ANALISIS NUMERICO APLICADO CON R

EDDY HERRERA DAZA

2018

Índice general

Capítulo 1

Diferenciación Numérica

En este tema se consideran algunos esquemas para la aproximación de las derivadas mediante métodos numéricos. En particular, se utilizan técnicas de interpolación mediante splines cúbicos para revisar sus propiedades en la aproximación de derivadas. Posteriormente se exponen los fundamentos de las técnicas de diferencias finitas para la aproximación numérica de las derivadas de una función.
Si bien es cierto que el cálculo de derivadas de funciones puede ser en principio, abordado mediante técnicas analíticas y, en consecuencia, abordable ya sea manualmente o mediante programas de cálculo simbólico, existen diversas situaciones donde se precisa el empleo de métodos numéricos para el cálculo de las derivadas.
Algunos ejemplos de estas situaciones son las siguientes:

- Estimación de las derivadas de una señal muestreada
- Problemas de contorno asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones en derivadas parciales
- Aproximación de los cambios instantaneos de una variable respuesta o función

1.1. Fórmulas en diferencias finitas para derivadas de primer orden

Supóngase que se tienen $n+1$ valores distintos en algún intervalo I y que $f(x) \in C^{n+1}(I)$ entonces, existe un polinomio $P(x)$ para algún $\xi(x) \in I$

talque:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{n+1}\xi(x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \tag{1.1}$$

Luego, una vez determinado el polinomio de aproximación dados los $n+1$ puntos, derivar el polinomio para aproximar la derivada

$$f(x) \approx P_n(x) \tag{1.2}$$

$$f^{(k)}(x) \approx \frac{d^k P_n(x)|x = x_0}{dx^k} \tag{1.3}$$

Adicionalmente, se puede utilizar el error de estimación en la interpolación como error de aproximación de la derivada
Un procedimiento más sencillo es utilizar el teorema de Taylor para calcular la derivada
Sea $f(x)$ una función clase C^{n+1} y $x \leq c \leq x+h$ entonces,el desarrollo de Taylor a una distancia h a la derecha(progresiva) y a la izquierda del punto x_i

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{h^{k+1} f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} \tag{1.4}$$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1} h^{k+1} f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} \tag{1.5}$$

En particular, si $f(x)$ es dos veces continuamente diferenciable se tiene que:

$$f(x+h) = f(x) + hf^{'}(x) + \frac{h^2 f^{''}(x)}{2} \tag{1.6}$$

Formula progresiva de dos puntos

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.7}$$

Formula centrada de tres puntos

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{1.8}$$

Ejemplo:Sea $f(x) = e^x$ para $x = 0, 1, 2$ se tiene los resultados de las fórmulas de dos puntos y tres puntos centrada en la siguiente tabla **Ejemplo**: Supóngase que se tienen los siguientes puntos y se va calcular $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	0.00000	3.707
0.2	0.74140	3.152
0.4	1.37180	3.152

Error de truncamiento:

$$-\frac{h^2 f''(x)}{2} = O(h).$$

Por lo tanto, si h tiende a 0 el error de truncamiento tiende a cero. Sin embargo,puede introducirse un error de redondeo,este error se puede a la imprecisión de los cálculos o a la falta de capacidad de los dispositivos en el almacenamiento

Capítulo 2

Integración Numérico

2.1. Regla de Trapecio