema tenga una estimación 'difusa' de la velocidad actual.

Características función de pertenencia



$$Núcleo(A) = \{x | \mu_A(x) = 1\}$$

$$Cruce(A) = \{x | \mu_A(x) = 0.5\}$$

$$Soporte(A) = \{x | \mu_A(x) > 0\}$$

Corte α o nivel α:

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Centro: Promedio de elementos μx = 1

Singleton Difuso: Soporte es un punto F en U con μF=1

Height: Altura, Mayor grado de pertenencia.... Conjunto Normal=1

Características función de pertenencia

La cardinalidad de un conjunto clásico se define como el número de elementos en el conjunto.

La cardinalidad de un conjunto difuso A es la suma de todos los grados de pertenencia de todos los elementos de x en A, es decir:

$$|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$$

$$|A| = \int_{x \in U} \mu_A(x) dx$$

Leyes válidas para conjuntos clásicos pero no para difusos

- **Conjuntos Clásicos**

  (E es un conjunto clásico)

  No existe nada entre E y Ê

  - Ley de los medios excluidos (No existe nada entre E y Ê)

    $$E \cup \overline{E} = U$$

  - Ley de contradicción

    $$E \cap \overline{E} = \phi$$

- **Conjuntos Difusos**

  (A es un conjunto difuso)

  $$A \cup \overline{A} \neq U$$

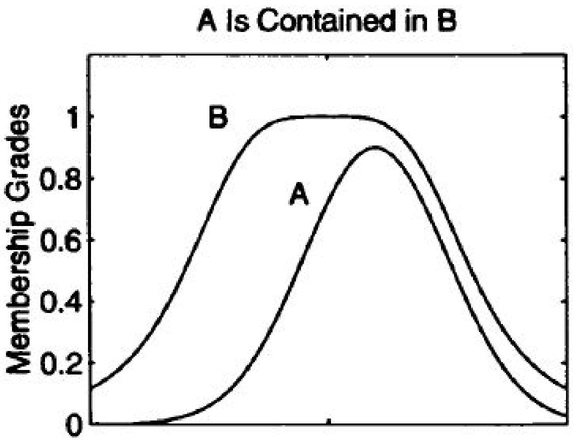
  $$A \cap \overline{A} \neq \phi$$

Law of contradiction	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Law of the excluded middle	$A \cup \overline{A} = X$
Idempotency	$A \cap A = A,\ A \cup A = A$
Involution	$\overline{\overline{A}} = A$
Commutativity	$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$
Associativity	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivity	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Absorption of complement	$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
DeMorgan's laws	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Operaciones conjuntos difusos: Contenido

A es contenido por un conjunto difuso B, si:

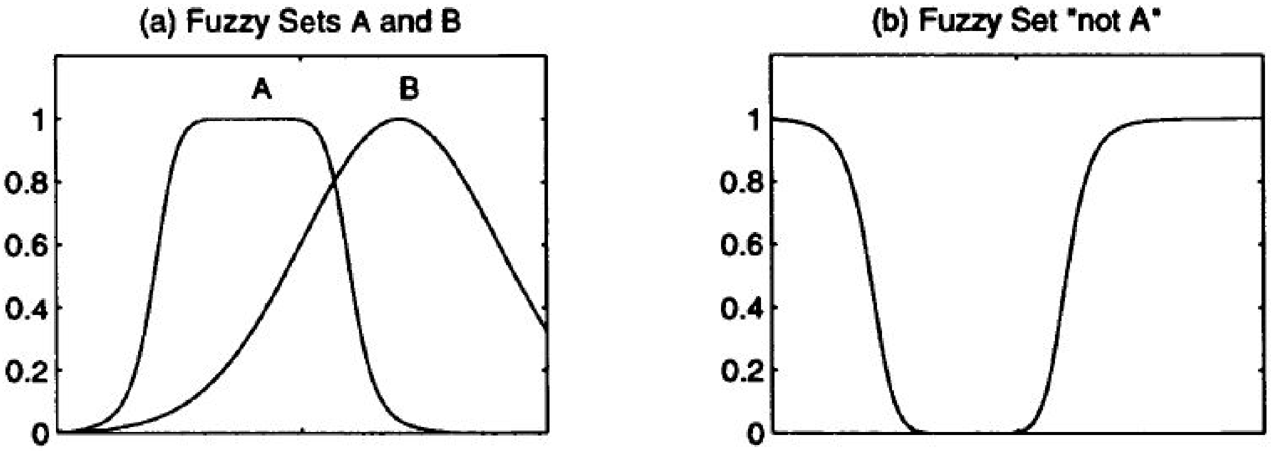
$$A \subset B \iff \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$



Operaciones conjuntos difusos: Complemento

El complemento de A está definido por::

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Operaciones conjuntos difusos: Complemento

En sí la anterior definición de complemento es una de muchas de la literatura, para ser un operador de complemento válido, debe cumplir los siguientes axiomas:

1. $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$ Condición de límites
2. For all $a, b \in [0, 1]$, if $a < b$, then $c(a) \geq c(b)$ $a = \mu_A(x)$ and $b = \mu_B(x)$

   Condición de no incremento
3. $C(C(\mu_A(x)) = \mu_A(x)$

Operaciones conjuntos difusos: Complemento

Otros operadores:

- Sugeno [1977]

$$c_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \qquad \lambda \in (-1, \infty)$$

- Yager [1980])

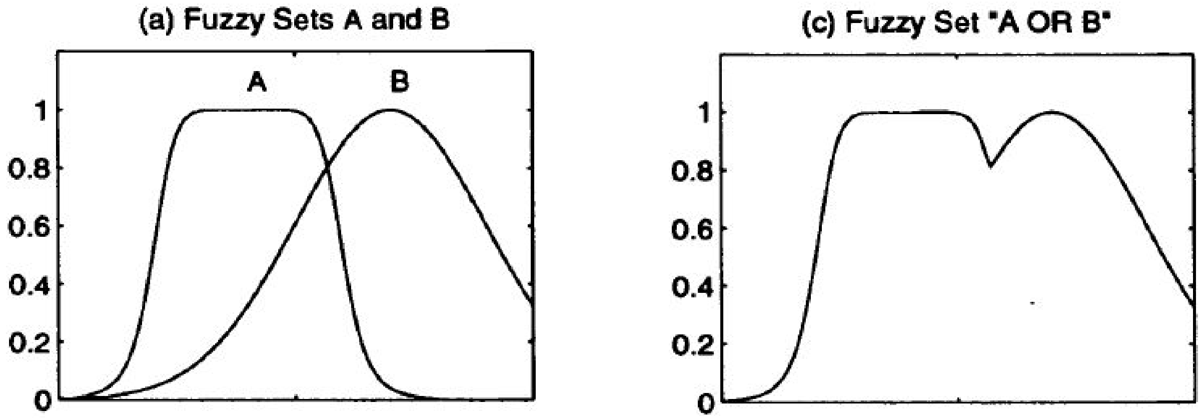
$$c_w(a) = (1 - a^w)^{1/w} \qquad w \in (0, \infty)$$

En realidad son generalizaciones de la definición anterior, con la posibilidad de variar algún parámetro.

Operaciones conjuntos difusos: Unión

El operador de unión está definido por:

$$A \cup B \iff \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



En otras palabras, es el conjunto difuso más pequeño que contiene a A y B.

Operaciones conjuntos difusos: Unión (S-Normas)

Nuevamente la anterior definición de unión es una de muchas de la literatura, para ser un operador de unión válido, debe cumplir los siguientes axiomas:

1. **Condición de Límites** $s(1,1) = 1 \quad s(0,a) = s(a,0) = a$
2. **Conmutatividad** $s(a,b) = s(b,a)$
3. **Condición de no decrecimiento, Monotonicidad** If $a \leq a'$ and $b \leq b'$, then $s(a,b) \leq s(a',b')$
4. **Asociatividad** $s(s(a,b),c) = s(a,s(b,c))$

También llamada: T-CoNorma (Norma triangular complementaria)

Wang Li-Xin, A Course in fuzzy systems and control, Ed. Prentice Hall.

Operaciones conjuntos difusos: Unión

Otros operadores:

- Dombi (1982)

$$s_\lambda(a,b) = \frac{1}{1 + [(\frac{1}{a} - 1)^{-\lambda} + (\frac{1}{b} - 1)^{-\lambda}]^{-1/\lambda}} \qquad \lambda \in (0, \infty)$$

- Dubois-Prade (1980)

$$s_\alpha(a,b) = \frac{a + b - ab - min(a, b, 1-\alpha)}{max(1-a, 1-b, \alpha)} \qquad \alpha \in [0,1]$$

- Yager (1980)

$$s_w(a,b) = min[1, (a^w + b^w)^{1/w}]$$

- Suma Drástica

$$s_{ds}(a,b) = \begin{cases} a \ if \ b = 0 \\ b \ if \ a = 0 \\ 1 \ otherwise \end{cases}$$

Operaciones conjuntos difusos: Unión

Otros operadores:

- Suma Einstein

$$s_{es}(a,b) = \frac{a+b}{1+ab}$$

- Suma Algebraica

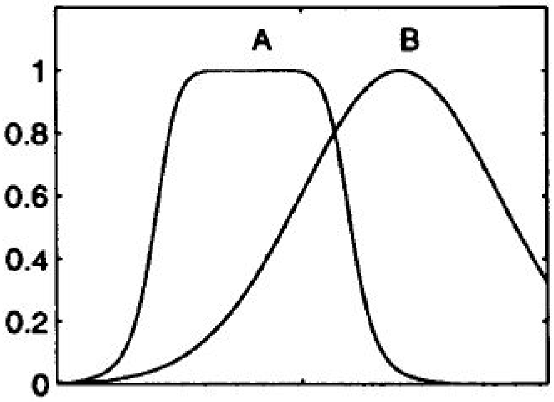
$$s_{as}(a,b) = a + b - ab$$

Operaciones conjuntos difusos: Intersección (T-Normas)

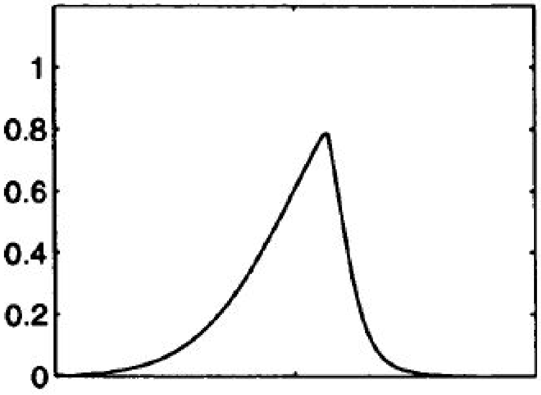
El operador intersección está definido como:

$$A \cap B \iff \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

(a) Fuzzy Sets A and B



(d) Fuzzy Set "A AND B"



Operaciones conjuntos difusos: Intersección (T-Normas)

Nuevamente la anterior definición de intersección es una de muchas de la literatura, para ser un operador de intersección válido, debe cumplir los siguientes axiomas:

1. **Condición de Límites**

$$t(0,0) = 0;\ t(a,1) = t(1,a) = a$$

2. **Conmutatividad**

$$t(a,b) = t(b,a)$$

3. **Condición de no decrecimiento, Monotonicidad**

$$\text{If } a \leq a' \text{ and } b \leq b' \quad \text{then } t(a,b) \leq t(a',b')$$

4. **Asociatividad**

$$t[t(a,b),c] = t[a,t(b,c)]$$

Wang Li-Xin, A Course in fuzzy systems and control, Ed. Prentice Hall.

Operaciones conjuntos difusos: Intersección

Otros operadores:

- Dombi (1982)

$$t_\lambda(a,b) = \frac{1}{1 + [(\frac{1}{a} - 1)^\lambda + (\frac{1}{b} - 1)^\lambda]^{1/\lambda}} \qquad \lambda \in (0, \infty)$$

- Dubois-Prade (1980)

$$t_\alpha(a,b) = \frac{ab}{max(a,b,\alpha)} \qquad w \in (0, \infty)$$

- Yager (1980)

$$t_w(a,b) = 1 - min[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}] \qquad w \in (0, \infty)$$

- Suma Drástica

$$t_{dp}(a,b) = \begin{cases} a \ if \ b = 1 \\ b \ if \ a = 1 \\ 0 \ otherwise \end{cases}$$

Operaciones conjuntos difusos: Intersección

Otros operadores:

- Producto Einstein

$$t_{ep}(a,b) = \frac{ab}{2-(a+b-ab)}$$

- Producto Algebraico

$$t_{ap}(a,b) = ab$$

Cómo elegir un operador?

- Ajuste empírico: Deben satisfacer el comportamiento real de las variables

- Adaptabilidad: Permitir modelar muchas situaciones posibles a través de parámetros.

- Eficiencia numérica: Unos operadores requieren menos esfuerzo computacional que otros.

- Compensación: Se puede buscar una compensación en la decisión de tal manera que no se tenga una aceptación sólo al mayor valor (max) o sólo al menor valor (min). El operador min no es compensatorio mientras que el operador producto sí lo es.

- Nivel de Información requerido: Es preferible operadores que requieren menor cantidad de información.

Ejemplo sistema de decisión

Costo de repuesto bajo o buen servicio pero precio medio

T-Norma

?

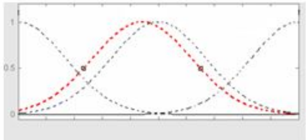
S-Norma

Intersección

Unión

Máximo

Mínimo



A quién ascender? – ejemplo sis. decisión

En una empresa se está buscando un empleado para asignarle un nuevo cargo. Buscan una persona con edad media o experiencia alta pero con salario bajo. La decisión se debe tomar a partir de la siguiente base de datos:

Apellido	Fecha Nacimiento	Ingreso a la Empresa	Salario
Arias	1994	2014	1
Benavides	1990	2009	3
Camargo	1988	2011	2
Díaz	1983	1999	5
Eslava	1995	2013	4

Defina el sistema difuso que permita tomar la decisión del empleado al cual se le dará el ascenso. Empleando el sistema difuso, establezca cual es el nombre del empleado que va a tener el nuevo puesto. Debe aclarar cuáles son los universos de discurso, cuáles son los valores lingüísticos para cada variable que se tiene en cuenta.

Qué relación tienen las S-normas con las T-normas?

Ley de De-Morgan:

$$T(a, b) = N\{S[N(a), N(b)]\}$$

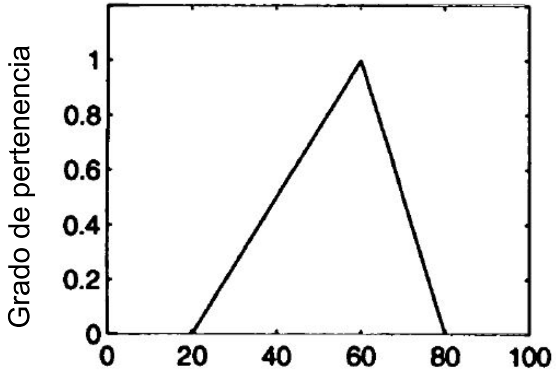
$$S(a, b) = N\{T[N(a), N(b)]\}$$

Funciones de pertenencia

Triangular: especificada por tres parámetros {a,b,c}

$$\text{triangulo}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad a \geq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & si \quad b \geq x \leq c \\ 0 & si \quad c \leq x \end{cases}$$

triangulo(x;20,60,80)

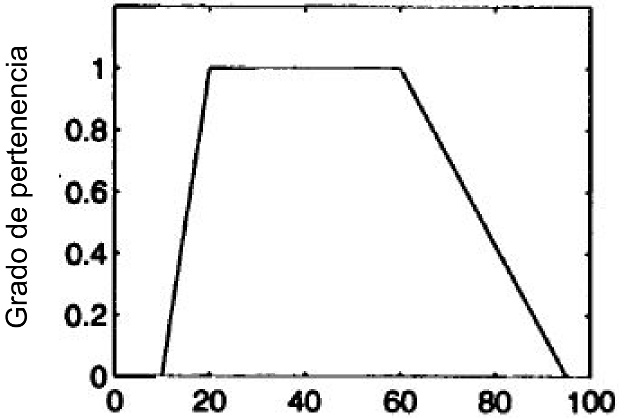


Funciones de pertenencia

Trapezoidal: especificada por cuatro parámetros {a,b,c,d}

$$\text{trapz}(x;a,b,c) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad a \geq x \leq b \\ 1 & si \quad b \geq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & si \quad c \geq x \leq d \\ 0 & si \quad d \leq x \end{cases}$$

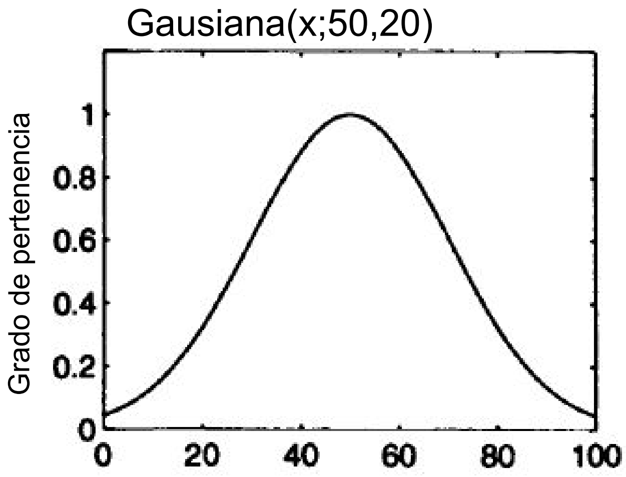
trapz(x;10,20,60,95)



Funciones de pertenencia

Gausiana: especificada por dos parámetros {c,sigma}

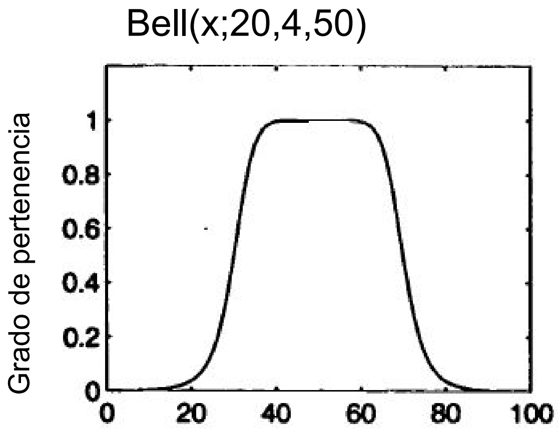
$$\text{Gausiana}\left(x;c,\sigma\right)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$



Funciones de pertenencia

Campana generalizada: especificada por tres parámetros {a,b,c}

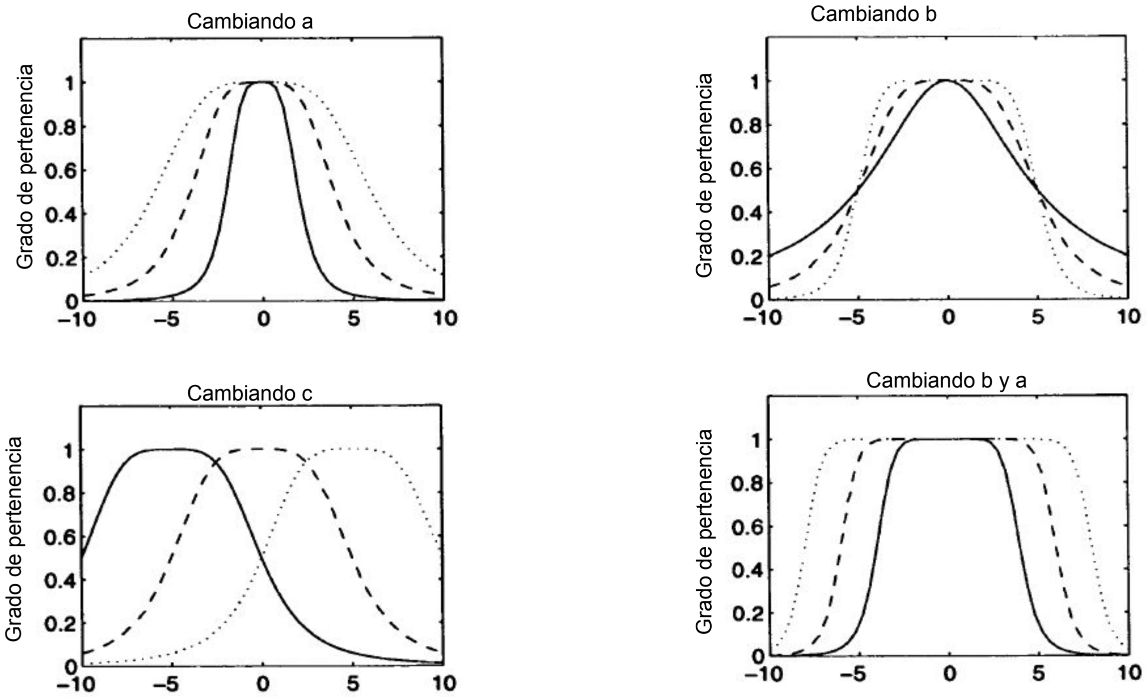
$$\mathrm{Bell}\left(x; a, b, c\right) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$



El parámetro b es usualmente positivo y controla la pendiente de los puntos de cruce. Cuando es negativo, la forma de la función de pertenencia se convierte en una campana invertida. El parámetro c controla el centro de la campana, mientras que a controla el ancho.

Funciones de pertenencia

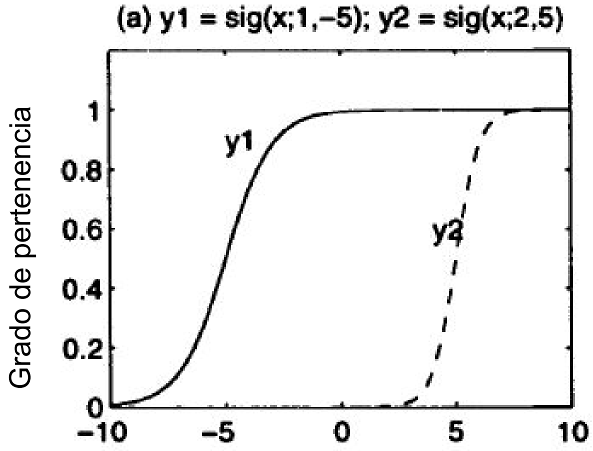
Campana generalizada



Funciones de pertenencia

Sigmoidal: especificada por dos parámetros {a,c}

$$\mathrm{Sig}(x; a, c) = \frac{1}{1+e^{(-a(x-c))}}$$



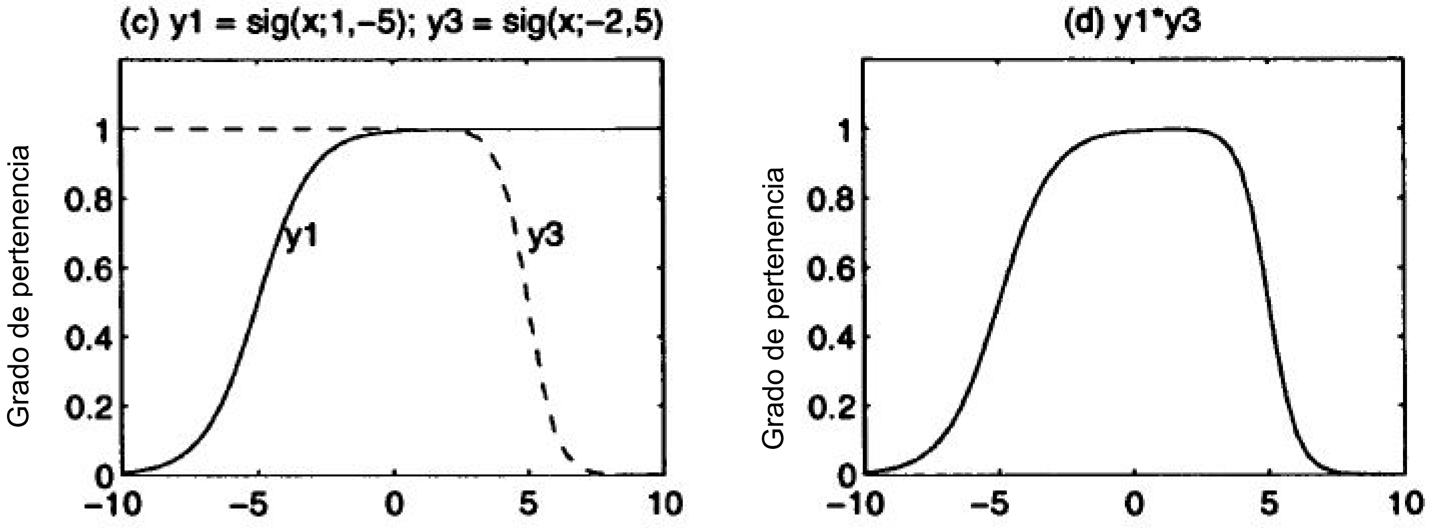
Capacidad de generar funciones simétricas y suaves.

El parámetro a se encarga de darle dirección (izquierda o derecha) y de la pendiente.

El parámetro c es el punto de cruce.

Funciones de pertenencia

BONUS: Con la sigmoidal se pueden construir funciones mucho más complejas



Relaciones difusas

Relación binaria en X x Y:

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)) | (x,y) \in XxY\}$$

En otras palabras es una función de “x” y “y”, que está definida para todos los “x” y “y” en el plano X x Y.

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} \frac{y-x}{y+x+2} & si \quad y \geq x \\ \\ 0 & si \quad y \leq x \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & Y = \{3,4,5,6,7\} \\ X = \{3,4,5\} & \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0.111 & 0.200 & 0.273 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0.091 & 0.167 & 0.231 \\ 0 & 0 & 0 & 0.077 & 0.143 \end{bmatrix} \end{array}$$

Relaciones difusas

Ejemplos de relaciones difusas:

- X es cercano a y (entre números)
- X depende de y (entre eventos)
- X se parece a y (entre objetos)
- Si x es largo entonces y es pequeño (se observa x y se concluye y)
- Si el nivel es bajo entonces el flujo de entrada es alto
- Si el nivel es alto entonces el flujo de entrada es bajo

Relaciones difusas

Controlar el nivel de un tanque:

Implicaciones: Relación entre conjuntos de entrada y salida (discretos-Matriz de control, continuos-Superficie de Control)

- Si el nivel es alto entonces el flujo de entrada debe ser bajo (R1)
- Si el nivel es bajo entonces el flujo de entrada debe ser alto (R2)

Pasos:

1. Definición de los conjuntos difusos
2. Definición de las reglas
3. Funciones de pertenencia de las relaciones difusas.
4. Implicación Mamdani

Relaciones difusas

Controlar el nivel de un tanque:

Implicaciones: Relación entre conjuntos de entrada y salida (discretos-Matriz de control, continuos-Superficie de Control)

- Si el nivel es alto entonces el flujo de entrada debe ser bajo (R1)
- Si el nivel es bajo entonces el flujo de entrada debe ser alto (R2)

Pasos:

1. Definición de los conjuntos difusos
2. Definición de las reglas
3. Funciones de pertenencia de las relaciones difusas.
4. Implicación Mamdani

Relaciones difusas

Controlar el nivel de un tanque:

Pasos:

1. Definición de los conjuntos difusos
   a. Universos de discurso nivel N y flujo F
2. Definición de las reglas
   a. Si el nivel es alto entonces el flujo de entrada debe ser bajo (R1)
   b. Si el nivel es bajo entonces el flujo de entrada debe ser alto (R2)
3. Funciones de pertenencia de las relaciones difusas.
4. Implicación Mamdani

Implicaciones difusas

1. En los sistemas difusos el conocimiento humano es representado en términos de reglas SI-ENTONCES.
2. Una regla difusa SI-ENTONCES es un condicional expresado como:

ANTECEDENTE **CONSECUENTE**

SI "proposición difusa" entonces "proposición difusa"

"Atomic fuzzy propositions" : Proposición única, simple

x es A

A: Valor lingüístico de la variable lingüística X

"Compound fuzzy prepositions " :
Proposición compuesta (y, o, no)

x es A y y es B

Relación difusa:

o: en X x Y $\mu_{A\cup B}(x,y) = S(\mu_A(x), \mu_B(y))$

y: en X x Y $\mu_{A\cap B}(x,y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y))$

no: complemento

Implicaciones Difusas, Interpretación

Lógica Clásica: $p \to q$

Lógica Difusa: $R_{XxY} = implicacion(\mu_A(x), \mu_B(y))$

1. **Implicación Dienes-Rescher** $p \to q \quad -p \vee q$

$$\mu_{Q_D}(x, y) = max[1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)]$$

2. **Implicación Lukasiewicz** $p \to q \quad -p \vee q$

$$\mu_{Q_L}(x, y) = min[1, 1 - \mu_{FP_1}(x) + \mu_{FP_2}(y)]$$

Implicaciones Difusas, Interpretación

3. **Implicación Zadeh** $p \to q$ $\quad -p \vee (p \wedge q)$

$$\mu_{Q_Z}(x,y) = max[min(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)), 1 - \mu_{FP_1}(x)]$$

4. **Implicación Gödel** $p \to q$

$$\mu_{Q_G}(x,y) = \begin{cases} 1 & if\ \mu_{FP_1}(x) \leq \mu_{FP_2}(y) \\ \mu_{FP_2}(y) & otherwise \end{cases}$$

5. **Implicación Mamdani**

$$\mu_{Q_{MM}}(x,y) = min[\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)]$$

Relación difusa

Proposición difusa

$$\mu_{Q_{MP}}(x,y) = \mu_{FP_1}(x)\mu_{FP_2}(y)$$

Implicaciones Difusas, Interpretación

Ahora sí.

Si el nivel es alto entonces el flujo de entrada debe ser bajo (R1)

Si el nivel es bajo entonces el flujo de entrada debe ser alto (R2)

$$R1_{NxF}: \quad \min(\mu_A(n), \mu_B(f))$$

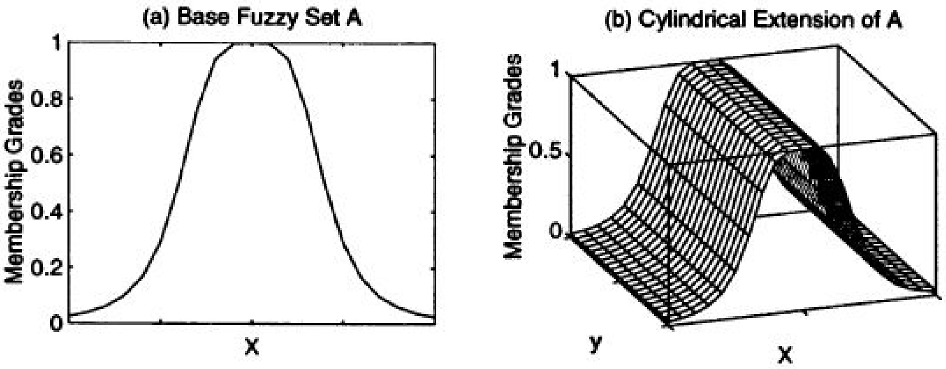
$$R2_{NxF}: \quad \min(\mu_B(n), \mu_A(f))$$

Extensión cilíndrica

Se trata de extender una función de pertenencia de una dimensión a dos dimensiones.

Si A es un conjunto difuso en X, entonces su extensión cilíndrica en el plano X x Y es una conjunto difuso C(A) definido como:

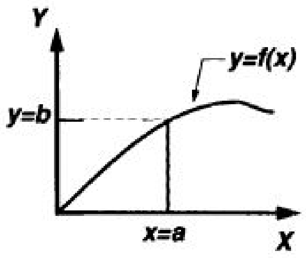
$$C(A) = \int \frac{\mu_A(x)}{(x,y)}$$



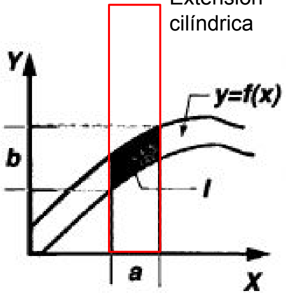
Regla composicional de inferencia

Es la generalización de f(x) = y

Si a es un punto, obtenemos su correspondiente en y, utilizando la relación f(x)

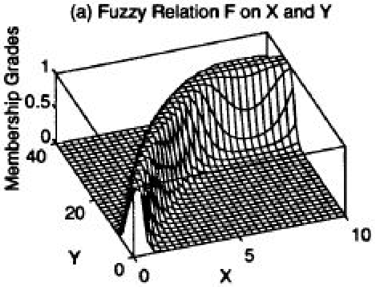


Pero si es un rango se debería obtener un rango de valores de y



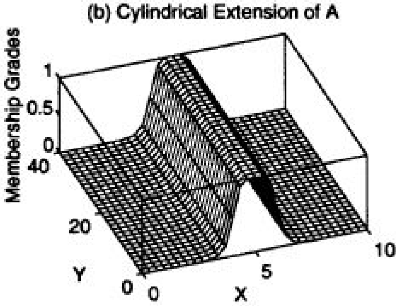
Para el caso de los conjuntos difusos podemos hacer algo similar.

Sea F la relación difusa entre "x" y "y".



Sea C(A) la relación cilindríca.

$$\mu_{c(A)}(x, y) = \mu_A(x).$$

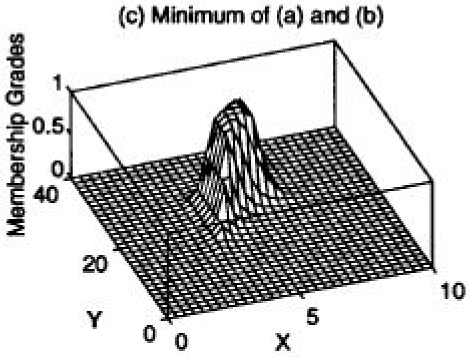


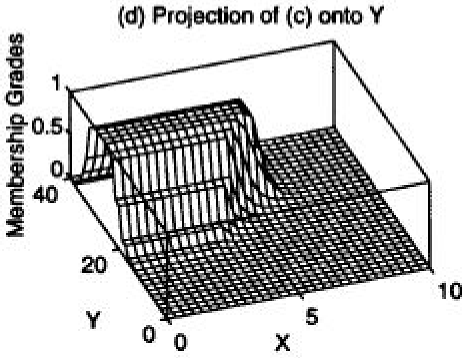
Regla composicional de inferencia

La intersección entre F y C(A), forman el análogo a la región sombreada del ejemplo anterior. (Intersección -> min)

$$\begin{aligned}\mu_{c(A)\cap F}(x,y) &= \min[\mu_{c(A)}(x,y), \mu_F(x,y)] \\ &= \min[\mu_A(x), \mu_F(x,y)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_B(y) &= \max_x \min[\mu_A(x), \mu_F(x,y)] \\ &= \vee_x[\mu_A(x) \wedge \mu_F(x,y)].\end{aligned}$$





Para encontrar el intervalo debemos hacer la proyección la función resultante. Así obtenemos un intervalo similar al del anterior ejemplo.

Razonamiento aproximado

La básica regla de inferencia en la lógica tradicional es modus ponens, según la cual se puede inferir la verdad de una proposición B de la verdad de una proposición A y de la implicación A -> B.

$$
\begin{array}{ll}
\text{premise 1 (fact):} & \text{x is } A, \\
\text{premise 2 (rule):} & \text{if x is } A \text{ then y is } B, \\
\hline
\text{consequence (conclusion):} & \text{y is } B.
\end{array}
$$

Pero la lógica humana no es así, por ejemplo, si decimos “si el tomate es rojo, entonces está maduro”, entonces sabemos que “si el tomate está medio rojo, entonces está más o menos maduro”

$$
\begin{array}{ll}
\text{premise 1 (fact):} & \text{x is } A', \\
\text{premise 2 (rule):} & \text{if x is } A \text{ then y is } B, \\
\hline
\text{consequence (conclusion):} & \text{y is } B',
\end{array}
$$

Donde A’ está cercano a A, y B’ está cercano a B. Razonamiento aproximado.

Razonamiento aproximado

$$
\begin{aligned}
\mu_{B'}(y) &= \max_x \min[\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)] \\
&= \vee_x[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x,y)],
\end{aligned}
$$

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \to B).$$

En lo siguiente se limitará a utilizar implicaciones Mamdani, y la composición max-min.

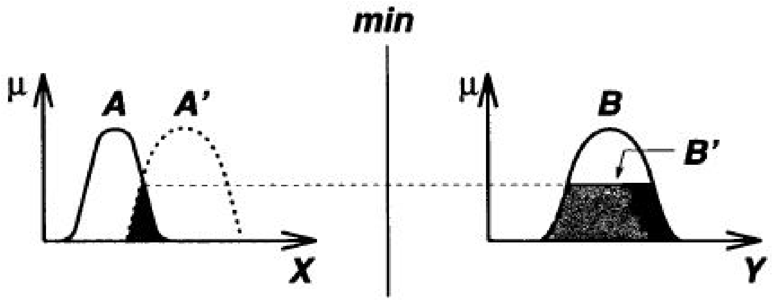
Una regla un antecedente

El caso más simple.

premise 1 (fact):	x is A,
premise 2 (rule):	if x is A then y is B,
consequence (conclusion):	y is B.

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= [\vee_x(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)] \wedge \mu_B(y) \\ &= w \wedge \mu_B(y). \end{aligned}$$

El máximo grado de similaridad de A' con A, a esta porción le hacemos la extensión cilíndrica, hacemos la proyección de la extensión en Y, y luego se intersecta con B.



Una regla múltiples antecedentes

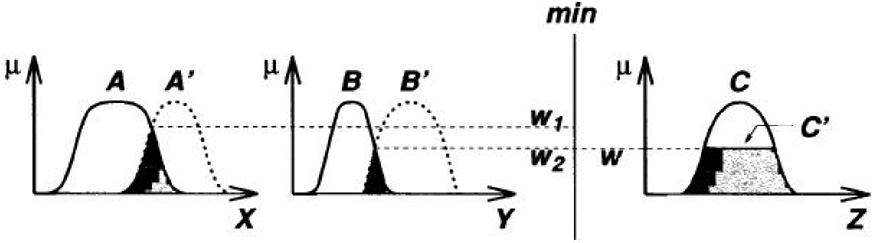
Es una regla escrita así:

Si “x” es A y “y” es B entonces “z” es C

premise 1 (fact):	x is A' and y is B',
premise 2 (rule):	if x is A and y is B then z is C,
consequence (conclusion):	z is C'.

AxB -> C

$$
\begin{aligned}
\mu_{C'}(z) &= \vee_{x,y}[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)] \\
&= \vee_{x,y}\{[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]\} \wedge \mu_C(z) \\
&= \underbrace{\{\vee_x[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)]\}}_{w_1} \wedge \underbrace{\{\vee_y[\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)]\}}_{w_2} \wedge \mu_C(z) \\
&= (w_1 \wedge w_2) \quad \wedge \mu_C(z),
\end{aligned}
$$

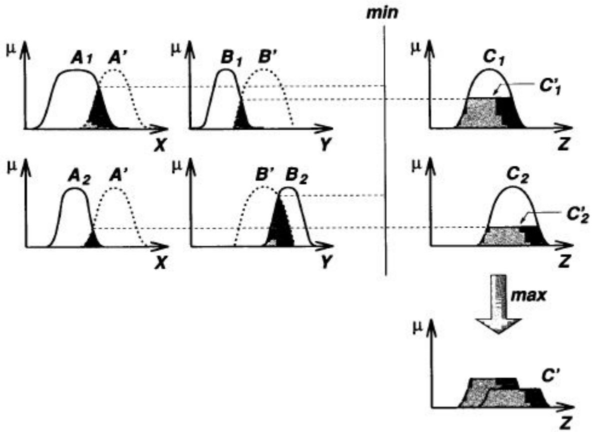


Múltiples reglas múltiples antecedentes

Usualmente tomado como la unión de las relaciones difusas correspondientes.

premise 1 (fact):	x is A' and y is B',
premise 2 (rule 1):	if x is A_1 and y is B_1 then z is C_1,
premise 3 (rule 2):	if x is A_2 and y is B_2 then z is C_2,
consequence (conclusion):	z is C',

$$\begin{aligned} C' &= (A' \times B') \circ (R_1 \cup R_2) \\ &= [(A' \times B') \circ R_1] \cup [(A' \times B') \circ R_2] \\ &= C'_1 \cup C'_2, \end{aligned}$$



Ahora sí estamos listos para completar el ejercicio del tanque

Controlar el nivel de un tanque:

Pasos:

1. Definición de los conjuntos difusos
   a. Universos de discurso nivel N y flujo F
2. Definición de las reglas
   a. Si el nivel es alto entonces el flujo de entrada debe ser bajo (R1)
   b. Si el nivel es bajo entonces el flujo de entrada debe ser alto (R2)
3. Funciones de pertenencia de las relaciones difusas.
4. Implicación Mamdani