Capítulo 4

Interpolación polinomial de Hermite

En determinadas aplicaciones se precisan métodos de interpolación que trabajen con datos prescritos de la función y sus derivadas en una serie de puntos, con el objeto de aumentar la aproximación en las proximidades de dichos puntos. Dentro de esta clase de métodos está la interpolación de Hermite. Nos centramos en el problema de interpolación polinomial de Hermite.

Sean $x_0,\ldots,x_n$ puntos distintos. Conocidos los valores de la función f y su derivada f' en $x_0,\ldots,x_n$, se trata de encontrar un polinomio de grado el menor posible que coincida con f y con su derivada en los puntos señalados.

Se demuestra que dicho polinomio existe y es único. Además tiene grado $2n+1$ (recuérdese que disponemos de $2n+2$ datos para construirlo). A dicho polinomio se le llama *polinomio de interpolación de Hermite* de f en los puntos x_i, $i = 0,.., n$.

- Datos numéricos: $f(x), f'(x_i), \quad i = 0,..,n$ ($2n+2$ datos).
- Espacio de funciones interpoladoras: P_{2n+1}
- Problema interpolación polinomial de Hermite:

$$p \in P_{2n+1} : \quad \begin{array}{l} p(x_0) = f(x_0),\ldots, p(x_n) = f(x_n) \\ p'(x_0) = f'(x_0),\ldots, p'(x_n) = f(x_n) \end{array}$$

Observación: El problema de interpolación de Hermite se puede extender considerando valores de derivadas de la función de orden mayor que uno.

En las siguientes secciones nos centramos en la construcción explícita del polinomio de interpolación de Hermite y en el análisis del error que se comete al aproximar la función interpolada por su polinomio de interpolación de Hermite.

4.1 Fórmula de Lagrange

El polinomio de interpolación de Hermite, $p(\mathrm{x})$, de la función f en los puntos distintos $\mathrm{x}_0,\ldots,\mathrm{x}_n$ admite la expresión:

$$p(\mathrm{x}) = \sum_{i=0}^{n} f(\mathrm{x}_i) L_i(\mathrm{x}) + \sum_{i=0}^{n} f'(\mathrm{x}_i) \widetilde{L}_i(\mathrm{x}), \quad \text{(Fórmula de Lagrange).}$$

Las funciones $\{L_i(\mathrm{x}), \widetilde{L}_i(\mathrm{x}), \quad i = 0,\ldots,n\}$ constituyen la base de Lagrange del problema de interpolación considerado. Esto es, $L_i(\mathrm{x})$ y $\widetilde{L}_i(\mathrm{x})$ son polinomios de grado $2n$+1 verificando

$$L_i(\mathrm{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad L'_i(\mathrm{x}_j) = 0 \quad ,i,j = 0,\ldots,n$$
$$\widetilde{L}_i(\mathrm{x}_j) = 0, \quad \widetilde{L}'_i(\mathrm{x}_j) = \delta_{ij} \quad ,i,j = 0,\ldots,n$$

Se demuestra que admiten la expresión:

$$L_i(\mathrm{x}) = (1 - 2(\mathrm{x} - \mathrm{x}_i) l'_i(\mathrm{x})) l_i^2(\mathrm{x})$$
$$\widetilde{L}_i(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} - \mathrm{x}_i) l_i^2(\mathrm{x})$$

donde $\displaystyle l_i(\mathrm{x}) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(\mathrm{x} - \mathrm{x}_j)}{(\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_j)}, \quad i = 0,\ldots,n.$

4.2 Fórmula de Newton generalizada

Un algoritmo análogo al de Newton visto en la sección 3.2 nos proporcionará un método alternativo a la fórmula de Lagrange del polinomio de interpolación de Hermite. Para ello, previamente tenemos que extender el concepto de diferencias divididas al caso en el que los argumentos se repitan.

Comenzamos, para motivar la definición, con las diferencias divididas de grado cero. Supongamos que la función *f* es derivable en un entorno del punto x_0. Las diferencias divididas de *f* en $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0$, $f[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0]$, se interpretan como el $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}]$:

$$f[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0] = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}] = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0} = f'(\mathrm{x}_0)$$

En general, si *f* es derivable hasta el orden k en un entorno de x_0, se definen las diferencias divididas de grado *k* de *f* en x_0 (el argumento repetido k+1 veces) como:

$$f\left[x_0,\ldots,x_0\right]=\frac{f^{(k}(x_0)}{k\,!}$$

Esta definición extiende el concepto de diferencias divididas al caso de argumentos repetidos, quedando la fórmula recursiva de cálculo

$$f[x_0,\ldots,x_k]=\begin{cases}\dfrac{f[x_0,\ldots,x_{k-1}]-f[x_1,\ldots,x_k]}{x_0-x_k} & \text{si } x_0\neq x_k\\[2ex] \dfrac{f^{(k}(x_0)}{k!} & \text{si } x_0=\ldots=x_k\end{cases}$$

Esta definición ampliada de las diferencias divididas nos permite extender el algoritmo de Newton para la construcción de polinomios de interpolación que involucran valores de la función y sus derivadas en puntos señalados. Para ello basta escribir una lista con lo nodos de interpolación, donde cada punto aparece tantas veces como valores de la función y sus derivadas se conocen en dicho punto. Se construye la tabla de diferencias divididas utilizado la fórmula recursiva generalizada y el algoritmo de Newton generalizado (contemplando argumentos repetidos) nos proporcionará el polinomio buscado. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.2.1. *Constrúyase el polinomio de grado tres que pasa por los puntos (0,10), (1,15), (2,5) y con tangente 1 en* x_0.

Sea $p(x)$ el polinomio buscado.
Datos. $f(0)=10,\ f(1)=15,\ f(2)=5,\ f'(0)=1$
Función interpolante: *Polinomio de grado tres.*

Construimos la tabla de diferencias divididas generalizadas con los datos numéricos proporcionados en el problema:

$x_0=0$	$f(0)=10$	$f[0,0]=f'(0)=1$	$f[0,0,1]=4$	$f[0,0,1,2]=-23/4$
$x_0=0$	$f(0)=10$	$f[0,1]=5$	$f[0,1,2]=-15/2$	
$x_1=1$	$f(1)=15$	$f[1,2]=-10$		
$x_2=2$	$f(2)=5$			

Por tanto, utilizando la fórmula de Newton generalizada:

$$p(x)=f(0)+f[0,0]x+f[0,0,1]x^2+f[0,0,1,2]x^2(x-1)=10+x+4x^2-\frac{23}{4}x^2(x-1)$$

Ejemplo 4.2.2. *Constrúyase el polinomio de grado menor que interpole a la funcion f(x)* en los siguientes datos

$$f(1)=2,\quad f'(1)=3$$
$$f(2)=6,\quad f'(2)=7,\quad f''(2)=8$$

Con los datos disponibles construimos la tabla de diferencias divididas generalizadas:

$$\begin{array}{llllll}
x_0=1 & f(1)=2 & f[1,1]=f'(1)=3 & f[1,1,2]=1 & f[1,1,2,2]=2 & f[1,1,2,2,2]=-1 \\
x_0=1 & f(1)=2 & f[1,2]=4 & f[1,2,2]=3 & f[1,2,2,2]=1 & \\
x_1=2 & f(2)=6 & f[2,2]=f'(2)=7 & f[2,2,2]=\dfrac{f''(2)}{2!}=4 & & \\
x_1=2 & f(2)=6 & f[2,2]=f'(2)=7 & & & \\
x_1=2 & f(2)=6 & & & &
\end{array}$$

A partir de la tabla de diferencias divididas calculada, escribimos la expresión de Newton generalizada:

$$p(\mathrm{x})=f[1]+f[1,1](\mathrm{x}\text{-}1)+f[1,1,2](\mathrm{x}\text{-}1)^2+f[1,1,2,2](\mathrm{x}\text{-}1)^2(x-2)+f[1,1,2,2,2](\mathrm{x}\text{-}1)^2(\mathrm{x}\text{-}2)^2=$$
$$=2+3(\mathrm{x}-1)+(\mathrm{x}\text{-}1)^2+2(\mathrm{x}\text{-}1)^2(\mathrm{x}\text{-}2)-(\mathrm{x}\text{-}1)^2(\mathrm{x}\text{-}2)^2$$

Una vez introducido el concepto de diferencias divididas generalizadas e ilustrado con ejemplos, escribimos la expresión, siguiendo el algoritmo de Newton generalizado, del polinomio $p(\mathrm{x})$ de interpolación de Hermite de una función f en $\mathrm{x}_0,\ldots,\mathrm{x}_n$:

$$p(\mathrm{x})=f[\mathrm{x}_0]+f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0](\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1](\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2+f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_1](\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)+$$
$$+\ldots+f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n,\mathrm{x}_n](\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)^2\ldots(\mathrm{x}-\mathrm{x}_\mathrm{n})$$

Los coeficientes de la expresión anterior son los elementos de la primera fila de la tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{x}_0 & f(\mathrm{x}_0) & f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0] & f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1] & \vdots & f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n,\mathrm{x}_n] \\
\mathrm{x}_0 & f(\mathrm{x}_0) & f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1] & f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_1] & \vdots & \\
\mathrm{x}_1 & f(\mathrm{x}_1) & f[\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2] & \vdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\mathrm{x}_n & f(\mathrm{x}_n) & & & &
\end{array}$$

4.3 Estudio del error

El error de interpolación en el caso de la interpolación polinomial de Hermite se puede estimar de forma análoga a como se hacía en la interpolación polinomial clásica.

Sea $E(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - p(\mathrm{x})$ el error que se comete en el punto x al simular la función *f* por su polinomio de interpolación de Hermite *p* en $\mathrm{x}_0,\dots,\mathrm{x}_n$. Se demuestra que si $f \in C^{2n+2}([a,b])$, siendo $[a,b]$ un intervalo que contiene a los puntos de trabajo $\mathrm{x}_0,\dots,\mathrm{x}_n$,

$$E(\mathrm{x}) = f[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n},\mathrm{x}_\mathrm{n},\mathrm{x}](\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2\dots(\mathrm{x}-\mathrm{x}_\mathrm{n})^2$$

Esta expresión se puede escribir en términos de la derivada de orden $2n+2$ de *f*, probándose que para cada $\mathrm{x} \in [a,b]$ existe un punto $\xi_x \in [a,b]$ tal que

$$E(\mathrm{x}) = \frac{f^{(2n+2}(\xi_\mathrm{x})}{(2n+2)\,!}\left(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\right)^2\dots\left(\mathrm{x}\text{-}\mathrm{x}_\mathrm{n}\right)^2, \quad \mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}]$$

A partir de la fórmula anterior se puede obtener una cota del error de interpolación de Hermite

$$|E(\mathrm{x})| = \frac{M}{(2n+2)!}|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0|^2\dots|\mathrm{x}-\mathrm{x}_\mathrm{n}|^2, \quad \mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}]\ |$$

siendo $M = \max\limits_{a\le \mathrm{x} \le \mathrm{b}}\left|f^{(2n+2}(\mathrm{x})\right|$.

<u>**Ejemplo 4.3.1.**</u> *Se considera la función* $f(\mathrm{x}) = \ln \mathrm{x}$

a) *Calcúlese el polinomio de interpolación de Hermite de f en* $\mathrm{x}_0 = 1$ *y* $\mathrm{x}_1 = 2$.

Construimos la tabla de diferencias divididas que permite incluir los datos de interpolación $f(1), f'(1), f(2), f'(2)$, trabajando con dos dígitos decimales:

$\mathrm{x}_0 = 1$	$f(1) = 0$	$f'(1) = 1$	$f[1,1,2] = -0.31$	$f[1,1,2,2] = 0.12$
$\mathrm{x}_0 = 1$	$f(1) = 0$	$f[1,2] = 0.69$	$f[1,2,2] = -0.19$	
$\mathrm{x}_1 = 2$	$f(2) = 0.69$	$f[2,2] = f'(2) = 0.5$		
$\mathrm{x}_1 = 2$	$f(2) = 0.69$			

Sea $p(\mathrm{x})$ el polinomio de interpolación buscado, utilizando la fórmula de Newton generalizada:

$$p(\mathrm{x}) = f(1) + f[1,1](\mathrm{x}-1) + f[1,1,2](\mathrm{x}-1)^2 + f[1,1,2,2](\mathrm{x}-1)^2(\mathrm{x}-2) =$$
$$= (\mathrm{x}-1) - 0.31(\mathrm{x}-1)^2 + 0.12(\mathrm{x}-1)^2(\mathrm{x}-2).$$

b) Dar una estimación del error de interpolación en el intervalo $[1,2]$.

Aplicando la fórmula vista de acotación del error de interpolación de Hermite a nuestro problema, obtenemos que

$$E(\mathrm{x}) \leq \frac{M}{4!}(\mathrm{x}-1)^2(\mathrm{x}-2)^2 \quad \mathrm{x} \in [1,2]$$

donde $M = \max_{\mathrm{x}\in[1,2]} \left| f^{(iv}(\mathrm{x}) \right|$.

En nuestro caso $M = \max_{1\leq \mathrm{x}\leq 2} \left| \frac{-6}{\mathrm{x}^4} \right| = 6$. Luego el error cometido al simular $f(\mathrm{x})$ por $p(\mathrm{x})$ en el intervalo $[1,2]$ es menor que:

$$|E(\mathrm{x})| \leq \frac{6}{4!}(\mathrm{x}-1)^2(\mathrm{x}-2)^2 \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.016 \quad \mathrm{x} \in [1,2].$$