

Análisis Numérico

Proyecto

Geraldine Gómez¹, Brayan González², and Santiago Roa³

^{1,2,3}Departamento de Ingeniería de Sistemas, Pontifica Universidad
Javeriana

Mayo 2019

1. Introducción

El establecimiento de la hora de muerte de un individuo o cronotanato-diagnóstico, es un proceso complejo, debido a la cantidad de variables y factores que intervienen, como lo son los cambios químicos, físicos y biológicos a los cuales el cuerpo humano está expuesto en un ambiente determinado; es por esto que la tanatología propone múltiples modelos, con los cuales poder resolver este problema a partir del análisis de diferentes fenómenos cadavéricos, entre estos el del algor mortis o enfriamiento del cuerpo, basados en ecuaciones diferenciales y en modelos como el de Marshall y Hoare, que conlleven a mejorar la precisión de la predicción respectivamente.

Para resolver este problema de tanatología se plantea crear un aplicativo en R, que permita obtener una aproximación del momento de deceso IMP, mediante el muestreo de 7 datos referentes a la temperatura del cuerpo en diferentes instantes de tiempo y la temperatura ambiente, construyendo un modelo que realice el análisis del fenómeno de algor mortis a través de la ley de enfriamiento de Newton.

2. Marco Teórico

En la tanatología existen múltiples fenómenos que a través de su análisis permiten determinar el tiempo de muerte de un individuo, entre estos el fenómeno del Algor Mortis o de enfriamiento, conocido por ser uno de los más efectivos

en muertes recientes. Este consiste en la disminución gradual y progresiva de la temperatura del cuerpo del occiso, hasta igualarse con la temperatura presente en el medio ambiente, aproximadamente a 1°C por hora, dependiendo por supuesto de otro tipo de factores, como el cese del sistema de regulación homeotérmico y las condiciones previas a la muerte.

El enfriamiento, posee un patrón definido en la mayoría de individuos, empezando por las extremidades, debido a la facilidad del riego sanguíneo en pies, manos y cara, seguido por la espalda y extendiéndose hacia el abdomen. Los intestinos del sistema digestivo, al ser la parte más protegida del organismo, son los últimos en enfriarse, llegando a tardar hasta 20 horas en culminar el proceso. Sin embargo, este no es del todo progresivo e intenso en todas las partes del cuerpo ya que los tejidos adiposos o la grasa actúan como aislante térmico, además de la temperatura previa del cuerpo antes del fallecimiento.

Este fenómeno cadavérico, relaciona tanto las temperaturas del cuerpo como del ambiente en diferentes instantes de tiempo, junto con las modificaciones en relación al entorno y las posibles causas muerte, produciendo así las siguientes premisas:

Fase de Enfriamiento	Fenómenos IMP	Tiempos a partir del fallecimiento
Hipertermia post mortem	Muertes por: Insolación, electrocuciones, ataques de rabia, etc.	Inmediatamente
Equilibrio térmico	La temperatura no varía	Durante las 2 primeras horas
Descenso lento	Descenso de $0,5^{\circ}\text{C}$ por hora	Entre 2 y 5 horas tras la muerte
Descenso rápido	Descenso de 1°C por hora	Entre 5 y 13 horas tras la muerte
Descenso lentísimo	Descenso entre $0,75^{\circ}\text{C}$ por hora y $0,25^{\circ}\text{C}$ por hora	Entre 13 y 24 horas tras la muerte
Infradescenso	Evaporación de fluidos biológicos	A partir de las 24 horas tras la muerte

Cuadro 1: Tabla fases de enfriamiento.

Para calcular el intervalo post mortem mediante el algor mortis y la temperatura ambiental, se plantea un modelo doble exponencial propuesto por Marshal y Hoare en 1962 y que postula que es posible diferenciar una doble fase de en-

friamiento: una meseta donde prácticamente es nulo, y una fase final progresiva.

A continuación se muestra el diagrama propuesto por Marshall y Hoare para determinar el momento de la muerte basándose en el enfriamiento corporal.

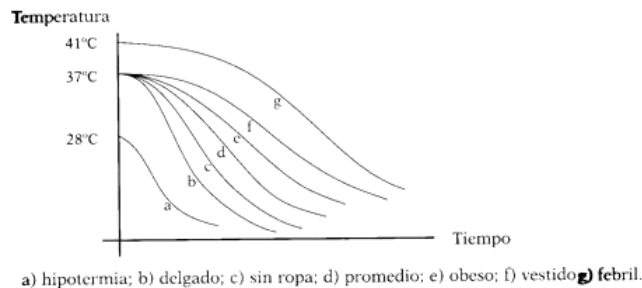


Figura 1: Diagrama Marshall y Hoare

Por ultimo, es importante mencionar que algor mortis esta fundamentada en la Ley de Enfriamiento de los cuerpos propuesta por Newton, sumandole algunos factores condicionantes del ambiente.

3. Descripción del Problema

El problema que se desea resolver, consiste en dar una aproximación cercana de la hora de muerte de un individuo en cuestión, a través de métodos numéricos y ajustes de curvas, que permitan visualizar la transición de enfriamiento del cuerpo en unas condiciones determinadas, facilitando el estudio forense del mismo y sus posibles causas de muerte.

4. Objetivos

4.1. Objetivo General

Realizar un aplicativo en el lenguaje de programación R, específicamente en el IDE RStudio, el cual permita determinar el momento aproximado de la muerte de un individuo, genere gráficos de regresión o regresión según sea el caso, a través del muestreo de 3 datos que proveera el usuario y con esto poder llevar a cabo el cronotanatodiagnóstico con mayor exactitud.

4.2. Objetivos Específicos

- Recolectar información acerca de las variables adyacentes al modelo, que modifican el análisis y establecimiento de la hora de muerte.
- Identificar los diferentes métodos utilizados en la tanatología para poder determinar la hora de muerte de un individuo y su relación frente a la ley de enfriamiento de Newton.
- Usar métodos numéricos de ajuste de curvas, que faciliten la predicción con el menor error posible, respecto a los datos y calculos realizados.
- Realizar una interfaz versatil e intuitiva para el usuario, donde pueda visualizar los gráficos y de forma concisa y precisa, sin ningún tipo de dificultad en el caso que desee modificar el contexto del análisis.

5. Obtención y Tratamiento de Datos

Para la obtención de datos, se usarán estudios publicados por medicina legal y múltiples universidades, enfatizandose en las autopsias realizadas a diferentes individuos, entre estos adultos y niños, que proporcionen algunas variables descritas en el planteamiento del problema, para con esto obtener datos de distintos tipos de muerte. Siendo estos los siguientes:

T. Inicial	T.Final	T. Ambiente	Tpm.Inicial	Tmp.Final	T. Muerte
29,4° C	23,3° C	20° C	0 horas	2 horas	Normal
20,1° C	18,2° C	15° C	0 horas	3 horas	Hipotermia
104,7° F	90,6° F	82° F	0 horas	3 horas	Hipertermia
35,1° C	28,8° C	25° C	0 horas	3:45 horas	Normal
303,15° K	298,15° K	287,15° K	0 horas	2 horas	Normal
34,5° C	33,7° C	25° C	0 horas	2:30 horas	Normal

Cuadro 2: Datos obtenidos.

6. Metodología

La Metodología desarrollada se fundamento en el planteamiento de un modelo teórico que generara el resultado esperado, en este caso una aproximación del tiempo de muerte de un individuo, visualizando su proceso de enfriamiento

a través de la implementación de diferentes métodos numéricos para su graficación y análisis respectivo, basados en el modelo de Marshall y Hoare, además condicionada bajo las siguientes premisas:

- El cuerpo o cadaver debe ser reciente, es decir no tener signos de muerte mayores a 36 horas para que los modelos que se plantearan cumplan con sus funciones pertinentes.
- La temperatura debe ser tomada al cadaver de forma rectal para mayor precisión.
- Las condiciones tanto de la temperatura ambiente como del cuerpo, no deben ser de extremo enfriamiento, es decir menores o iguales a los -20° grados centígrados, o por el contrario en niveles de calor extremo que superen por ejemplo los 50° grados centígrados,

6.1. Modelo Teórico

El desarrollo del modelo teórico, se fundamento respecto al factor del algor mortis o enfriamiento del cuerpo, condicionado a la temperatura ambiente, ya que quizá es el fenómeno más útil para determinar el momento de muerte de un individuo, debido a que la temperatura corporal disminuye gradual y progresivamente hasta igualarse por completo con la temperatura ambiente y al cese del sistema de regulación homeotérmico.

Es por esto, que se utilizara la ley de enfriamiento de Newton para el modelamiento del sistema, ya que establece que si un cuerpo u objeto que tiene una temperatura T_0 es depositado en un medio ambiente que se mantiene a una temperatura T_a constante, con $T_a \neq t_0$, con el paso del tiempo, la temperatura del cuerpo tiende a ser igual a la temperatura del medio que lo rodea. Es decir, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t , entonces $T(t) \rightarrow T_a$, cuando t crece.

Esta ley afirma que la tasa de pérdida de calor de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el medio circundante. Definida por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_a)$$

Donde las variables de la anterior ecuación representan:

- $k \leftarrow$ Coeficiente de intercambio de calor.

- $T \leftarrow$ Temperatura del cuerpo.
- $T_a \leftarrow$ Temperatura del medio ambiente.

Resolviendo la ecuación diferencial anteriormente descrita se obtiene:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT(t)}{(T - T_a)} dt = -k \int_0^t dt$$

$$\ln(T - T_a) = -kt + \ln(T_0 - T_a)$$

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Según lo anterior pueden presentarse dos casos:

1. Cuando $T_0 > T_a$, en este caso la temperatura del cuerpo decrece.
2. Cuando $T_0 < T_a$, en este caso la temperatura del cuerpo aumenta.

Sin importar el caso que se tenga, ya sea enfriamiento o calentamiento, la ecuación diferencial tendrá sentido siempre y cuando k tenga un valor negativo. ($k < 0$).

6.2. Método Numérico

El método numérico utilizado, para poder representar las variaciones de temperatura graficamente, según la solución de la ecuación diferencial obtenida a partir del modelo teórico, fue el de Range Kutta de orden cuatro, debido a sus niveles de precisión respecto a otros métodos como el de Euler, siendo este definido por el siguiente proceso para obtener el resultado deseado:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i; h), \quad h > 0$$

$$\phi(t_i, y_i; h) = a_1k_1 + a_2k_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

donde k_1, k_2, k_3 y k_4 se calculan así:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{h}{2} f(t_i, y_i, \\
k_2 &= \frac{h}{2} f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1, \\
k_3 &= \frac{h}{2} f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2, \\
k_4 &= \frac{h}{2} f(t_i + h, y_i + 2k_3,
\end{aligned}$$

Por último, se procede a graficar respecto al nivel de saltos (h) definidos con anterioridad.

6.3. Método para el Ajuste de Curvas

El método utilizado para suavizar la curva fue Cubic Splines, conocido por ser un trazador cúbico de frontera natural, que permite lograr semejanzas gráficas más cercanas al resultado real de la curva, ya que permite usar segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar una interpolación más cercana a la figura deseada, en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos y con esto poder dibujar las curvas suaves que componen la figura con mayor precisión. Así pues, una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo, unidos entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad. Es decir, si tenemos $n + 1$ puntos $(x_0, y_0) \dots, (x_n, y_n)$ con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, se realiza la interpolación de la función f en cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ con un polinomio cúbico (en realidad de grado ≤ 3) $S_k(x)$ de tal manera que el polinomio $S_i(x)$ en $[x_i, x_{i+1}]$ y $S_{i+1}(x)$ en $[x_{i+1}, x_{i+2}]$, coincidan en x_{i+1} junto con sus derivadas primera y segunda.

6.4. Error

En la metodología desarrollada, existen dos tipos de errores presentes, el primero el error instrumental existente en las mediciones tomadas por el usuario con diversos aparatos y unidades de tiempo, el segundo el error de truncamiento del método de Runge Kutta de orden cuatro, originado por sus cálculos mediante el desarrollo de un promedio ponderado de las pendientes, siendo este equivalente en cada intervalo de longitud h a $O(h^5)$.

6.5. Análisis de Sensibilidad

Para el análisis de la Sensibilidad de la metodología planteada, se realizó el siguiente proceso:

- Se Perturbaron las entradas del sistema, que corresponden a la temperatura inicial del cuerpo y la temperatura del medio ambiente en una decima, respecto a sus valores originales.
- Se Realizo la diferenciación entre el resultado real y el resultado perturbado, obteniendo una tasa porcentual de cambio.
- Se definieron indicadores para la tasa porcentual de cambio, con el fin de señalar si la sensibilidad es alta, intermedia o baja, siendo estos:

Alta (%)	Intermedia (%)	Baja (%)
≥ 20	< 20 y ≥ 11	< 11

Cuadro 3: Indicadores para la tasa porcentual de cambio.

Lo anterior se puede ver reflejado a partir de los siguientes resultados obtenidos al perturbar el modelo:

Entradas	T. Inicial del Cuerpo	T. Ambiente	R. Sexagesimal	R.Decimal
Reales	29.4	20	1° 7' 55"	1.1320
Perturbadas	29.5	20.1 3	1° 5' 19"	1.0887

Cuadro 4: Análisis de sensibilidad.

Donde la tasa de cambio es calculada de la siguiente forma:

$$|((R_p)(100)/R_o) - 100| = TSP$$

$$|(1,0887)(100)/1,1320 - 100| = 3,8250 \%$$

A partir de lo anterior, es posible deducir que el cambio en el sistema fue solamente del 3.8250 %, que según los indicadores establecidos es relativamente bajo y no genera un brutal impacto en el resultado final esperado.

Así mismo, cabe mencionar que la sensibilidad del modelo tambien se encuentra sujeta a las mediciones realizadas por el usuario, donde al tomarse dos temperaturas corporales en diferentes instantes de tiempo, bajo un supuesto aproximado de la temperatura corporal durante el fallecimiento, condicionado a las observaciones empiricas por parte del forense al cadaver, producen que dependiendo de ciertas inclinaciones conceptuales por parte de este, se difiera de forma significativa en el resultado, produciendo una alto nivel de incertidumbre en los análisis realizados.

7. Aplicativo

El proceso que tendrá el aplicativo según las entradas dadas por el usuario en determinadas condiciones, estará definido por el siguiente diagrama de flujo:

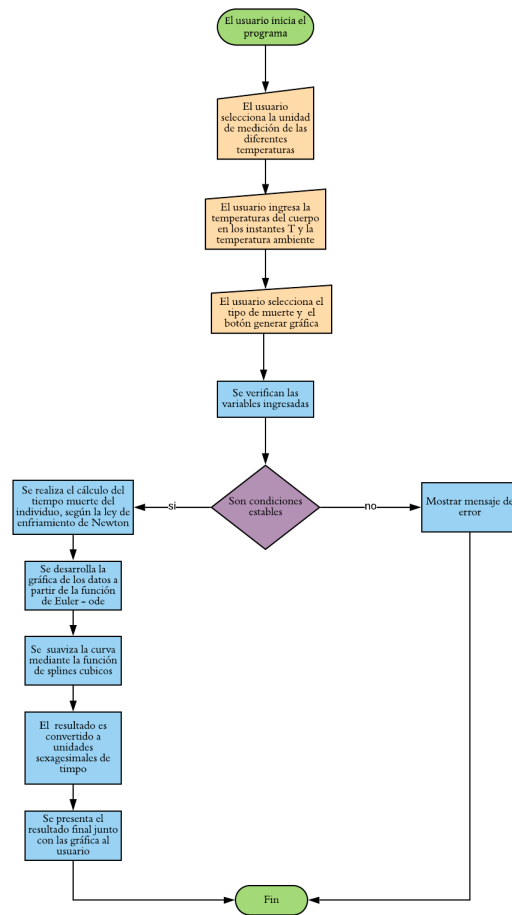


Figura 2: Diagrama de flujo

7.1. Entradas Numéricas

Para resolver el problema planteado se tomarán 3 entradas diferentes, siendo estas las siguientes:

- La unidad de medición, pudiendo ser esta en grados Kelvin, Celsius o Fahrenheit
- Temperatura del cuerpo en un instante t_0 .
- Temperatura del cuerpo en un instante t_1 .
- Temperatura ambiente t_a .
- Tiempo inicial de la medición del temperatura del cuerpo tmp_0 .
- Tiempo final de la medición del temperatura del cuerpo tmp_1 .
- Tipo de fallecimiento tp_c .

La precondition para la inserción de las entradas, esta definida por el estado del cuerpo hallado respecto a condiciones de extremo enfriamiento o por el contrario en niveles de calor extremo que superen por ejemplo los 50° grados centígrados, ya que no se podría establecer un rango de tiempo correcto para realizar la medición de las dos primeras entradas, viendose necesario implementar otros criterios para desarrollar el cálculo no contemplados en el modelo teórico, como las fluctuaciones de la lividez cadaverica en diferentes partes del cuerpo del individuo en cuestión. Además, deben ser cadáveres que no presenten altos niveles de descomposición, es decir con signos recientes de fallecimiento.

7.2. Salidas

Se espera que el aplicativo genere como resultado una aproximación del tiempo de muerte del individuo estudiado en la unidad de medición seleccionada, junto con una gráfica que represente las variaciones de temperatura, obtenida mediante ajuste de curvas con su respectiva propagación del error en los calculos realizados.

7.3. Eficiencia

La eficiencia de la aplicación se constituye a partir de la complejidad de los diferentes algoritmos usados para obtener los resultados deseados, siendo estos el algoritmo de Runge Kutta de orden cuatro y Splines Cubicos, que tienen complejidades a $O(n)$ y $O(n^3)$ respectivamente, el resto de los algoritmos implementados poseen complejidades de $O(1)$ y $O(n)$, con lo cual es posible concluir que la aplicación en su totalidad posee una complejidad de $O(n^3)$, teniendo un crecimiento exponencial respecto a la cantidad de datos ingresados, siendo en el peor de los casos ineficiente respecto al tiempo de ejecución. Sin embargo, al ser siempre entradas estaticas respecto a su tamaño, generan que a pesar de su complejidad el algoritmo sea eficiente dados los requerimientos del usuario.

7.4. Robustez

La aplicación es robusta en el sentido que permite el ingreso de ciertos datos en diferentes unidades de temperatura, además porque tiene un control total de las entradas insertadas por el usuario, respecto al orden de inserción y las condiciones referentes a la metodología planteada para determinar el momento de deceso de un individuo específico.

7.5. Descripción de las Funciones Principales

Las funciones principales del aplicativo son las siguientes:

- **Graficar(t0,t1,M,normal,T0,T1)**: Recibe como parámetros la temperatura inicial del cuerpo, la temperatura final del cuerpo, el tiempo inicial de medición, el tiempo final de medición, la temperatura ambiente y el tipo de muerte, con el fin de graficar el proceso del algor mortis o enfriamiento del cuerpo.
- **CalcularTiempo(t0,t1,M,normal,T0,T1)**: Recibe como parámetros la temperatura inicial del cuerpo, la temperatura final del cuerpo, el tiempo inicial de medición, el tiempo final de medición, la temperatura ambiente y el tipo de muerte, para con esto obtener el momento aproximado del deceso del individuo en cuestión, a través de la solución de la ecuación diferencial correspondiente a la ley de enfriamiento de Newton.
- **ConvertirTiempo(resultado)**: Función que tiene como parámetro un valor en unidades del sistema decimal, con el fin de realizar su conversión a unidades de tiempo del sistema sexagesimal.

7.6. Detalles de la implementación

Para poder llevar a cabo la implementación:

- Se utilizó el formato ofrecido por las funcionalidades de Shiny para aplicaciones web de RStudio, para diseñar y desarrollar la interfaz de la aplicación, además para la gestión de datos mediante el concepto de cliente - servidor.
- No fue necesario realizar la implementación de la función del método de Euler para determinar la variación de la temperatura, ya que se obtuvo mediante la función `ode` de la librería `deSolve`.
- La implementación de la función del método de Splines Cúbicos para suavizar la gráfica, fue obtenida a través de la librería `splines` de RStudio.

8. Referencias

- *Suchil, Mohar, Salaza, Mora y Tiscareño*, (2017). Salud Pública de México: Autopsia Pública.
Recuperado de: <http://saludpublica.mx/index.php/spm/article/view/5397>
- *Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses* (2017). Forensis.
Recuperado de: Medicina Legal.
- *Peña, Bustos y Verdín*, (2019). Fenomenos Cadavéricos y el Tanatocrono-diagnóstico. Universidad de Guadalajara, México.
Recuperado de: <https://www.uv.es/gicf/3R1Pen%CC%83aGICF31.pdf>
- *Vergara*, (2015). Medicina Forense y Criminalística. Universidad de Barcelona.
Recuperado de: <https://www.estudiocriminal.eu/2017/02/Medicina-Forense-y-Criminalistica-Casandra-Vergara-Lopez.pdf>
- *García y Romera* (2010). Estimation of postmortem interval in real cases based on experimentally obtained entomological evidence. University of Murcia.
Recuperado de: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/15734111>
- *Bishop*, (2015). Estimating Postmortem Interval: A Molecular Approach. U.S. Department of Justice.
Recuperado de: <https://www.ncjrs.gov/pdffiles1/nij/grants/248959.pdf>
- *Elgoghail* (2016). Death Investigation with Compromised Human Remains. The first step: Identification.
Recuperado de: <http://www.crime-scene-investigator.net/blog/deat-with-compromised-human-remains.html>
- *Institute for Public Service*, (2011). The Elusive Universal Post-Mortem Interval Formula, Forensic Science.
Recuperado de: <http://leic.tennessee.edu/home/training/forensic-training>