Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Métodos Numéricos

Problema

Considere un cuerpo con temperatura interna T el cual se encuentra en un ambiente con temperatura constante T_e. Suponga que su masa m se concentrada en un solo punto. Entonces la transferencia de calor entre el cuerpo y el entorno externo puede ser descrita con la ley de *Stefan-Boltzmann*:

$$v(t) = \epsilon\gamma S(T^4(t) - T_e^4) \quad (1)$$

Donde, t es tiempo y ϵ es la constante de Boltzmann ($\epsilon = 5.6x10^{-8}J/m^2K^2s$), γ es la constante de "emisividad" del cuerpo, S el área de la superficie y v es la tasa de transferencia del calor.
La tasa de variación de la energía $E(T) = mCT(t)$ (donde C indica el calor específico del material que constituye el cuerpo) es igual, en valor absoluto, a la tasa v. En consecuencia, el cálculo de T (t) requiere la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-v(t)}{mC} = \frac{-\epsilon\gamma S(T^4(t) - T_e^4}{mC} \quad (2)$$

Determine de manera numérica cuál es la temperatura interna T (t) para 20 instantes de tiempo en [s] con $t \in [0,200]$, el cual se encuentra en un ambiente con temperatura constante $T_e = 200K$. Suponga que su masa m=1Kg se concentrada en un solo punto, el cuerpo es un cubo de lados de longitud 1m y T_0= 180K, γ = 0.5 y C= 100J/ (Kg/K).

Solución:
Teniendo en cuenta que el área de la superficie del cubo es: $S = 6(1m^2) = 6m^2$.
Sustituyendo los valores dados en (2), se tiene que:

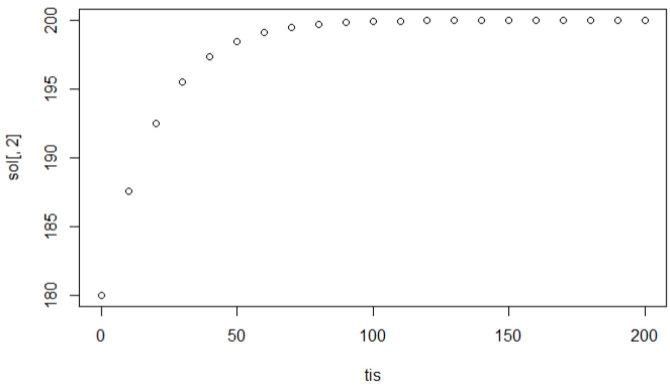
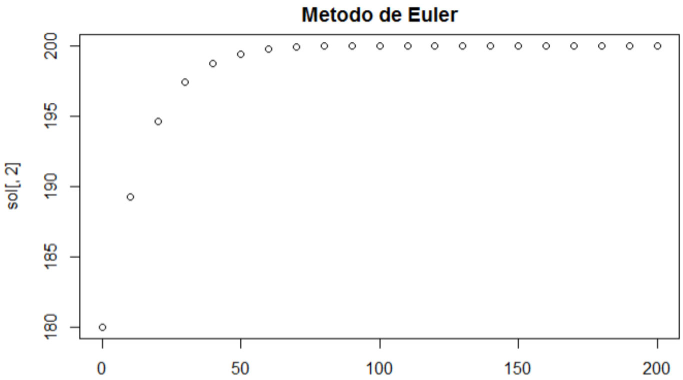
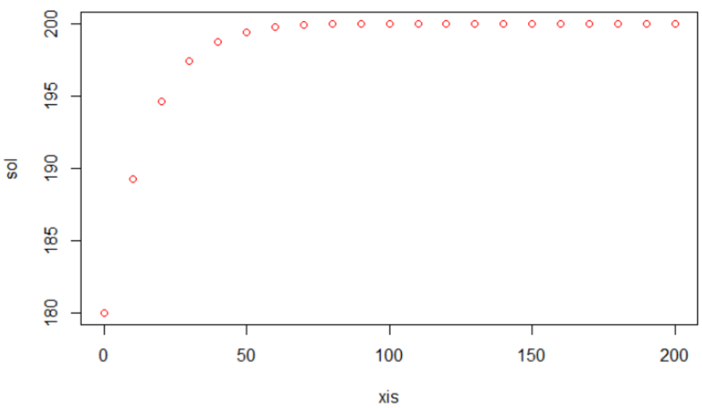
$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -1.68 * 10^{-9}T^4(t) + 2.668 \\ T(0) = 180; t \in [0,200] \end{cases}$$

Usando la función **ode ()** del paquete **deSolve de R**

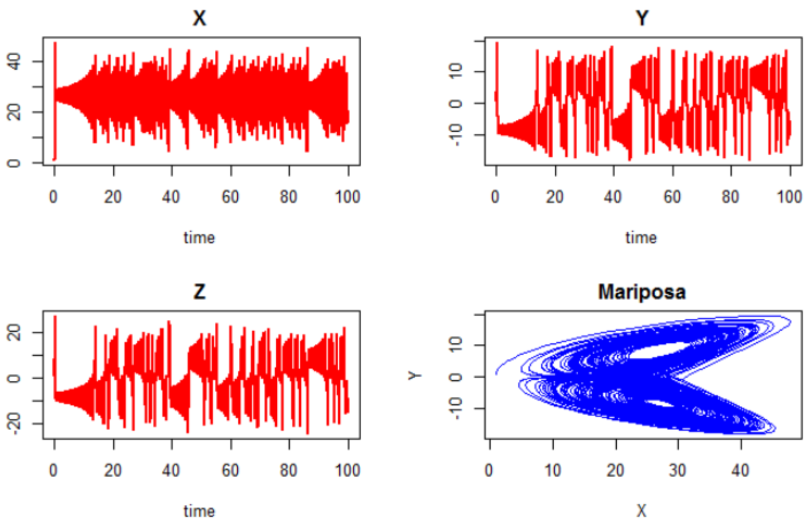
```
ode(y, times, func, parms, method = c("lsoda",
  "lsode", "lsodes", "lsodar",
  "vode", "daspk", "euler", "rk4",
  "ode23", "ode45", "radau", "bdf",
  "bdf_d", "adams", "impAdams",
   "impAdams_d"), ...)
```

Código en R

```
---
title: "ANALISIS NUMERICO ECUACIONES DIFERENCIAS"
author: "Eddy Herrera Daza"
date: "17 de octubre de 2017"
output:
  ioslides_presentation: default
  beamer_presentation: default
---

```{r setup, include=FALSE}
knitr::opts_chunk$set(echo = FALSE)
```
```{r}
install.packages("deSolve")
library("deSolve")
```
Problema:
Considere un cuerpo con temperatura interna T el cual se encuentra en un ambiente con temperatura constante Te.
Suponga que su masa m se concentrada en un solo punto. Entonces la la transferencia de calor entre el cuerpo y
el entorno externo puede ser descrita con la ley de "Stefan-Boltzmann,"
```{r}
require(deSolve)
# La función ode() requiere obligatoriamente, varias cosas que debemos agregar
# ode(valores iniciales, tis , func, parms, method, ...)
fp = function(t,y, parms){
s = -1.68*10^(-9)*y^4+2.6880
return(list(s)) # ode requiere salida sea una lista
}
tis= seq(0,200,200/20)
# Usamos la función ode()
sol = ode(c(180), tis, fp, parms=NULL, method = "euler") # método Runge Kutta orden 4
# Salida
tabla = cbind(tis, sol[,2] )
colnames(tabla) = c("ti", " Ti Euler ")
tabla
# Representación
plot(tis, sol[,2], main="Metodo de Euler" )
```
```

Método de Runge-Kuta

```
      ti       Ti
 [1,]   0 180.0000
 [2,]  10 187.5804
 [3,]  20 192.4600
 [4,]  30 195.4897
 [5,]  40 197.3268
 [6,]  50 198.4246
 [7,]  60 199.0747
 [8,]  70 199.4576
 [9,]  80 199.6824
[10,]  90 199.8142
[11,] 100 199.8913
[12,] 110 199.9365
[13,] 120 199.9629
[14,] 130 199.9783
[15,] 140 199.9873
[16,] 150 199.9926
[17,] 160 199.9957
[18,] 170 199.9975
[19,] 180 199.9985
[20,] 190 199.9991
[21,] 200 199.9995
```



Método de Euler

```
        ti   Ti Euler
 [1,]    0   180.0000
 [2,]   10   189.2440
 [3,]   20   194.5765
 [4,]   30   197.3757
 [5,]   40   198.7590
 [6,]   50   199.4200
 [7,]   60   199.7304
 [8,]   70   199.8751
 [9,]   80   199.9422
[10,]   90   199.9732
[11,]  100   199.9876
[12,]  110   199.9943
[13,]  120   199.9974
[14,]  130   199.9988
[15,]  140   199.9994
[16,]  150   199.9997
[17,]  160   199.9999
[18,]  170   199.9999
[19,]  180   200.0000
[20,]  190   200.0000
[21,]  200   200.0000
```



Creando una función en R

```
```{r}
euler1 = function(init, xis ,func) {
n = length(xis)
h = xis[2] - xis[1]
v.num = vector(length = n)
v.num[1] = init
for (j in 1:(n-1)) {
v.num [j+1] = v.num [j] +
h*func(xis[j], v.num[j]) }
v.num}
# --- Pruebas
f = function(t,y) -1.68*10^(-9)*y^4+2.6880
xis= seq(0,200,200/20)
sol= euler1(180, xis, f)
tabla = cbind(xis, sol )
colnames(tabla) = c("ti", " Ti ")
tabla
# Representación
plot(xis, sol,col="red" )

```
```

```
        ti       Ti
 [1,]    0 180.0000
 [2,]   10 189.2440
 [3,]   20 194.5765
 [4,]   30 197.3757
 [5,]   40 198.7590
 [6,]   50 199.4200
 [7,]   60 199.7304
 [8,]   70 199.8751
 [9,]   80 199.9422
[10,]   90 199.9732
[11,]  100 199.9876
[12,]  110 199.9943
[13,]  120 199.9974
[14,]  130 199.9988
[15,]  140 199.9994
[16,]  150 199.9997
[17,]  160 199.9999
[18,]  170 199.9999
[19,]  180 200.0000
[20,]  190 200.0000
[21,]  200 200.0000
```



Sistema de Ecuaciones Diferenciales

El meteorólogo Lorenz realizando simulaciones con computador de la evolución, de las trayectorias de un modelo muy simplificado, de la convección atmosférica, descubrió un ejemplar del atractor aperiódico, caótico.

Las ecuaciones de Lorentz es un sistema dinámico con comportamiento caótico (el primero en ser descrito). Este modelo consiste de tres ecuaciones diferenciales que expresan la dinámica de tres variables x, y, z que se asume, representan un comportamiento idealizado de la atmósfera de la tierra. El modelo es:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \sigma(y - x),\\
y'(t) &= x(\rho - z) - y,\\
z'(t) &= xy - \beta z
\end{aligned}
$$

En resumen, el sistema de Lorenz es un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que representan la convección de fluidos atmosféricos en tres dimensiones. Donde, las variables x, y , z representan la distribución horizontal y vertical de la temperatura y el flujo convectivo (la "convección es" la producción de flujos de gases y líquidos por el contacto con cuerpos u objetos de mayor temperatura) en este caso el modelo está dado por:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= ax + yz\\
y'(t) &= b(y - z)\\
z'(t) &= -xy + cy - z
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Con $a = \frac{8}{3}; b = -10; c = 28$ son los parámetros.

Resolvemos para 100 días produciendo una salida (resolución) cada 0.01 día.

Solución

```
Ecuación de Lorentz
```{r}
a = -8/3; b = -10; c = 28
yini = c(X = 1, Y = 1, Z = 1)
Lorenz = function (t, y, parms) {
with(as.list(y), {
dX <- a * X + Y * Z
dY <- b * (Y - Z)
dZ <- -X * Y + c * Y - Z
list(c(dX, dY, dZ))
})
}
# Resolvemos para 100 días produciendo una salida cada 0.01 día
times = seq(from = 0, to = 100, by = 0.01)
out = ode(y = yini, times = times, func = Lorenz,parms = NULL)
# Gráfica
plot(out,col="red",| lwd = 2)
plot(out[,"X"], out[,"Y"], type = "l", xlab = "X",
ylab = "Y", main = "Mariposa", col="blue")

```
```



Referencias

[1] Arthur Charpentier, ed. Computational Actuarial Science with R. CRC Press. 2015.

[2] Owen Jones, Robert Maillardet, and Andrew Robinson. Introduction to Scientific Programming and Simulation using R. CRC Press. 2009

Eddy Herrera Daza eherrera@javeriana.edu.co