Existencia de solución Lipschitz - continua a un sistema de leyes de balance

Rafael Melo Jiménez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2013

Existencia de solución Lipschitz - continua a un sistema de leyes de balance

Rafael Melo Jiménez

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemáticas

Director:
Ph.D. Leonardo Rendón Arbeláez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2013

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan en toda su belleza a aquellos que tienen el coraje de profundizar en ella.

Carl Friedrich Gauss

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al profesor Leonardo Rendón por su paciencia, sus dichos y su excelente coordinación.

A mi familia, por que de una forma u otra, siempre estuvieron ahí.

A mis amigos Liliana Romero y Gabriel Triana por su incondicional ayuda en el manejo del programa.

A Chopin y Tchaikovsky por haber creado Nocturnes y Swan Lake.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a mi esposa Nana, por haberme soportado y por su manera de desconectarme del mundo.

Resumen

En este trabajo se utilizan el método de la viscosidad nula junto con el método de las regiones invariantes y el principio del máximo para demostrar la existencia de una solución débil global Lipschitz-continua para un sistema de leyes de balance. El sistema hiperbólico subyacente es no estricto y corresponde al sistema de las ecuaciones isentrópicas de la dinámica de gases en coordenadas eulerianas, también conocido como el sistema de las ecuaciones de Euler para fluidos compresibles.

Palabras clave: Sistemas hiperbólicos, leyes de conservación, solución débil, viscosidad nula, dinámica de gases isentrópicos, regiones invariantes, principio del máximo.

Abstract

In this work we use the vanishing viscosity method along with the invariant regions method and the maxium principle to prove the existence of a global weak Lipschitz-continuous solution for a system of balanced laws. The underlying hyperbolic system is not strict and corresponds to the system of equations of isentropic gas dynamics in Eulerian coordinates, also known as the system of Euler equations for compressible fluids.

Keywords: hyperbolic systems, conservation laws, weak solution, vanishing viscosity, isentropic gas dynamics, invariant regions, maximum principle.

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

1. Introducción 2

2. Preliminares 5

2.1. Leyes de conservación escalar . . . 5
2.2. Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación . . . 7
2.3. Condiciones de admisibilidad . . . 12
2.4. Invariantes de Riemann . . . 14
2.5. Regiones invariantes . . . 16
2.6. El principio del máximo . . . 19
2.7. Problemas de Riemann . . . 20
2.8. Función de Green y funciones Holder-continuas . . . 21

3. Ecuaciones isentrópicas con términos fuente 23

3.1. Existencia local . . . 27
3.2. Solución global . . . 34
3.3. Estimaciones a priori . . . 37
3.4. Funciones Lipschitz-continuas . . . 47
3.5. Solución débil global Lipschitz-continua . . . 48

Bibliografía 51

1 Introducción

Una gran variedad de fenómenos naturales expresan comportamientos de conservación o de balance. El movimiento repetitivo de un péndulo, el rebote continuo de una pelota contra el suelo, e incluso nuestra necesidad de beber agua cada cierto tiempo, son ejemplos que muestran este tipo de comportamientos.

Dichos comportamientos se pueden reformular en términos de ecuaciones diferenciales parciales, llamadas *leyes de conservación*. Tres ejemplos comunes son: la ley de conservación de masa, la ley de conservación de momento y la ley de conservación de energía. Estas ecuaciones aparecen frecuentemente en problemas de flujo de tráfico, de dinámica de fluidos, de teoría de elasticidad, de fenómenos de onda lineales y no lineales, etc, y poseen la siguiente forma:

$$u_t(x,t) + f(u(x,t))_x = 0,$$

donde $x \in R$, $t \geq 0$, y u y f son funciones suaves llamadas *vector de cantidades conservadas* y *vector flujo* respectivamente. Varias ecuaciones de este tipo en conjunto forman un sistema homogéneo, el cual es llamado *sistema hiperbólico de leyes de conservación* cuando los valores própios de la matriz jacobiana de $f(u)$ son todos reales y distintos. Si algunos de ellos coinciden en algún punto, el sistema es llamado *no estrictamente hiperbólico*.

Generalmente estos sistemas admiten soluciones discontinuas, y por lo tanto, no diferenciables. Surge entonces el concepto de *solución débil*, el cual es una generalización del concepto de solución clásica (Ver [20] o [28]).

Una consecuencia importante de extender la noción de solución clásica a la de solución débil, es la pérdida de unicidad de esta última. En la página 15 de [3] hay un ejemplo sencillo de un sistema hiperbólico de leyes de conservación con infinitas soluciones débiles.

Para garantizar la unicidad de la solución se requiere la imposición de condiciones adicionales, que en la mayoría de los casos están motivadas por problemas de la física. Estas condiciones involucran el concepto de *entropía*, como se puede ver más detalladamente en [12], página 35, o en [3], página 16.

Una manera usual en que se demuestra la existencia de una solución débil de un sistema hiperbólico de leyes de conservación, es con el llamado *método de la viscosidad nula* (Ver [2],

[10], y [25]), el cual consiste en introducir un término difusivo en las ecuaciones para obtener un sistema con una única solución suave, y entonces hacer que el coeficiente de este término tienda a cero.

La solución débil que se obtiene por el método de la viscosidad nula generalmente es local (es decir, está definida solo para valores de t muy pequeños). Como el interés esta en soluciones globales (es decir, definidas para todo $t \geq 0$), es necesario extender esa solución local a una solución global. Esto se consigue aplicando el *método de las regiones invariantes*, el cual consiste en definir una región que contenga cualquier solución local del sistema junto con su dato inicial y/o valores de frontera. Así, se obtienen estimaciones (o cotas) *a priori* sobre las soluciones, y con dichas estimaciones se extiende la solución local paso a paso, obteniendo una solución global (Ver [28], página 198, o [31], teorema 1.1). Otra forma de obtener estimaciones *a priori* sobre las soluciones, es por la aplicación del *pricipio del máximo*. Una descripción completa de esta importante herramienta se encuentra en [18] o en [28].

En dinámica de gases surge el siguiente sistema de leyes de conservación de tamaño 2×2 no estrictamente hiperbólico:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \tag{1-1}$$

$$(\rho v)_t + \big(\rho v^2 + P(\rho)\big)_x = 0. \tag{1-2}$$

Dicho sistema ha sido ampliamente estudiado, y se le conoce como el *sistema de las ecuaciones isentrópicas*, o *sistema de ecuaciones de Euler para fluidos compresibles*. La primera ecuación representa la ley de *conservación de masa* y la segunda la ley de *conservación de momento lineal*. Este sistema describe los movimientos isentrópicos de un gas no viscoso, compresible y que no conduce calor, que fluye a través de un tubo, donde la densidad y la velocidad son constantes a lo largo de secciones transversales del tubo (Ver [13]). Aquí $x \in R$ representa la ubicación del gas a lo largo del tubo, $t \geq 0$ el tiempo, $\rho = \rho(x,t)$ la densidad del gas, $v = v(x,t)$ la velocidad del gas, y $P(\rho)$ la presión (cuya forma se establece mediante observaciones experimentales). Las regiones en el espacio físico donde $\rho = 0$ son identificadas con regiones de vacío del flujo, y son justamente ahí donde se pierde la hiperbolicidad estricta.

En [26] y [21] se demuestra la existencia de una solución débil global Lipschitz-continua de (1-1),(1-2) junto con un dato inicial suave y acotado en el espacio $C^1(R)$, cuando la presión $P(\rho)$ está definida por $P(\rho) := \int_0^\rho s^2 f^2(s)ds$, donde $f \in C^2(0,+\infty)$, y satisface:

$$\int_0^{+\infty} f(s)ds = +\infty, \quad f(\rho) > 0, \quad f'(\rho) \leq 0 \quad \text{o} \quad f'(\rho) \geq 0, \quad 2f(\rho) + \rho f'(\rho) \geq 0 \quad \text{para}$$

$\rho \geq 0$.

Si al sistema (1-1),(1-2) adicionamos un par de funciones $h_1(\rho, v, x, t)$ y $h_2(\rho, v, x, t)$ en el lado derecho:

$$\rho_t + (\rho v)_x = h_1(\rho, v, x, t), \tag{1-3}$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + P(\rho)\right)_x = h_2(\rho, v, x, t), \tag{1-4}$$

entonces claramente deja de ser homogéneo. Ahora pertenece a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales más general, llamado *leyes de balance*. Las funciones h_1 y h_2 son llamadas *términos fuente* o *términos de forzamiento*, y representan efectos externos en el sistema hiperbólico subyacente (Ver [1], [7] o [24]). Estos efectos pueden ser de carácter geométrico, como restricciones sobre el dominio de la solución del sistema, o físicos, como amortiguamientos, fricciones, o efectos gravitacionales.

Las ecuaciones (1-3),(1-4) son un modelo de la dinámica de gases en forma no conservativa con una fuente. Por ejemplo, si $h_1(\rho, v, x, t) = 0$ y $h_2(\rho, v, x, t) = \alpha(x, t)$, entonces $\alpha(x, t)$ representa una fuerza que actúa sobre el cuerpo (bodyforce), por lo general, la gravedad que actúa en todo el fluido en cualquier volumen. Si $h_1(\rho, v, x, t) = 0$ y $h_2(\rho, v, x, t) = -k(x)\rho u|u|$, entonces el efecto de esta fuente es un término de amortiguamiento. Si $h_1(\rho, v, x, t) = 0$ y $h_2(\rho, v, x, t) = -\beta(x)\rho - c\rho u|u|$, entonces dichas ecuaciones son un modelo extendido del caudal de un rio, donde $\beta(x)$ corresponde físicamente a la pendiente topográfica y $c\rho|u|$ a un término de fricción. Por último, si $h_1(\rho, v, x, t) = -\dfrac{a'(x)}{a(x)}\rho u$ y $h_2(\rho, v, x, t) = -\dfrac{a'(x)}{a(x)}\rho u^2$, entonces dichas ecuaciones modelan el flujo transónico de un gas a lo largo de una tobera divergente a través de un conducto de área variable. La función $a(x)$, que depende de sólo x, representa el área de la sección transversal en x del conducto. Los sistemas con este tipo de fuentes son de interés por que ocurren fenómenos de resonancia (Ver [19], [6], [15], [30]).

Los resultados referentes a la existencia de soluciones débiles globales para sistemas de leyes de balance son comparativamente menores que en el caso homogéneo. Algunos pueden encontrarsen en [22], [5], [29], [32], [6], [15], [30] y [24]. En este trabajo, demostraremos la existencia de una solución débil global Lipschitz-continua al sistema de leyes de balance (1-3),(1-4), junto con un dato inicial suave, acotado y medible $(\rho(x, 0), v(x, 0)) = (\rho_0(x), v_0(x))$, aplicando el método de la viscosidad nula junto con el método de las regiones invariantes y el principio del máximo.

2 Preliminares

Antes de empezar a demostrar lo establecido en el resumen, es necesario conocer algunas generalidades respecto a los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Por esa razón, este capítulo esta dedicado a mostrar aquellas definiciones y resultados fundamentales en este tema.

2.1. Leyes de conservación escalar

Definición 1 *Una **ley de conservación escalar** es una ecuación diferencial parcial de primer orden de la forma:*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} = 0,$$

donde $x \in R$, es una variable unidimensional, y $t \in [0, +\infty)$, representa el tiempo.

Comúnmente u es llamada *cantidad conservada* y f el *flujo*. La razón de su nombre se ve en la siguiente observación:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = -\int_a^b \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x}dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t)),$$

que significa; la cantidad total de u contenida dentro de algún intervalo finito dado $[a,b]$, puede cambiar solo debido al flujo de u a través de los puntos frontera.

Las leyes de conservación escalar frecuentemente describen fenómenos de transporte. También surgen en problemas de dinámica de fluidos, de teoría de elasticidad, y de fenómenos de onda no lineal, cuando se ignoran los efectos de la disipación, tales como la viscosidad (Ver [3], [28], o [9]).

Algunas ecuaciones de este tipo no admiten *soluciones clásicas globales*, es decir, funciones en el espacio $C^1(R \times [0, +\infty))$, definidas para todo $t \geq 0$, que satisfagan la ecuación en cuestión. Por ejemplo:

Ejemplo 1 *Considerese la **ecuación de Burger invísida** (sin viscosidad) también conocida como ecuación de onda no lineal de primer orden:*

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0. \tag{2-1}$$

Este es el ejemplo más sencillo de una ley de conservación escalar. Ahora considerese el dato inicial:

$$u(x,0) = u_0(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2-2}$$

Se usará el ***método de las características*** (Ver [14], pag. 8) *para tratar de encontrar una solución clásica global. Como u debe ser suave, podemos escribir* (2-1) *como* $u_t + uu_x = 0 \Leftrightarrow (u_t, u_x) \cdot (1, u) = 0$*, lo cual signica que la derivada direccional de la función* $u = u(x,t)$ *a lo largo del vector* $(1, u)$ *se anula. Por lo tanto, para cada* $x \in R$*, u debe ser constante a lo largo de la curva característica:*

$$\{(x + tu_0(x), t) : t \geq 0\} = \{\left(x + \frac{t}{1+x^2}, t\right) : t \geq 0\}. \tag{2-3}$$

Así, la solución al problema de Cauchy (2-1),(2-2) *está dada implícitamente por:*

$$u\left(x + \frac{t}{1+x^2}, t\right) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2-4}$$

Sin embargo, para $t > \frac{8}{3\sqrt{3}}$*, las líneas* (2-3) *comienzan a intersecarsen. Esto implica que la aplicación:*

$$x \to x + \frac{t}{1+x^2},$$

no es $1-1$ *y así,* (2-4) *no define una solución de valor simple para dicho problema, es decir, no existe solución clásica mas allá del tiempo* $t = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ (Ver [3], pag. 8).

El ejemplo 1 muestra la necesidad de generalizar la noción de solución de una ley de conservación escalar, llegando así a la siguiente definición:

Definición 2 *Sean* $f : R \to R$ *suave y* $u_o : R \to R$ *contínua. Considerese una ley de conservación escalar* $u_t + f(u)_x = 0$*, con dato inicial* $u(x,0) = u_0(x)$*. Una* ***solución débil****, o* ***solución generalizada****, para dicho problema de Cauchy es una función* $u(x,t)$ *tal que ella y* $f(u)$ *estén en* $L^1_{loc}(R \times (0, +\infty))$[1] *y*

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u\frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0\phi)dx = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(R \times (0, +\infty))$[2](Ver [20] o [28]).

[1] $L^1_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to R \quad / \quad f \cdot 1_K \in L^1(\Omega), \quad \forall K \subseteq \Omega, \quad K \quad compacto\}$ (Ver [3] pag. 74, o [4] pag. 61).
[2] $C_0^\infty(\Omega)$, también notado $\mathcal{D}(\Omega)$, es el espacio de las funciones de prueba, es decir, el espacio de las funciones de clase C^∞ en Ω con soporte compacto (Ver [20] o [18]).

Observación 1 *Este concepto de solución débil es una generalización del concepto de solución clásica, es decir, toda solución clásica es una solución débil. Reciprocamente, si una solución débil es de clase* C^1, *ésta resulta ser una solución clásica. Para probar este hecho, en primer lugar obsérvese que esta nueva definición tiene sentído suponiendo que* u *y* u_0 *sean tan solo acotadas y medibles. Y en segundo lugar; Sea* u *una solución débil de* $u_t + f(u)_x = 0$. *Entonces:*

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\phi_t + f(u)\phi_x)\, dxdt = 0, \tag{2-5}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(R \times (0, +\infty))$. *Si* $u \in C^1(R \times (0, +\infty))$, *integrando por partes* (2-5) *obtenemos:*

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t + f(u)_x)\, \phi dxdt = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(R \times (0, +\infty))$. *De aquí;* $u_t + f(u)_x = 0$, *c.t.p. (casi en toda parte), pero como* $u \in C^1$, $u_t + f(u)_x \equiv 0$, *luego,* u *es solución clásica.*

Ejemplo 2 *Considerese de nuevo la ecuación invísida de Burger;* $u_t + (u^2/2)_x = 0$, *pero ahora con la condición inicial:*

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}.$$

Como en el ejemplo 1, mediante el método de las caracteristicas, se prueba que no existe solución clásica global. Sin embargo, la función discontínua

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < t/2 \\ 0 & x > t/2 \end{cases},$$

es una solución débil global para el problema.

2.2. Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

Definición 3 *Un* ***sistema de leyes de conservación*** *es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_1(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} F_1(u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t)) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} F_n(u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t)) = 0, \end{cases} \tag{2-6}$$

donde $(x, t) \in R \times [0, +\infty)$.

Haciendo $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^t \in R^n$ y $F = (F_1, F_2, ..., F_n)^t : R^n \to R^n$, se puede escribir (2-6) como en el caso escalar:

$$u_t + F(u)_x = 0. \tag{2-7}$$

Por la regla de la cadena, $F(u)_x = DF(u) \cdot u_x$, donde

$$DF(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{pmatrix},$$

es la matriz jacobiana de F en el punto u. Entonces se puede escribir (2-7) como:

$$u_t + DF(u) \cdot u_x = 0. \tag{2-8}$$

Cuando un sistema de leyes de conservación es escrito en la forma (2-8), suele ser clasificado de la siguiente manera:

Definición 4 *Considerese un sistema de leyes de conservación en la forma* (2-8)*. Si los valores própios de la matriz $DF(u)$ son reales para todo u, entonces se dice que el sistema es **hiperbólico**. Si además, dichos valores propios son todos diferentes, el sistema se dice **estrictamente hiperbólico**. Y si para algunos puntos de u, hay valores propios que coinciden, entonces el sistema es llamado **no estrictamente hiperbólico** o **hiperbólico degenerado**.*

Ejemplo 3 *Un ejemplo clásico de un sistema hiperbólico de leyes de conservación es el sistema de las ecuaciones isentrópicas[3] de la dinámica de gases en coordenadas eulerianas[4]:*

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \qquad \textit{(ley de conservación de masa)} \tag{2-9}$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + P(\rho)\right)_x = 0. \qquad \textit{(ley de conservación de momento)} \tag{2-10}$$

[3]En termodinámica, un proceso isentrópico es aquel en el que la entropía (función que mide el desorden molecular) del fluído (gases o líquidos) que forma el sistema permanece constante (Ver [16], pág. 24).

[4]El movimiento de los fluidos y cualquier componente (temperatura, concentración, etc) transportado por los mismos se puede describir desde dos puntos de vista: bien de forma estacionaria o bien desplazándose con la corriente. La primera perspectiva donde la corriente y sus componentes se describen respecto a posiciones espaciales fijas y respecto al tiempo, son las coordenadas eulerinas. La segunda pespectiva donde la descripción se hace desplazándose con la corriente, son las llamadas coordenadas lagrangianas (Ver [16], pág. 40).

Estas ecuaciones describen los movimientos isentrópicos de un gas invísido[5]*, compresible*[6] *y que no conduce calor, que fluye a través de un tubo donde la densidad y la velocidad son constantes a lo largo de secciones transversales del tubo (Ver [13]). Aquí* $x \in R$ *representa la ubicación del gas a lo largo del tubo,* $t \geq 0$ *el tiempo,* $\rho = \rho(x,t)$ *la densidad del gas,* $v = v(x,t)$ *la velocidad del gas, y* $P(\rho)$ *la presión (como función de la densidad* ρ*) que satisface* $P'(\rho) > 0$.

Dichas ecuaciones constituyen un sistema hiperbólico, pues en los puntos donde $\rho \neq 0$*, el sistema* (2-9),(2-10) *es equivalente a:*

$$\rho_t + m_x = 0, \tag{2-11}$$

$$m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right)_x = 0, \tag{2-12}$$

donde $m = \rho v$ *denota la masa. Al escribir el sistema* (2-11),(2-12) *en la forma* (2-8)*, se tiene que:*

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(x,t) \\ m(x,t) \end{pmatrix},$$

con

$$F(u(x,t)) = \begin{pmatrix} F_1(u_1(x,t), u_2(x,t)) \\ F_2(u_1(x,t), u_2(x,t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(x,t) \\ \frac{m^2(x,t)}{\rho(x,t)} + P(\rho(x,t)) \end{pmatrix},$$

por lo tanto:

$$DF(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(m) & \frac{\partial}{\partial m}(m) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right) & \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + P'(\rho) & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix},$$

luego, el sistema (2-11),(2-12) *en la forma* (2-8) *queda así:*

$$\begin{pmatrix} \rho_t \\ m_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + P'(\rho) & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_x \\ m_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[5]Un fluido invísido, también llamado fluido ideal, es aquel que no presenta viscosidad. En realidad, todos los fluidos conocidos presentan algo de viscosidad. Sin embargo, un modelo con viscosidad nula es una muy buena aproximación para ciertas aplicaciones (Ver [16], pág. 79).

[6]Un fluido se dice compresible cuando existen variaciones de densidad significativas producidas por cambios de temperatura, presión o por grandes velocidades (Ver [16], pág. 58).

Ahora se hallaran los valores própios de $DF(u)$:

$$\det(DF(u)-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2}+P'(\rho) & \frac{2m}{\rho}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda\frac{2m}{\rho}+\frac{m^2}{\rho^2}-P'(\rho)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{m}{\rho} \pm \sqrt{P'(\rho)}.$$

Reemplazando $m=\rho v$, se obtiene que los valores própios de $DF(u)$ son:

$$\lambda = v \pm \sqrt{P'(\rho)}. \tag{2-13}$$

Como $P'(\rho)>0$, dichos valores propios son reales, es decir el sistema es hiperbólico.

La forma particular de la presión $P(\rho)$ en el sistema de leyes de conservación (2-9),(2-10) depende del gas en consideración y se establece mediante observaciones experimentales. Por ejemplo, para el llamado *gas politrópico*, la presión tiene la forma $P(\rho)=c\rho^\gamma$, donde c y γ[7] son constantes que satisfacen $c>0$ y $\gamma \geq 1$. En [26] y [21], se estudia en detalle el sistema de leyes de conservación (2-9),(2-10). Allí suponen que la presión $P(\rho)$ está dada por:

$$P(\rho)=\int_0^\rho s^2 f^2(s)ds, \tag{2-14}$$

donde f satisface las siguientes condiciones:

(A) $f \in C^2(0,+\infty)$, $\int_0^{+\infty} f(s)ds=+\infty$ y $f(\rho)>0$, $f'(\rho)\leq 0$ o $f'(\rho)\geq 0$, $2f(\rho)+\rho f'(\rho)\geq 0$ para $\rho \geq 0$.

Esta manera de describir la presión contiene, como caso particular, el gas politrópico.

Observación 2 *Si en el ejemplo 3, la presión $P(\rho)$ satisface la ecuación* (2-14)*, entonces*

$$P'(\rho)=\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho s^2 f^2(s)ds = \rho^2 f^2(\rho),$$

luego, $\sqrt{P'(\rho)}=\rho f(\rho)$, por lo tanto, los valores própios (2-13) *del sistema* (2-9),(2-10) *son:*

$$\lambda = v \pm \rho f(\rho). \tag{2-15}$$

De aquí se concluye que el sistema (2-9),(2-10) *es estrictamente hiperbólico cuando $\rho>0$, y no estrictamente hiperbólico cuando $\rho=0$. Las regiones en el espacio físico donde $\rho=0$ son identificadas con regiones de vacío del flujo.*

[7] El exponente γ suele ser llamado exponente adibático.

Y análogamente a como se hizo en el caso escalar, se define lo que es una *solución débil* para un sistema de leyes de conservación como (2-7) (Ver [20] o [28]). En el caso particular del sistema (2-9),(2-10), dicha definición queda de la siguiente manera (Ver [17]):

Definición 5 *Consideremos el sistema hiperbólico de leyes de conservación* (2-9),(2-10), *con dato inicial*

$$(\rho(x,0), v(x,0)) = (\rho_0(x), v_0(x)). \tag{2-16}$$

Una solución débil para el problema de Cauchy (2-9),(2-10),(2-16), *es un par de funciones* $\rho, v \in L^\infty(R \times [0,+\infty))$[8] *tales que:*

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\rho\phi_t + (\rho v)\phi_x)\, dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0\phi(x,0)dx = 0,$$

y

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left((\rho v)\phi_t + (\rho v^2 + P(\rho))\phi_x\right) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} v_0\phi(x,0)dx = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(R \times (0,+\infty))$.

Este nuevo concepto de solución incluye funciones discontínuas. De hecho, el interés principal es encontrar soluciones de clase C^1 a trozos, es decir, soluciones con un número finito de discontinuidades. Sin embargo, no toda discontinuidad es *admisible*. Se puede demostrar que las discontinuidades de las soluciones débiles satisfacen una *condición de salto*, mejor conocida en dinámica de gases como *la condición de Rankine - Hugoniot*, que dice: si C es una curva que está parametrizada por $(X(t), t)$, y que a lo largo de la cual la solución débil u es discontinua, entonces: $s[u] = [f(u)]$, donde $s = dX/dt$ es la *velocidad de propagación de la discontinuidad*, $[u] = u_l - u_r$ con u_l y u_r los valores de u evaluada a la izquierda y derecha de C respectivamente, y $[f(u)] = f(u_l) - f(u_r)$. Para una descripción más detallada, consúltece [12], página 25.

Observación 3 *En realidad, los sistemas de leyes de conservación son un caso particular de otros sistemas de ecuaciones diferenciales parciales llamadas* ***leyes de balance*** *(Ver [12] o [14]). Se puede obtener un sistema de leyes de balance simplemente adicionando un par de funciones* h_1 *y* h_2 *al lado derecho de algún sistema hiperbólico de leyes de conservación. Por ejemplo,* (2-9),(2-10) *queda así:*

$$\rho_t + (\rho v)_x = h_1(\rho, v, x, t),$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + P(\rho)\right)_x = h_2(\rho, v, x, t).$$

[8] $L^\infty(\Omega)$:= Espacio de las funciones medibles y acotadas en Ω.

Una solución débil para este sistema es un par de funciones $\rho, v \in L^\infty(R \times [0,+\infty))$ tales que:

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\rho\phi_t + (\rho v)\phi_x)\,dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0\phi(x,0)dx$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\rho,v,x,t)\phi dxdt,$$

y

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big((\rho v)\phi_t + (\rho v^2 + P(\rho))\phi_x\big)\,dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 v_0\phi(x,0)dx =$$
$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (vh_1(\rho,v,x,t) + \rho h_2(\rho,v,x,t))\phi dxdt,$$

para cualquier función de prueba $\phi \in C_0^\infty(R \times [0,+\infty))$. En el siguiente capítulo se tratara esto en detalle.

Observación 4 *Considerese el problema de Cauchy:*

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

Es fácil ver que, para cualquier $0 < \alpha < 1$,

$$u_\alpha(x,t) := \begin{cases} 0 & x < \alpha t/2, \\ \alpha & \alpha t/2 \leq x < (1+\alpha)t/2, \\ 1 & x \geq (1+\alpha)t/2, \end{cases}$$

es una solución débil para el problema. En efecto, como u_α es una función constante a trozos, se ve sin problema que satisface $\partial u_\alpha/\partial t + \partial(u_\alpha^2/2)/\partial x = 0$ en los intervalos abiertos. También $u_\alpha(x,0) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, y además cumple con las condiciones de Rankine - Hugoniot a lo largo de las dos líneas de discontinuidad $\{x = \alpha t/2\}$ y $\{x = (1+\alpha)t/2\}$, para todo $t > 0$.

2.3. Condiciones de admisibilidad

La observación anterior muestra que el concepto de solución débil no es lo suficientemente *fuerte* para garantizar unicidad de solución. En consecuencia, si el sistema de leyes de conservación proviene de un problema de ciencias físicas, no se puede tener una interpretación adecuada de la solución. Es claro entonces, que para garantizar unicidad de solución, y su dependencia contínua sobre el dato inicial, la noción de solución débil debe ser complementada con otra condición que permita distinguir la solución físicamente relevante. En otras palabras, para que un problema de Cauchy en este contexto de sistemas hiperbólicos esté *bien planteado*[9], se requiere que las candidatas a ser soluciones, además de satisfacer que sean soluciones débiles del sistema, satisfagan también otra condición adicional que permite determinar cual de entre ellas es la solución buscada. Hay varias opciones, denominadas en conjunto *las condiciones de admisibilidad* (Ver [3], pag. 15).

Condición de admisibilidad I: Supongase que, por consideraciones físicas, el sistema de leyes de conservación $u_t + F(u)_x = 0$ puede ser obtenido como una aproximación de un sistema más general, por ejemplo;

$$u_t + F(u)_x = \varepsilon\Lambda(u), \tag{2-17}$$

para algún $\varepsilon > 0$ pequeño. Generalmente $\Lambda(u)$ denota un operador diferencial de orden más alto. Una escogencia natural para $\Lambda(u)$ es tomar el *operador difusión*, definido como $\Lambda(u) := u_{xx}$. Haciendo esto con la ecuación (2-17), resulta:

$$u_t + F(u)_x = \varepsilon u_{xx}. \tag{2-18}$$

Entonces se dice que una solución débil $u = u(x,t)$ del sistema $u_t+F(u)_x = 0$ es *admisible en el sentido de la viscosidad nula* si existe una solución suave u^ε para la ecuación perturbada (2-18)[10] la cual define una sucesión $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ que posee una subsucesión que converge a u en L^1_{loc} cuando $\varepsilon \to 0^+$.

El principal inconveniente de este camino es que es muy difícil conseguir unas estimaciones *a priori* sobre las soluciones viscosas para el sistema de orden más alto (2-18), y caracterizar los límites correspondientes cuando $\varepsilon \to 0^+$ (Ver [2]).

Cuando se tiene un sistema de leyes de conservación y se busca una solución débil que sea admisible en el sentido de la viscosidad nula, es decir, por el camino que indica la condición de admisibilidad I, se dice que se ha utilizado el *método de la viscosidad nula*. Con este método no se garantiza unicidad de solución, sólo la coherencia física.

Condición de admisibilidad II: Un camino alternativo para encontrar soluciones admisibles se encuentra en el concepto de *entropía*. Un par (η, q) de funciones $\eta, q : R^n \to R$

[9] Un problema para el cual tenemos existencia, unicidad y dependencia continua sobre el dato inicial es llamado *bien planteado* (en el sentído de Hadamard)(Ver [18], página 29).

[10] Esta ecuación es llamada frecuentemente la *regularización parabólica* del sistema $u_t + F(u)_x = 0$, ya que se ubica dentro de la teoría de las ecuaciones parabólicas. En este campo se muestra que dicha ecuación tiene solución u^ε y la llaman *solución viscosa* (Ver [11], [23] o [27], Teorema 1.0.2.).

se dicen un par de *entropía convexa-flujo* del sistema $u_t + F(u)_x = 0$, si η es convexa[11], y además satisfacen que:

$$\nabla\eta(u) \cdot DF(u) = \nabla q(u), \tag{2-19}$$

$\forall u \in R^n$ [12]. Entonces se dice que una solución débil $u = u(x,t)$ del sistema $u_t + F(u)_x = 0$ es *admisible en el sentido de la entropía* si satisface:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x)\,dxdt \geq 0,$$

para cualquier par (η, q) de entropía convexa-flujo del sistema $u_t+F(u)_x = 0$, y para cualquier $\phi \in C_0^1(R \times (0, +\infty))$, con $\phi \geq 0$.

Esta condición de admisibilidad es útil sólo si se conoce algún par de entropía convexa-flujo no trivial del sistema. Para sistemas de leyes de conservación $n \times n$, las ecuaciones (2-19) pueden ser contempladas como un sistema de primer orden de n ecuaciones para las dos variables escalares η,q, así:

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial\eta}{\partial u_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial q}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial q}{\partial u_n}\right).$$

Cuando $n \geq 3$, este sistema es sobredeterminado. En general, se deberían esperar soluciones sólo en el caso $n \leq 2$. Sin embargo, hay importantes ejemplos físicos de sistemas *grandes* los cuales admiten un par de entropía convexa-flujo no trivial. Es importante señalar que cuando se encuentra una solución admisible en el sentido de la entropía para algún sistema, ésta resulta ser única (Ver [12], Sec 1.7).

Finalmente, se conocen otras condiciones de admisibilidad de acuerdo a la naturaleza de las soluciones. Entre ellas tenemos la condición de admisibilidad de Liu y la condición de admisibilidad de Lax (Ver [3], páginas 19 y 20).

2.4. Invariantes de Riemann

Definición 6 *Dado un sistema de leyes de conservación 2×2 estrictamente hiperbólico, $u_t + F(u)_x = 0$, $t > 0$, $x \in R$, un par de funciones diferenciables $z, w : R^2 \to R$ se dicen*

[11]Una función $\eta : \Omega \subseteq R^n \to R$ se dice convexa en Ω si $\eta(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta\eta(x) + (1-\theta)\eta(y)$, $\forall x, y \in \Omega$ y $\forall\theta \in [0, 1]$.

[12]Un ejemplo de un par de entropía convexa-flujo para un sistema, se da en [17], donde se calculan cuatro pares de entropía convexa-flujo para el sistema (2-9),(2-10).

invariantes de Riemann *correspondientes a los valores própios* λ_1 *y* λ_2*, si sus gradientes* $\nabla z, \nabla w$ *son vectores propios a izquierda de* DF*, es decir, si* $\forall u \in Dom(F)$*, satisfacen las siguientes relaciones:*

$$\nabla z(u) \cdot DF(u) = \lambda_1(u) \cdot \nabla z(u), \tag{2-20}$$

$$\nabla w(u) \cdot DF(u) = \lambda_2(u) \cdot \nabla w(u),$$

donde $\lambda_1(u)$*, y* $\lambda_2(u)$ *son los diferentes valores própios de la matriz* $DF(u)$*.*

Ejemplo 4 *Considerese las ecuaciones isentrópicas de la dinámica de gases en coordenadas eulerianas* (2-9),(2-10)*:*

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0,$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + P(\rho)\right)_x = 0,$$

donde la presión $P(\rho)$ *esta definida por la ecuación* (2-14)*. En el ejemplo* 3 *se vio que este sistema es estrictamente hiperbólico cuando* $\rho > 0$*. Vamos a hallar sus invariantes de Riemann* z *y* w*. Haciendo* $m = \rho v$ *tenemos que:*

$$DF(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + \rho^2 f^2(\rho) & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix},$$

y por (2-15)*, los valores propios son*

$$\lambda_1(u) = \frac{m}{\rho} - \rho f(\rho), \qquad y \qquad \lambda_2(u) = \frac{m}{\rho} + \rho f(\rho).$$

Por otro lado $z = z(u_1, u_2) = z(\rho, m)$ *y* $w = w(u_1, u_2) = w(\rho, m)$*. Por lo tanto,* $\nabla z(u) = (\partial z/\partial u_1, \partial z/\partial u_2) = (\partial z/\partial \rho, \partial z/\partial m)$ *y* $\nabla w(u) = (\partial w/\partial u_1, \partial w/\partial u_2) = (\partial w/\partial \rho, \partial w/\partial m)$*. Primero se hallerá* z*. Reemplazando lo anterior en la ecuación* (2-20) *se tiene que:*

$$\nabla z(u) \cdot DF(u) = \lambda_1(u) \cdot \nabla z(u)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial m}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + \rho^2 f^2(\rho) & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix} = \left(\frac{m}{\rho} - \rho f(\rho)\right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial m}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\rho^2 f^2(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2}\right)\frac{\partial z}{\partial m}, \frac{\partial z}{\partial \rho} + \left(\frac{2m}{\rho}\right)\frac{\partial z}{\partial m}\right) = \left(\left(\frac{m}{\rho} - \rho f(\rho)\right)\frac{\partial z}{\partial \rho}, \left(\frac{m}{\rho} - \rho f(\rho)\right)\frac{\partial z}{\partial m}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial \rho} + \left(\frac{m}{\rho} + \rho f(\rho)\right)\frac{\partial z}{\partial m} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial \rho} + \lambda_2(u)\frac{\partial z}{\partial m} = 0 \Leftrightarrow z_\rho + \lambda_2 z_m = 0.$$

Haciendo $z_m = \frac{1}{\rho}$ *en esta última ecuación, se obtiene;* $z_\rho = -\frac{m}{\rho^2} - f(\rho)$, *y de aquí,* $z = \frac{m}{\rho} - \int_0^\rho f(s)ds$. *Pero* $m = \rho v$, *luego:*

$$z = v - \int_0^\rho f(s)ds. \tag{2-21}$$

Análogamente se halla w, *se obtiene:*

$$w = v + \int_0^\rho f(s)ds. \tag{2-22}$$

Se puede probar que los invariantes de Riemann siempre existen para los sistemas 2×2 estrictamente hiperbólicos (Ver [9], Sec 7.3). Los invariantes de Riemann son importantes ya que con ellos se puede transformar el sistema en otro más simple. La manera en que se hace esto es la siguiente; considerese un sistema 2×2 estrictamente hiperbólico:

$$u_t + DF(u) \cdot u_x = 0,$$

donde $u = (u_1, u_2)$, $F = (F_1, F_2)$ y $DF(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$.

Sean $z = z(u_1, u_2)$ y $w = w(u_1, u_2)$ un par de invariantes de Riemann correspondientes a λ_1 y λ_2 respectivamente. Multipliquese por ∇z el lado izquierdo del sistema. Se obtiene:

$$\nabla z \cdot (u_t + DF(u) \cdot u_x) = \nabla z \cdot u_t + \nabla z \cdot DF(u) \cdot u_x = \nabla z \cdot u_t + \lambda_1 \nabla z \cdot u_x$$

$$= (z_{u_1}, z_{u_2}) \cdot (u_{1t}, u_{2t}) + \lambda_1 (z_{u_1}, z_{u_2}) \cdot (u_{1x}, u_{2x}) = z_{u_1} \cdot u_{1t} + z_{u_2} \cdot u_{2t} + \lambda_1 (z_{u_1} \cdot u_{1x} + z_{u_2} \cdot u_{2x}) = z_t + \lambda_1 z_x.$$

Osea que $z_t + \lambda_1 z_x = 0$. Y análogamente se encuentra que $w_t + \lambda_2 w_x = 0$.

En la página 393 de [28], se prueba que la aplicación $(u_1, u_2) \to (w, z)$ es biyectiva en cualquier región simplemente conexa, luego, cada vez que hayan soluciones suaves (es decir, clásicas) se tendrá la siguiente equivalencia:

$$u_t + F(u)_x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} w_t + \lambda_2 w_x = 0, \\ z_t + \lambda_1 z_x = 0. \end{cases}$$

2.5. Regiones invariantes

Cuando se tiene la solución global de algún problema, se puede estudiar completamente la evolución del mismo, lo cual es extraordinariamente útil. Por esa razón, el interés principal está en las soluciones globales. Algunos problemas, como el del ejemplo 1, poseen una solución clásica definida sólo para tiempos muy pequeños. Se puede extender esa solucíon clásica local a una solución débil global usando el concepto de *región invariante* (Ver [28], página 198, o [8]).

Definición 7 *Considerese un sistema de la forma:*

$$v_t = \epsilon D v_{xx} + M v_x + f(v,t), \tag{2-23}$$

donde $x \in R$, $t \geq 0$, $v \in R^n$, $D = D(v,x)$ y $M = M(v,x)$ son funciones de valor matricial $n \times n$ y $f : R^n \times [0,\infty) \to R^n$ es suave, junto con el dato inicial:

$$v(x,0) = v_0(x). \tag{2-24}$$

Un subconjunto cerrado $\Sigma \subseteq R^n$ es llamado una ***región invariante*** *para la solución local definida por* (2-23),(2-24)*, si cualquier solución $v(x,t)$ con valores frontera y/o iniciales en Σ, satisface $v(x,t) \in \Sigma$ para todo $x \in R$, y para todo $t \in [0,t_0)$.*

Ejemplo 5 *Un ejemplo típico de una región invariante, viene dado por la ecuación del calor en su forma más simple: $u_t = u_{xx}$. El principio de máximo (Ver teorema* 9.1 *de [28]) implica que la región $\Sigma := \{u : -1 \leq u \leq 1\}$ es invariante.*

Hay varias caracterizaciones y resultados respecto a regiones invariantes. Algunos de ellos (junto con sus respectivas demostraciones) se pueden consultar en [8]. Entre ellos esta un corolario bastante útil que dice que para sistemas parabólicos de tamaño 2×2 como (2-18), si las curvas $z = constante$ y $w = constante$ son monótonas y cóncavas contrarias, donde z y w denotan los correspondientes invariantes de Riemann, entonces las regiones Σ de la forma $\Sigma = \{(u_1,u_2) : c_1 \leq z \leq c_2\} \cap \{(u_1,u_2) : c_2 \leq w \leq c_3\}$, donde c_1, c_2 y c_3 son constantes que satisfacen $c_1 < c_2 < c_3$, son invariantes para todo $\epsilon > 0$.

Ejemplo 6 *Considerese la regularización parabólica de las ecuaciones isentrópicas de la dinámica de gases en coordenadas eulerianas* (2-9),(2-10)*:*

$$\rho_t + (\rho v)_x = \epsilon \rho_{xx},$$

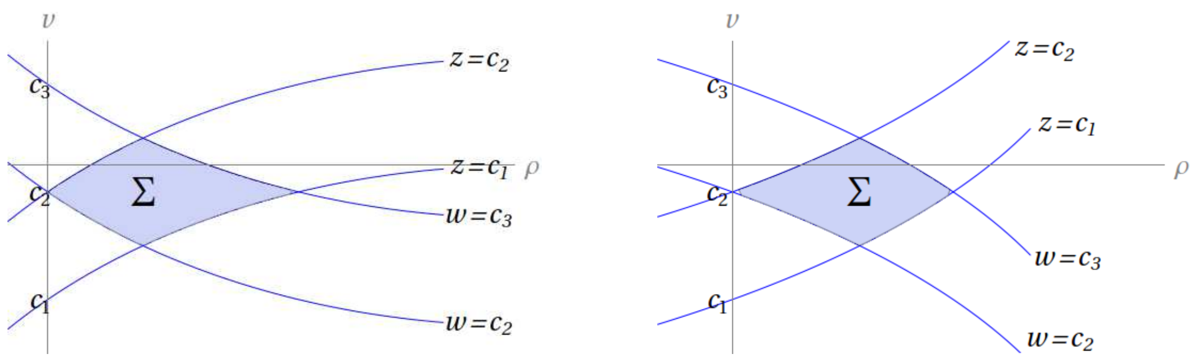
$$(\rho v)_t + \big(\rho v^2 + P(\rho)\big)_x = \epsilon (\rho v)_{xx},$$

donde la presión $P(\rho)$ está definida por la ecuación (2-14)*. En el ejemplo* 4 *se vio que un par de invariantes de Riemann z y w correspondientes a los valores própios $\lambda_1 = v - \rho f(\rho)$ y $\lambda_2 = v + \rho f(\rho)$, son $z = v - \int_0^\rho f(s)ds$ y $w = v + \int_0^\rho f(s)ds$, respectivamente. Sean c_1, c_2 y c_3 constantes que satisfacen $c_1 < c_2 < c_3$. Entonces:*

$$z = c_1 \Leftrightarrow v - \int_0^\rho f(s)ds = c_1 \Leftrightarrow v = c_1 + \int_0^\rho f(s)ds,$$

de aquí; $\dfrac{dv}{d\rho} = f(\rho)$ y $\dfrac{d^2v}{d\rho^2} = f'(\rho)$. Por las condiciones **(A)** *que cumple f, vemos que, cuando $f'(\rho) \leq 0$, $\dfrac{dv}{d\rho} > 0$ y $\dfrac{d^2v}{d\rho^2} \leq 0$, osea que la curva $z = c_1$ es creciente y cóncava* *hacia abajo. Sucede igual con $z = c_2$. Razonando de manera similar con las curvas $w = c_2$ y $w = c_3$, resulta que éstas son decrecientes y cóncavas hacia arriba. Cuando $f'(\rho) \geq 0$, lo único que cambia son las concavidades (Ver Figura **2-1**). Por lo tanto, las regiones de la forma $\Sigma = \{(\rho, v) : c_1 \leq z \leq c_2\} \cap \{(\rho, v) : c_2 \leq w \leq c_3\}$ son invariantes para todo $\epsilon > 0$, para este sistema.*

Figura 2-1: Regiones Invariantes



Si $f'(\rho) \leq 0$ Si $f'(\rho) \geq 0$

De la existencia de regiones invariantes, se obtienen estimaciones (o cotas) a priori sobre las soluciones. Y con dichas estimaciones a priori, se puede establecer la existencia de soluciones suaves globales. En la parte (ii) del teorema 1.1 de [31], se demuestra este hecho, para sistemas de la forma $u_t + F(u)_x = h(u) + \epsilon u_{xx}$. En el siguiente ejemplo se muestra este resultado para un sistema de la forma (2-18).

Ejemplo 7 *Considerese el problema de Cauchy:*

$$u_t + F(u)_x = \epsilon u_{xx},$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Supongase que tiene una solución local $u(x, t)$, y que ésta se encuentra definida para $x \in R$ y $0 \leq t \leq t_0$, para un tiempo t_0 pequeño. Supongase además que t_0 depende sólo de $\| u_0(x) \|_\infty$, es decir, $t_0 = t_0(\| u_0(x) \|_\infty)$, y que dicha solución $u(x, t)$ tiene una estimación L^∞ a priori, esto es, existe $c = c(\| u_0(x) \|_\infty) > 0$ tal que $\| u(\cdot, t) \|_\infty < c$, para cualquier $0 \leq t \leq t_0$. Como t_0 depende sólo de $\| u_0(x) \|_\infty$, se puede usar $u(x, t_0)$ como dato inicial, y usando la estimación a priori, se ve que:

$$u_t + F(u)_x = \epsilon u_{xx},$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

tiene una solución local $u(x, t)$, definida para $x \in R$ y $t_0 \leq t \leq t_0 + \triangle$. Repitiendo este proceso, se muestra que dicho problema tiene una solución global.

2.6. El principio del máximo

Otra herramienta bastante útil para encontrar estimaciones a priori es el famoso *principio del máximo*, que se expondrá a continuación:

Considerese el operador lineal dado por:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t},$$

definido en $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, con $T > 0$ y $\Omega \subseteq R$ abierto y acotado.
Escribase

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u,$$

y supongase que los coeficientes a_{ij}, b_i y c son funciones acotadas en Ω_T. Se define:

$$\partial^\star \Omega_T := \partial\Omega_T \setminus \Omega \times T.$$

Entonces:

Definición 8 *El operador L se dice* ***parabólico*** *en Ω_T si existe $\lambda > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > \lambda\|\xi\|^2,$$

para todo $(x,t) \in \Omega_T$ y para todo vector $\xi \in R^n$, $\xi \neq 0$.

Ejemplo 8 *Un ejemplo típico de un operador parabólico es el operador del calor:*

$$L \equiv \triangle - \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde

$$\triangle := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

es el operador de Laplace.

Los operadores parabólicos satisfacen la siguiente importante propiedad, la cual será utilizada en el siguiente capítulo para conseguir unas estimaciones *a priori*. Dicha propiedad es llamada el **princípio del máximo en forma débil** y dice: Sea L un operador parabólico en Ω_T, y supongamos $c(x,t) \leq 0$. Si $u \in C^2(\Omega_T) \cap \overline{C}^2(\Omega_T)$ y $L(u) = A(u) - u_t \geq 0$, entonces

$$sup_{\Omega_T} u = max_{\overline{\Omega}_T} u \leq max_{\partial^\star \Omega_T} u^+,$$

donde $u = u^+ - u^-$, y $u^+ = max\{u, 0\}$. Para el caso particular $c(x,t) = 0$, tenemos:

$$sup_{\Omega_T} u = max_{\overline{\Omega}_T} u = max_{\partial^\star \Omega_T} u.$$

2.7. Problemas de Riemann

Definición 9 *Un* ***problema de Riemann*** *es un problema de Cauchy para un sistema de leyes de conservación con condiciones iniciales que son constantes a trozos y con una discontinuidad, es decir, es un problema de la forma:*

$$u_t + F(u)_x = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0, \end{cases}$$

donde u_l y u_r son constantes.

La importancia de los problemas de Riemann radica en el hecho de que son la herramienta básica hacia la solución de problemas de Cauchy con datos iniciales más generales. Para más información, consúltece [3], página 20.

Definición 10 *Considerese un sistema 2×2 de leyes de conservación estrictamente hiperbólico:*

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1 + \frac{\partial}{\partial x}f_1(u_1,u_2) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_2 + \frac{\partial}{\partial x}f_2(u_1,u_2) = 0,$$

y sean r_1, r_2 vectores própios a derecha correspondientes a los valores própios λ_1, λ_2. El sistema se dice ***genuinamente no lineal*** *en el campo caracteristico λ_i si $\nabla\lambda_i \cdot r_i \neq 0$, para $i = 1, 2.$, y se dice* ***linealmente degenerado*** *en el dominio D sobre el campo caracteristico λ_i, si $\nabla\lambda_i \cdot r_i = 0$ sobre D, para $i = 1, 2$.*

Ejemplo 9 *Considerese las ecuaciones isentrópicas de la dinámica de gases en coordenadas eulerianas en su forma equivalente* (2-11),(2-12)*:*

$$\rho_t + m_x = 0,$$

$$m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right)_x = 0.$$

Ya se vio que dicho sistema es estrictamente hiperbólico cuando $\rho > 0$, y que sus valores própios son $\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \sqrt{P'(\rho)}$ y $\lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \sqrt{P'(\rho)}$. Dos vectores própios derechos r_1 y r_2 correspondientes a los valores própios λ_1 y λ_2 son respectivamente:

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{m}{\rho} - \sqrt{P'(\rho)} \end{pmatrix}, \quad y \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{m}{\rho} + \sqrt{P'(\rho)} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto;

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_1 = \left(-\frac{m}{\rho^2} - \frac{P''(\rho)}{2\sqrt{P'(\rho)}}, \frac{1}{\rho}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{m}{\rho} - \sqrt{P'(\rho)} \end{pmatrix} = -\frac{\rho P''(\rho) + 2P'(\rho)}{2\rho\sqrt{P'(\rho)}},$$

y

$$\nabla\lambda_2 \cdot r_2 = \left(-\frac{m}{\rho^2} + \frac{P''(\rho)}{2\sqrt{P'(\rho)}}, \frac{1}{\rho}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{m}{\rho} + \sqrt{P'(\rho)} \end{pmatrix} = \frac{\rho P''(\rho) + 2P'(\rho)}{2\rho\sqrt{P'(\rho)}},$$

luego,

$$\nabla\lambda_i \cdot r_i = 0 \Leftrightarrow \rho P''(\rho) + 2P'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho\left(\int_0^\rho s^2 f^2(s)ds\right)'' + 2\left(\int_0^\rho s^2 f^2(s)ds\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\rho^2 f^2(\rho)[2f(\rho) + \rho f'(\rho)] = 0,$$

para $i = 1, 2$, y de aquí concluimos que el sistema es genuinamente no lineal en el campo característico λ_i en el dominio $\{(x,t)/\rho(x,t) > 0\}$, y que es lineal degenerado en el campo característico λ_i en el dominio $\{(x,t)/\rho(x,t) = 0\}$, $i = 1, 2$.

Resulta que los sistemas cuyos campos caracteríticos son genuinamente no lineales o linealmente degenerados son especiales, ya que la solución del problema de Riemann para estos sistemas tiene una estructura simple; consiste en la superposición de n ondas elementales; choques, rarefacciones y discontinuidades de contacto (Ver [3], página 25).

2.8. Función de Green y funciones Holder-continuas

Estos preliminares finalizan con cuatro definiciones que no son exclusivas dentro de la teoría de las leyes de conservación, pero que usaremos bastante en el siguiente capítulo:

Definición 11 *La función $G : R \times (0, +\infty) \to R$ definida por:*

$$G(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}},$$

*es llamada **función de Green**.*

La función de Green surge cuando se soluciona la ecuación del calor con la transformada de Fourier (Ver [20], página 40). Su importancia radica en las propiedades que satisface. A continuación se listan algunas. Su demostración es sencillamente aplicar definiciones y propiedades básicas:

⋆ $\widehat{G(x,t)}(\xi) = e^{-4\pi^2\epsilon\xi^2 t}$.

⋆ $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)dy = 1$.

⋆ $\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t-s)dyds = t$.

⋆ $\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \mid G_x(x-y,t-s) \mid dyds = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \mid G_y(x-y,t-s) \mid dyds = 2\sqrt{\dfrac{t}{\pi\epsilon}}$.

Definición 12 *Una función $u : \Omega \subseteq R^n \to R$ se dice* ***Holder-continua*** *de exponente α en Ω, si existen constantes positivas c y α, tales que:*

$$\mid u(x_1) - u(x_2) \mid \leq c \parallel x_1 - x_2 \parallel^{\alpha}, \qquad \text{para todo } x_1, x_2 \in \Omega.$$

En el caso particular $\alpha = 1$, u se dice ***Lipschitz-continua*** *en Ω, y si además, $c < 1$, entonces u se dice una* ***contracción*** *en Ω.*

Observación 5 *Recuerdese que si $p > n$, entonces el espacio de Sobolev $W^{1,p}(R^n)$ es el espacio de las funciones Holder-continuas de exponente $1 - \dfrac{n}{p}$ en R^n, y que se tiene la inclusión continua $W^{1,p}(R^n) \hookrightarrow L^{\infty}(R^n)$ (teorema del embebimiento). Que si $u : \Omega \subseteq R^n \to R$ tiene derivadas parciales acotadas, entonces, por el teorema del valor medio, u es Lipschitz-continua en Ω. Y también que si X es un espacio de Banach y $u : X \to X$ es una contracción en X, entonces u tiene un único punto fijo (Teorema del punto fijo de Banach).*

3 Ecuaciones isentrópicas con términos fuente

En este capítulo se demostrará la existencia de una solución débil global Lipschitz-continua para el sistema de las ecuaciones isentrópicas de la dinámica de gases en coordenadas eulerianas con términos fuente:

$$\rho_t + (\rho v)_x = h_1(\rho, v, x, t), \tag{3-1}$$

$$(\rho v)_t + \big(\rho v^2 + P(\rho)\big)_x = h_2(\rho, v, x, t), \tag{3-2}$$

junto con un dato inicial acotado, medible y suave:

$$(\rho(x,0), v(x,0)) = (\rho_0(x), v_0(x)). \tag{3-3}$$

Las condiciones impuestas sobre $P(\rho)$ son las siguientes: $P(\rho) := \int_0^\rho s^2 f^2(s)ds$, donde f satisface:

(A) $f \in C^2(0, +\infty)$, $\int_0^{+\infty} f(s)ds = +\infty$ y $f(\rho) > 0$, $f'(\rho) \leq 0$ o $f'(\rho) \geq 0$, $2f(\rho) + \rho f'(\rho) \geq 0$ para $\rho \geq 0$.

Y las funciones $h_1(\rho, v, x, t)$ y $h_2(\rho, v, x, t)$ satisfacen:

C1: Son continuas.

C2: Existe $k > 0$ tal que

$$|A(w, z, x, t)| \leq k, \quad \text{y} \quad |B(w, z, x, t)| \leq k,$$

para todo $w, z \in C^\infty(R \times [0, +\infty)) \cap L^\infty(R \times [0, +\infty))$, y para todo $(x, t) \in R \times [0, +\infty)$, donde:

$$A(w, z, x, t) = f_1(\rho)h_1(\rho, v, x, t) + h_2(\rho, v, x, t),$$

$$B(w, z, x, t) = -f_1(\rho)h_1(\rho, v, x, t) + h_2(\rho, v, x, t),$$

y h_1 y h_2 estan evaluadas en $(\int_0^\rho f_1(s)ds = \frac{w-z}{2}, v = \frac{w+z}{2}, x, t)$, y $f_1(\rho) := f(\rho + 2\delta)$, donde δ es una constante positiva fija, y $\rho \geq -\delta$.

C3: Existe $L > 0$ tal que:

$$|A(w_1, z_1, x, t) - A(w_2, z_2, x, t)| \leq L(|w_1 - w_2| + |z_1 - z_2|),$$

$$|B(w_1, z_1, x, t) - B(w_2, z_2, x, t)| \leq L(|w_1 - w_2| + |z_1 - z_2|),$$

para todo $w_1, w_2, z_1, z_2 \in C^{\infty}(R \times [0, +\infty)) \cap L^{\infty}(R \times [0, +\infty))$, y para todo $(x, t) \in R \times [0, +\infty)$, donde A y B son como en ***C2***.

C4: $A_x(w, z, x, t)$, $B_x(w, z, x, t)$, $A_t(w, z, x, t)$ y $B_t(w, z, x, t)$ son no negativas y acotadas para todo $w, z \in C^{\infty}(R \times [0, +\infty)) \cap L^{\infty}(R \times [0, +\infty))$, y para todo $(x, t) \in R \times [0, +\infty)$, donde A y B son como en ***C2***.

C5: Existen constantes positivas C y $\overline{C}$ tales que:

$$|A(w, z, x, t)| \leq C|w| + \overline{C}, \qquad \text{y} \qquad |B(w, z, x, t)| \leq C|z| + \overline{C},$$

para todo $(w, z) \in C^{\infty}(R \times [0, +\infty)) \cap L^{\infty}(R \times [0, +\infty))$, y para todo $(x, t) \in R \times [0, +\infty)$, donde A y B son como en ***C2***.

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones ***C1-C5*** son no vacías, es decir, muestra que existen por lo menos un par de funciones $h_1(\rho, v, x, t)$ y $h_2(\rho, v, x, t)$ que satisfacen dichas condiciones:

Ejemplo 10 *Sean $h_1(\rho, v, x, t) := 0$ y $h_2(\rho, v, x, t) := tan^{-1}(x) + tan^{-1}(t)$. Entonces $A(w, z, x, t) = B(w, z, x, t) = tan^{-1}(x) + tan^{-1}(t)$, y se verifica fácilmente las propiedades* **C1-C5** *con $k = \pi$, $L = 1$, $C = 1$ y $\overline{C} = \pi$.*

Los valores própios del sistema (3-1),(3-2) son:

$$\mu_1 = v - \rho f(\rho), \qquad \text{y} \qquad \mu_2 = v + \rho f(\rho).$$

Evidentemente coinciden cuando $\rho = 0$, por lo que el sistema es no estrictamente hiperbólico.

En primer lugar se perturba el sistema (3-1),(3-2) introduciendo una constante $\delta > 0$ (llamada parámetro de perturbación) a la función no lineal $P(\rho)$, así:

$$\rho_t + (\rho v)_x = h_1(\rho, v, x, t), \tag{3-4}$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + P_1(\rho)\right)_x = h_2(\rho, v, x, t), \tag{3-5}$$

donde

$$P_1(\rho) := \int_0^{\rho} s^2 f_1^2(s) ds, \tag{3-6}$$

y

$$f_1(\rho) := f(\rho + 2\delta).$$

Observación 6 *Por* **(A)**, *es fácil ver que* $f_1(\rho)$ *satisface:*

$\overline{\textbf{(A)}}$ $f_1(\rho) \in C^2(-\delta, +\infty)$, $\int_0^{+\infty} f_1(s)ds = +\infty$ *y* $f_1(\rho) > 0$, $f_1'(\rho) \leq 0$ o $f_1'(\rho) \geq 0$, $2f_1(\rho) + \rho f_1'(\rho) \geq 0$ *para* $\rho \geq -\delta$.

El propósito de introducir este parámetro de perturbación se verá sólo hasta el final (en el teorema principal).

Los valores própios del sistema perturbado (3-4),(3-5) son: $\lambda_1 = v - \rho f_1(\rho)$ y $\lambda_2 = v + \rho f_1(\rho)$. De aquí se ve que este nuevo sistema es también no estrictamente hiperbólico.

Para buscar soluciones suaves, se aplicará el método de la viscosidad nula. En el método de la viscosidad nula estandar, se consiguen soluciones de (3-4),(3-5) como límites ($\epsilon \to 0^+$) de soluciones suaves de los sistemas:

$$\rho_t + (\rho v)_x = h_1(\rho, v, x, t) + \epsilon \rho_{xx}, \tag{3-7}$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + P_1(\rho)\right)_x = h_2(\rho, v, x, t) + \epsilon(\rho u)_{xx}. \tag{3-8}$$

Sin embargo, el método que se usará aquí, es una ligera variación del método de la viscosidad nula estandar, como se verá a continuación.

Los invariantes de Riemann del sistema (3-4),(3-5) correspondientes a los valores própios $\lambda_1 = v - \rho f_1(\rho)$ y $\lambda_2 = v + \rho f_1(\rho)$, son respectivamente:

$$z = v - \int_0^\rho f_1(s)ds, \qquad \text{y} \qquad w = v + \int_0^\rho f_1(s)ds.$$

Con ellos se deduce que:

$$\int_0^\rho f_1(s)ds = \frac{w-z}{2}, \qquad \text{y} \qquad v = \frac{w+z}{2}.$$

Como el mapeo $(\rho, v) \to (w, z)$ es biyectivo, entonces se puede escribir el sistema (3-4),(3-5) en términos de w y z. Esto se consigue multiplicando $\bigtriangledown w = (w_\rho, w_v) = (f_1(\rho), 1)$ y $\bigtriangledown z = (z_\rho, z_v) = (-f_1(\rho), 1)$, por el lado izquierdo de las ecuaciones (3-4),(3-5), como se mostró en el capítulo anterior. Resulta:

$$w_t + \lambda_2 w_x = A(w, z, x, t), \tag{3-9}$$

$$z_t + \lambda_1 z_x = B(w, z, x, t), \tag{3-10}$$

donde

$$A(w, z, x, t) = f_1(\rho) h_1(\rho, v, x, t) + h_2(\rho, v, x, t),$$

y

$$B(w,z,x,t) = -f_1(\rho)h_1(\rho,v,x,t) + h_2(\rho,v,x,t),$$

y h_1 y h_2 estan evaluadas en $(\int_0^\rho f_1(s)ds = \frac{w-z}{2}, v = \frac{w+z}{2}, x, t)$.

Este nuevo sistema (3-9),(3-10) que se ha obtenido, es equivalente al sistema (3-4),(3-5) en el sentido clásico de una solución, y es a éste al que se le aplicará el método de la viscosidad nula. Osea que en la discusión de soluciones suaves, se reemplazan los sistemas (3-7),(3-8) por:

$$w_t + \lambda_2 w_x = A(w,z,x,t) + \epsilon w_{xx}, \tag{3-11}$$

$$z_t + \lambda_1 z_x = B(w,z,x,t) + \epsilon z_{xx}, \tag{3-12}$$

y el dato inicial es:

$$(w(x,0), z(x,0)) = (w_0(x), z_0(x)), \tag{3-13}$$

donde:

$$w_0(x) = v_0(x) + \int_0^{\rho_0(x)} f_1(s)ds, \qquad \text{y} \qquad z_0(x) = v_0(x) - \int_0^{\rho_0(x)} f_1(s)ds,$$

y ρ_0, v_0 son dados por (3-3).

Entonces, la existencia de la solución global del problema de Cauchy (3-1),(3-2),(3-3) es reducida a obtener las estimaciones C^1 necesarias de la solución del problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13). El **programa** a seguir es el siguiente:

Sección 3.1. Usando el principio de la aplicación contractiva y el método de las regiones invariantes, se demuestra que para todo $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ fijos, el problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13), tiene una solución local acotada $(w^{\epsilon,\delta}, z^{\epsilon,\delta})$. Por simplicidad se notará esta solución (w,z), es decir, se omitirá el exponente ϵ, δ.

Sección 3.2. Mediante el principio del máximo, se obtienen estimaciones *a priori* de w y z, en el espacio C^1. Dichas estimaciones resultan ser independientes de la viscosidad ϵ, y del parámetro de perturbación δ. Como consecuencia, la solución local (w,z) del problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13) se extiende globalmente en el tiempo, y además se obtienen unas estimaciones de ρ y v.

Sección 3.3. Mediante una serie de cálculos, se obtienen estimaciones *a priori* de w_x, z_x, w_t y z_t en el espacio C^1.

Sección 3.4. Por las representaciones de w y z, y por las estimaciones obtenidas en **Sección 3.2.** y **Sección 3.3.**, por el teorema del embebimiento, se deduce que existe una subsucesión

$(\rho^{\epsilon_n,\delta_n}, v^{\epsilon_n,\delta_n})$, que converge uniformemente a un par de funciones (ρ, v) Lipschitz-continuas, cuando $n \to +\infty$, o equivalentemente, cuando $\epsilon, \delta \to 0^+$.

Sección 3.5. Finalmente, se demuestra que el par de funciones (ρ, v) obtenidas en **Sección 3.4.**, son efectivamente una solución débil para el problema de Cauchy (3-1),(3-2),(3-3).

En lo que sigue, c_1, c_2, c_3 y M serán constantes reales fijas que satisfacen $c_1 < c_2 < c_3$, y $M > 0$.

3.1. Existencia local

Teorema 1 ***(Existencia local)***

*Sean $h_1(\rho, v, x, t)$ y $h_2(\rho, v, x, t)$ funciones que satisfacen las condiciones **C1-C5**. Sea $f_1(\rho)$ una función que satisface $\overline{\textbf{(A)}}$, y sean $z_0(x)$, $w_0(x) \in C^1(R)$ tales que:*

$$c_1 \leq z_0(x) \leq c_2, \qquad c_2 \leq w_0(x) \leq c_3,$$

$$|z_{0x}(x)| \leq M, \qquad |w_{0x}(x)| \leq M,$$

para todo $x \in R$. Entonces el problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13) *tiene una única solución suave $(w(x,t), z(x,t))$ definida en una región $\Omega_{t_0} := R \times (0, t_0)$, para un t_0 pequeño, que satisface:*

$$c_1 - \gamma \leq z(x,t) \leq c_2 + \gamma, \qquad c_2 - \gamma \leq w(x,t) \leq c_3 + \gamma,$$

$$|z_x(x,t)| \leq 2M, \qquad |w_x(x,t)| \leq 2M,$$

para todo $(x,t) \in \Omega_{t_0}$, donde $\gamma = \int_{-\delta}^{0} f_1(s)ds > 0$.

Demostración:
Para cada $\tau > 0$, se define el espacio vectorial:

$$U_\tau^1 := \{w \in L^\infty(\Omega_\tau) / w_x, w_t \in L^\infty(\Omega_\tau)\}.$$

Y para cada $w \in U_\tau^1$, se define la norma:

$$\|w\|_{U_\tau^1} := \|w\|_{L^\infty} + \|w_x\|_{L^\infty} + \|w_t\|_{L^\infty}.$$

U_τ^1 junto con esta norma es un espacio de Banach (Ver [20], teorema 2.1.1).
Ahora considérese el subconjunto:

$$\overline{U_\tau^1} := \{w \in U_\tau^1 \quad / \quad c_2 - \gamma \leq w \leq c_3 + \gamma, \quad w_x \quad \text{existe} \quad \text{y} \quad |w_x| \leq 2M\}.$$

$\overline{U_\tau^1}$ es un subconjunto cerrado de U_τ^1. Para demostrar lo anterior, sea $(w_k)_{k\in N}$ una sucesión en $\overline{U_\tau^1}$, convergente en U_τ^1. Supongamos que $w_k \to w$. Se debe mostrar que $w \in \overline{U_\tau^1}$, es decir, que:

i) $c_2 - \gamma \leq w(x,t) \leq c_3 + \gamma$, para todo $(x,t) \in \Omega_\tau$.

ii) $w_x(x,t)$ existe y $|w_x(x,t)| \leq 2M$ para todo $(x,t) \in \Omega_\tau$.

Demostración de i)
Como $w_k \in \overline{U_\tau^1}$, entonces $c_2 - \gamma \leq w_k \leq c_3 + \gamma$, para todo k, por lo tanto la sucesión $(w_k)_{k\in N}$ es uniformemente acotada, por lo que converge puntualmente a w y así, w esta igualmente acotada, es decir, $c_2 - \gamma \leq w \leq c_3 + \gamma$.

Demostración de ii)
Sea $(x,t) \in \Omega_\tau$. Entonces:

$$|w_x(x,t)| := \left| lim_{h\to 0} \frac{w(x+h,t) - w(x,t)}{h} \right|$$

$$= \left| lim_{h\to 0} \frac{w(x+h,t) - w_k(x+h,t) + w_k(x+h,t) - w_k(x,t) + w_k(x,t) - w(x,t)}{h} \right|$$

$$\leq \left| lim_{h\to 0} \frac{w(x+h,t) - w_k(x+h,t)}{h} \right| + \left| lim_{h\to 0} \frac{w_k(x+h,t) - w_k(x,t)}{h} \right| + \left| lim_{h\to 0} \frac{w_k(x,t) - w(x,t)}{h} \right|$$

$$= \left| lim_{h\to 0} \frac{w(x+h,t) - w_k(x+h,t)}{h} \right| + |\partial_x w_k(x,t)| + \left| lim_{h\to 0} \frac{w_k(x,t) - w(x,t)}{h} \right|$$

$$\leq \left| lim_{h\to 0} \frac{w(x+h,t) - w_k(x+h,t)}{h} \right| + 2M + \left| lim_{h\to 0} \frac{w_k(x,t) - w(x,t)}{h} \right|$$

$$\to 2M, \qquad \text{cuando} \qquad k \to +\infty.$$

Luego w_x existe y $|w_x| \leq 2M$ como queríamos.

De manera análoga, se definen:

$$U_\tau^2 := \{z \in L^\infty(\Omega_\tau) / z_x, z_t \in L^\infty(\Omega_\tau)\},$$

$$\|z\|_{U_\tau^2} := \|z\|_{L^\infty} + \|z_x\|_{L^\infty} + \|z_t\|_{L^\infty},$$

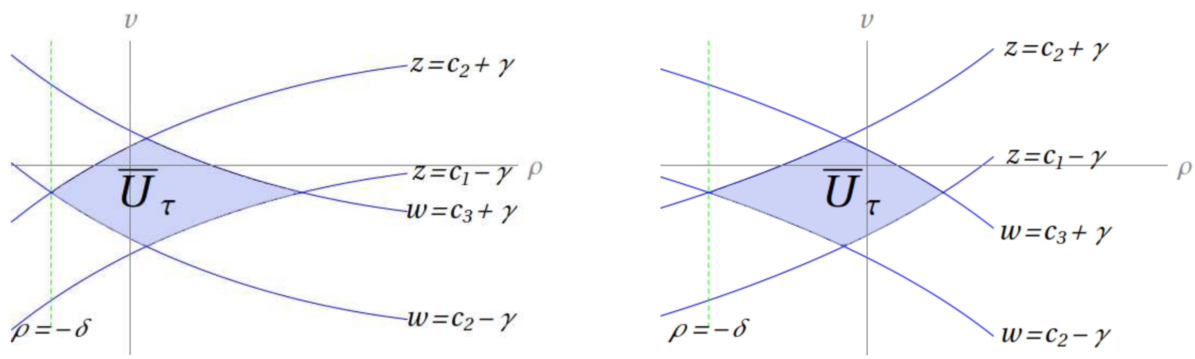
$$\overline{U_\tau^2} := \{z \in U_\tau^2 \quad / \quad c_1 - \gamma \leq z \leq c_2 + \gamma, \quad z_x \quad \text{existe} \quad \text{y} \quad |z_x| \leq 2M\}.$$

Y se muestra que U_τ^2 es un espacio de Banach y que $\overline{U_\tau^2}$ es un subconjunto cerrado.

Sean $U_\tau := U_\tau^1 \times U_\tau^2$ y $\overline{U_\tau} := \overline{U_\tau^1} \times \overline{U_\tau^2}$. Entonces, por todo lo anterior, U_τ es un espacio de Banach con la norma suma y $\overline{U_\tau}$ es un subconjunto cerrado de U_τ. De aquí, como $\overline{U_\tau}$ es un cerrado en un Banach, es completo.

Un análisis como el del ejemplo 6 del capítulo anterior, permite esbozar las gráficas de las curvas $z = c_1 - \gamma$, $z = c_2 + \gamma$, $w = c_2 - \gamma$ y $w = c_3 + \gamma$ en el plano $\rho - v$, y con ellas a $\overline{U_\tau}$. Queda así:

Figura 3-1:



Si $f'(\rho) \leq 0$ Si $f'(\rho) \geq 0$

Como se puede apreciar en ambos casos, $\overline{U_\tau}$ es una región invariante para el sistema (3-11),(3-12). Nótece además que w_0 y $z_0 \in \overline{U_\tau}$, luego, cualquier solución local $(w(x,t), z(x,t))$ del problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13) también estará en $\overline{U_\tau}$, es decir, satisfacerá:

$$c_1 - \gamma \leq z(x,t) \leq c_2 + \gamma, \qquad c_2 - \gamma \leq w(x,t) \leq c_3 + \gamma,$$
$$|z_x(x,t)| \leq 2M, \qquad |w_x(x,t)| \leq 2M,$$

para todo $(x,t) \in \Omega_\tau$. Se Demostrará entonces que efectivamente existe una solución suave local para el problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13). Más aún, se verá que dicha solución es única. Esto se hará utilizando el principio general de la aplicación contractiva, o más precisamente, el teorema del punto fijo de Banach.

Sobre $\overline{U_\tau}$ definimos el operador $T(w,z) := (T_1(w,z), T_2(w,z))$, donde:

$$T_1(w,z) := \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) w_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (-\lambda_2 w_y + A(w,z,y,s)) G(x-y,t-s) dy ds,$$

$$T_2(w,z) := \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) z_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (-\lambda_1 z_y + B(w,z,y,s)) G(x-y,t-s) dy ds,$$

y $G(x,t) := \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\dfrac{x^2}{4\epsilon t}}$, es la función de Green.

Nótece que $T(w,z)=(w,z)$ es equivalente a (3-11),(3-12),(3-13). En efecto, consideremos (3-11). Por simplicidad se escribirá $A(w,z,x,t)=A$. Entonces, por las propiedades de $\wedge$, $*$ y G, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
& w_t+\lambda_2 w_x = A+\epsilon w_{xx}\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}_t+\widehat{\lambda_2 w_x}=\widehat{A}+\epsilon\widehat{w_{xx}}\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}(\xi,t)_t+\widehat{\lambda_2 w_x}=\widehat{A}-4\pi^2\epsilon\xi^2\widehat{w}(\xi,t)\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}(\xi,t)_t+4\pi^2\epsilon\xi^2\widehat{w}(\xi,t)=-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A}\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}(\xi,t)_t e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t}+\widehat{w}(\xi,t)4\pi^2\epsilon\xi^2 e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t}=(-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A})e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t}\\
& \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\widehat{w}(\xi,t)e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t})=(-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A})e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t}\\
& \Leftrightarrow \frac{d}{ds}(\widehat{w}(\xi,s)e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 s})=(-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A})e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 s}\\
& \Leftrightarrow \int_0^t \frac{d}{ds}(\widehat{w}(\xi,s)e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 s})ds=\int_0^t(-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A})e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 s}ds\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}(\xi,t)e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t}-\widehat{w}(\xi,0)=\int_0^t(-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A})e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 s}ds\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}(\xi,t)e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t}=\widehat{w}(\xi,0)+\int_0^t(-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A})e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 s}ds\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}(\xi,t)=e^{-4\pi^2\epsilon\xi^2 t}\widehat{w}(\xi,0)+\int_0^t(-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A})e^{-4\pi^2\epsilon\xi^2(t-s)}ds\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}(\xi,t)=\widehat{G}(x,t)(\xi)\widehat{w}(\xi,0)+\int_0^t(-\widehat{\lambda_2 w_x}+\widehat{A})\widehat{G}(x,t-s)(\xi)ds\\
& \Leftrightarrow \widehat{w}(\xi,t)=(G(x,t)*w(x,0))^\wedge+\int_0^t((-\lambda_2 w_x+A)*G(x,t-s))^\wedge ds\\
& \Leftrightarrow w(x,t)=G(x,t)*w_0(x)+\int_0^t(-\lambda_2 w_x+A)*G(x,t-s)ds\\
& \Leftrightarrow w(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-y,t)w_0(y)dy+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}(-\lambda_2 w_y+A)G(x-y,t-s)dyds\\
& \Leftrightarrow w(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-y,t)w_0(y)dy+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}(-\lambda_2 w_y+A(w,z,y,s))G(x-y,t-s)dyds\\
& \Leftrightarrow w=T_1(w,z) \qquad \Leftrightarrow \qquad T_1(w,z)=w,
\end{aligned}
$$

Osea que $w_t+\lambda_2 w_x=A(w,z,x,t)+\epsilon w_{xx}\Leftrightarrow T_1(w,z)=w$. Análogamente $z_t+\lambda_1 z_x=B(w,z,x,t)+\epsilon z_{xx}\Leftrightarrow T_2(w,z)=z$. Así; $T(w,z)=(w,z)$ es equivalente a (3-11),(3-12),(3-13).

Por lo anterior, es claro que si se muestra que T tiene un único punto fijo (w,z) en $\overline{U_\tau}$, para algún $\tau > 0$, entonces el problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13) tiene una única solución (w,z) suave, definida en Ω_τ. En otras palabras, si se muestra que T tiene un único punto fijo, se habrá terminado la demostración.

Para demostrar la existencia de este único punto fijo de T, se utiliza el teorema del punto fijo de Banach. Pero para aplicar este teorema se debe mostrar que se verifican sus hipótesis. Por lo tanto, se debe mostrar que existe un $t_0 > 0$ tal que:

I. $T(\overline{U_{t_0}}) \subseteq \overline{U_{t_0}} \Leftrightarrow$ si $(w,z) \in \overline{U_{t_0}}$ entonces $T(w,z) \in \overline{U_{t_0}} \Leftrightarrow$ si $(w,z) \in \overline{U_{t_0}}$ entonces $c_1-\gamma \leq T_2(w,z) \leq c_2+\gamma$, $c_2-\gamma \leq T_1(w,z) \leq c_3+\gamma$, $|\partial_x T_2(w,z)| \leq 2M$ y $|\partial_x T_1(w,z)| \leq 2M$.

II. T es una contracción en $\overline{U_{t_0}} \Leftrightarrow$ existe $0 < c < 1$ tal que $\|T(w_1,z_1) - T(w_2,z_2)\|_{U_{t_0}} \leq c\|(w_1,z_1) - (w_2,z_2)\|_{U_{t_0}}$, para todo $(w_1,z_1),(w_2,z_2) \in \overline{U_{t_0}}$.

Todo se reduce entonces a mostrar la existencia de un t_0 que satisfaga **I.** y **II.** Antes de mostrar esto, obsérvese que λ_1 y λ_2 son funciones continuas de ρ y v, luego, cuando estan definidas en un compacto como $\overline{U_\tau}$, existe un $\alpha > 0$ tal que $|\lambda_1|$, y $|\lambda_2|$ son $\leq \alpha$, y que además, las funciones $A(w,z,x,t)$ y $B(w,z,x,t)$ satisfacen las propiedades ***C2*** y ***C3***.

Sea $(w,z) \in \overline{U_\tau}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
T_1(w,z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)w_0(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (-\lambda_2 w_y + A(w,z,y,s))G(x-y,t-s)dyds \\
&\leq c_3 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)dy + (2M\alpha + k)\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t-s)dyds \\
&= c_3(1) + (2M\alpha+k)(t) \\
&= c_3 + (2M\alpha+k)t.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
T_1(w,z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)w_0(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (-\lambda_2 w_y + A(w,z,y,s))G(x-y,t-s)dyds \\
&\geq c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)dy + (-2M\alpha - k)\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t-s)dyds \\
&= c_2(1) - (2M\alpha+k)(t) \\
&= c_2 - (2M\alpha+k)t.
\end{aligned}$$

Es decir que:

$$c_2 - (2M\alpha+k)t \leq T_1(w,z) \leq c_3 + (2M\alpha+k)t, \quad \forall (w,z) \in \overline{U_\tau}. \tag{3-14}$$

Análogamente:

$$c_1 - (2M\alpha + k)t \leq T_2(w,z) \leq c_2 + (2M\alpha + k)t, \quad \forall (w,z) \in \overline{U_\tau}. \tag{3-15}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
&|\partial_x T_1(w,z)| \\
&= \left|\partial_x \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)w_0(y)dy + \partial_x \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (-\lambda_2 w_y + A(w,z,y,s))G(x-y,t-s)dyds\right| \\
&\leq |\partial_x (G(x,t) * w_0(x))| + (2M\alpha + k)\left|\partial_x \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t-s)dyds\right| \\
&= |(G(x,t) * w_{0x}(x))| + (2M\alpha + k)\left|\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x G(x-y,t-s)dyds\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)w_{0y}(y)dy\right| + (2M\alpha + k)\left|\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(x-y,t-s)dyds\right| \\
&\leq M\left|\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)dy\right| + (2M\alpha + k)\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} |G_x(x-y,t-s)|dyds \\
&= M|1| + (2M\alpha + k)\left(2\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}\right) \\
&= M + (2M\alpha + k)2\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Es decir que:

$$|\partial_x T_1(w,z)| \leq M + (2M\alpha + k)2\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}, \quad \forall (w,z) \in \overline{U_\tau}. \tag{3-16}$$

Análogamente:

$$|\partial_x T_2(w,z)| \leq M + (2M\alpha + k)2\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}, \quad \forall (w,z) \in \overline{U_\tau}. \tag{3-17}$$

Ahora sean $(w_1,z_1),(w_2,z_2) \in \overline{U_\tau}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&|T_1(w_1,z_1) - T_1(w_2,z_2)| \\
&= \left|\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (-\lambda_2 w_{1y} + A(w_1,z_1,y,s) + \lambda_2 w_{2y} - A(w_2,z_2,y,s))G(x-y,t-s)dyds\right| \\
&\leq \left|\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} -\lambda_2(w_{1y} - w_{2y})G(x-y,t-s)dyds\right| \\
&+ \left|\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (A(w_1,z_1,y,s) - A(w_2,z_2,y,s))G(x-y,t-s)dyds\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \partial_y (w_1 - w_2) G(x-y, t-s) dyds \right|$$

$$+ \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (A(w_1, z_1, y, s) - A(w_2, z_2, y, s)) G(x-y, t-s) dyds \right|$$

$$\leq \alpha \left| \int_0^t \partial_x (w_1 - w_2) * G(x, t-s) ds \right|$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \mid A(w_1, z_1, y, s) - A(w_2, z_2, y, s) \mid G(x-y, t-s) dyds$$

$$\alpha \left| \int_0^t (w_1(x,s) - w_2(x,s)) * \partial_x G(x, t-s) ds \right|$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \mid A(w_1, z_1, y, s) - A(w_2, z_2, y, s) \mid G(x-y, t-s) dyds$$

$$\leq \alpha \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (w_1(y,s) - w_2(y,s)) \partial_y G(x-y, t-s) dyds \right|$$

$$+ L \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (\mid w_1 - w_2 \mid + \mid z_1 - z_2 \mid) G(x-y, t-s) dyds$$

$$\leq \alpha \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \mid G_y(x-y, t-s) \mid dyds$$

$$+ L(\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \|z_1 - z_2\|_{L^\infty}) \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y, t-s) dyds$$

$$\leq \alpha \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} \left(2\sqrt{\frac{t}{\pi \epsilon}} \right) + L(\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \|z_1 - z_2\|_{L^\infty})(t)$$

$$\leq \alpha(\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \|z_1 - z_2\|_{L^\infty}) \left(2\sqrt{\frac{t}{\pi \epsilon}} \right) + L(\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \|z_1 - z_2\|_{L^\infty}) t$$

$$= \left(2\alpha \sqrt{\frac{t}{\pi \epsilon}} + Lt \right) (\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \|z_1 - z_2\|_{L^\infty}).$$

Luego:

$$|T_1(w_1, z_1) - T_1(w_2, z_2)| \leq \left(2\alpha \sqrt{\frac{t}{\pi \epsilon}} + Lt \right) (\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \|z_1 - z_2\|_{L^\infty}), \forall (w_1, z_1), (w_2, z_2) \in \overline{U_\tau}.$$

Análogamente:

$$|T_2(w_1, z_1) - T_2(w_2, z_2)| \leq \left(2\alpha \sqrt{\frac{t}{\pi \epsilon}} + Lt \right) (\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \|z_1 - z_2\|_{L^\infty}), \forall (w_1, z_1), (w_2, z_2) \in \overline{U_\tau}.$$

De aquí:

$$
\begin{aligned}
&\|T(w_1,z_1)-T(w_2,z_2)\|_{U_\tau}\\
&=\|(T_1(w_1,z_1),T_2(w_1,z_1))-(T_1(w_2,z_2),T_2(w_2,z_2))\|_{U_\tau}\\
&=\|(T_1(w_1,z_1)-T_1(w_2,z_2),T_2(w_1,z_1)-T_2(w_2,z_2))\|_{U_\tau}\\
&=\|T_1(w_1,z_1)-T_1(w_2,z_2)\|_{L^\infty}+\|T_2(w_1,z_1)-T_2(w_2,z_2))\|_{L^\infty}\\
&\leq 2\left(2\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}+Lt\right)(\|w_1-w_2\|_{L^\infty}+\|z_1-z_2\|_{L^\infty})\\
&=2\left(2\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}+Lt\right)\|(w_1-w_2,z_1-z_2)\|_{U_\tau}\\
&=2\left(2\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}+Lt\right)\|(w_1,z_1)-(w_2,z_2)\|_{U_\tau}.
\end{aligned}
$$

Es decir que:

$$\|T(w_1,z_1)-T(w_2,z_2)\|_{U_\tau}\leq 2\left(2\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}+Lt\right)\|(w_1,z_1)-(w_2,z_2)\|_{U_\tau},$$

$$\forall (w_1,z_1),(w_2,z_2)\in\overline{U_\tau}. \tag{3-18}$$

Finalmente, al elegir $\tau=t_0>0$ tal que:

$$(2M\alpha+k)t_0\leq\gamma,\qquad (2M\alpha+k)2\sqrt{\frac{t_0}{\pi\epsilon}}\leq M,\qquad \text{y}\qquad 2\left(2\alpha\sqrt{\frac{t_0}{\pi\epsilon}}+Lt_0\right)<1,$$

entonces, por (3-14),(3-15),(3-16),(3-17),(3-18), tenemos **I.** y **II.**, como se quería.

3.2. Solución global

El teorema que sigue contiene las estimaciones a priori, independientes de ϵ y δ, que requerimos para la existencia de solución global:

Teorema 2 ***(Estimaciones de w y z)***

Supóngase que todas las condiciones del teorema 1 *son satisfechas y supongase que* $(w(x,t),z(x,t))$ *es la solución suave del problema de Cauchy* (3-11),(3-12),(3-13). *Entonces para todo* $0<T<+\infty$ *fijo, existe* $M(T)>0$ *tal que:*

$$|z(x,t)|\leq M(T),\qquad y\qquad |w(x,t)|\leq M(T),\qquad \forall (x,t)\in\Omega_T. \tag{3-19}$$

Demostración:
Considérese (3-11). Multiplicando por $2w$, usando la igualdad $2ww_{xx} = (w^2)_{xx} - 2w_x^2$, la condición ***C5*** y la desigualdad $2\overline{C}|w| \leq w^2 + \overline{C}^2$, tenemos que:

$$w_t + \lambda_2 w_x = A + \epsilon w_{xx},$$

$$\begin{aligned}
2ww_t + \lambda_2 2ww_x &= 2wA + \epsilon 2ww_{xx}, \\
(w^2)_t + \lambda_2(w^2)_x &= 2wA + \epsilon((w^2)_{xx} - 2w_x^2), \\
(w^2)_t + \lambda_2(w^2)_x &= 2wA + \epsilon(w^2)_{xx} - 2\epsilon w_x^2, \\
(w^2)_t + \lambda_2(w^2)_x &\leq 2|w|(C|w| + \overline{C}) + \epsilon(w^2)_{xx} - 2\epsilon w_x^2, \\
(w^2)_t + \lambda_2(w^2)_x &\leq 2|w|(C|w| + \overline{C}) + \epsilon(w^2)_{xx}, \\
(w^2)_t + \lambda_2(w^2)_x &\leq \epsilon(w^2)_{xx} + 2C|w|^2 + 2\overline{C}|w|, \\
(w^2)_t + \lambda_2(w^2)_x &\leq \epsilon(w^2)_{xx} + 2Cw^2 + w^2 + \overline{C}^2,
\end{aligned}$$

$$(w^2)_t + \lambda_2(w^2)_x \leq \epsilon(w^2)_{xx} + (2C+1)w^2 + \overline{C}^2. \tag{3-20}$$

Ahora considérese la siguiente transformación:

$$w^2 = \overline{w}e^{(2C+1)t} - \frac{\overline{C}^2}{2C+1}. \tag{3-21}$$

De (3-21) se obtiene inmediatamente que:

$$(w^2)_t = \overline{w}_t e^{(2C+1)t} + (2C+1)e^{(2C+1)t}\overline{w}, \tag{3-22}$$

$$(w^2)_x = \overline{w}_x e^{(2C+1)t}, \tag{3-23}$$

$$(w^2)_{xx} = \overline{w}_{xx} e^{(2C+1)t}. \tag{3-24}$$

Reemplazando (3-22),(3-23) y (3-24) en (3-20), y simplificando, resulta:

$$\overline{w}_t + \lambda_2 \overline{w}_x \leq \epsilon \overline{w}_{xx}. \tag{3-25}$$

Ahora considérese de nuevo (3-21). Despejando $\overline{w}$ se tiene que:

$$\overline{w} = \left(w^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1}\right) e^{-(2C+1)t}. \tag{3-26}$$

De aquí, como $w_0 \leq c_3$, se observa que:

$$\overline{w}(x,0) = \overline{w}_0(x) = w_0^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1} \leq c_3^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1}.$$

Por lo tanto, aplicando el principio del máximo a (3-25), se obtiene que:

$$\overline{w}(x,t) \leq c_3^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1}.$$

De esta ultima desigualdad, por (3-26), se tiene que, para todo $(x,t) \in \Omega_T$:

$$\left(w^2(x,t) + \frac{\overline{C}^2}{2C+1}\right) e^{-(2C+1)t} \leq c_3^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1},$$

$$\left(w^2(x,t) + \frac{\overline{C}^2}{2C+1}\right) e^{-(2C+1)T} \leq c_3^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1},$$

$$w^2(x,t) + \frac{\overline{C}^2}{2C+1} \leq \left(c_3^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1}\right) e^{(2C+1)T},$$

$$w^2(x,t) \leq \left(c_3^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1}\right) e^{(2C+1)T},$$

$$|w(x,t)| \leq \left(\left(c_3^2 + \frac{\overline{C}^2}{2C+1}\right) e^{(2C+1)T}\right)^{1/2},$$

$$|w(x,t)| \leq M(T).$$

La estimación $|z(x,t)| \leq M(T)$ se consigue de manera análoga.

Como se vio en el capítulo anterior, las estimaciones *a priori* implican existencia global. Por lo tanto, basados en el teorema 1 de existencia local, y en las estimaciones *a priori* del teorema 2, se tiene el siguiente resultado de existencia global:

Corolario 1 ***(Existencia global)***

Supongase que todas las condiciones del teorema 2 *son satisfechas. Entonces el problema de Cauchy* (3-11),(3-12),(3-13) *tiene una solución débil global* $(w(x,t), z(x,t))$, *que satisface:*

$$|z(x,t)| \leq M(T), \qquad y \qquad |w(x,t)| \leq M(T), \qquad \forall (x,t) \in R \times [0,+\infty).$$

Por las representaciones de w y z, las estimaciones dadas en el corolario 1 y las propiedades $\overline{\textbf{\textit{(A)}}}$ que satisface $f_1(\rho)$, se tienen las siguientes estimaciones para ρ y v:

Corolario 2 ***(Estimaciones de ρ y v)***

En las mismas condiciones del corolario 1, se tiene que:

$$|v(x,t)| \leq M(T), \qquad y \qquad 0 \leq \rho(x,t) \leq M(T), \qquad \forall (x,t) \in R \times [0,+\infty). \tag{3-27}$$

3.3. Estimaciones a priori

En el teorema que viene a continuación se encuentran estimaciones para w_x y z_x. Sin embargo, antes de anunciarlo, tengamos en cuenta los siguientes cálculos que se usarán en su demostración:

Recuérdese que:

$$w = v + \int_0^\rho f_1(s)ds, \qquad \text{y} \qquad z = v - \int_0^\rho f_1(s)ds.$$

Entonces:

$$w + z = 2v \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{z+w}{2},$$

y

$$w - z = 2\int_0^\rho f_1(s)ds \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^\rho f_1(s)ds = \frac{w-z}{2}.$$

Un cálculo rápido en estas dos igualdades, permite concluir que:

$$v_w = v_z = \frac{1}{2}, \tag{3-28}$$

$$\rho_w = -\rho_z = \frac{1}{2f_1(\rho)}. \tag{3-29}$$

Ahora considérese el valor própio $\lambda_1 = v - \rho f_1(\rho)$. Derivando respecto a w, usando las ecuaciones (3-28),(3-29) y simplificando, se obtiene:

$$\lambda_1 = v - \rho f_1(\rho),$$

$$\lambda_{1w} = v_w - \rho_w f_1(\rho) - \rho f_1'(\rho)\rho_w,$$

$$\lambda_{1w} = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2f_1(\rho)}\right) f_1(\rho) - \rho f_1'(\rho)\left(\frac{1}{2f_1(\rho)}\right),$$

$$\lambda_{1w} = -\frac{\rho f_1'}{2f_1}.$$

Haciendo lo mismo pero ahora con respecto a z, resulta:

$$\lambda_{1z} = 1 + \frac{\rho f_1'}{2f_1}.$$

Y operando en forma similar con el valor própio λ_2, se llega a:

$$\lambda_{2w} = 1 + \frac{\rho f_1'}{2f_1}, \qquad \text{y} \qquad \lambda_{2z} = -\frac{\rho f_1'}{2f_1}.$$

Se pueden resumir estos cuatro resultados en las siguientes dos ecuaciones:

$$\lambda_{1w} = \lambda_{2z} = -\frac{\rho f_1'}{2 f_1}, \tag{3-30}$$

$$\lambda_{2w} = \lambda_{1z} = 1 + \frac{\rho f_1'}{2 f_1}. \tag{3-31}$$

Ahora un resultado que servirá en una parte de la demostración del teorema 3.

Proposición 1 *λ_{1w}, λ_{2w}, λ_{1z}, λ_{2z} son positivos y acotados, cuando $f_1'(\rho) \leq 0$.*

Demostración:
Primero se verá que son positivos:

Por $\overline{\boldsymbol{(A)}}$, tenemos que $2f_1(\rho)+\rho f_1'(\rho) \geq 0$. Dividiendo entre $2f_1(\rho) > 0$, resulta $1+\frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)} \geq 0$. Pero por (3-31), $1 + \frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)} = \lambda_{2w} = \lambda_{1z}$, luego $\lambda_{2w} \geq 0$ y $\lambda_{1z} \geq 0$. Ahora, por el corolario 2, $\rho \geq 0$, y por hipótesis, $f_1'(\rho) \leq 0$, luego, como $f_1(\rho) > 0$, tenemos que $-\frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)} \geq 0$. Pero por (3-30), $-\frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)} = \lambda_{1w} = \lambda_{2z}$, luego $\lambda_{1w} \geq 0$ y $\lambda_{2z} \geq 0$.

Ahora se mostrará que son acotados:

Por $\overline{\boldsymbol{(A)}}$, tenemos que $2f_1(\rho)+\rho f_1'(\rho) \geq 0$. Dividiendo entre $2f_1(\rho) > 0$, resulta $1+\frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)} \geq 0$, y de aquí, $1 \geq -\frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)}$, Pero por (3-30), $-\frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)} = \lambda_{1w} = \lambda_{2z}$, luego $\lambda_{1w} = \lambda_{2z} \leq 1$. Ahora, por el corolario 2, $\rho \geq 0$, y por hipótesis, $f_1'(\rho) \leq 0$, luego, como $f_1(\rho) > 0$, tenemos que $\frac{\rho f_1'}{2f_1} \leq 0$, de aquí, $1 + \frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)} \leq 1$, Pero por (3-31), $1 + \frac{\rho f_1'(\rho)}{2f_1(\rho)} = \lambda_{2w} = \lambda_{1z}$, luego $\lambda_{2w} \leq 1$ y $\lambda_{1z} \leq 1$.

Ahora sí el teorema.

Teorema 3 *(**Estimaciones de** w_x **y** z_x)*

*Sean $h_1(\rho, v, x, t)$ y $h_2(\rho, v, x, t)$ funciones que satisfacen las condiciones **C1-C5**. Sea $f_1(\rho)$ una función que satisface $\overline{\mathbf{(A)}}$, y sean $z_0(x)$, $w_0(x) \in C^1(R)$ tales que:*

$$c_1 \leq z_0(x) \leq c_2, \qquad c_2 \leq w_0(x) \leq c_3,$$

$$0 \leq z_{0x}(x) \leq M, \qquad 0 \leq w_{0x}(x) \leq M,$$

para todo $x \in R$. Supóngase que $(w(x,t), z(x,t))$ es la solución suave del problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13), y que está definida en $\Omega_T := R \times [0, T)$, con $0 < T < +\infty$. Entonces la solución $(w(x,t), z(x,t))$ satisface:

$$0 \leq z_x(x,t) \leq M, \qquad y \qquad 0 \leq w_x(x,t) \leq M, \qquad \forall (x,t) \in \Omega_T. \tag{3-32}$$

Demostración:
Se presentan dos casos; el primero cuando $f_1'(\rho) \leq 0$ y el segundo cuando $f_1'(\rho) \geq 0$, formando un total de ocho desigualdades por mostrar:

$$0 \leq z_x(x,t) \leq M, \quad \text{y} \quad 0 \leq w_x(x,t) \leq M, \quad \forall (x,t) \in \Omega_T, \quad \text{cuando} \quad f_1'(\rho) \leq 0,$$

$$0 \leq z_x(x,t) \leq M, \quad \text{y} \quad 0 \leq w_x(x,t) \leq M, \quad \forall (x,t) \in \Omega_T, \quad \text{cuando} \quad f_1'(\rho) \geq 0.$$

Bastará verificar la mitad de ellas;

$$0 \leq z_x(x,t), \quad \text{y} \quad 0 \leq w_x(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega_T, \quad \text{cuando} \quad f_1'(\rho) \leq 0, \tag{3-33}$$

$$z_x(x,t) \leq M, \quad \text{y} \quad w_x(x,t) \leq M, \quad \forall (x,t) \in \Omega_T, \quad \text{cuando} \quad f_1'(\rho) \geq 0. \tag{3-34}$$

Los cuatro casos restantes resultan de manera análoga.

Antes de mostrar (3-33) y (3-34), considérese las ecuaciones (3-11),(3-12);

$$w_t + \lambda_2 w_x = A(w,z,x,t) + \epsilon w_{xx},$$

$$z_t + \lambda_1 z_x = B(w,z,x,t) + \epsilon z_{xx}.$$

Diferenciando cada una de ellas respecto a x, haciendo $z_x = s$, $w_x = r$, simplificando y usando las ecuaciones (3-30),(3-31), se obtiene:

$$r_t + \lambda_2 r_x + (\lambda_{2w} r) r + (\lambda_{2z} r) s = A_x(w,z,x,t) + \epsilon r_{xx}, \tag{3-35}$$

$$s_t + \lambda_1 s_x + (\lambda_{1w} s) r + (\lambda_{1z} s) s = B_x(w,z,x,t) + \epsilon s_{xx}. \tag{3-36}$$

Estas ecuaciones se usarán para demostrar (3-33) y (3-34).

Demostración de (3-33): Considérese las siguientes transformaciones:

$$r = \left(\overline{r} - \frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t)\right) e^{\beta t}, \qquad y \qquad s = \left(\overline{s} - \frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t)\right) e^{\beta t}, \tag{3-37}$$

donde c, β, L son constantes positivas, y N es la cota de $r = w_x$ y $s = z_x$ sobre Ω_T (por el teorema 1 de existencia local, N puede ser obtenido). De (3-37) se obtiene inmediatamente que:

$$r_t = \overline{r}_t e^{\beta t} + \beta e^{\beta t}\overline{r} - \frac{\beta N}{L^2} x^2 e^{\beta t} - \frac{c(\beta+1)N}{L} e^{(\beta+1)t}, \tag{3-38}$$

$$s_t = \overline{s}_t e^{\beta t} + \beta e^{\beta t}\overline{s} - \frac{\beta N}{L^2} x^2 e^{\beta t} - \frac{c(\beta+1)N}{L} e^{(\beta+1)t}, \tag{3-39}$$

$$r_x = \overline{r}_x e^{\beta t} - \frac{2N}{L^2} x e^{\beta t}, \qquad y \qquad s_x = \overline{s}_x e^{\beta t} - \frac{2N}{L^2} x e^{\beta t}, \tag{3-40}$$

$$r_{xx} = \overline{r}_{xx} e^{\beta t} - \frac{2N}{L^2} e^{\beta t}, \qquad y \qquad s_{xx} = \overline{s}_{xx} e^{\beta t} - \frac{2N}{L^2} e^{\beta t}. \tag{3-41}$$

Reemplazando (3-38)-(3-41) en (3-35),(3-36) correspondientemente, se obtiene:

$$\overline{r}_t + \lambda_2 \overline{r}_x - \epsilon \overline{r}_{xx} = (cLe^t + 2x\lambda_2 - 2\epsilon)\frac{N}{L^2} + (\beta + \lambda_{2w} r + \lambda_{2z} s)\frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t)$$

$$-(\beta + \lambda_{2w} r + \lambda_{2z} s)\overline{r} + A_x(w, z, x, t), \tag{3-42}$$

$$\overline{s}_t + \lambda_1 \overline{s}_x - \epsilon \overline{s}_{xx} = (cLe^t + 2x\lambda_1 - 2\epsilon)\frac{N}{L^2} + (\beta + \lambda_{1w} r + \lambda_{1z} s)\frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t)$$

$$-(\beta + \lambda_{1w} r + \lambda_{1z} s)\overline{s} + B_x(w, z, x, t). \tag{3-43}$$

Ahora considérese de nuevo (3-37). Despejando $\overline{r}$ y $\overline{s}$, se tiene que:

$$\overline{r} = \frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t) + e^{-\beta t} r, \qquad y \qquad \overline{s} = \frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t) + e^{-\beta t} s. \tag{3-44}$$

En (3-44) se puede observar que:

i) $\overline{r}(x, 0) > 0$ y $\overline{s}(x, 0) > 0$ para todo $x \in (-L, L)$.

En efecto. $\overline{r}(x, 0) = \frac{N}{L^2}(x^2 + cL) + r(x, 0) > 0$ y $\overline{s}(x, 0) = \frac{N}{L^2}(x^2 + cL) + s(x, 0) > 0$, pues las constantes c, L y N son > 0, y por hipótesis, $r(x, 0) = w_x(x, 0) = w_{0x}(x)$ y $s(x, 0) = z_x(x, 0) = z_{0x}(x)$ son ≥ 0.

ii) $\overline{r}(\mp L, t) > 0$ y $\overline{s}(\mp L, t) > 0$ para todo $t \in (0, T)$.

En efecto. $\overline{r}(\mp L, t) = N\left(1 + \frac{ce^t}{L}\right) + e^{-\beta t} w_x(\mp L, t) > N + \frac{w_x(\mp L, t)}{e^{\beta t}} \geq N - \frac{N}{e^{\beta t}} \geq N - N = 0$, pues las constantes c, L, β y N son > 0, y $|w_x| \leq N$. Igualmente para $\overline{s}$.

Por (3-42), (3-43), **i)** y **ii)** se tiene la siguiente afirmación:

Afirmación 1 *$\overline{r}(x, t) > 0$ y $\overline{s}(x, t) > 0$ en $(-L, L) \times (0, T)$.*

Demostración de la afirmación: La haremos sólo para $\overline{r}$. Para $\overline{s}$ es completamente análoga. Supongamos que no fuera así. Existiría un punto (x, t) en $(-L, L) \times (0, T)$ tal que $\overline{r}(x, t) \leq 0$. Sea $\overline{t}$ la mínima cota superior de los valores de t en los cuales $\overline{r} > 0$. Entonces por la continuidad, $\overline{r} = 0$ en algunos puntos $(\overline{x}, \overline{t}) \in (-L, L) \times (0, T)$. Así; $\overline{r}_t \leq 0$, $\overline{r}_x = 0$ y $-\epsilon \overline{r}_{xx} \leq 0$ en $(\overline{x}, \overline{t})$, luego:

$$\overline{r}_t + \lambda_2 \overline{r}_x - \epsilon \overline{r}_{xx} \leq 0, \qquad \text{en} \qquad (\overline{x}, \overline{t}) \in (-L, L) \times (0, T). \tag{3-45}$$

Por otra parte:

a) Por el corolario 2, $\rho \geq 0$, además, estamos en el caso $f_1'(\rho) \leq 0$, por lo tanto, por la proposición 1, λ_{1w}, λ_{2w}, λ_{1z}, λ_{2z} son positivas y acotadas.

b) w y z provienen del teorema 1 de existencia local, luego $w_x = r$ y $z_x = s$ son acotadas.

c) Como λ_1 y λ_2 son funciones continuas, entonces, en el compacto $[-L, L] \times [0, T]$ están acotadas.

a), **b)** y **c)** implican que se pueden escoger las constantes β y c suficientemente grandes para que:

$$\beta + (\lambda_{2w} r + \lambda_{2z} s) > 0 \quad \text{y} \quad cLe^t + 2x\lambda_2 - 2\epsilon > 0 \quad \text{en} \quad (-L, L) \times (0, T). \tag{3-46}$$

Ahora considérese (3-42), y evaluemos en $(\overline{x}, \overline{t}) \in (-L, L) \times (0, T)$. Fijémonos en el lado derecho de esta ecuación. Como $\overline{r}(\overline{x}, \overline{t}) = 0$ y $A_x(w, z, \overline{x}, \overline{t}) \geq 0$ (condición ***C4***), las desigualdades (3-46), implican que $\overline{r}_t + \lambda_2 \overline{r}_x - \epsilon \overline{r}_{xx} > 0$ en $(\overline{x}, \overline{t})$, contradiciendo (3-45). Por lo tanto $\overline{r}(x, t) > 0$ en $(-L, L) \times (0, T)$, y así la afirmación 1 está probada.

De acuerdo a la afirmación 1 y a **i)**, se tiene que $\overline{r}(x, t) > 0$ y $\overline{s}(x, t) > 0$ en $(-L, L) \times [0, T)$. Por (3-44), esto es equivalente a:

$$\frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t) + e^{-\beta t} r(x, t) > 0, \quad \text{y} \quad \frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t) + e^{-\beta t} s(x, t) > 0, \quad \text{en} \quad (-L, L) \times [0, T),$$

es decir, que

$$r(x, t) > -\frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t) e^{\beta t}, \quad y \quad s(x, t) > -\frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t) e^{\beta t}, \quad en (-L, L) \times [0, T). \tag{3-47}$$

Haciendo que $L \to \infty$ en (3-47) se obtiene $r(x, t) \geq 0$, y $s(x, t) \geq 0$, en $(-\infty, \infty) \times [0, T)$, o equivalentemente;

$$0 \leq w_x(x, t), \qquad \text{y} \qquad 0 \leq z_x(x, t), \quad \text{en} \quad \Omega_t,$$

que es justamente (3-33).

Demostración de (3-34): Considérese las siguientes transformaciones:

$$r = \overline{r} + M + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2}, \qquad \text{y} \qquad s = \overline{s} + M + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2}, \tag{3-48}$$

donde c, L y N son constantes como en el caso anterior. De (3-48) se obtiene inmediatamente que:

$$r_t = \overline{r}_t + \frac{cNe^t}{L}, \qquad \text{y} \qquad s_t = \overline{s}_t + \frac{cNe^t}{L}, \tag{3-49}$$

$$r_x = \overline{r}_x + \frac{2Nx}{L^2}, \qquad \text{y} \qquad s_x = \overline{s}_x + \frac{2Nx}{L^2}, \tag{3-50}$$

$$r_{xx} = \overline{r}_{xx} + \frac{2N}{L^2}, \qquad \text{y} \qquad s_{xx} = \overline{s}_{xx} + \frac{2N}{L^2}, \tag{3-51}$$

Reemplazando (3-49)-(3-51) en (3-35),(3-36) correspondientemente, se obtiene:

$$\overline{r}_t + \lambda_2 \overline{r}_x + r(\lambda_{2w} + \lambda_{2z}) \left(M + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2} \right) + (\lambda_{2w} r)\overline{r} + (\lambda_{2z} r)\overline{s}$$

$$+ (cLe^t + 2\lambda_2 x - 2\epsilon)\frac{N}{L^2} - A_x(w, z, x, t) = \epsilon \overline{r}_{xx}, \tag{3-52}$$

$$\overline{s}_t + \lambda_1 \overline{s}_x + s(\lambda_{1w} + \lambda_{1z}) \left(M + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2} \right) + (\lambda_{1w} s)\overline{r} + (\lambda_{1z} s)\overline{s}$$

$$+ (cLe^t + 2\lambda_1 x - 2\epsilon)\frac{N}{L^2} - B_x(w, z, x, t) = \epsilon \overline{s}_{xx}. \tag{3-53}$$

Ahora considérese de nuevo (3-48). Despejando $\overline{r}$ y $\overline{s}$, se tiene que:

$$\overline{r} = r - M - \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2}, \qquad \text{y} \qquad \overline{s} = s - M - \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2}. \tag{3-54}$$

Y de manera similar al caso anterior, se observa que:

iii) $\overline{r}(x, 0) < 0$ y $\overline{s}(x, 0) < 0$ para todo $x \in (-L, L)$.

iv) $\overline{r}(\mp L, t) < 0$ y $\overline{s}(\mp L, t) < 0$ para todo $t \in (0, T)$.

Por (3-52), (3-53), **iii)** y **iv)** se tiene la siguiente afirmación:

Afirmación 2 $\overline{r}(x, t) < 0$ *y* $\overline{s}(x, t) < 0$ *en* $(-L, L) \times (0, T)$.

Demostración de la afirmación: Supóngase que no fuera así. Existiría un punto (x,t) en $(-L,L)\times(0,T)$ tal que $\overline{r}(x,t)\geq 0$ o $\overline{s}(x,t)\geq 0$. Sea $\overline{t}$ la mínima cota superior de los valores de t en los cuales $\overline{r}<0$ (o $\overline{s}<0$). Entonces por la continuidad:

$$\overline{r}=0, \qquad \text{y} \qquad \overline{s}\leq 0, \qquad \text{en algunos puntos} \qquad (\overline{x},\overline{t})\in(-L,L)\times(0,T). \tag{3-55}$$

Así;

$$\overline{r}_t\geq 0, \qquad \overline{r}_x=0, \qquad \text{y} \qquad \epsilon\overline{r}_{xx}\leq 0, \qquad \text{en} \qquad (\overline{x},\overline{t})\in(-L,L)\times(0,T). \tag{3-56}$$

Por otra parte:

d) Como estamos en el caso $f_1'(\rho)\geq 0$, y además, por hipótesis, $\rho\geq 0$ y $f_1(\rho)>0$, entonces $-\dfrac{\rho f_1'}{2f_1}\leq 0$, pero por (3-30), $-\dfrac{\rho f_1'}{2f_1}=\lambda_{2z}$, luego $\lambda_{2z}\leq 0$. Por otro lado, de manera similar a como se demostró (3-33), se demuestra que $w_x\geq 0$ cuando $f_1'(\rho)\geq 0$, es decir, para este caso, se tiene que $r\geq 0$. Por lo tanto, como $\overline{s}\leq 0$ por (3-55), se tiene que $(\lambda_{2z}r)\overline{s}\geq 0$.

e) Por **c)**, λ_2 es acotada, además, $-A_x(w,z,x,t)$ es acotada por hipótesis (condición ***C4***), por lo tanto se puede escoger c suficientemente grande para que

$$(cLe^t+2\lambda_2x-2\epsilon)\frac{N}{L^2}-A_x(w,z,x,t)>0, \qquad \text{en} \quad (-L,L)\times(0,T).$$

f) Por (3-30) y (3-31), $\lambda_{2w}+\lambda_{2z}=1$, luego, $r(\lambda_{2w}+\lambda_{2z})=r\geq 0$.

Ahora consideremos (3-52) y evaluemos en $(\overline{x},\overline{t})$. Fijémonos en el lado izquierdo de esta ecuación. Por (3-56); $\overline{r}_t\geq 0$ y $\lambda_2\overline{r}_x=0$. Por **f)**; $r(\lambda_{2w}+\lambda_{2z})=r\geq 0$. Por (3-55); $(\lambda_{2w}r)\overline{r}=0$. Por **d)**; $(\lambda_{2z}r)\overline{s}\geq 0$. Y por **e)**; $(cLe^t+2\lambda_2x-2\epsilon)\frac{N}{L^2}-A_x(w,z,x,t)>0$. Todo esto implica que $\epsilon\overline{r}_{xx}>0$ en $(\overline{x},\overline{t})$, contradiciendo (3-56). Por lo tanto $\overline{r}(x,t)<0$ y $\overline{s}(x,t)<0$ en $(-L,L)\times(0,T)$, y así la afirmación 2 está probada.

De acuerdo a la afirmación 2 y a **iii)**, se tiene que $\overline{r}(x,t)<0$ y $\overline{s}(x,t)<0$ en $(-L,L)\times[0,T)$. Por (3-54), esto es equivalente a:

$$r-M-\frac{N(x^2+cLe^t)}{L^2}<0, \qquad \text{y} \qquad s-M-\frac{N(x^2+cLe^t)}{L^2}<0, \quad \text{en} \quad (-L,L)\times[0,T),$$

es decir, que

$$r(x,t)<M+\frac{N(x^2+cLe^t)}{L^2}, \quad \text{y} \quad s(x,t)<M+\frac{N(x^2+cLe^t)}{L^2}, \quad \text{en}(-L,L)\times[0,T). \tag{3-57}$$

Haciendo que $L \to \infty$ en (3-57) se obtiene $r(x,t) \leq M$ y $s(x,t) \leq M$ en $(-\infty,\infty)\times(0,T)$, o equivalentemente;

$$w_x(x,t) \leq M, \quad \text{y} \quad z_x(x,t) \leq M, \quad \text{en} \quad \Omega_T,$$

que es justamente (3-34).

Para conseguir la solución Lipschitz-continua del problema de Cauchy (3-1),(3-2),(3-3), es necesario obtener también estimaciones de w_t y z_t. El teorema que viene a continuación nos las dá. Sin embargo, antes de anunciarlo, una observación, necesaria para su demostración:

Observación 7 *Si las condiciones del teorema* 3 *son satisfechas, se puede usar un mollifier para suavizar* $w_0(x)$ *y* $z_0(x)$*, de tal forma que las funciones obtenidas* $w_0^\tau(x)$ *y* $z_0^\tau(x) \in C^2(R)$*, y satisfagan:*

$$\begin{aligned} c_1 \leq z_0^\tau(x) \leq c_2, &\qquad c_2 \leq w_0^\tau(x) \leq c_3, \\ 0 \leq z_{0x}^\tau(x) \leq M, &\qquad 0 \leq w_{0x}^\tau(x) \leq M, \\ |\tau z_{0xx}^\tau(x)| \leq M_1, &\qquad |\tau w_{0xx}^\tau(x)| \leq M_1, \end{aligned}$$

donde M_1 *es una constante independiente de* τ*. Se Omitirá este proceso y se asumirá directamente que* $w_t(x,0)$ *y* $z_t(x,0)$ *(las derivadas con respecto a* t *de la solución* $(w(x,t),z(x,t))$ *evaluadas en* $t=0$*) son acotadas.*

Teorema 4 ***(Estimaciones de*** w_t ***y*** z_t***)***
Supóngase que todas las condiciones del teorema 3 *son satisfechas. Más aún, supóngase que* $w_0(x)$ *y* $z_0(x) \in C^2(R)$*, y que*

$$|w_t(x,0)| \leq M_2, \qquad |z_t(x,0)| \leq M_2,$$

para todo $x \in R$*, donde* M_2 *es una constante positiva. Entonces:*

i) *Si* $f_1' \leq 0$*, se tiene que:*

$$|w_t(x,t)| \leq M_2 e^{\lambda t}, \qquad y \qquad |z_t(x,t)| \leq M_2 e^{\lambda t}, \quad \forall (x,t) \in \Omega_T,$$

donde

$$\lambda = max\{0, \quad sup_{R\times[0,T)}(\lambda_{2z}-\lambda_{2w})w_x, \quad sup_{R\times[0,T)}(\lambda_{1w}-\lambda_{1z})z_x\}.$$

ii) *Si* $f_1' \geq 0$*, se tiene que:*

$$|w_t(x,t)| \leq M_2, \qquad y \qquad |z_t(x,t)| \leq M_2, \quad \forall (x,t) \in \Omega_T.$$

Demostración:
Es bastante similar a la demostración del teorema 2. Se hará sólo para ***i)***. Sean $X = w_t$ y $Y = z_t$. Derivando (3-11),(3-12) respecto a t, y usando esta nueva notación, resulta que:

$$X_t + \lambda_2 X_x + (\lambda_{2w} X + \lambda_{2z} Y) w_x = A_t(w, z, x, t) + \epsilon X_{xx}, \tag{3-58}$$

$$Y_t + \lambda_1 Y_x + (\lambda_{1w} X + \lambda_{1z} Y) z_x = B_t(w, z, x, t) + \epsilon Y_{xx}. \tag{3-59}$$

Ahora considérese las siguientes transformaciones:

$$X = -\left(\overline{X} + M_2 + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2}\right) e^{\lambda t}, \quad \text{y} \quad Y = \left(\overline{Y} + M_2 + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2}\right) e^{\lambda t}, \tag{3-60}$$

donde c y L son constantes positivas, N es la cota superior de $X = w_t$ y $Y = z_t$ sobre Ω_T, y M_2 es la constante dada en las hipótesis. Un cálculo sencillo, pero bastante largo en las ecuaciones (3-60), permite obtener expresiones para $X_t, Y_t, X_x, Y_x, X_{xx}, Y_{xx}$. Reemplazando dichas expresiones correspondientemente en (3-58),(3-59), resulta:

$$\overline{X}_t + \lambda_2 \overline{X}_x + (\lambda_{2w} \overline{X} - \lambda_{2z} \overline{Y}) w_x + \lambda \overline{X} + (\lambda + (\lambda_{2w} - \lambda_{2z}) w_x) \left(M + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2}\right)$$

$$+ (cLe^t + 2x\lambda_2 - 2\epsilon) \frac{N}{L^2} - A_t(w, z, x, t) = \epsilon \overline{X}_{xx}, \tag{3-61}$$

$$\overline{Y}_t + \lambda_1 \overline{Y}_x + (\lambda_{1z} \overline{Y} - \lambda_{1w} \overline{X}) z_x + \lambda \overline{Y} + (\lambda + (\lambda_{1z} - \lambda_{1w}) z_x) \left(M + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2}\right)$$

$$+ (cLe^t + 2x\lambda_1 - 2\epsilon) \frac{N}{L^2} - B_t(w, z, x, t) = \epsilon \overline{Y}_{xx}. \tag{3-62}$$

Ahora considérese de nuevo (3-60). Despejando $\overline{X}$ y $\overline{Y}$, se tiene que:

$$\overline{X} = -M_2 - \frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t) - Xe^{-\lambda t}, \quad \text{y} \quad \overline{Y} = -M_2 - \frac{N}{L^2}(x^2 + cLe^t) + Ye^{-\lambda t}. \tag{3-63}$$

En (3-63) se puede observar que:

v) $\overline{X}(x, 0) < 0$ y $\overline{Y}(x, 0) < 0$ para todo $x \in (-L, L)$.

En efecto. $\overline{X}(x, 0) = -M_2 - \frac{N}{L^2}(x^2 + cL) - X(x, 0) = -M_2 - \frac{N}{L^2}(x^2 + cL) - w_t(x, 0) \leq -M_2 - \frac{N}{L^2}(x^2 + cL) + M_2 = -\frac{N}{L^2}(x^2 + cL) < 0$, pues Las constantes c, L, N y M_2 son > 0, y por hipótesis, $w_t(x, 0) \leq M_2$. Igualmente para $\overline{Y}$.

vi) $\overline{X}(\mp L,t)<0$ y $\overline{Y}(\mp L,t)<0$ para todo $t\in(0,T)$.

En efecto. $\overline{X}(\mp L,t) = -M_2 - \frac{N}{L^2}(L^2+cLe^t) - e^{-\lambda t}X(\mp L,t) = -M_2 - N\left(1+\dfrac{ce^t}{L}\right) - \dfrac{w_t(\mp L,t)}{e^{\lambda t}} < -M_2 - N - \dfrac{w_t(\mp L,t)}{e^{\lambda t}} \leq -M_2 - N - w_t(\mp L,t) \leq -M_2 - N + N = -M_2 < 0$, pues las constantes c, L, N y M_2 son >0, $|w_t|\leq N$ y $\lambda = max\{0, sup_{R\times[0,T)}(\lambda_{2z}-\lambda_{2w})w_x, sup_{R\times[0,T)}(\lambda_{1w}-\lambda_{1z})z_x\}$. Igualmente para $\overline{Y}$.

Por (3-61), (3-62), **v)** y **vi)** se tiene la siguiente afirmación:

Afirmación 3 *$\overline{X}(x,t)<0$ y $\overline{Y}(x,t)<0$ en $(-L,L)\times(0,T)$.*

Demostración de la afirmación: Supóngase que no fuera así. Existiría un punto (x,t) en $(-L,L)\times(0,T)$ tal que $\overline{X}(x,t)\geq 0$ (o $\overline{Y}(x,t)\geq 0$). Sea $\bar{t}$ la mínima cota superior de los valores de t en los cuales $\overline{X}<0$ (o $\overline{Y}<0$). Entonces por la continuidad:

$$\overline{X}=0, \qquad \text{y} \qquad \overline{Y}\leq 0, \qquad \text{en algunos puntos} \qquad (\overline{x},\overline{t})\in(-L,L)\times(0,T). \tag{3-64}$$

luego:

$$\overline{X}_t\geq 0, \qquad \overline{X}_x=0, \qquad \text{y} \qquad \epsilon\overline{X}_{xx}\leq 0, \qquad \text{en} \qquad (\overline{x},\overline{t})\in(-L,L)\times(0,T). \tag{3-65}$$

Por otra parte:

g) Ya se probó en el teorema 3 que $w_x\geq 0$.

h) Por **g)** y por la definición de λ, se tiene que $\lambda+(\lambda_{2w}-\lambda_{2z})w_x\geq 0$.

i) Por **c)**, λ_2 es acotada, además, $-A_t(w,z,x,t)$ es acotada por hipótesis (condición ***C4***), por lo tanto se puede escoger c suficientemente grande para que

$$(cLe^t+2\lambda_2 x-2\epsilon)\frac{N}{L^2}-A_t(w,z,x,t)>0, \qquad \text{en} \qquad (-L,L)\times(0,T).$$

Ahora considérese (3-61) y evaluemos en $(\overline{x},\overline{t})$. Fijémonos en el lado izquierdo de esta ecuación. Por (3-65); $\overline{X}_t\geq 0$ y $\lambda_2\overline{X}_x=0$. Por **a)**, **g)** y (3-64); $(\lambda_{2w}\overline{X}-\lambda_{2z}\overline{Y})w_x+\lambda\overline{X}\geq 0$. Por **h)**; $\lambda+(\lambda_{2w}-\lambda_{2z})w_x\geq 0$, y por **i)**; $(cLe^t+2\lambda_2 x-2\epsilon)\frac{N}{L^2}-A_t(w,z,x,t)>0$. Todo esto implica que $\epsilon\overline{X}_{xx}>0$ en $(\overline{x},\overline{t})$, contradiciendo (3-65). Por lo tanto $\overline{X}(x,t)<0$ y $\overline{Y}(x,t)<0$ en $(-L,L)\times(0,T)$, y así la afirmación 3 está probada.

De acuerdo a la afirmación 3 y a **v)**, se tiene que $\overline{X}(x,t)<0$ y $\overline{Y}(x,t)<0$ en $(-L,L)\times[0,T)$. Por (3-63), esto es equivalente a:

$$-M_2-\frac{N(x^2+cLe^t)}{L^2}-Xe^{-\lambda t}<0, \quad \text{y} \quad -M_2-\frac{N(x^2+cLe^t)}{L^2}+Ye^{-\lambda t}<0, \quad \text{en} \quad (-L,L)\times[0,T),$$

es decir, que

$$-M_2e^{\lambda t}-\frac{N(x^2+cLe^t)}{L^2}e^{\lambda t}<X(x,t),\quad \text{y}\quad Y(x,t)<M_2e^{\lambda t}+\frac{N(x^2+cLe^t)}{L^2}e^{\lambda t},\tag{3-66}$$

en $(-L,L)\times[0,T)$. Haciendo que $L\to\infty$ en (3-66) resulta:

$$-M_2e^{\lambda t}\le X(x,t),\qquad \text{y}\qquad Y(x,t)\le M_2e^{\lambda t},\qquad \text{en}\quad (-\infty,+\infty)\times[0,T).\tag{3-67}$$

De manera similar, se prueba que:

$$X(x,t)\le M_2e^{\lambda t},\qquad \text{y}\qquad -M_2e^{\lambda t}\le Y(x,t),\qquad \text{en}\quad (-\infty,+\infty)\times[0,T).\tag{3-68}$$

Juntando (3-67) y (3-68), se tiene:

$$|X(x,t)|\le M_2e^{\lambda t},\quad \text{y}\quad |Y(x,t)|\le M_2e^{\lambda t},\quad \text{en}\quad \Omega_T,$$

lo cual es equivalente a:

$$|w_t(x,t)|\le M_2e^{\lambda t},\quad \text{y}\quad |z_t(x,t)|\le M_2e^{\lambda t},\quad \text{en}\quad \Omega_T,$$

que es justamente ***i)***.

3.4. Funciones Lipschitz-continuas

Ahora se aplicarán las estimaciones dadas en los teoremas 3 y 4 para dar la solución Lipschitz-continua del problema de Cauchy (3-1),(3-2),(3-3). El siguiente teorema dá estimaciones de ρ_x, v_x, ρ_t y v_t. Estas estimaciones pueden obtenersen usando las representaciones de w y z, y las estimaciones de w_x, z_x, w_t y z_t obtenidas en los teoremas 3 y 4:

Teorema 5 ***(Estimaciones de*** ρ_x***,*** v_x***,*** ρ_t ***y*** v_t***)***
Si las condiciones del teorema 4 son satisfechas, entonces:

i) *Si* $f_1'\le 0$*, se tiene que:*

$$|v_x(x,t)|\le M,\qquad y\qquad |\rho_x(x,t)|\le M,\tag{3-69}$$

$$|v_t(x,t)|\le M_2,\qquad y\qquad |\rho_t(x,t)|\le M_2.\tag{3-70}$$

ii) *Si* $f_1'\ge 0$*, se tiene que:*

$$|v_x(x,t)|\le M,\qquad y\qquad \left|\left(\int_0^\rho f_1(s)ds\right)_x\right|\le M,\tag{3-71}$$

$$|v_t(x,t)|\le M_2,\qquad y\qquad \left|\left(\int_0^\rho f_1(s)ds\right)_t\right|\le M_2.\tag{3-72}$$

Para todo $(x,t)\in\Omega_T$*, donde* M *y* M_2 *son constantes independientes de* ϵ *y* δ*.*

3.5. Solución débil global Lipschitz-continua

Se ha mostrado entonces que, bajo ciertas condiciones, el problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13) tiene una única solución suave (w, z), definida en Ω_T, para todo $\epsilon, \delta > 0$. De manera equivalente, se puede decir que se ha construido una sucesión $\{w^{\epsilon,\delta}, z^{\epsilon,\delta}\}_{\epsilon,\delta>0}$ de soluciones aproximadas para el problema de Cauchy (3-11),(3-12),(3-13). Como el mapeo $(\rho, v) \to (w, z)$ es biyectivo, se tiene entonces una sucesión $\{\rho^{\epsilon,\delta}, v^{\epsilon,\delta}\}_{\epsilon,\delta>0}$ de soluciones aproximadas para el problema de Cauchy (3-4),(3-5),(3-3). Por el teorema 5, dichas soluciones aproximadas $(\rho^{\epsilon,\delta}, v^{\epsilon,\delta})$ satisfacen las estimaciones (3-69),(3-70), si $f_1'(\rho) \leq 0$, y satisfacen las estimaciones (3-71),(3-72), si $f_1'(\rho) \geq 0$.

En el primer caso ($f_1'(\rho) \leq 0$), como $(\rho^{\epsilon,\delta}, v^{\epsilon,\delta})$ satisfacen (3-69),(3-70), entonces la sucesión $\{\rho^{\epsilon,\delta}, v^{\epsilon,\delta}\}_{\epsilon,\delta>0}$ pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,\infty}(\Omega_T)$, para $0 < T < +\infty$. Como además, $(\rho^{\epsilon,\delta}, v^{\epsilon,\delta})$ satisfacen (3-27), entonces la sucesión $\{\rho^{\epsilon,\delta}, v^{\epsilon,\delta}\}_{\epsilon,\delta>0}$ es uniformemente acotada, por lo tanto, posee una subsucesión $\{\rho^{\epsilon_n,\delta_n}, v^{\epsilon_n,\delta_n}\}_n$ que converge uniformemente a un par de funciones (ρ, v), sobre cualquier región acotada Ω de $R \times [0, +\infty)$. Por el teorema del embebimiento, tenemos la inclusión continua $W^{1,\infty}(\Omega_T) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_T)$, de aquí, el par de funciones (ρ, v) son Holder-continuas de exponente 1 en Ω, es decir, son Lipschitz-continuas en Ω, y además satisfacen las estimaciones (3-27),(3-69),(3-70).

En el segundo caso ($f_1'(\rho) \geq 0$), se ha construido una sucesión $\{\rho^{\epsilon,\delta}, v^{\epsilon,\delta}\}_{\epsilon,\delta>0}$ de soluciones aproximadas $(\rho^{\epsilon,\delta}, v^{\epsilon,\delta})$ tal que $(\int_0^{\rho^{\epsilon,\delta}} f_1(s)ds, v^{\epsilon,\delta})$ son uniformemente acotadas en $W^{1,\infty}(\Omega_T)$, para $0 < T < +\infty$, la cual, por el teorema del embebimiento tiene una subsucesión sobre cualquier región acotada Ω de $R \times [0, +\infty)$, que converge uniformemente a un par de funciones (ρ, v) Holder-continuas de exponente 1 en Ω, tales que $(\int_0^{\rho} f_1(s)ds, v)$ son acotadas en $W^{1,+\infty}(\Omega)$ y satisfacen las estimaciones (3-27),(3-71),(3-72).

En el teorema principal (y final), se mostrará que este par de funciones (ρ, v) Lipschitz-continuas en Ω, son una solución débil del problema de Cauchy (3-1),(3-2),(3-3). Finalmente, como (ρ, v) satisfacen las estimaciones *a priori* (3-27), entonces podemos deducir la existencia global.

Teorema 6 ***(Teorema principal)***

*Sean $h_1(\rho, v, x, t)$ y $h_2(\rho, v, x, t)$ funciones que satisfacen las condiciones **C1-C5**. Sea $f(\rho)$ una función que satisface* **(A)***, y sean $z_0(x)$, $w_0(x) \in C^1(R)$ tales que:*

$$c_1 \leq z_0(x) \leq c_2, \qquad c_2 \leq w_0(x) \leq c_3,$$

$$0 \leq z_{0x}(x) \leq M, \qquad 0 \leq w_{0x}(x) \leq M,$$

para todo $x \in R$. Entonces el problema de Cauchy (3-1),(3-2),(3-3) *tiene una solución débil global* (ρ, v) *Lipschitz-continua tal que satisface* (3-27),(3-69),(3-70) *si* $f'(\rho) \leq 0$, *o* (3-27),(3-71),(3-72) *si* $f'(\rho) \geq 0$.

Demostración:
Por todo lo anterior, lo único que se debe mostrar es que el par de funciones límite (ρ, v) son en efecto, una solución débil. Escribamos (3-11),(3-12) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x & 0 \\ 0 & z_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(w,z,x,t) \\ B(w,z,x,t) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} w_{xx} \\ z_{xx} \end{pmatrix}.$$

Ahora multipliquemos en ambos lados por la matriz:

$$C := \begin{pmatrix} w_\rho & w_m \\ z_\rho & z_m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2f_1} & -\frac{1}{2f_1} \\ \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{v}{f_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{v}{f_1}\right) \end{pmatrix},$$

donde $m = \rho v$. Resulta:

$$\rho_t + (\rho v)_x = \frac{1}{2f_1}(A - B) + \frac{\epsilon}{2f_1}(w_{xx} - z_{xx}),$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + P_1(\rho)\right)_x = \frac{A}{2}\left(\rho + \frac{v}{f_1}\right) + \frac{B}{2}\left(\rho - \frac{v}{f_1}\right) + \frac{\epsilon\rho}{2}(w_{xx} + z_{xx}) + \frac{\epsilon v}{2f_1}(w_{xx} - z_{xx}),$$

o equivalentemente:

$$\rho_t + (\rho v)_x = h_1 + \frac{\epsilon}{2f_1}(w_{xx} - z_{xx}), \tag{3-73}$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + P_1(\rho)\right)_x = vh_1 + \rho h_2 + \frac{\epsilon\rho}{2}(w_{xx} + z_{xx}) + \frac{\epsilon v}{2f_1}(w_{xx} - z_{xx}). \tag{3-74}$$

E integrando por partes (3-73),(3-74), se tiene que para cualquier función de prueba $\phi \in C_0^\infty(R \times [0, +\infty))$:

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\rho\phi_t + (\rho v)\phi_x)\, dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0\phi(x,0)dx = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\rho, v, x, t)\phi dxdt$$

$$+\epsilon\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2f_1}\phi_x - \frac{f_1'\rho_x}{2f_1^2}\phi\right)(w_x - z_x)dxdt, \tag{3-75}$$

y

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left((\rho v)\phi_t + (\rho v^2 + P(\rho))\phi_x\right) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 v_0 \phi(x,0)dx =$$

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(vh_1(\rho,v,x,t)+\rho h_2(\rho,v,x,t))\phi dxdt+\epsilon\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(\rho_x\phi+\rho\phi_x)(w_x+z_x)$$

$$+\left(\frac{v}{2f_1}\phi_x+\frac{v_x}{2f_1}\phi-\frac{vf_1'\rho_x}{2f_1^2}\phi\right)(w_x-z_x)dxdt. \tag{3-76}$$

Si $f_1'(\rho)\le 0$, entonces $f_1(\rho)$ es una función no creciente, luego, tomando ϵ más pequeño que δ, y tal que $\epsilon/f_1(\rho)=\epsilon/f(\rho+2\delta)$ y $\epsilon/f_1^2(\rho)=\epsilon/f^2(\rho+2\delta)$ tiendan a cero cuando ϵ,δ tiendan a cero, entonces usando las estimaciones (3-27),(3-32),(3-69), y la convergencia de $\{\rho^{\epsilon_n,\delta_n},v^{\epsilon_n,\delta_n}\}_n$ sobre cualquier región acotada $\Omega\subseteq R\times[0,+\infty)$, se obtiene inmediatamente haciendo $\epsilon,\delta\longrightarrow 0$ en (3-75),(3-76), que:

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho\phi_t+(\rho v)\phi_x)\,dxdt+\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0\phi(x,0)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h_1(\rho,v,x,t)\phi dxdt, \tag{3-77}$$

y

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left((\rho v)\phi_t+(\rho v^2+P(\rho))\phi_x\right)dxdt+\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0v_0\phi(x,0)dx=$$

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(vh_1(\rho,v,x,t)+\rho h_2(\rho,v,x,t))\phi dxdt, \tag{3-78}$$

para cualquier función de prueba $\phi\in C_0^\infty(R\times[0,+\infty))$. Lo que quiere decir que el par de funciones Lipschitz-continuas (ρ,v) son una solución débil global para el problema de Cauchy (3-1),(3-2),(3-3).

Si $f_1'(\rho)\ge 0$, entonces $f_1(\rho)$ es una función no decreciente, luego:

$$\frac{1}{2f_1(\rho)}=\frac{1}{2f(\rho+2\delta)}\le\frac{1}{2f(2\delta)},$$

$$|\rho_x|=\frac{\left|\left(\int_0^\rho f_1(s)ds\right)_x\right|}{f_1(\rho)}\le\frac{M}{f(2\delta)},$$

y

$$\left|\frac{\rho_x}{2f_1^2}\right|=\left|\frac{1}{2f_1^3}\left(\int_0^\rho f_1(s)ds\right)_x\right|\le\frac{M}{2f^3(2\delta)}.$$

Por lo tanto, tomando ϵ más pequeño que δ, y tal que $\epsilon/f(2\delta)$ y $\epsilon/f^3(2\delta)$ tiendan a cero cuando ϵ,δ tiendan a cero, entonces usando las estimaciones (3-27),(3-32),(3-71), y la convergencia de $\{\rho^{\epsilon_n,\delta_n},v^{\epsilon_n,\delta_n}\}_n$ sobre cualquier región acotada $\Omega\subseteq R\times[0,+\infty)$, se obtiene inmediatamente haciendo $\epsilon,\delta\longrightarrow 0$ en (3-75),(3-76), las ecuaciones (3-77),(3-78). De aquí, el par de funciones Lipschitz-continuas (ρ,v) son una solución débil global para el problema de Cauchy (3-1),(3-2),(3-3), igual que en el caso anterior.

Bibliografía

[1] Ben-Artzi, Matania. ; Li, Jiequan: Hyperbolic Balance Laws: Riemann Invariants and the Generalized Riemann Problem / Capital Normal University and the Hebrew University of Jerusalem. 2000. – Informe de Investigación. – 52 p.

[2] Bianchini, S. ; A., Bressan: Vanishing Viscosity Solutions of nonlinear Hyperbolic Systems. 161 (2005), p. 223–342

[3] Bressan, Alberto.: Hyperbolic Conservation Laws An Illustrated Tutorial / Penn State University. 2009. – Informe de Investigación. – 81 p.

[4] Brézis, Haim: *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*. París : Masson Editeur, 1984

[5] Chen, G-Q. ; Glimm, J.: Global Solutions to the Compressible Euler Equations with Geometric Structure. 180 (1996), p. 153–193

[6] Chen, Gui-Qiang. ; Glimm, James.: Global Solutions to the Compressible Euler Equation with geometrical structure. 189 (2000), p. 263–271

[7] Christoforou, Cleopatra.: Hyperbolic Systems of Balanced Laws Via Vanishing Viscosity. 221 (2006), p. 470–541

[8] Chueh, K. ; Conley, C. ; Smoller, J.: Positively Invariant Regions for Systems of nonlinear Diffusion Equations. 26 (1977), p. 373–392

[9] Dafermos, Constantine M.: *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. New York : Springer-Verlag, 2010

[10] Diperna, R. J.: Convergence of the Viscosity Method for Isentropic Gas Dynamics. 91 (1983), p. 1–30

[11] Friedman, A.: *Partial Differntial Equations of Parabolic Type*. New Jersey : Prentice Hall, 1964

[12] G, Plaza R.: Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación / Universidad Nacional Autónoma de México. 2013. – Informe de Investigación. – 171 p.

[13] Gomez, Plata. ; Ricardo, Adrian.: Solución al Sistema General de Ecuaciones de Euler para un Fluido Compresible. 21-1 (2011), p. 115–124

[14] González, Pedro. ; Casanova, Enríquez.: Tortas Hiperbólicas: ¿Como se comen? / Universidad Nacional Autónoma de México. 2011. – Informe de Investigación. – 74 p.

[15] Gosse, Laurent.: A Well-Balanced Scheme Using non-conservatives Products designed for Hyperbolic Systems of Conservation Laws with Source Terms / institute of applied and computational matematics. 1997. – Informe de Investigación. – 18 p.

[16] Gratton, Julio.: Introducción a la Mecánica de Fluidos / Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. 2002. – Informe de Investigación. – 273 p.

[17] Hernandez Rincón, Juan C.: Existencia de Solución Débil para el Problema de Cauchy del Gas Dinámico Isentrópico. 9 (2002), p. 67–82

[18] Iorio, Rafael ; De Magalhaes, Valéria.: *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. United Kingdom : Cambridge University Press, 2001

[19] Isaacson, Eli. ; Temple, Blake.: Nonlinear Resonance in systems of Conservation Laws. 52 (1992), p. 1260–1278

[20] Kesavan, S.: *Topics in Functional Analysis and Applications*. Bangalore : New Age International (P) Limit, Publishers, 1989

[21] Klingenberg, C. ; Lu, Y. ; Rendon, L.: On Global Lipschitz-continuous Solutions of Isentropic Gas Dynamics. 82 (2003), p. 35–43

[22] Klingenberg, Christian. ; Lu, Yunguang.: Existence of Solutions to Hyperbolic Conservation Laws with a Source. 187 (1997), p. 327–340

[23] Ladyzenskaya, A. ; Solonnikov, V. ; Uraltseva, N.: *Linear and quasi Linear equations of Parabolic Type*. Amer. Math : Soc. Transl., 1968

[24] Lien, Wen-ching.: Hyperbolic Conservation Laws with a Moving Source / Stanford University. 1997. – Informe de Investigación. – 23 p.

[25] Lu, Yunguang.: Convergence of the Viscosity Method for a nonstrictly Hyperbolic System. 12 (1992), p. 349–360

[26] Lu, Yunguang.: The Global Holder-continuous Solution of Isentropic Gas Dynamics. 123 (1993), p. 231–238

[27] Lu, Yungunag.: *Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method*. United States of America : Chapman and Hall/CRC, 2003

[28] Smoller, Joel.: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. 175 Fifth Avenue, New York : Springer-Verlag New York, Inc, 1994

[29] Song, Guo-Qiang. ; Xiao, Jian: Existence of Global Weak Solutions to a Special System of Euler Equation with a Source (II): General Case. 352 (2009), p. 943–953

[30] Vasquez, M. ; Toro, E.: Exact Solution of some Hyperbolic Systems with Source Terms. 459 (2002), p. 263–271

[31] Yan, Jin. ; Chen, Zhixin. ; Tao, Ming.: Conservation Laws I: Viscosity Solutions. 41 (2007), p. 81–90

[32] Yang, Rei-Fang.: Existence of Global Entropy Solutions to a non-strictly Hyperbolic System with a Source. En: *Carbon* 40 (2006), p. 53–64