CAPITULO 7

INTEGRACION NUMERICA

FORMULAS DE NEWTON COTES

Las fórmulas de Newton-Cotes son fórmulas del tipo

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = \sum_{l=0}^{n} w_l f(x_l) + E_n,$$

Para determinar los pesos w_l se usa la fórmula de interpolación de Lagrange.

Sea $f \in C^{n+1}[a,b]$. Sea $P_n(x)$ el polinomio de grado $\leq n$ que interpola f en los $n+1$ puntos (distintos) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a,b]$. Para cada valor fijo $x \in [a,b]$ existe $\xi(x) \in]a,b[$ tal que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,dx \tag{7.2}$$

En particular, usando la forma de Lagrange del polinomio interpolante, $P_n(x) = y_0L_{n,0}(x) + y_1L_{n,1}(x) + \ldots + y_nL_{n,n}(x)$ con $L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n} \frac{x-x_l}{x_k-x_l}$, tenemos

---

TEOREMA

Sea $f \in C^{n+1}[a,b]$. Sea $P_n(x)$ el polinomio de grado $\leq n$ que interpola f en los $n+1$ puntos (distintos) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a,b]$. Existe $\eta \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} y_k \int_a^b \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n} \frac{x-x_l}{x_k-x_l}\,dx + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{l=0}^{n}(x-x_l)\,dx. \tag{7.3}$$

siempre y cuando $\prod_{l=0}^{n}(x-x_l)$ sea de un mismo signo en $[a,b]$.

TEOREMA

Si $\int_a^b \prod_{l=0}^{n}(x-x_l)\,dx = 0$, $f \in C^{n+2}[a,b]$ y si $\prod_{l=0}^{n+1}(x-x_l)$ mantiene el mismo signo en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} y_k \int_a^b \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n} \frac{x-x_l}{x_k-x_l}\,dx + \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\int_a^b \prod_{l=0}^{n+1}(x-x_l)\,dx,\ \ \eta \in]a,b[\tag{7.4}$$

REGLA DEL TRAPECIO

En la regla del trapecio, para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos: si $h=(b-a)/n$ y $x_i = a + i\,h$, en cada subitervalo $[x_i, x_{i+1}]$, cambiamos la función f por el polinomio interpolante de grado 1 (figura 7.1).

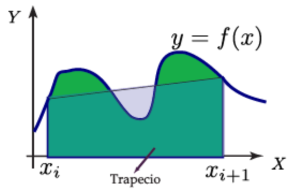


Figura 7.1: Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Para aproximar cada integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ necesitamos el polinomio que interpola a f en $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$:

$P(x) = f(x_i)\dfrac{(x-x_{i+1})}{h} + f(x_{i+1})\dfrac{(x-x_i)}{h} + E$ con $E = (x-x_i)(x-x_{i+1})\dfrac{f''(\xi(x))}{2}$ (si f'' es continua en $[x_i, x_{i+1}]$).

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\frac{(x-x_{i+1})}{h} + f(x_{i+1})\frac{(x-x_i)}{h} + E\,dx \\
&= \frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\frac{f''(\xi(x))}{2}\,dx
\end{aligned}$$

Para calcular $\int_{x_i}^{x_{i+1}} E\,dx$ necesitamos recordar el teorema del valor medio para integrales: Si en $[x_i, x_{i+1}]$ G es continua y φ integrable y de un mismo signo, entonces existe $\eta_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tal que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} G(x)\varphi(x)\,dx = G(\eta_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx$.

Ahora, poniendo $G(x) = f''(\xi(x))/2$ y $\varphi(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})$, obtenemos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\frac{f''(\xi_x)}{2}\,dx = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_i),\ \eta_i \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Observe que $(x-x_i)(x-x_{i+1})$ tiene el mismo signo sobre $[x_i, x_{i+1}]$ (siempre es negativa) y que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx = -h^3/6$.

Finalmente:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i),\ \varepsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{7.5}$$

Si ponemos, para abreviar los cálculos, $G_i(x) = P_i(x) + (x-x_i)(x-x_{i+1})f''(\xi_i(x))/2$, con $P_i(x)$ el polinomio (lineal) interpolante en $[x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} G_0(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} G_1(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_{n-1}(x)\,dx \\
&= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - \frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)
\end{aligned}$$

donde $h = \dfrac{b-a}{n}$, $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ y $x_i = a + i\cdot h$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

$$-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) \;=\; -\frac{h^2}{12}\cdot(b-a)\left[\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)}{n}\right]$$

La expresión en paréntesis cuadrados es un *promedio* de los valores de f'' en $[a,b]$, por lo tanto este promedio está entre el máximo y el mínimo absoluto de f'' en $[a,b]$ (asumimos f'' continua). Finalmente, por el teorema del valor intermedio, existe $\xi \in]a,b[$ tal que $f''(\xi)$ es igual a este valor promedio, es decir

$$-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) \;=\; -\frac{(b-a)h^2}{12}\cdot f''(\xi),\ \xi \in]a,b[$$

(Regla compuesta del trapecio).

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)-\frac{(b-a)h^2}{12}\cdot f''(\xi) \tag{7.6}$$

con $\xi \in]a,b[,\ h=\dfrac{b-a}{n}$ **y** $x_i = a+i\cdot h,\ i=0,1,2,\ldots,n.$

EJEMPLO

Aunque sabemos que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = 2$, vamos a usar esta integral para ver como funciona la regla compuesta del trapecio. Aproximar $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx$ con tres subintervalos y estimar el error. Además determinar n tal que el error sea $|E| \le 0.5\times 10^{-8}$.

Solución: $n=3,\ h=\dfrac{\pi-0}{3}=\dfrac{\pi}{3},\ x_0=0,\ x_1=\dfrac{\pi}{3},\ x_2=\dfrac{2\pi}{3}$ y $x_3=\pi$. Entonces,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \approx \frac{\pi/2}{3}\left[\operatorname{sen}(0)+\operatorname{sen}(\pi)+2\cdot(\operatorname{sen}(\pi)+\operatorname{sen}(2\pi/3))\right] \;=\; 1.813799364234\ldots$$

Aunque sabemos que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = 2$, vamos a usar esta integral para ver como funciona la regla compuesta del trapecio. Aproximar $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx$ con tres subintervalos y estimar el error. Además determinar n tal que el error sea $|E| \le 0.5\times 10^{-8}$.

Solución: $n=3,\ h=\dfrac{\pi-0}{3}=\dfrac{\pi}{3},\ x_0=0,\ x_1=\dfrac{\pi}{3},\ x_2=\dfrac{2\pi}{3}$ y $x_3=\pi$. Entonces,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \approx \frac{\pi/2}{3}\left[\operatorname{sen}(0)+\operatorname{sen}(\pi)+2\cdot(\operatorname{sen}(\pi)+\operatorname{sen}(2\pi/3))\right] \;=\; 1.813799364234\ldots$$

El error estimado $|E|$, en valor absoluto, es $\le \dfrac{\pi\cdot(\pi/3)^2}{12} M$ donde M es el máximo absoluto de $|f''(x)|$ en $[0,\pi]$. En este caso $M=1$ y entonces $|E| \le 0.287095\ldots$

Para determinar n tal que $|E| \le 0.5\times 10^{-8}$. Procedemos así: Sabemos que el máximo absoluto de f'' en $[0,\pi]$ es $M=1$, entonces

$$|E| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \cdot M = \pi \cdot \frac{(\pi/n)^2}{12} = \frac{\pi^3}{12n^2}$$

Como queremos $|E| \leq 0.5 \times 10^{-8}$, basta con que $\dfrac{\pi^3}{12n^2} \leq 0.5 \times 10^{-8}$. Despejando obtenemos,

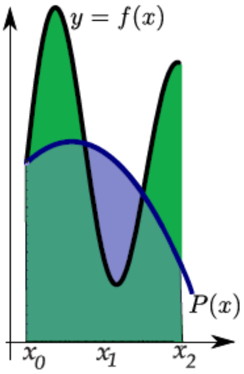
$$n \geq \sqrt{\frac{\pi^3}{12 \cdot 0.5 \times 10^{-8}}} \approx 22732.603$$

Tomando $n = 22732$, obtenemos la aproximación $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx \approx 1.99999999681673$, que efectivamente tiene ocho decimales exactos.

REGLA DE SIMPSON

Sea $f^{(4)}$ continua en $[a,b]$. Interpolando f en $[a,b]$ con $x_0 = a$, $x_1 = (b+a)/2$ y $x_2 = b$ obtenemos el polinomio de Lagrange $P_2(x)$. Entonces,

$$f(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$



$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, dx &= \int_a^b P_2(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f^{(4)}(\xi(x))/2\, dx \\
&= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(x_1) + f(b)\right] + \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f^{(4)}(\xi(x))/2\, dx
\end{aligned}$$

En este caso, $\displaystyle\int_a^b (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, dx = 0$. Tomando $x_3 = x_1$, el polinomio $Q(x) = (x-a)\left(x - \frac{(a+b)}{2}\right)^2 (x - b)$ es de un mismo signo sobre $[a,b]$. Aplicando el teorema (7.2) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, dx &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(x_1) + f(b)\right] + \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_a^b Q(x)\, dx, \ \eta \in\,]a,b[\\
&= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(x_1) + f(b)\right] - \frac{f^{(4)}(\eta)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5, \ \eta \in\,]a,b[
\end{aligned}$$

pues $\displaystyle\int_a^b Q(x)\, dx = -\frac{4}{15}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$.

Para obtener la regla compuesta de Simpson necesitamos n **par** para poder escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Luego calculamos cada una de las $n/2$ integrales:

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{3}\left[f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})\right] - \frac{f^{(4)}(\eta_k)}{90}h^5$$

con $\eta_k \in]x_k, x_{k+2}[$ y $h=(x_{k+2}-x_k)/2$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \\ &= \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right] - \sum_{k=1}^{n/2}\frac{f^{(4)}(\eta_k)}{90}h^5\end{aligned}$$

con $\eta_k \in]x_k, x_{k+2}[$ y $h=(b-a)/n$.

(Regla compuesta de Simpson). Si n es par,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \\ &= \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right] - \frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)\end{aligned}$$

con $\xi \in]a,b[$, $h=\dfrac{b-a}{n}$ **y** $x_i = a + i\cdot h$, $i=0,1,2,...,n$.

La simplificación del término de error se hace como se hizo en la regla del Trapecio.

Aunque la regla de Simpson es muy popular en integración numérica (note que con la misma cantidad de evaluaciones obtenemos una aproximación con un error más pequeño) la regla del Trapecio es más eficiente en ciertos situaciones, como cuando trabajamos con polinomios trigonométricos.

Aunque sabemos que $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx = 2$, vamos a usar esta integral para ver como funciona la regla de Simpson.

a.) Aproximar $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$ con $n=4$ y estimar el error.

b.) Estime n de tal manera que la regla de Simpson aproxime la integral con un error $|E| \leq 0.5\times 10^{-8}$.

a.) Solución: Como $n=4$, calculamos x_0, x_1 x_2 x_3 y x_4.

$n=4 \implies h=\dfrac{\pi-0}{4}=\dfrac{\pi}{4}$, $x_0=0$, $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$, $x_3=\dfrac{3\pi}{4}$ y $x_4=\pi$. Entonces

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx \approx \frac{\pi/4}{3}[\operatorname{sen}(0)+\operatorname{sen}(\pi)+4\cdot(\operatorname{sen}(\pi/4)+\operatorname{sen}(3\pi/4))+2\cdot\operatorname{sen}(\pi/2)] = 2.004559754984...$$

El error estimado $|E|$, en valor absoluto, es $\leq \dfrac{\pi\cdot(\pi/4)^4}{180}M$ donde M es el máximo absoluto de $|f^{(4)}(x)|$ en $[0,\pi]$. En este caso $M=1$ y entonces $|E| \leq 0.00664105...$

$$|E| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \cdot M = \frac{\pi^5}{180n^4}$$

Como queremos $|E| \leq 0.5 \times 10^{-8}$, basta con que $\dfrac{\pi^5}{180n^4} \leq 0.5 \times 10^{-8}$. Despejando obtenemos,

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{\pi^5}{180 \cdot 0.5 \times 10^{-8}}} \approx 135.79$$

Tomando $n = 136$, obtenemos la aproximación $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \approx 2{,}00000000316395...$, que efectivamente tiene ocho decimales exactos.

Determine un $n \in \mathbb{N}$ tal que al aproximar la integral

$$\int_{-1.5}^{1} 5\cos(1-2x) - 2(x+1)\operatorname{sen}(1-2x)\,dx$$

con el método de Simpson, el error estimado sea menor o igual a $\delta = 0.5 \times 10^{-7}$. Para esto, use la fórmula de error de este método. Sugerencia: $f^{(4)}(x) = 16\cos(1-2x) - 32(x+1)\operatorname{sen}(1-2x)$ y $f^{(5)}(x) = 64(x+1)\cos(1-2x)$.

Solución: Sea $M = \text{máx}|f^{(4)}(x)|$ en $[-1.5, 4]$. Entonces, como $b-a = 2.5$ y $h = \dfrac{2.5}{n}$, el $n \in \mathbb{N}$ buscado debe ser par y cumplir

$$\frac{(2.5)\left(\dfrac{2.5}{n}\right)^4}{180} \cdot M \leq 0.5 \times 10^{-7}$$

Cálculo de M.

- Puntos críticos:

$$f^{(5)}(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 64(x+1)\cos(1-2x) = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ 1-2x &= \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x &= -1 \in [-1.5, 1] \checkmark \\ x &= \dfrac{2-\pi}{4} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

  Las soluciones de la ecuación $\cos(1-2x) = 0$ son

k	...	-2	-1	0	1	2	...
$\frac{2-\pi}{4} + 2k\pi$	...	-12.8518	-6.56858	-0.285398	5.99779	12.281	...

- Comparación: Los puntos críticos son $x = -1$ y $x = -0.285398...$

  $$M = \text{máx}\{|f^{(4)}(-1.5)|, |f^{(4)}(1)|, |f^{(4)}(-1)|, |f^{(4)}(-0.2853981633974)|\} = 62.4989799215956$$

  Por tanto, $\dfrac{(2.5)\left(\dfrac{2.5}{n}\right)^4}{180} \cdot 62.4989799215956 \leq 0.5 \times 10^{-7} \quad \Longrightarrow \quad n \geq 161.374$

  R/ $n = 162$

CUADRATURA GAUSSIANA

En la cuadratura Gaussiana (método de Gauss para aproximar una integral), en vez de usar una partición igualmente espaciada del intervalo $[a,b]$ para aproximar la integral con $n+1$ puntos, se escogen los "mejores" $x_0, x_1, \ldots x_n \in [a,b]$, de tal manera que la aproximación sea exacta al menos, para polinomios de grado menor o igual a $2n+1$ (recordemos que Trapecio es exacto para polinomios de grado 1 y Simpson para polinomios de grado 3).
En la figura 7.3, el área de la región que cubre el trapecio relleno es exactamente el área de la región entre la parábola y el eje X. La aproximación que da la regla del Trapecio (trapecio punteado) no es exacta en este caso.

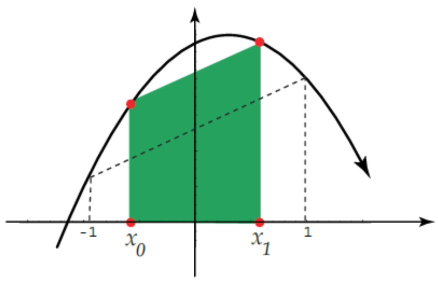


Figura 7.3: Cuadratura Gaussiana.

En general, se trata de usar el método de ***coeficientes indeterminados:*** determinar $c_0, c_1, \ldots, c_n$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [-1,1]$ de tal manera que las integrales

$$\int_{-1}^{1} P_{2n+1}(x)\, dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n)$$

son exactas para cada $P_{2n+1}(x)$, un polinomio de grado $2n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$

Debemos resolver el sistema (no lineal) con $n+1\ +\ n+1 = 2n+2$ incognitas,

$$\left\{\begin{array}{lclcll}
c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n) & = & \int_{-1}^{1} 1\, dx & = & 2, & f(x) = 1 \\
c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n) & = & \int_{-1}^{1} x\, dx & = & 0, & f(x) = x \\
 & \vdots & & \vdots & & \\
c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n) & = & \int_{-1}^{1} x^{2n}\, dx & = & \dfrac{2}{2n+1}, & f(x) = x^{2n} \\
c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n) & = & \int_{-1}^{1} x^{2n+1}\, dx & = & 0, & f(x) = x^{2n+1}
\end{array}\right.$$

En la tabla que sigue, aparecen la solución aproximada, hasta $n = 5$.

n	c_i	x_i
1	$c_0 = 1$	$x_0 = -0.5773503$
	$c_1 = 1$	$x_1 = -0.5773503$
2	$c_0 = 0.5555555556$	$x_0 = -0.7745966692$
	$c_1 = 0.8888888889$	$x_1 = \ \ 0$
	$c_2 = 0.5555555556$	$x_2 = \ \ 0.7745966692$
3	$c_0 = 0.3478548451$	$x_0 = -0.8611363116$
	$c_1 = 0.6521451549$	$x_1 = -0.3399810436$
	$c_2 = 0.6521451549$	$x_2 = \ \ 0.3399810436$
	$c_3 = 0.3478548451$	$x_3 = \ \ 0.8611363116$
4	$c_0 = 0.2369268850$	$x_0 = -0.9061798459$
	$c_1 = 0.4786286705$	$x_1 = -0.5384693101$
	$c_2 = 0.5688888889$	$x_2 = \ \ 0$
	$c_3 = 0.4786286705$	$x_3 = \ \ 0.5384693101$
	$c_4 = 0.2369268850$	$x_4 = \ \ 0.9061798459$
5	$c_0 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$
	$c_1 = 0.3607616$	$x_1 = -0.661209386$
	$c_2 = 0.4679139$	$x_2 = -0.238619186$
	$c_3 = 0.4679139$	$x_3 = \ \ 0.238619186$
	$c_4 = 0.3607616$	$x_4 = \ \ 0.661209386$
	$c_5 = 0.1713245$	$x_5 = \ \ 0.932469514$

Se puede probar que $x_0, x_1, \ldots x_n$ son las raíces de los polinomios de Legendre,

$$P_{n+1}(x) = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} G_n^{(n+1)}(x) \quad n = 1, 2, \ldots$$

con $G_n^{(n+1)}(x)$ la derivada $n+1$ de $G_n(x) = (x^2-1)^{n+1}$.

Si tenemos las raíces (que son todas reales), los c_i's se podrían calcular con la fórmula

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\, dx$$

(Cuadratura Gaussiana).

- **Para calcular en un intervalo $[a,b]$ usando cuadratura Gausiana hacemos el cambio de variable $x = \dfrac{a+b+(b-a)u}{2}$ y teniendo en cuenta que $dx = \dfrac{b-a}{2}du$, obtenemos**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b+(b-a)u}{2}\right) du \;=\; c_0\, g(x_0) + c_1\, g(x_1) + \ldots + c_n\, g(x_n) \;+\; E_n$$

  donde, por supuesto, $g(u) = \dfrac{b-a}{2} f\left(\dfrac{a+b+(b-a)u}{2}\right)$.

- **Si $g \in C^{2n}[-1,1]$, el error en la fórmula de cuadratura Gaussiana es ([13]),**

$$E_n = \frac{2^{2n+1}[(n)!]^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} g^{(2n)}(\xi) \quad \textbf{con} \quad \xi \in]-1, 1[.$$

Aproximar $\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx$ con $n = 3$ y estimar el error.

Solución:

- En este caso, el cambio de variable es $x = \frac{0+\pi+(\pi-0)u}{2} = \frac{\pi+\pi u}{2}$ y $dx = \frac{\pi}{2}du.$
- $g(u) = \frac{\pi}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi+\pi u}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right).$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx &= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}\cos(\pi u/2)\, du \\
&\approx c_0\, g(x_0) + c_1\, g(x_1) + c_2\, g(x_2) + c_3\, g(x_3) \\
&= \pi/2 \left[c_0 \cos\left(\frac{\pi x_0}{2}\right) + c_1 \cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) + c_3 \cos\left(\frac{\pi x_3}{2}\right) \right] \\
&\quad \text{y usando la tabla de valores,} \\
&= 1.9999842284987\ldots
\end{aligned}
$$

La estimación del error es,

$$
\begin{aligned}
|E_3| &= \frac{2^7 \cdot (3!)^4}{7 \cdot (6!)^3} \cdot |g^{(6)}(\xi)| \quad \text{con} \quad \xi \in]-1, 1[. \\
&\leq \frac{2^7 \cdot (3!)^4}{7 \cdot (6!)^3} \cdot \frac{\pi^7}{128} \approx 0.00149816
\end{aligned}
$$

pues $|g^{(6)}(u)| = \dfrac{\pi^7 \cos\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{128} \leq \dfrac{\pi^7}{128}$ en $]-1, 1[$.